

Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ ИМ. С. П. КОРОЛЕВА

М. В. Зацепина

БАЛОЧНАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЕТА
ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Учебное пособие

Куйбышев 1981

УДК 539.3:629.7.023

З а ц е п и н а М.В. Балочная теория расчета тонкостенных конструкций. Учебное пособие. - Куйбышев: КуАИ, 1981, с. 48.

В пособии изложена теория расчета тонкостенных оболочек, являющихся основными конструктивными элементами современных летательных аппаратов. Рассмотрена работа гладких и подкрепленных оболочек при изгибе и кручении. Приведены примеры расчета.

Пособие предназначено для студентов специальности 0535 вечернего обучения и специальности 1610. Оно может быть также использовано и студентами дневного обучения специальности 0535.

* Рис. 44. Библ. 3 назв.

Темплан 1981 г. 93 поз.

Рецензент - доцент кафедры "Прочность летательных аппаратов"
И.С.А х м е д ь я н о в

Утверждено редакционным советом института
28.11.79 г.

Зацепина Маргарита Викторовна

БАЛОЧНАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Редактор Л.М.К а р п о в а

Подписано в печать 10.11.81 г. Б000304.
Формат 60x84 1/16. Бумага оберточная белая.
Оперативная печать. Физ.п.л. 3. Усл.п.л. 2,8.
Уч.-изд.л. 2,7. Тираж 1000 экз. Заказ № 6507
цена 10 коп.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт им. С.П.Королева, г. Куйбышев,
ул. Молодогвардейская, 151.
Областная типография имени В.И.Мяги, г. Куйбышев,
ул. Венцека, 60.

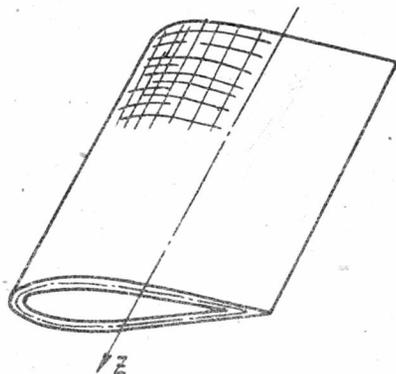
© Куйбышевский авиационный институт, 1981

Тонкостенные конструкции широко применяются в самолетостроении, так как они удовлетворяют требованиям минимального веса конструкции при ее достаточной жесткости и прочности. Крыло самолета, его фюзеляж можно отнести к подкрепленным тонкостенным конструкциям. Точный расчет подобных конструкций представляет сложную и громоздкую задачу. Поэтому в инженерной практике находят широкое применение прикладные методы расчета, базирующиеся на ряде допущений. В настоящем пособии излагается один из таких методов, так называемая балочная теория расчета тонкостенных конструкций.

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

I. I. Основные допущения

Рассмотрим тонкостенную конструкцию, которая в естественном незагруженном состоянии имеет форму цилиндрической оболочки. Поверхность, делящую пополам толщину оболочки, условимся называть срединной поверхностью. Пересечение этой поверхности с плоскостью поперечного сечения будем называть средней линией сечения (штрих-пунктирная линия на рис. I. I).



Материал, из которого изготовлена оболочка, и ее толщина могут быть различными по контуру сечения, но вдоль продольной оси z оболочки будем считать их неизменяющимися. Кроме того, материал предположим идеально упругим, подчиняющимся закону Гука при любых деформациях.

Полагаем, что конструкция имеет достаточное количество поперечных

Рис. I. I
диафрагм (нервюр), жестких в своей плоскости. Благодаря этому

форма поперечного сечения при нагружении оболочки не изменится.

Толщину оболочки считаем достаточно малой, что позволяет принять нормальные и касательные напряжения равномерно распределенными по толщине.

Примем следующее допущение о характере деформаций конструкции. Будем считать, что относительные удлинения ϵ_{zz} волокон обшивки в направлении оси z подчиняются закону плоскости:

$$\epsilon_{zz} = \alpha x + \beta y + c, \quad (1.1)$$

где x и y - декартовы координаты точек средней линии сечения (плоскость xoy совпадает с плоскостью сечения).

Если от плоскости поперечного сечения отложить в направлении оси z вектора, равные относительной деформации ϵ_{zz} в данной точке средней линии сечения, то согласно принятому допущению концы векторов будут лежать в одной плоскости (рис. 1.2).

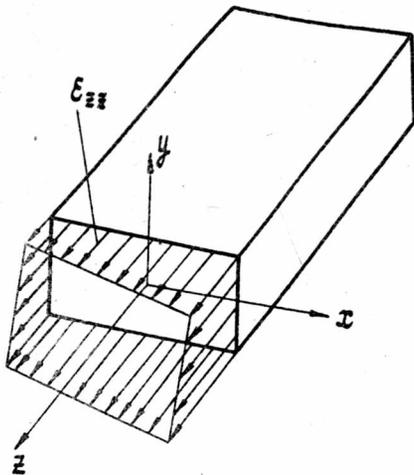


Рис. 1.2

1.2. Определение нормальных напряжений в сечении тонкостенной конструкции

Рассмотрим тонкостенную конструкцию с поперечным сечением произвольного очертания (рис. 1.3).

Расsectем мысленно оболочку на две части плоскостью, перпендикулярной к ее образующим, одну часть отбросим и рассмотрим силы, с которыми эта часть конструкции действует на оставшуюся. Пусть в этом сечении изгибающие моменты M_x и M_y , а также нормальные усилия N_z известны.

Выделим в плоскости xoy бесконечно малый элемент поперечного сечения длиной ds . При изгибе конструкции в по-

перечном сечении возникают нормальные напряжения σ . Так

как напряжения по толщине оболочки постоянны, то равнодействующая dN_z нормальных усилий в пределах выделенного элемента ds будет равна

$$dN_z = \sigma \delta ds, \quad (I.2)$$

где σ - нормальное напряжение в элементе, δ - толщина оболочки.

Сила dN_z даст относительно оси x элементарный момент, равный

$$dM_x = \sigma y \delta ds. \quad (I.3)$$

Принтегрировав правую часть последнего равенства по всему сечению, получим момент внутренних усилий

Рис. I.3

относительно оси x . Он должен быть равен изгибающему моменту в сечении

$$M_x = \int \sigma y \delta ds. \quad (I.4)$$

Аналогично рассуждая, получим для изгибающего момента относительно оси y равенство:

$$M_y = \int \sigma x \delta ds. \quad (I.5)$$

Равнодействующая всех нормальных усилий будет равна

$$N_z = \int \sigma \delta ds. \quad (I.6)$$

Для определения нормальных напряжений воспользуемся законом Гука:

$$\sigma = E \epsilon_{xz}. \quad (I.7)$$

Здесь E - модуль упругости материала оболочки.

Если конструкция изготовлена из различных материалов, то модуль упругости для разных участков сечения не будет одинаковым. Для удобства дальнейших рассуждений приведем все эле-

менты сечения к одному материалу с модулем упругости E_0 , для чего равенство (I.7) перепишем в следующем виде:

$$\sigma = \frac{E}{E_0} E_0 \varepsilon_{zz}. \quad (I.8)$$

Отношение истинного модуля материала E к модулю E_0 назовем редуцированным коэффициентом (коэффициентом приведения) и обозначим его через φ :

$$\varphi = \frac{E}{E_0}. \quad (I.9)$$

Тогда равенство (I.8) можно записать иначе:

$$\sigma = \varphi E_0 \varepsilon_{zz}. \quad (I.10)$$

Подставив в последнее равенство ε_{zz} из формулы (I.I), получим

$$\sigma = \varphi E_0 (ax + by + c) = \varphi (Ax + By + C), \quad (I.11)$$

где $A = aE_0$, $B = bE_0$, $C = cE_0$ - некоторые константы.

Отметим, что произведение

$$E_0 (ax + by + c) = \sigma_r, \quad (I.12)$$

есть, очевидно, напряжение в волокне, если бы оно было изготовлено из материала с модулем упругости E_0 .

Тогда можно записать

$$\sigma = \varphi \sigma_r. \quad (I.13)$$

Условия для определения констант A , B , C можно получить из равенств (I.4)-(I.6). Подставив в них выражения (I.II) для нормального напряжения, будем иметь

$$\begin{aligned} M_x &= A \int_2 \varphi xy \delta ds + B \int_2 \varphi y^2 \delta ds + C \int_2 \varphi y \delta ds, \\ M_y &= A \int_2 \varphi x^2 \delta ds + B \int_2 \varphi xy \delta ds + C \int_2 \varphi x \delta ds, \\ N_z &= A \int_2 \varphi x \delta ds + B \int_2 \varphi y \delta ds + C \int_2 \varphi \delta ds. \end{aligned} \quad (I.14)$$

Проанализируем полученные выражения. Используя зависимости (I.6) и (I.I3), можно записать

$$N_z = \int_z G \delta d s = \int_z G_n \varphi \delta d s,$$

откуда следует, что произведение $\varphi \delta d s$ представляет собой площадь сечения элемента, изготовленного из материала с модулем упругости E_0 и работающего с напряжениями G_n . Величину $\varphi \delta d s = d F_n$ будем называть приведенной к модулю упругости E_0 площадью элемента. Тогда интеграл

$$\int_z \varphi \delta d s = F_n$$

можно назвать приведенной к модулю E_0 площадью поперечного сечения. И в дальнейшем индексом n будем отмечать другие геометрические характеристики приведенного сечения. Так, например, интегралы $\int_z \varphi y \delta d s = S_{nx}$, $\int_z \varphi x \delta d s = S_{ny}$ представляют собой статические моменты, а $\int_z \varphi y^2 \delta d s = J_{nx}$, $\int_z \varphi x^2 \delta d s = J_{ny}$, $\int_z \varphi x y \delta d s = J_{nxy}$ - моменты инерции приведенного сечения относительно осей x и y .

Значения статических моментов и моментов инерции зависят как от геометрии поперечного сечения, так и от выбранной системы координат. Если начало координат совпадает с центром тяжести приведенного сечения, то статические моменты S_{nx} и S_{ny} обращаются в нуль. Если, кроме того, оси x и y направлены по главным осям инерции приведенного сечения, то центробежный момент инерции $J_{nxy} = 0$. В этом случае из равенств (I.14) имеем:

$$A = \frac{M_y}{J_{ny}}, \quad B = \frac{M_x}{J_{nx}}, \quad C = \frac{N_n}{F_n}. \quad (I.15)$$

Подставляя (I.15) в (I.11), получим следующую окончательную формулу для определения нормальных выражений:

$$G = \varphi \left(\frac{M_y}{J_{ny}} x + \frac{M_x}{J_{nx}} y + \frac{N_n}{F_n} \right). \quad (I.16)$$

Если все элементы конструкции изготовлены из одного материала, то редуцированный коэффициент $\varphi = 1$, и мы приходим к известной формуле сопротивления материалов для нормальных напряжений при косом изгибе и растяжении бруса.

