МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математического моделирования в механике

Л. В. Степанова

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве сборника задач

Самара
Издательство «Самарский университет»
2010

УДК 53
ББК 22.311
С 79

Рецензент доктор физико-математических наук, проф. В. П. Радченко

Степанова, Л. В.

С 79 Автомодельные решения уравнений математической физики : сборник задач / Л. В. Степанова. – Самара : Издательство «Самарский университет», 2010. – 28 с.

Сборник задач содержит полное изложение методов построения автомодельных решений уравнений математической физики и ставит своей целью ознакомление с методами построения автомодельных решений уравнений математической физики на примере различных задач механики деформируемого твердого тела и механики жидкости и газа.

В сборник задач включено большое количество задач, демонстрирующих использование анализа размерностей при построении автомодельного представления решения, применение классического и неклассического методов поиска симметрий нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Сборник задач предназначен для магистров механико-математического факультета по направлению 010900 «Механика».

УДК 53
ББК 22.311

ПРОГРАММА КУРСА
АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Тема 1. Анализ размерностей и подобие.

1.1. Размерность. Анализ размерностей. Параметры, определяющие класс явлений. Подобие. П-теорема.

Тема 2. Применение анализа размерностей величин к построению точных частных решений задач математической физики и механики. Автомодельные решения.

2.1. Сильные тепловые волны.

2.2. Сильные взрывные волны.

2.3. Автомодельность. Промежуточная асимптотика.

Тема 3. Автомодельные решения второго рода. Модифицированная задача о мгновенном тепловом источнике. Автомодельное решение второго рода.

3.1. Модифицированная задача о мгновенном тепловом источнике.

3.2. Прямое применение анализа размерностей в модифицированной задаче о мгновенном тепловом источнике.

3.3. Численный эксперимент. Автомодельная промежуточная асимптотика. Автомодельное предельное решение.

3.4. Модифицированная задача о сильном взрыве. Прямое применение анализа размерностей в модифицированной задаче о точечном сильном взрыве.

3.5. Численный эксперимент. Автомодельная промежуточная асимптотика. Автомодельное предельное решение.

3.6. Качественное исследование нелинейной задачи на собственные значения.

3.7. Задача о коротком ударе.

3.8. Численный эксперимент. Автомодельная промежуточная асимптотика. Автомодельное предельное решение.

Тема 4. Классификация автомодельных зависимостей и автомодельных решений.

4.1. Полная и неполная автомодельность.

4.2. Автомодельные решения первого и второго рода.

Тема 5. Автомодельные решения и бегущие волны. Полная и неполная автомодельность упругости и разрушения.

5.1. Решения типа бегущих волн.

5.2. Ударная волна Бюргерса – стационарная бегущая волна первого рода.

5.3. Пламя – стационарная бегущая волна второго рода.

5.4. Задача о равновесии упругого клина под действием пары сил, приложенной в его вершине.

5.5. Парадокс Стернберга – Койтера. Промежуточная асимптотика решения неавтомодельной задачи.

5.6. Законы подобия хрупкого и квазихрупкого разрушения.

Тема 6. Автомодельные решения. Метод подобия.

6.1. Общий вид автомодельных решений. Метод подобия.

6.2. Примеры автомодельных решений уравнений математической физики и механики.

6.3. Подход, основанный на решении функционального уравнения.

6.4. Уравнения, инвариантные относительно комбинаций преобразования сдвига и их решения.

Тема 7. Классический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений.

7.1. Однопараметрические преобразования и их локальные свойства. Однопараметрические преобразования и их локальные свойства. Инфинитезимальный оператор. Инвариант оператора. Преобразования на плоскости. Формулы для вычисления производных. Координаты первого и второго продолжений.

7.2. Симметрии нелинейных уравнений второго порядка. Условие инвариантности. Процедура расщепления по производным. Примеры поиска симметрий нелинейных уравнений математической физики.

7.3. Использование симметрий уравнения для поиска точных решений. Использование симметрий уравнения для построения однопараметрических решений. Процедура построения инвариантных решений. Примеры построения инвариантных решений нелинейных уравнений. Решения, порождаемые линейными комбинациями допускаемых операторов.

7.4. Уравнения старших порядков. Однопараметрические группы Ли точечных преобразований. Генератор группы. Инвариант группы. Локальные преобразования производных. Условие инвариантности. Процедура расщепления. Инвариантные решения.

7.5. Симметрии систем уравнений математической физики. Основные соотношения, используемые при анализе симметрий систем уравнений. Симметрии уравнений гидродинамического пограничного слоя.

Тема 8. Неклассический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений.