Изложенный метод определения нормальных напряжений называется методом редуцированных коэффициентов. Этот метод был предложен известным кораблестроителем Бубновым И.Г. Здесь

рассмотрен простейший вариант метода Бубнова, когда материал конструкции подчиняется закону Гука.

По формуле (I.16) можно определить напряжения в тонкостенных конструкциях с разомкнутым, однозамкнутым и многозамкнутым контуром поперечного сечения.

I.3. Пример расчета нормальных напряжений в тонкостенной конструкции

Пусть требуется определить нормальные напряжения в тонкостенной конструкции швеллерного типа от действия изгибающего момента M_x (рис. I.4). Точка O совпадает с центром тяжести поперечного сечения, а оси x и y являются главными центральными осями инерции из-за симметрии сечения. В силу того, что конструкция изготовлена из одного материала, редуцированный коэффициент $\varphi = 1$.

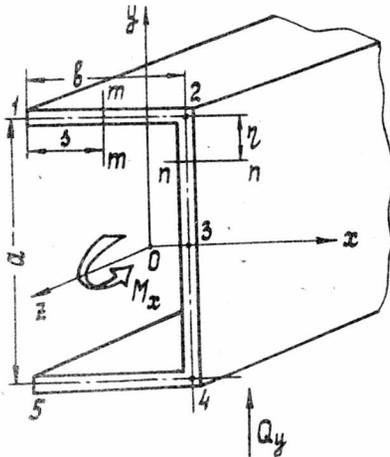


Рис. I.4

где $y'_x = \frac{\delta a^3}{12}$ - момент инерции вертикальной стенки, а $y''_x = \frac{8\delta a^2}{4}$ - момент инерции горизонтальной полки.

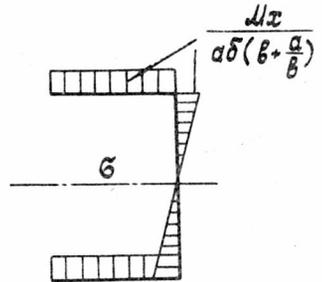


Рис. I.5

Момент инерции можно представить в виде суммы моментов инерции отдельных частей сечения:

$$y_x = y'_x + 2 y''_x,$$

Тогда,

$$\gamma_x = \frac{\delta a^3}{12} + \frac{\beta \delta a^2}{2} = \frac{\delta a^2}{2} \left(\beta + \frac{a}{6} \right). \quad (I.17)$$

Вычисления по формуле (I.16) приведут к эпюре напряжений, представленной на рис. I.5. Максимальные напряжения будут иметь место в точках контура со значением $y = \frac{a}{2}$. При $M_x = 1 \cdot 10^5$ Нм, $\delta = 0,2$ см, $a = 50$ см, $\beta = 20$ см они станут равными $\sigma_{max} = 353$ МПа.

I.4. Нормальные напряжения в тонкостенных конструкциях, укрепленных продольным набором

Реальные авиационные конструкции имеют, как правило, продольные силовые элементы - лонжероны, стрингеры. Продольные элементы (пояса) занимают небольшой участок поперечного сечения. В связи с этим можно считать, что сечение представляет собой тонкостенный контур, в ряде точек которого расположены как бы некоторые сосредоточенные площади (рис. I.6).

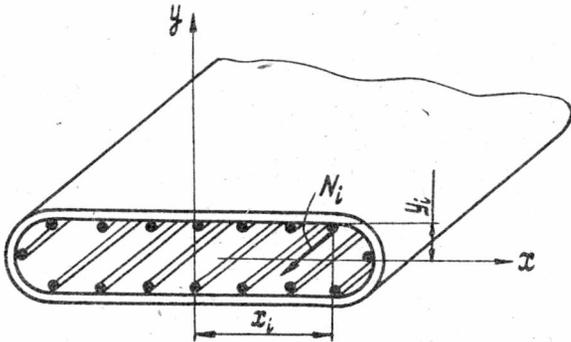


Рис. I.6

В пределах каждого элемента нормальные напряжения σ_i можно считать постоянными. Тогда нормальное усилие в поясе с номером i будет $N_i = \sigma_i F_i$, при этом равнодействующая всех нормальных усилий N_{Σ} и изгибающие моменты в сечении конструкции будут равны:

$$N_z = \oint G \delta d s + \sum_{i=1}^n G_i F_i, \quad (I.18)$$

$$M_x = \oint G y \delta d s + \sum_{i=1}^n G_i y_i F_i, \quad (I.19)$$

$$M_y = \oint G x \delta d s + \sum_{i=1}^n G_i x_i F_i. \quad (I.20)$$

Чтобы получить формулу для вычисления нормальных напряжений, необходимо повторить вывод, аналогичный изложенному в I.2, учитывая, что напряжения в оболочке и в поясах (G и G_i соответственно) определяются в соответствии с плоским законом распределения деформаций:

$$G = \varphi (A x + B y + C), \quad (I.21)$$

$$G_i = \varphi_i (A x_i + B y_i + C). \quad (I.22)$$

Подставляя зависимости (I.21) и (I.22) в равенства (I.18)-(I.20), приходим к следующей окончательной формуле:

$$G = \varphi \left(\frac{M_x}{J_{xz}} y + \frac{M_y}{J_{xy}} x + \frac{N_z}{F_z} \right). \quad (I.23)$$

Итак, полученная формула имеет такой же вид, как и для неподкрепленной конструкции. Но здесь следует иметь в виду, что при вычислении приведенной площади F_z и моментов инерции необходимо учитывать продольные элементы.

Так для конструкции, изображенной на рис. I.6, будем иметь:

$$F_z = \oint \varphi \delta d s + \sum_{i=1}^n \varphi_i F_i, \\ J_{xz} = \oint \varphi y^2 \delta d s + \sum_{i=1}^n \varphi_i y_i^2 F_i, \quad (I.24)$$

где F_i — площадь поперечного сечения элемента продольного набора, n — число продольных элементов.

По мере уменьшения толщины обшивки доля изгибающего момента, воспринимаемого оболочкой, уменьшается. Чем мощнее пояса, тем большую часть изгибающего момента они могут воспринять.

В конструкции с очень тонкой обшивкой доля изгибающего

момента, воспринимаемого ею, становится настолько незначительной, что можно работой обшивки пренебречь. Тогда при вычислении приведенных моментов инерции и площадей нужно учитывать только площади сечений продольных поясов, т.е.

$$Y_{rx} = \sum_{i=1}^n \varphi_i y_i^2 F_i, \quad Y_{ry} = \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i^2 F_i, \quad F_r = \sum_{i=1}^n \varphi_i F_i. \quad (I.25)$$

II. РАСЧЕТ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

2.1. Касательные напряжения в тонкостенных конструкциях с открытым контуром поперечного сечения

Перейдем к определению касательных напряжений.

Будем полагать, что поверхность оболочки свободна от касательных сил, действующих в направлении оси \bar{z} . Если бы такие силы действовали на поверхности, то, согласно принципу парности касательных напряжений, вектор касательного напряжения в сечении вблизи поверхности $\bar{\tau}_z$ имел бы составляющую, нормальную к поверхности (рис. 2.1). Отсутствие же на поверхности оболочки внешних нагрузок, параллельных оси \bar{z} , приводит к тому, что в поперечном сечении вблизи поверхности вектор касательного напряжения $\bar{\tau}$ направлен по касательной к контуру сечения. Так как оболочка тонкая, то вектор касательного напряжения считают направленным по средней линии контура.

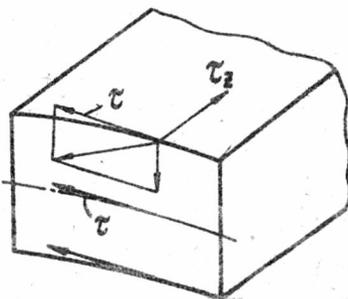


Рис. 2.1

Пусть требуется определить касательные напряжения в точке δ поперечного сечения конструкции, представленной на рис. 2.2. Для простоты рассуждений полагаем, что имеет место изгиб только относительно оси x . Тогда $M_x \neq 0$, $Q_y \neq 0$, $M_y = 0$.

$Q_x = 0, N_x = 0$. Оси x и y здесь и в дальнейшем - главные центральные оси поперечного сечения, приведенного к одному материалу.

Проведем мысленно через точку b сечение, перпендикулярное оси z , и еще одно по образующей перпендикулярно к срединной поверхности. Третье сечение проведем на расстоянии dz от точки b . Рассмотрим равновесие элемента $abcd$, выделенного таким образом (рис.2.3).

При изгибе конструкции в его элементах возникают нормальные напряжения. Обозначим равнодействующую нормальных усилий в площадке ab поперечного сечения через N . В площадке cd равнодействующая нормальных усилий равна $(N + \frac{\partial N}{\partial z} dz)$, так как от сечения к сечению изгибающий момент меняется. Равновесие выделенного элемента возможно лишь в том случае, когда в продольном разрезе bd действуют касательные напряжения.

Как отмечалось в I.I, напряжения τ в тонкостенных конструкциях можно считать постоянными по толщине. Это позволяет оперировать не напряжениями, а погонными усилиями $T = \tau \delta$, переходящими на единицу длины сечения.

Спроектируем все силы, действующие на элемент $abcd$, на

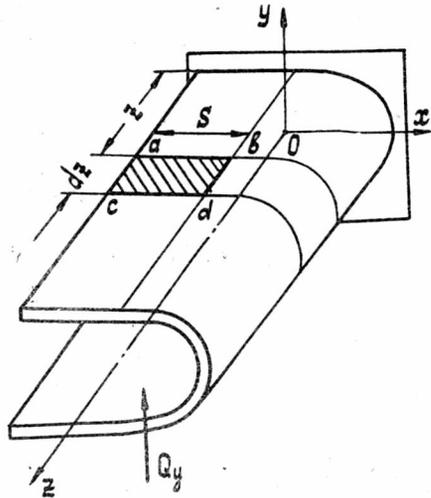


Рис. 2.2

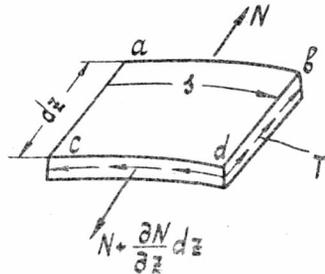


Рис. 2.3

ось z :

$$(N + \frac{\partial N}{\partial z} dz) - N - T dz = 0. \quad (2.1)$$

Отсюда

$$T = \frac{\partial N}{\partial z}. \quad (2.2)$$

Равнодействующая нормальных усилий N равна

$$N = \int_0^s \sigma \delta ds. \quad (2.3)$$

Для нормальных напряжений σ в случае изгиба относительно оси x имеем:

$$\sigma = \varphi \frac{M_x}{y_{rx}} y. \quad (2.4)$$

Подставим (2.4) в равенство (2.3) и учтем, что M_x и y_{rx} от координаты s не зависят:

$$N = \frac{M_x}{y_{rx}} \int_0^s \varphi y \delta ds. \quad (2.5)$$

Интеграл в последнем равенстве представляет собой статический момент относительно оси x части приведенного сечения, заключенной между свободным краем конструкции (точка a) и точкой b , где определяются касательные напряжения

$$S_{rx} = \int_0^s \varphi y \delta ds. \quad (2.6)$$

Тогда

$$N = \frac{M_x}{y_{rx}} S_{rx}. \quad (2.7)$$

Теперь остается согласно (2.2) продифференцировать правую часть полученного равенства. При этом нужно иметь в виду, что y_{rx} есть величина постоянная, S_{rx} от координаты z не зависит, а перерезывающая сила Q_y связана с изгибающим моментом известной зависимостью $Q_y = \frac{\partial M_x}{\partial z}$.

Тогда

$$T = \frac{Q_y}{y_{rx}} S_{rx}. \quad (2.8)$$

Итак, получили формулу для определения величины погонной

касательной силы T в продольном разрезе, проходящем через точку β . В соответствии с принципом парности касательных напряжений в точке β поперечного сечения будет действовать такая же погонная касательная сила.

Анализ этой формулы показывает, что вдоль оси z погонные касательные силы изменяются пропорционально перерезывающей силе Q_y , а по сечению — пропорционально статическому моменту S_{rx} .

Для касательных напряжений будем иметь

$$\tau = \frac{T}{\delta} = \frac{Q_y S_{rx}}{J_{rx} \delta}. \quad (2.9)$$

Проведя аналогичный вывод для случая изгиба относительно оси y , получим следующую формулу:

$$T = \frac{Q_x}{J_{ry}} S_{ry}. \quad (2.10)$$

При одновременном изгибе относительно осей x и y результаты, полученные по формулам (2.8) и (2.10), нужно алгебраически просуммировать.

Если конструкция не имеет продольных элементов, то эпюра статических моментов S_{rx} , вычисленных по (2.6), будет плавной, без скачков. Ординаты эпюры статического момента будут возрастать до нейтральной оси x (рис. 2.4а).

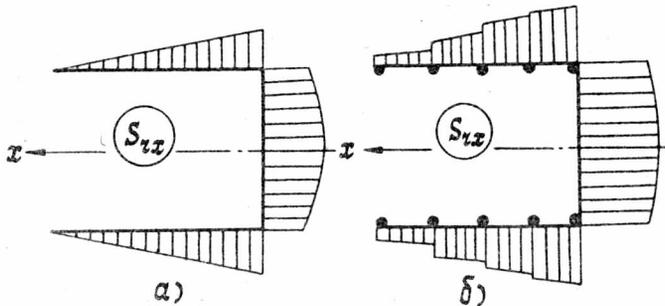


Рис. 2.4

Если же оболочка подкреплена продольным набором, то стати-

ческий момент будет определять формула

$$S_{rx} = \int_0^s \varphi y \delta d s + \sum_{i=1}^m \varphi_i y_i F_i, \quad (2.11)$$

где m - число продольных элементов на участке дуги длиной s от начала координат.

При этом эпюра S_{rx} будет иметь вид (2.46).

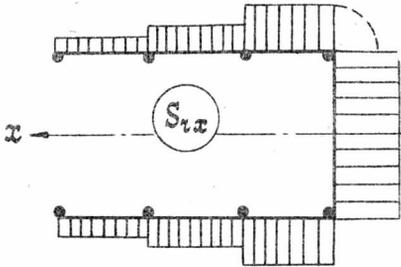


Рис. 2.5

ках между соседними поясами значения статического момента остаются постоянными (рис. 2.5).

Примеры построения эпюр статических моментов для различных сечений приведены в [1].

2.2. Примеры расчета касательных напряжений в тонкостенных конструкциях с открытым контуром поперечного сечения

Пример I. Определим погонные касательные усилия в тонкостенной конструкции швеллерного типа от действия перерезывающей силы Q_y . Размеры сечения и нагрузка показаны на рис. 1.4.

Момент инерции поперечного сечения был найден в 1.3 и получился равным

$$J_x = \frac{\delta a^2}{2} \left(b + \frac{a}{b} \right). \quad (2.13)$$

Для определения касательных напряжений найдем статический

В случае очень тонкой обшивки нормальными усилиями в ней пренебрегают и считают, что обшивка работает только на сдвиг. Величина статического момента S_{rx} в этом случае подсчитывается по формуле

$$S_{rx} = \sum_{i=1}^m \varphi_i y_i F_i. \quad (2.12)$$

При этом на эпюре статических моментов на участ-

момент для сечения $m-m$ верхней полки на расстоянии δ от свободного края сечения

$$S_x^{m-m} = \frac{\delta a}{2} \delta.$$

Для сечения $n-n$ на расстоянии η от верхней полки

$$\begin{aligned} S_x^{n-n} &= \frac{\delta a \delta}{2} + \delta \eta \left(\frac{a}{2} - \frac{\eta}{2} \right) = \\ &= \frac{\delta a \delta}{2} + \frac{1}{2} \delta \eta (a - \eta). \end{aligned} \quad (2.14)$$

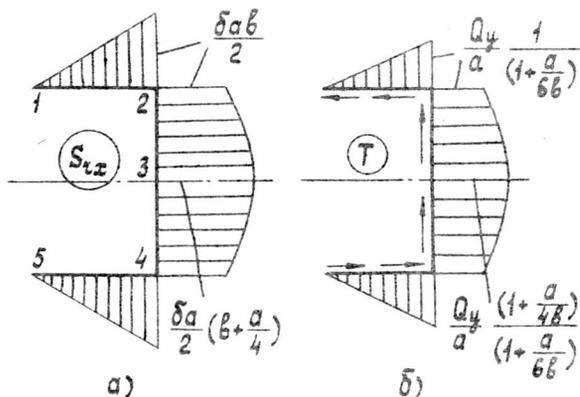


Рис. 2.6

Отсюда видно, что на горизонтальной полке статический момент изменяется по линейному закону, а на вертикальной стенке — по закону квадратной параболы. Эпюра измененного статического момента по сечению представлена на рис. 2.6а. Умножив все ординаты этой эпюры на постоянный множитель Q_y/γ_x , получим эпюру погонных касательных сил T (рис. 2.6б). Максимальное значение погонной касательной силы будет в точке 3 сечения. При значениях силы $Q_y = 5000$ Н, $\delta = 0,2$ см, $a = 50$ см, $b = 20$ см оно будет равно $T_{max} = 114,7$ Н/см.

Пример 2. Определим теперь погонные касательные силы в тонкостенной конструкции, представляющей собой круговую цилиндрическую оболочку, разрезанную по образующей (рис. 2.7).

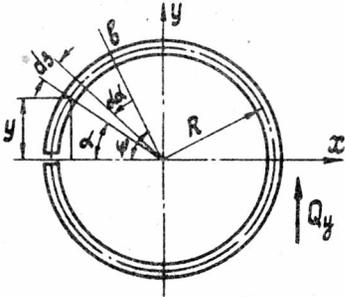


Рис. 2.7

Для определения момента инерции сечения конструкции выделим бесконечно малый элемент, определяемый двумя радиусами - под углом α и $\alpha + d\alpha$ от края контура. Момент инерции этого элемента равен

$$dI_x = \delta y^2 ds = \delta (R \sin \alpha)^2 R d\alpha.$$

Интегрируя это выражение по α в пределах от 0 до 2π , имеем:

$$\begin{aligned} I_x &= \delta R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha = \delta R^3 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} d\alpha = \\ &= \delta R^3 \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi \delta R^3. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Пусть нужно определить касательные напряжения в точке B, определяемой углом ψ (рис. 2.7). Для этого нужно найти статический момент соответствующей части поперечного сечения. Вычислим сначала статический момент выделенного бесконечно малого элемента

$$dS_x = \delta y ds = \delta R \sin \alpha d\alpha.$$

Интегрируя по α в пределах от 0 до ψ , получим

$$S_x = \delta R^2 \int_0^{\psi} \sin \alpha d\alpha = -\delta R^2 \cos \alpha \Big|_0^{\psi} = \delta R^2 (1 - \cos \psi).$$

Подставляя полученные выражения в формулу (2.8), имеем

$$T = \frac{Q_y}{\pi R} (1 - \cos \psi). \quad (2.16)$$

Эпюры статического момента и погонных касательных сил показаны на рис. 2.8а,б.

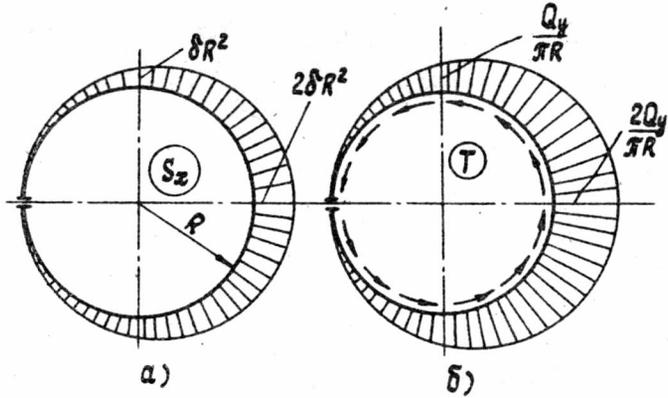


Рис. 2.8

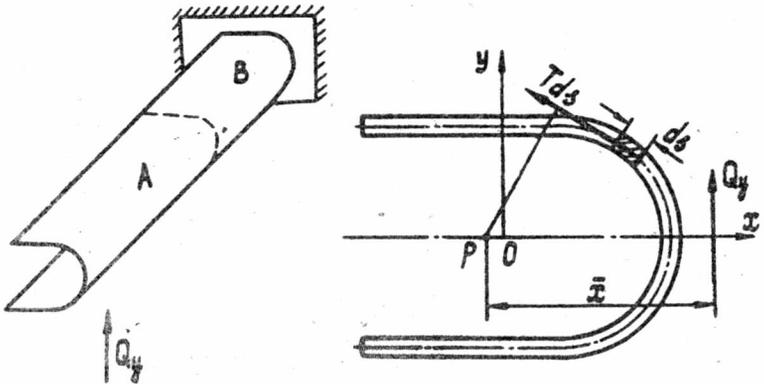


Рис. 2.9

Рис. 2.10

Найденные погонные касательные силы представляют собой

внутренние силы, т.е. силы, с которыми одна часть конструкции через данное сечение действует на другую ее часть. Если рассматривается действие отсеченной части консоли A на оставшуюся часть B (рис. 2.9), то равнодействующая касательных напряжений должна быть направлена в сторону внешней нагрузки. Если же рассматривается действие оставшейся части на отсеченную, то касательные напряжения должны быть направлены так, чтобы они уравновешивали внешнюю нагрузку, т.е. равнодействующая касательных сил должна быть направлена против внешней нагрузки.

В дальнейшем условимся везде рассматривать действие отсеченной части на оставшуюся. Следовательно, погонные касательные силы будут давать равнодействующую, направленную в сторону внешней нагрузки (рис. 2.6б и 2.8б).

2.3. Центр изгиба открытых сечений

Рассмотрим изгиб конструкции с открытым контуром поперечного сечения относительно оси x . Произведение $T ds$ (рис. 2.10) представляет собой элементарную касательную силу. Сумма проекций всех элементарных касательных сил на ось y должна равняться перерезывающей силе Q_y . Эта сила является равнодействующей касательных усилий, возникающих в поперечном сечении. Выясним, где проходит эта равнодействующая.

Для этого выберем в плоскости xoy произвольный полюс p . Элементарная касательная сила даст относительно выбранного полюса момент

$$dM = T \rho ds, \quad (2.17)$$

где ρ — длина перпендикуляра, опущенного из полюса p на направление силы $T ds$ (на направление касательной к средней линии контура).

Обозначим расстояние от равнодействующей до выбранного полюса через \bar{x} . Согласно теореме Вариньона (момент равнодействующей относительно какой-либо точки равен сумме моментов сил составляющих относительно той же точки) получим:

$$Q_y \bar{x} = \int_2 T \rho ds \quad \text{или} \quad \bar{x} = \frac{1}{Q_y} \int_2 T \rho ds. \quad (2.18)$$

Учитывая формулу (2.8), имеем:

$$\bar{x} = \frac{1}{J_{rx}} \int_e S_{rx} \rho ds. \quad (2.19)$$

Рассматривая изгиб относительно оси y , аналогично получим

$$\bar{y} = \frac{1}{J_{ry}} \int_e S_{ry} \rho ds. \quad (2.20)$$

Из последних двух формул видно, что координаты \bar{x} и \bar{y} не зависят от внешней нагрузки, а зависят лишь от геометрии поперечного сечения и материала. Через точку с координатами \bar{x} и \bar{y} проходит равнодействующая касательных напряжений, возникающих в поперечном сечении. Эта точка называется центром изгиба открытого сечения.

Итак, центром изгиба открытого сечения называется точка, через которую проходит равнодействующая касательных напряжений.

Линия, проходящая через центры изгиба всех сечений, называется осью изгиба конструкции. Она параллельна оси Z .

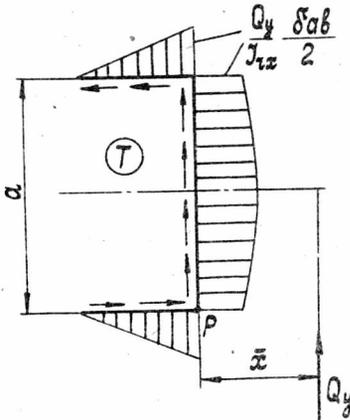


Рис. 2.11

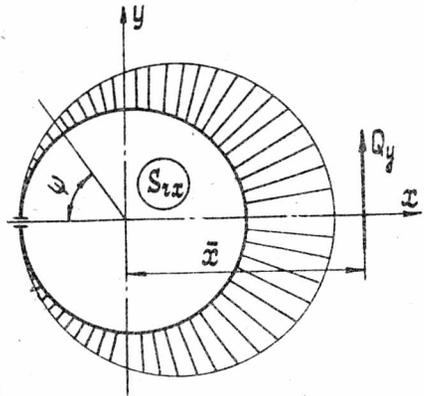


Рис. 2.12

Из сказанного вытекает, что конструкции с открытым контуром поперечного сечения могут воспринимать только такие внешние

нагрузки, которые проходят через ось изгиба. В противном случае внутренние силы не в состоянии уравновесить внешнюю нагрузку.

Следовательно, все выведенные ранее формулы для конструкций с открытым контуром сечения справедливы лишь в том случае, если внешние нагрузки проходят через ось изгиба.

Обратимся к примерам предыдущего параграфа. Пусть требуется определить положение центра изгиба сечения, изображенного на рис. 1.4. Воспользуемся для расчета формулой (2.1б), согласно которой

$$\bar{x} = \frac{1}{Q_y} \int_e T \rho ds.$$

Эпора погонных касательных сил представлена на рис. 2.11. Если выбрать полюс в нижнем правом углу сечения, то момент относительно него дадут лишь касательные силы, действующие в верхней полке сечения. Плечо ρ здесь будет постоянным и равным высоте профиля a . Тогда

$$\bar{x} = \frac{a}{Q_y} \int_0^b T ds.$$

Последний интеграл представляет собой равнодействующую касательных сил верхней полки или площадь эпюры T на рассматриваемом участке

$$\int_0^b T ds = \frac{Q_y}{\gamma_{rx}} \frac{\delta a b}{2} \frac{b}{2}.$$

Отсюда, с учетом формулы (2.13)

$$\bar{x} = \frac{b^2 a^2 \delta}{4 \gamma_{rx}} = \frac{b^2 a^2 \delta}{4 \frac{\delta a^2}{2} (b + \frac{a}{b})} = \frac{b}{2(1 + \frac{a}{6b})}.$$

Так для контура с размерами $b = 20$ см, $a = 50$ см получается, что $\bar{x} = 7,04$ см, т.е. от полюса ρ нужно отложить вправо 7,04 см. Полученная точка будет являться точкой приложения внешней нагрузки.

Рассмотрим второй пример. Определим положение центра изгиба сечения, представленного на рис. 2.7. Воспользуемся для расчета формулой

$$\bar{x} = \frac{1}{\gamma_{rx}} \int_e S_{rx} \rho ds.$$

За полюс выберем центр окружности (рис. 2.12). Тогда $\rho = R = const$. Статический момент изменяется по закону

$$S_{rx} = \delta R^2 (1 - \cos \psi).$$

$$\text{Момент инерции } J_{rx} = \pi \delta R^3.$$

Следовательно:

$$\bar{x} = \frac{1}{\pi \delta R^3} \int_0^{2\pi} \delta R^2 (1 - \cos \psi) R R d\psi = \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \psi) d\psi = 2R.$$

В рассмотренных примерах мы определяли одну из координат центра изгиба - координату \bar{x} . Координата \bar{y} определяется по аналогичным формулам.

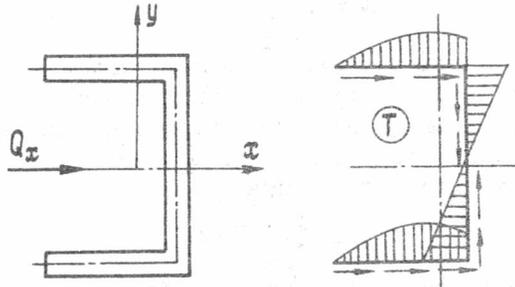


Рис. 2.13

Можно показать, что если поперечное сечение конструкции имеет ось симметрии, то центр изгиба лежит на этой оси. На рис. 2.13 представлена эпюра погонных касательных сил для тонкостенной конструкции швеллерного типа при действии силы Q_x . Смена знака статического момента на оси симметрии свидетельствует о том, что поток касательных сил изменил свое направление. В результате, в симметричных точках поперечного сечения величины погонных касательных сил равны, а их направления - симметричны.

Для определения координаты \bar{y} центра изгиба удобнее полюс выбрать на оси симметрии. Тогда момент от внутренних сил верхней половины сечения уравнивается моментом внутренних сил нижней половины:

$$Q_x \bar{y} = \int_l T p d\zeta = 0, \text{ отсюда } \bar{y} = 0,$$

т.е. центр изгиба лежит на оси симметрии сечения.

Если сечение имеет две оси симметрии, то центр изгиба будет находиться в точке пересечения этих осей, т.е. совпадет с центром тяжести поперечного сечения.

2.4. Касательные напряжения в тонкостенных конструкциях с однозамкнутым контуром поперечного сечения

Рассмотрим тонкостенную конструкцию с произвольным однозамкнутым контуром поперечного сечения (рис. 2.14). Пусть требуется определить погонные касательные силы в точке β поперечного сечения. Полагаем, что нагрузка, приложенная к оболочке, вызывает изгиб относительно одной из главных осей инерции поперечного сечения, например относительно оси x .

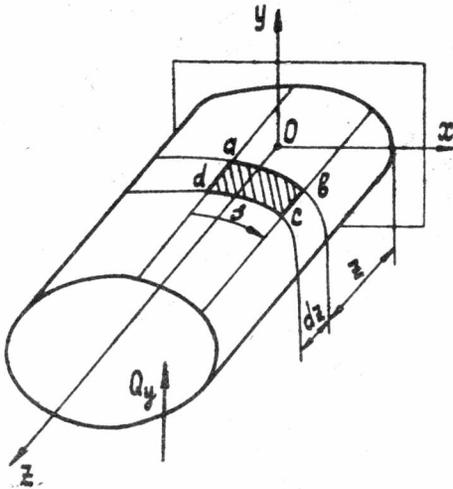


Рис. 2.14

В сечении действует перерезывающая сила Q_y , параллельная главной оси y .

Выделим мысленно элемент конструкции четырьмя сечениями. Три из них проводятся так же, как и в конструкциях

с открытым контуром: два сечения - перпендикулярно оси z на расстоянии dz друг от друга и одно - по образующей, проходящей через точку β . Четвертое сечение проводится по образующей, проходящей через произвольно выбранную точку α . Эта точка выбирается произвольно, но в дальнейшем считается фиксированной. От нее отсчитывается координата z . Пусть N и $N + \frac{\partial N}{\partial z} dz$ равнодействующие нормальных напряжений, действующих в площадках ab и cd (рис. 2.15). Разность этих усилий уравнивается

касательными напряжениями в продольных разрезах, проходящих через точки a и b .

Обозначим через T погонную касательную силу в продольном разрезе, проходящем через точку b . В силу парности касательных напряжений погонная касательная сила в точке b поперечного сечения будет также T . Через T_0 обозначим погонную касательную силу в продольном разрезе, проходящем через точку a . Поскольку точка a в процессе расчета фиксируется, то сила T_0 - величина постоянная.

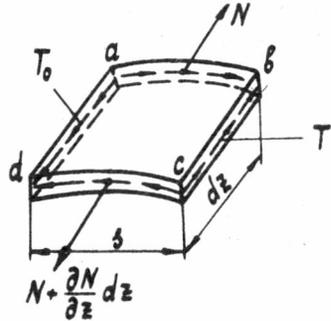


Рис. 2.15

Запишем уравнение равновесия элемента $abcd$, спроектировав все силы на ось z :

$$\left(N + \frac{\partial N}{\partial z} dz\right) - N - T dz + T_0 dz = 0,$$

откуда имеем

$$T = T_0 + \frac{\partial N}{\partial z} dz. \quad (2.21)$$

Как и для открытого контура

$$N = \int_0^s G \delta ds = \frac{M_x}{J_{rx}} S_{rx},$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{Q_y}{J_{rx}} S_{rx}. \quad (2.22)$$

Тогда, подставив (2.22) в (2.21), получим

$$T = T_0 + \frac{Q_y}{J_{rx}} S_{rx}. \quad (2.23)$$

Здесь S_{rx} - статический момент относительно оси x части ab приведенного сечения.

Сравним полученный результат с формулой (2.8) для определения погонных касательных сил в открытом контуре. Видим, что

второе слагаемое последней формулы представляет собой погонную касательную силу в предположении, что конструкция разомкнута по образующей, проходящей через точку a . Обозначим ее через \bar{T} :

$$\bar{T} = \frac{Q_y}{J_{xz}} S_{xz}. \quad (2.24)$$

Тогда

$$T = T_0 + \bar{T}. \quad (2.25)$$

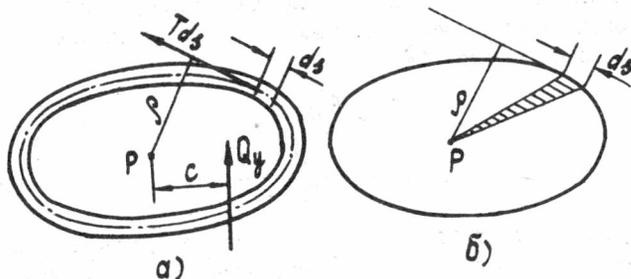


Рис. 2.16

Равнодействующая погонных касательных сил T равна перерезывающей силе в сечении Q_y . Момент равнодействующей относительно произвольно выбранного полюса должен быть равен сумме моментов элементарных касательных сил относительно того же полюса (рис. 2.16а):

$$Q_y c = \oint T \rho ds. \quad (2.26)$$

Здесь c - расстояние от полюса до линии действия силы Q_y , ρ - длина перпендикуляра, опущенного из полюса на направление касательной к контуру.

Подставив в (2.26) значение усилия T (2.25), получим

$$Q_y c = \oint (T_0 + \bar{T}) \rho ds. \quad (2.27)$$

Поскольку касательное усилие в начале отсчета дуг T_0 - величина постоянная, имеем:

$$Q_{yc} = T_0 \oint p ds + \oint \overset{*}{T} p ds.$$

Отсюда

$$T_0 = \frac{Q_{yc} - \oint \overset{*}{T} p ds}{\oint p ds}. \quad (2.28)$$

Интеграл $\oint p ds$ имеет простой геометрический смысл. Из рис. 2.166 видно, что произведение $p ds$ представляет собой удвоенную площадь заштрихованного треугольника. Проинтегрировав эту величину по всему контуру, получим удвоенную площадь фигуры, ограниченной средней линией контура. Обозначим эту удвоенную площадь через Ω :

$$\begin{aligned} \Omega &= \oint p ds, \\ T_0 &= \frac{Q_{yc} - \oint \overset{*}{T} p ds}{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

При расчетах по формуле (2.29) нужно учитывать знаки моментов. Условимся как для внешних нагрузок, так и для внутренних сил за положительные считать моменты, действующие против хода часовой стрелки, если смотреть против оси Z .

Если единственной внешней нагрузкой является крутящий момент, то сила $Q_{yc} = 0$, и мы приходим к известной из курса сопротивление материалов формуле для кручения тонкостенных труб:

$$T = \frac{M_z}{\Omega}. \quad (2.30)$$

Порядок расчета однозамкнутого контура сводится к следующему:

1. Выбираем точку в качестве начала отсчета дуг.
2. Определяем по формуле (2.24) величину погонных касательных сил $\overset{*}{T}$ как для открытого контура.
3. Выбираем в сечении полюс, относительно которого подсчитываем момент Q_{yc} касательных сил $\overset{*}{T}$.
4. Вычисляем момент Q_{yc} внешней нагрузки относительно произвольно выбранного полюса.
5. По формуле (2.29) находим касательное усилие T_0 в

начальной точке.

6. Вычисляем окончательные значения погонных касательных сил во всех точках поперечного сечения по формуле (2.25).

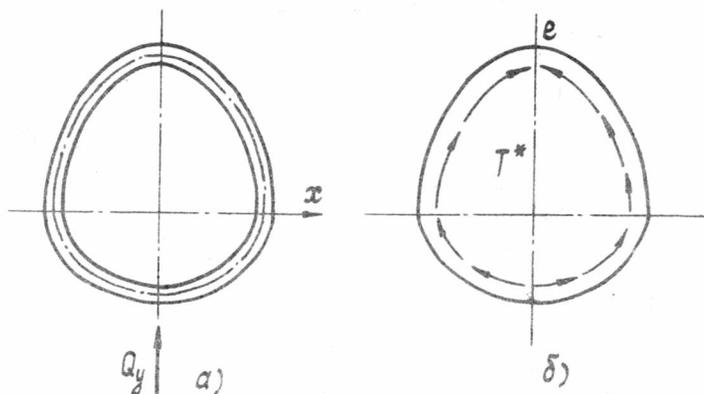


Рис. 2.17

Рассмотрим один частный случай - тонкостенную конструкцию, имеющую плоскость симметрии. Пусть, кроме того, внешняя нагрузка лежит в этой плоскости (рис. 2.17).

Выберем в качестве начала отсчета дуг точку e на оси симметрии (рис. 2.17б). Тогда в симметричных точках поперечного сечения погонные касательные силы \check{T} будут равны по величине, а их направления - симметричны. Если теперь выбрать полюс на оси симметрии сечения, то

$$\oint \check{T} \rho ds = 0 \quad \text{и} \quad Q_y c = 0.$$

Отсюда $T_0 = 0$, и получаем

$$T = \check{T} = \frac{Q_y}{\gamma_{rx}} S_{rx}. \quad (2.31)$$

Итак, если начальную точку выбрать на оси симметрии, то в рассматриваемом случае расчетная формула упрощается.

Если внешняя нагрузка параллельна плоскости симметрии, но не лежит в ней (рис. 2.18), то имеем

$$T = \frac{Q_y c}{R} + \frac{Q_y}{\gamma_{rx}} S_{rx}. \quad (2.32)$$

Мы рассматривали изгиб конструкции относительно оси x . Если же в сечении действует перерезывающая сила Q_x , то определение погонных касательных сил проводится также по формуле (2.25), но усилие \bar{T} следует вычислять по формуле

$$\bar{T} = \frac{Q_x}{\gamma_{ry}} S_{ry}. \quad (2.33)$$

В тонкостенной конструкции с замкнутым контуром сечения могут развиваться такие внутренние силы, которые в состоянии уравновесить внешнюю нагрузку, приложенную произвольным образом. Эти внутренние силы однозначно определяются из уравнений статики. Следовательно, системы с однозамкнутым контуром поперечного сечения статически определимы и геометрически неизменяемы.

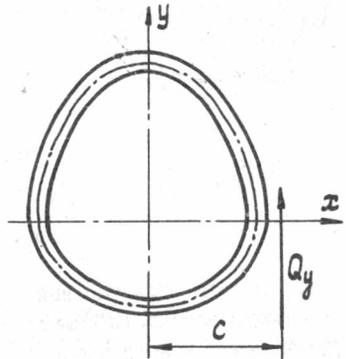


Рис. 2.18

2.5. Пример расчета касательных напряжений в однозамкнутом контуре

Определить величину погонных касательных сил в сечении, представленном на рис. 2.19а. Конструкция загружена вертикальной нагрузкой Q_y , действующей на расстоянии $0,5R$ от вертикальной стенки.

При вычислении момента инерции имеем в виду, что сечение состоит из полуокружности и прямоугольной стенки:

$$\gamma_{rx} = \frac{\pi \delta R^3}{2} + \frac{8 \delta R^3}{12} = 2,24 \delta R^3.$$

Если выбрать начало отсчета дуг на оси симметрии сечения (точка I), то закон изменения погонных касательных сил \bar{T} на криволинейном участке будет таким же, как в примере 2 (2.16). На вертикальной стенке погонные касательные силы изменяются по закону квадратной параболы. Характерные ординаты эпюры \bar{T} приведены на рис. 2.19б.

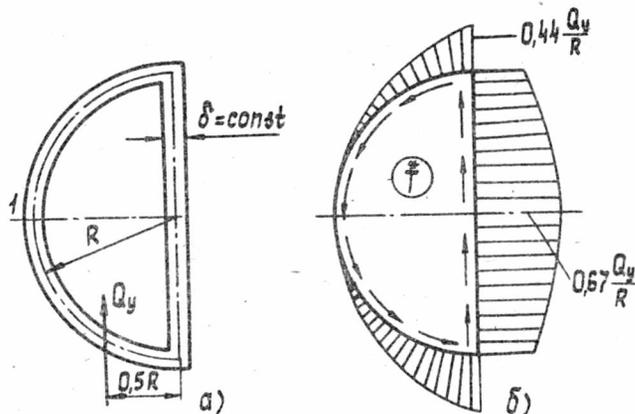


Рис. 2.19

Для определения усилия T_0 выберем полюс в центре окружности. Тогда момент внутренних сил \bar{T} будет равен

$$\begin{aligned} \oint \bar{T} p d s &= 2 \frac{Q_y}{r_{rx}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta R^2 (1 - \cos \psi) R \cdot R d \psi = \\ &= 2 \frac{Q_y \delta R^4}{2,24 \delta R^3} [\psi - \sin \psi]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0,51 Q_y R. \end{aligned}$$

Момент внешней нагрузки относительно выбранного полюса с учетом знака

$$Q_y c = Q_y \frac{R}{2}.$$

Удвоенная площадь фигуры, ограниченной средней линией контура:

$$\Omega = \pi R^2.$$

Отсюда:

$$T_0 = \frac{-0,5 Q_y R - 0,51 Q_y R}{\pi R^2} = -0,32 \frac{Q_y}{R}$$

и

$$T = T_0 + \overset{*}{T} = -0,32 \frac{Q_y}{R} + \overset{*}{T}.$$

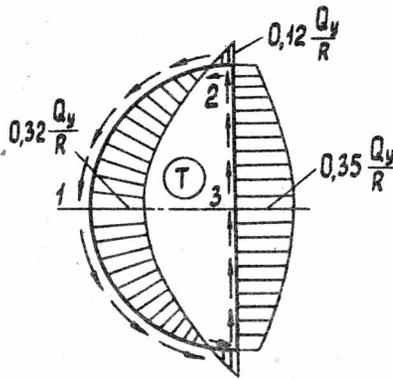


Рис. 2.20

Вид эпюры T представлен на рис. 2.20. В характерных точках имеем:

$$T_1 = -0,32 \frac{Q_y}{R},$$

$$T_2 = -0,32 \frac{Q_y}{R} + 0,44 \frac{Q_y}{R} = 0,12 \frac{Q_y}{R},$$

$$T_3 = -0,32 \frac{Q_y}{R} + 0,67 \frac{Q_y}{R} = 0,35 \frac{Q_y}{R}.$$

При значении $Q_y = 1,10^5 \text{ Н}$, $R = 50 \text{ см}$, максимальное значение $T = 700 \text{ Н/см}$ будет в точке 3 контура.

За возможные перемещения системы "1" примем действительные перемещения системы "р", умноженные на весьма малый коэффициент β . Тогда точка а системы "1" будет иметь перемещение

$$\beta \Delta i_p. \quad (2.35)$$

Напомним, что в то время, когда системе сообщаются возможные перемещения, величины и направления внешних и внутренних сил остаются неизменными.

Работа внешних сил системы "1" на возможных перемещениях определится выражением

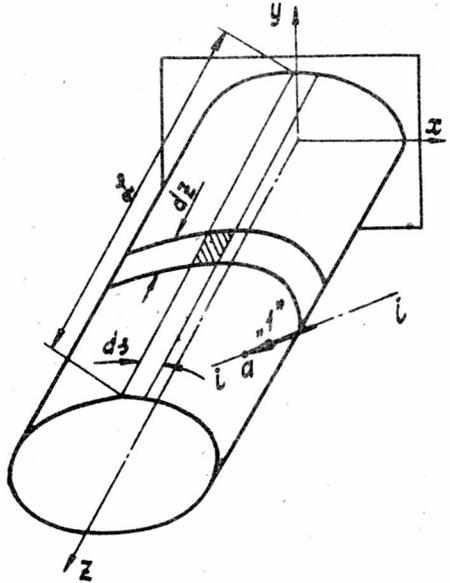


Рис. 2.22

$$\delta' A = 1 \cdot \beta \Delta i_p. \quad (2.36)$$

Для вычисления изменения энергии деформации единичной системы воспользуемся следующей зависимостью [2]:

$$\delta' u = \int_V \left[\bar{\sigma} \delta' \bar{\epsilon}_{zz} + \bar{\tau} \delta' \bar{\epsilon}_{zs} \right] dv, \quad (2.37)$$

где $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$ - нормальные и касательные напряжения, возникающие от единичной нагрузки; $\delta' \bar{\epsilon}_{zz}$, $\delta' \bar{\epsilon}_{zs}$ - вариации деформаций, вызванные возможными перемещениями единичной системы, равные в соответствии со сказанным выше

$$\delta' \bar{\epsilon}_{zz} = \beta \epsilon_{zz}, \quad \delta' \bar{\epsilon}_{zs} = \beta \epsilon_{zs}; \quad (2.38)$$

ϵ_{zz} , ϵ_{zs} - деформации в системе "р", dv - элемент объема.

Действительные деформации исходной системы связаны с напряжениями $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$ законом Гука.

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\bar{\sigma}}{E}, \quad \varepsilon_{zs} = \frac{\bar{\tau}}{G}. \quad (2.39)$$

Подставим (2.38) и (2.39) в уравнение (2.37):

$$\delta' U = \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \oint (\bar{\sigma} \beta \frac{\bar{\sigma}}{E} + \bar{\tau} \beta \frac{\bar{\tau}}{G}) dV. \quad (2.40)$$

Приравняем, согласно (2.34), работу внешних сил (2.36) вариации потенциальной энергии системы (2.40):

$$\beta \Delta_{i\rho} = \beta \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \oint (\bar{\sigma} \frac{\bar{\sigma}}{E} + \bar{\tau} \frac{\bar{\tau}}{G}) dV.$$

После сокращения на ненулевой весьма малый множитель β получим:

$$\Delta_{i\rho} = \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \oint (\frac{\bar{\sigma} \bar{\sigma}}{E} + \frac{\bar{\tau} \bar{\tau}}{G}) dV. \quad (2.41)$$

И, наконец, интегрируя по толщине оболочки, имеем:

$$\Delta_{i\rho} = \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \oint (\frac{\bar{\sigma} \bar{\sigma} \delta}{E} + \frac{\bar{\tau} \bar{\tau} \delta}{G}) dz ds. \quad (2.42)$$

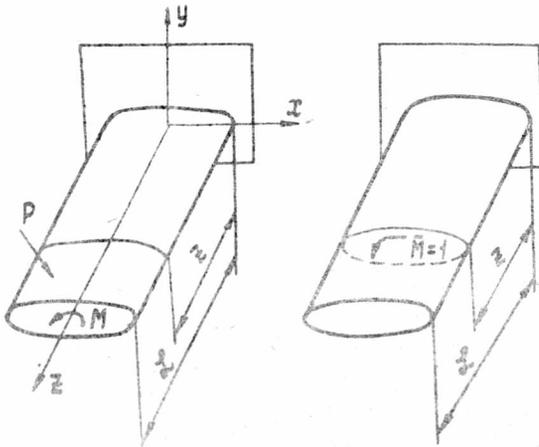


Рис. 2.23

Наконец, если в последнем равенстве перейти к погонным касательным усилиям $T = \tau \delta$ и $\bar{T} = \bar{\tau} \delta$, то формула для расчета упругих перемещений примет следующий вид:

$$\Delta_{i\rho} = \int \oint \left(\frac{\bar{\sigma} \sigma \delta}{E} + \frac{\bar{T} T}{G \delta} \right) dz ds. \quad (2.43)$$

Рассмотрим частный случай. Пусть требуется определить угол поворота сечения оболочки, находящегося на расстоянии z от заделки (рис. 2.23).

Для этого к конструкции в интересующем нас сечении прикладываем крутящий момент, равный единице. В этом случае нормальные напряжения $\bar{\sigma}$ будут равны нулю и первое слагаемое в (2.43) исчезает. Погонная касательная сила на участке длины z равна

$$\bar{T} = \frac{1}{\Omega R},$$

а за пределом этого участка равна нулю. Теперь для угла поворота сечения получим следующее выражение:

$$\theta = \frac{1}{\Omega R} \int_0^z \oint \frac{T}{G \delta} dz ds. \quad (2.44)$$

Относительный (погонный) угол закручивания оболочки определим путем дифференцирования выражения (2.44) по z :

$$\alpha = \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\Omega R} \oint \frac{T ds}{G \delta}. \quad (2.45)$$

2.7. Центр изгиба тонкостенных конструкций с однозамкнутым сечением

При произвольной внешней нагрузке перемещение поперечного сечения замкнутой тонкостенной конструкции может быть представлено в виде линейного смещения какой-либо точки и поворота относительно этой точки (рис. 2.24).

Оказывается, что для любого сечения можно найти такую точку, проходя через которую внешняя нагрузка не вызывает поворота сечений, а только изгиб конструкции без ее закручивания. Такая деформация системы называется простым изгибом.

Найдем положение этой точки для заданной конструкции.

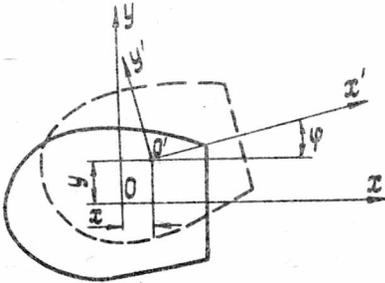


Рис. 2.24

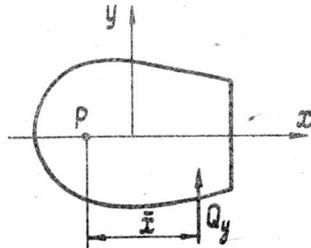


Рис. 2.25

Рассмотрим действие нагрузки, перпендикулярной оси x (рис. 2.25). Поскольку контур замкнутый, то касательные усилия в нем определяются согласно (2.24), (2.25) и (2.29). Поэтому можно записать:

$$T = \frac{Q_y}{J_{rx}} S_{rx} + \frac{Q_y \bar{x} - \oint T \rho ds}{\Omega}. \quad (2.46)$$

Здесь \bar{x} — расстояние от произвольного полюса до линии действия силы Q_y .

Преобразуем последнее выражение: $\frac{Q_y}{J_{rx}} S_{rx} \rho ds$

$$T = \frac{Q_y}{J_{rx}} S_{rx} + \frac{Q_y \bar{x} - \oint \frac{Q_y}{J_{rx}} S_{rx} \rho ds}{\Omega}$$

или

$$T = Q_y \left(\frac{S_{rx}}{J_{rx}} + \frac{\bar{x}}{\Omega} - \frac{\oint \frac{S_{rx}}{J_{rx}} \rho ds}{\Omega} \right). \quad (2.47)$$

Подставим в (2.45) выражение (2.47) и результат приравняем нулю:

$$\frac{Q_y}{\Omega} \left[\oint \frac{S_{rx} ds}{J_{rx} G \delta} + \frac{\bar{x}}{\Omega} \oint \frac{ds}{G \delta} - \frac{1}{\Omega} \oint \frac{S_{rx}}{J_{rx}} \rho ds \oint \frac{ds}{G \delta} \right] = 0. \quad (2.48)$$

Равенство (2.48) возможно, если выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю:

$$\oint \frac{S_{rx} ds}{J_{rx} G \delta} + \bar{x} \oint \frac{ds}{G \delta} - \frac{1}{\Omega} \oint \frac{S_{rx}}{J_{rx}} \rho ds \oint \frac{ds}{G \delta} = 0. \quad (2.49)$$

Отсюда находим положение линии действия силы Q_y , при котором будет иметь место простой изгиб конструкции:

$$\bar{x} = \frac{1}{J_{rx}} \oint S_{rx} \rho ds - \frac{\Omega}{J_{rx}} \frac{\oint \frac{S_{rx} ds}{G \delta}}{\oint \frac{ds}{G \delta}}. \quad (2.50)$$

Повторяя аналогичные рассуждения для случая нагружения силой Q_x , получим вторую координату искомой точки:

$$\bar{y} = \frac{1}{J_{ry}} \oint S_{ry} \rho ds - \frac{\Omega}{J_{ry}} \frac{\oint \frac{S_{ry} ds}{G \delta}}{\oint \frac{ds}{G \delta}}. \quad (2.51)$$

Итак, в поперечном сечении существует такая точка с координатами \bar{x} и \bar{y} , проходя через которую внешняя нагрузка не вызывает поворота сечения. Эта точка называется центром изгиба однозамкнутого контура.

Линия, проходящая через центры изгиба всех сечений, параллельна оси \bar{z} и называется осью изгиба однозамкнутой тонкостенной конструкции.

Между осью изгиба тонкостенных конструкций с открытым и замкнутым поперечным сечениями имеется принципиальное различие.

Для открытого сечения ось изгиба является линией обязательного приложения внешней нагрузки. Нагрузки, не проходящие через ось изгиба, не могут быть уравновешены соответствующими внутренними силами в поперечном сечении.

Для конструкций с замкнутым сечением ось изгиба является линией действия внешней нагрузки, не вызывающей поворотов сечений, т.е. обеспечивающей простой изгиб системы. Нагрузки же, не проходящие через ось изгиба, вызывают поворот сечений, но могут успешно восприниматься системой.

III. НАПРЯЖЕНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С МНОГОЗАМКНУТЫМ КОНТУРОМ

Нормальные напряжения в тонкостенных конструкциях с многозамкнутым контуром поперечного сечения могут быть найдены, как отмечалось в I.2, по формуле (I.16), согласно принятому закону плоского распределения относительных деформаций.

Задача определения касательных напряжений в многозамкнутых контурах оказывается более сложной. Переход от разомкнутой конструкции к замкнутой можно рассматривать как замыкание по образующей - наложение одной связи. Так как однозамкнутый контур статически определим, то n -замкнутый контур будет в $n-1$ раз статически неопределим. Раскрытие статической неопределенности может быть выполнено общими методами строительной механики [3].

Мы рассмотрим расчет многозамкнутых контуров при работе их в условиях простого изгиба и свободного кручения. Простой изгиб конструкции имеет место при прохождении внешней нагрузки через ось изгиба.

3.1. Касательные напряжения при простом изгибе тонкостенных конструкций с многозамкнутым контуром поперечного сечения

При простом изгибе поперечное сечение системы не поворачивается относительно продольной оси Z , а лишь получает поступательное перемещение вдоль осей x и y .

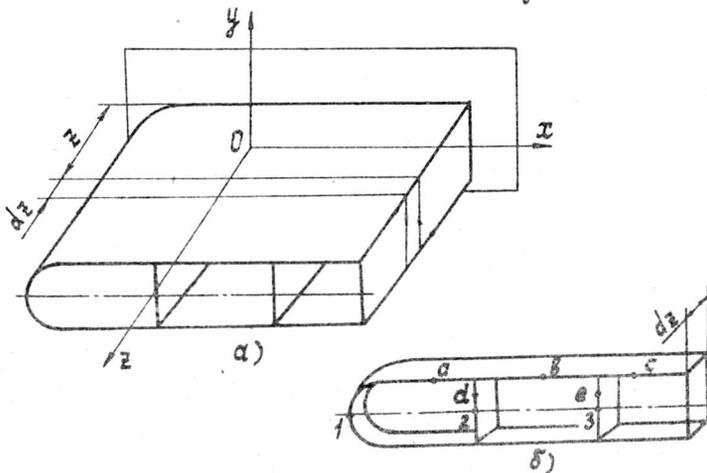


Рис. 3.1

Рассмотрим тонкостенную оболочку с произвольным трехзамкнутым контуром поперечного сечения (рис. 3.1а). Будем считать, что конструкция работает в условиях простого изгиба.

Отсутствие поворота сечения можно записать в виде равенства нулю углов закручивания каждого из контуров:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \quad (3.1)$$

Пусть требуется найти погонную касательную силу T_α в точке α . Выберем произвольную точку I в пределах первого контура. В сечении вдоль образующей, проходящей через эту точку, будет действовать погонная касательная сила. Обозначим ее через X_1 .

Проведем сечения плоскостями, перпендикулярными продольной оси системы на расстояниях z и $z + dz$ от начала координат (рис. 3.1б). Затем проведем еще два сечения вдоль образующих, проходящих через точки I и α , и рассмотрим равновесие выделенного таким образом элемента конструкции.

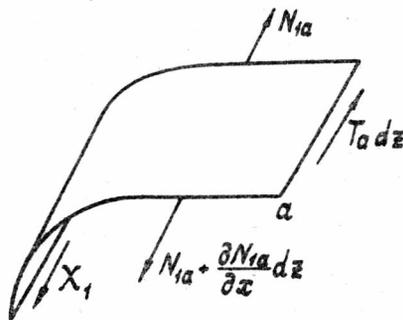


Рис. 3.2

Обозначим равнодействующую нормальных напряжений на задней грани отсеченной части через N_{1a} . Тогда на передней грани будет действовать равнодействующая, равная $N_{1a} + \frac{\partial N_{1a}}{\partial z} dz$ (рис. 3.2). Равновесие отсеченной части возможно лишь тогда, когда в продольных сечениях действуют касательные напряжения. Спроектируем все силы на ось z :

$$(N_{1a} + \frac{\partial N_{1a}}{\partial z} dz) - N_{1a} + X_1 dz - T_\alpha dz = 0.$$

Отсюда

$$T_\alpha = X_1 + \frac{\partial N_{1a}}{\partial z}.$$

Согласно формулам (2.22)-(2.24)

$$\frac{\partial N_{1\alpha}}{\partial z} = \frac{Q_y}{y_{1x}} S_{1x} = \overset{*}{T},$$

где $\overset{*}{T}$ - погонная касательная сила в точке α в предположении, что конструкция разомкнута по образующей, проходящей через точку I. Итак,

$$T_\alpha = X_1 + \overset{*}{T}. \quad (3.2)$$

Найдем далее погонную касательную силу T_β в точке β .

Выберем произвольную точку 2 в пределах второго контура. Через X_2 обозначим касательную силу, действующую вдоль образующей, проходящей через эту точку. Выделим часть конструкции, проведем продольные сечения вдоль образующих, проходящих через точки I, 2, β и рассмотрим как ранее равновесие отсеченной части (рис. 3.3). Равно-

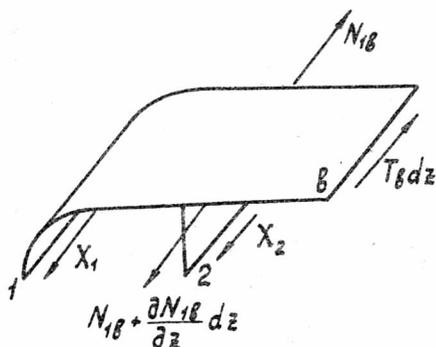


Рис. 3.3

действующую нормальных напряжений, действующих по передней грани, обозначим $N_{1\beta}$. Если спроектировать все силы на ось z , то можно получить

$$(N_{1\beta} + \frac{\partial N_{1\beta}}{\partial z} dz) - N_{1\beta} + X_1 dz + X_2 dz - T_\beta dz = 0$$

или

$$T_\beta = X_1 + X_2 + \frac{\partial N_{1\beta}}{\partial z}. \quad (3.3)$$

Здесь $\frac{\partial N_{1\beta}}{\partial z} = \overset{*}{T}$ - погонная касательная сила в точке β в предположении, что конструкция разомкнута по образующим, проходящим через точки I и 2.

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что зна-

чение погонной касательной силы в точке "с" третьего контура будет равно

$$T_c = X_1 + X_2 + X_3 + T^* \quad (3.4)$$

Здесь X_3 - касательная сила вдоль образующей, проходящей через точку 3, T^* - касательная сила в точке "с" в предположении, что конструкция разомнута по образующим, проходящим через точки 1, 2 и 3.

Чтобы рассчитать усилия на промежуточных стенках, возьмем, например, на первой

из стенок точку d (рис. 3.1) и выделим элемент стенки двумя сечениями, проходящими через точки 2 и d . Рассмотрим равновесие этой части стенки. Спроектируем все силы на ось z (рис. 3.4):

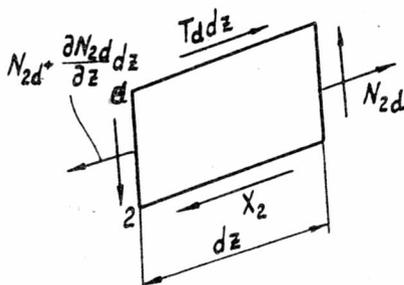


Рис. 3.4

$$\begin{aligned} (N_{2d} + \frac{\partial N_{2d}}{\partial z} dz) - N_{2d} - T_d dz + X_2 dz = 0, \\ T_d = X_2 + \frac{\partial N_{2d}}{\partial z} = X_2 + T_d^*. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Аналогично

$$T_e = X_3 + T_e^* \quad (3.6)$$

Запишем выражения (3.2)-(3.6) в виде одной формулы. Для этого введем три вспомогательные единичные функции \bar{T}_1 , \bar{T}_2 , \bar{T}_3 (рис. 3.5). Тогда искомые выражения можно будет представить в следующем виде:

$$T = T^* + \bar{T}_1 X_1 + \bar{T}_2 X_2 + \bar{T}_3 X_3. \quad (3.7)$$

На рис. 3.5 условно показаны направления усилий X_1, X_2 и X_3 .

Вспомним, что угол закручивания каждого из контуров можно записать по формуле

$$\alpha_i = \frac{1}{\Omega_i} \oint_{(i)} \frac{T}{G\delta} ds, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.8)$$

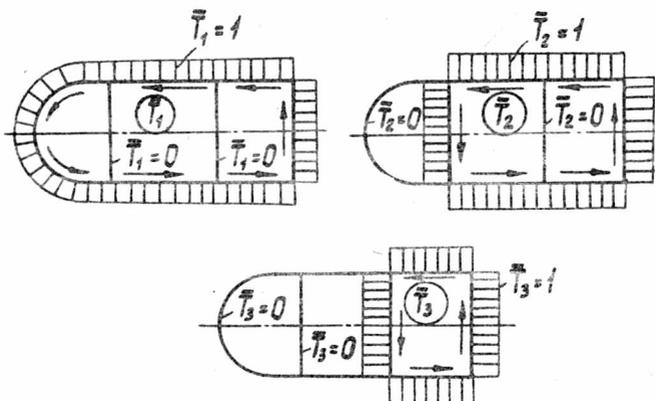


Рис. 3.5

Это равенство с учетом условия (3.1) представим таким образом:

$$\alpha_i = \oint \frac{T \bar{T}_i}{G\delta} ds = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.9)$$

Подставив значение усилия T (3.7) в (3.9), получим

$$\oint \frac{\bar{T}_i}{G\delta} (\bar{T} + \bar{T}_1 \chi_1 + \bar{T}_2 \chi_2 + \bar{T}_3 \chi_3) ds = 0. \quad (3.10)$$

Поскольку χ_1, χ_2, χ_3 постоянны, то их можно вынести за знак интеграла.

Тогда

$$\oint \frac{\bar{T} \bar{T}_i}{G\delta} ds + \chi_1 \oint \frac{\bar{T}_1 \bar{T}_i}{G\delta} ds + \chi_2 \oint \frac{\bar{T}_2 \bar{T}_i}{G\delta} ds + \chi_3 \oint \frac{\bar{T}_3 \bar{T}_i}{G\delta} ds = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.11)$$

Таким образом, уравнений запишем столько, сколько неиз-

вестных, и каждое из них будет выражать условие равенства нулю угла закручивания i -го контура.

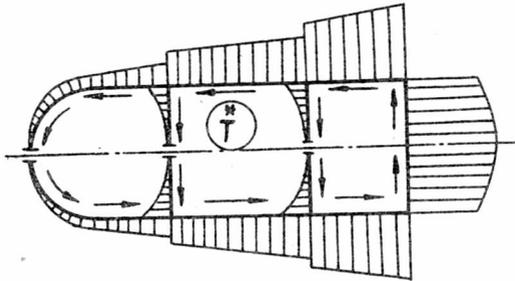


Рис. 3.6

Для сокращения записи уравнение (3.11) можно представить в виде

$$\Delta_{i0} + \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \delta_{i3} X_3 = 0, \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{i0} &= \oint \frac{\bar{T} \bar{T}_i}{G \delta} ds, & \delta_{i1} &= \oint \frac{\bar{T}_i \bar{T}_1}{G \delta} ds, \\ \delta_{i2} &= \oint \frac{\bar{T}_i \bar{T}_2}{G \delta} ds, & \delta_{i3} &= \oint \frac{\bar{T}_i \bar{T}_3}{G \delta} ds. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Коэффициенты (3.13) подсчитываются путем перемножения эпюр \bar{T} (рис. 3.6) и \bar{T}_i (рис. 3.5).

После решения системы уравнений (3.12) относительно неизвестных X_1 , X_2 и X_3 можно найти значение касательной силы T по формуле (3.7) в любой точке сечения.

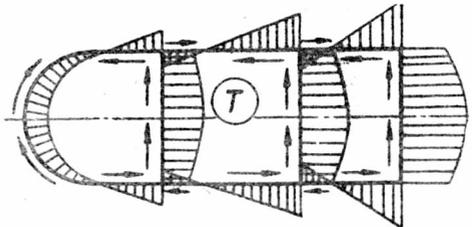


Рис. 3.7

Примерный вид эпюры погонных касательных сил при простом изгибе многозамкнутого контура приведен на рис. 3.7.

Выбирая произвольно точку-поллюс, находят положение центра изгиба по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{Q_y} \oint T \rho ds.$$

Затем определяют относительно оси изгиба крутящий момент.

3.2. Касательные напряжения при свободном кручении многозамкнутых конструкций

Рассмотрим тонкостенную конструкцию с трехзамкнутым контуром поперечного сечения (рис. 3.8а), нагруженную крутящим

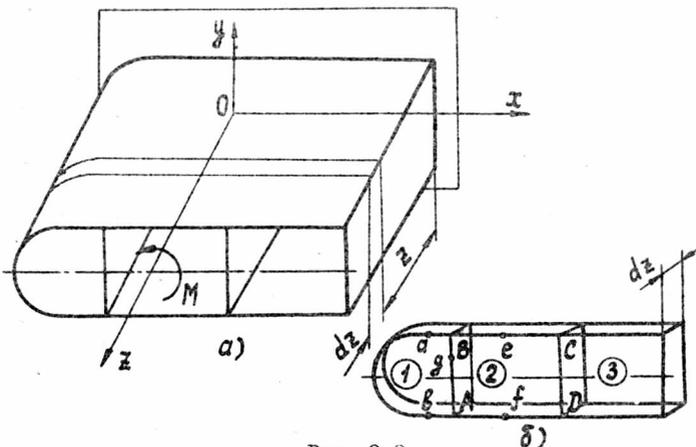


Рис. 3.8

моментом. Используя уравнения равновесия, выясним, как распределяются по контурам погонные касательные силы. Для этого мысленно проведем сечения на расстоянии \bar{z} и $\bar{z} + d\bar{z}$ от начала координат (рис. 3.8б), а затем несколько продольных сечений через выбранные точки. Возьмем вначале две произвольные точки a и b в пределах первого контура. Рассмотрим равновесие выделенной части контура (рис. 3.9). Спроектировав все усилия на ось \bar{z} , получим

$$T_b dz - T_a dz = 0, \quad T_a = T_b = T_1. \quad (3.14)$$

Из (3.14) видно, что в первом контуре действует постоянная

погонная касательная сила T_1 .

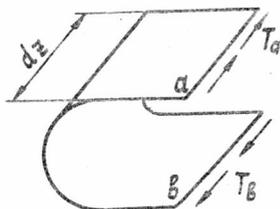


Рис. 3.9

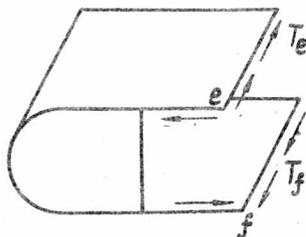


Рис. 3.10

Проведем два продольных сечения через e точки f и (рис. 3.10). Из условия равновесия отсеченной части получим

$$T_e dz - T_f dz = 0, \quad T_e = T_f = T_2. \quad (3.15)$$

То есть и во втором контуре действует постоянный по величине поток касательных сил T_2 .

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что и в третьем контуре погонная касательная сила постоянна и равна T_3 (рис. 3.11).

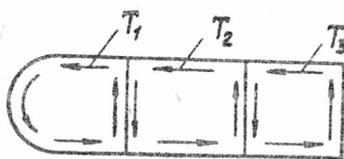


Рис. 3.11

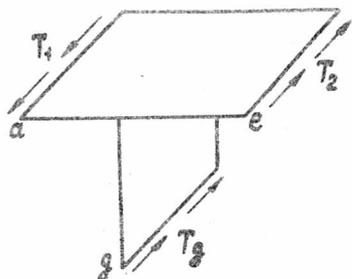


Рис. 3.12

Выясним, чему равны касательные силы на промежуточных стенках. Возьмем точку g на стенке между первым и вторым

контурами. Проведем сечения через точки a , g и e (рис. 3.8) и рассмотрим равновесие выделенной части конструкции. Спроектировав все силы на ось z , получим (рис. 3.12):

$$T_1 dz - T_2 dz - T_g dz = 0, \quad T_g = T_{1-2} = T_1 - T_2. \quad (3.16)$$

Из формулы (3.16) видно, что в промежуточной стенке касательная сила равна разности усилий, действующих в двух смежных контурах.

Аналогично можно показать, что и в промежуточной стенке между вторым и третьим контурами касательная сила T_{2-3} будет равна

$$T_{2-3} = T_2 - T_3. \quad (3.17)$$

Итак, поток внутренних касательных сил в трехзамкнутом контуре может быть представлен в виде трех замкнутых потоков касательных T_1 , T_2 , T_3 сил по контурам. Найдем эти силы.

Воспользуемся условием совместности деформаций, записав его в виде равенства относительных углов закручивания контуров:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha. \quad (3.18)$$

Здесь α - угол поворота всего сечения.

Запишем выражение для углов закручивания каждого из контуров, используя формулу

$$\alpha = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{T ds}{G \delta}. \quad (3.19)$$

Тогда для угла закручивания второго контура будем иметь (рис. 3.86)

$$\alpha \Omega_2 = (T_2 - T_1) \int_A^B \frac{ds}{G \delta} + T_2 \int_B^C \frac{ds}{G \delta} + (T_2 - T_3) \int_C^D \frac{ds}{G \delta} + T_2 \int_D^A \frac{ds}{G \delta}$$

или

$$\alpha \Omega_2 = -T_1 \int_A^B \frac{ds}{G \delta} + T_2 \left(\int_A^B \frac{ds}{G \delta} + \int_B^C \frac{ds}{G \delta} + \int_C^D \frac{ds}{G \delta} + \int_D^A \frac{ds}{G \delta} \right) - T_3 \int_C^D \frac{ds}{G \delta},$$

наконец

$$\alpha \Omega_2 = -T_1 \int_A^B \frac{ds}{G \delta} + T_2 \oint \frac{ds}{G \delta} - T_3 \int_C^D \frac{ds}{G \delta}. \quad (3.20)$$

Для остальных двух контуров можно записать аналогичные выражения. В итоге для решения задачи получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha \mathfrak{P}_1 &= T_1 \oint_{(1)} \frac{ds}{G\delta} - T_2 \int_{1-2} \frac{ds}{G\delta}, \\ \alpha \mathfrak{P}_2 &= -T_1 \int_{1-2} \frac{ds}{G\delta} + T_2 \oint_{(2)} \frac{ds}{G\delta} - T_3 \int_{2-3} \frac{ds}{G\delta}, \\ \alpha \mathfrak{P}_3 &= T_3 \oint_{(3)} \frac{ds}{G\delta} - T_2 \int_{2-3} \frac{ds}{G\delta}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Записанная система уравнений содержит 4 неизвестных: α , T_1 , T_2 , T_3 . Поэтому к этим уравнениям совместности деформаций нужно добавить еще одно уравнение статики (рис. 3.8). Если в сечении контура действует крутящий момент M , то должно выполняться условие

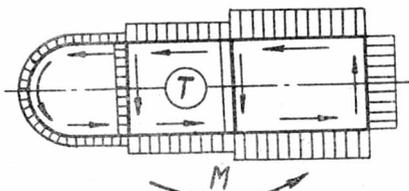


Рис. 3.13

$$M = \oint T \rho ds \quad (3.22)$$

или

$$M = T_1 \mathfrak{P}_1 + T_2 \mathfrak{P}_2 + T_3 \mathfrak{P}_3, \quad (3.23)$$

где через \mathfrak{P} обозначена удвоенная площадь, ограниченная средней линией контура.

На рис. 3.13 приведена эпюра погонных касательных сил в трехзамкнутом контуре при свободном кручении.

Л и т е р а т у р а

1. Кан С.Н. Строительная механика оболочек. - М.: Машиностроение, 1966.
2. Хазанов Х.С., Савельев Л.М. Метод конечных элементов в приложении к задачам строительной механики и теории упругости. - Конспект лекций, часть I, Куйбышев, 1975.
3. Кан С.Н., Пановко Н.Г. Элементы строительной механики тонкостенных конструкций. Оборонгиз, М., 1952.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ	3
I.1. Основные допущения	3
I.2. Определение нормальных напряжений в сечении тонкостенной конструкции	4
I.3. Пример расчета нормальных напряжений	8
I.4. Нормальные напряжения в тонкостенных конструкциях, подкрепленных продольным набором	9
II. РАСЧЕТ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ	11
2.1. Касательные напряжения в тонкостенных конструкциях с открытым контуром поперечного сечения	11
2.2. Примеры расчета касательных напряжений в конструкциях с открытым контуром	15
2.3. Центр изгиба открытых сечений. Примеры	19
2.4. Касательные напряжения в тонкостенных конструкциях с однозамкнутым контуром поперечного сечения	23
2.5. Пример расчета касательных напряжений в однозамкнутом контуре	28
2.6. Упругие перемещения тонкостенных конструкций	31
2.7. Центр изгиба тонкостенных конструкций с однозамкнутым контуром поперечного сечения	34
III. РАБОТА ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С МНОГОЗАМКНУТЫМ КОНТУРОМ	36
3.1. Касательные напряжения при простом изгибе конструкций с многозамкнутым контуром поперечного сечения	37
3.2. Касательные напряжения при свободном кручении многозамкнутых конструкций	43
Л и т е р а т у р а	46