8.1. Условие инвариантной поверхности. Конкретные примеры: уравнение Фитсхью – Нагумо и нелинейное волновое уравнение.

Тема 9. Прямой метод подобия Кларксона – Крускала.

9.1. Поиск автомодельных решений специального вида. Примеры построения точных решений. Точные решения уравнения Бюргерса.

1. Анализ размерностей величин

1. Основываясь на анализе размерностей величин в задаче о движении математического маятника, показать, что в случае малых колебаний математического маятника для периода колебаний T справедливо равенство

$$T = c\sqrt{l/g}\,,$$

где l – длина нити подвеса (длина математического маятника), g — ускорение свободного падения, c – постоянная величина.

2. Основываясь на анализе размерностей величин в задаче об истечении тяжелой жидкости через водослив, показать, что вес жидкости Q, протекающей через водослив в единицу времени, как функция плотности жидкости ρ, ускорения силы тяжести g и напора h,

$$Q = f(\rho, g, h)$$

может быть представлена в виде

$$Q = C\rho g^{3/2}h^{5/2},$$

где C – константа, определяемая в ходе решения задачи либо опытным путем.

3. Задача о глобальных свойствах планетной атмосферы. Глобальные свойства планетной атмосферы определяются

1) средней поверхностной плотностью поступающей в атмосферу за единицу времени солнечной энергии q;

2) радиусом планеты r;

3) постоянной Стефана – Больцмана σ, определяющей при заданной температуре уходящий поток излучения;

4) теплоемкостью газа планетной атмосферы при постоянном давлении c_p;

5) теплоемкостью газа планетной атмосферы при постоянном давлении c_v;

6) угловой скоростью вращения планеты ω;

7) ускорением силы тяжести планеты g;

8) массой m столба газа планетной атмосферы, имеющего единичную площадь основания.

Размерности этих параметров в классе $MLT\theta$ (θ – размерность температуры) таковы:

$$[q] = MT^{-3}, \quad [r] = L, \quad [\sigma] = MT^{-3}\theta^{-4}, \quad [g] = LT^{-2},$$
$$[c_p] = [c_v] = L^2T^{-2}\theta^{-1}, \quad [\omega] = T^{-1}, \quad [m] = ML^{-2}.$$

Найти четыре параметра подобия.

4. Опираясь на анализ размерностей величин, показать, что перепад давления P на концах трубки при стационарном протекании через трубку различных жидкостей: воды, хлороформа, бромоформа, ртути, этилового спирта и др., как функция времени τ заполнения сосуда данного объема V, плотности ρ и коэффициента вязкости жидкости μ,

$$P = f(\tau, V, \rho, \mu)$$

может быть представлен в виде функции одной переменной

$$\Pi = \Phi(\Pi_1), \quad \Pi = P/(\mu\tau^{-1}), \qquad \Pi_1 = \rho/(\mu\tau V^{-2/3}).$$

5. Показать, что уравнение Прандтля в теории плоского ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}$$

для функции тока $\psi(x,y)$, связанной с компонентами вектора скорости u, v равенствами

$$u = \partial\psi/\partial y, \qquad v = -\partial\psi/\partial x$$

допускает автомодельное представление решения

$$\psi = \sqrt{\nu U_\infty x}\, f\left(y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\right)$$

или, если ввести в качестве аргумента автомодельную переменную $\eta = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{U_\infty}{\nu x}}$,

$$\psi = \sqrt{\nu U_\infty x}\varphi(\eta).$$

Показать, что функция $\varphi(\eta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0$$

и граничным условиям

$$\varphi = 0, \qquad \varphi' = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0,$$

$$\varphi' \to 2 \quad \text{при} \quad \eta \to \infty.$$

2. Метод подобия

1. Используя метод подобия, найти решения типа бегущей волны уравнения Бюргерса

$$w_t + ww_x = aw_{xx}.$$

2. Используя метод подобия, найти решения типа бегущей волны нелинейных уравнений теплопроводности

$$a) w_t = (ww_x)_x,$$
$$b) w_t + aw_x = (ww_x)_x,$$
$$c) w_t = (ww_x)_x + a.$$

3. Используя метод подобия, найти решения типа бегущей волны нелинейных волновых уравнений

$$a) w_{tt} = (ww_x)_x,$$
$$b) w_{tt} = [f(w)w_x]_x.$$

4. Используя метод подобия, найти решения типа бегущей волны нелинейных уравнений

$$a) w_t = (f(w_x))_x,$$
$$b) w_{tt} = [f(w_x)]_x.$$

5. Используя метод подобия, показать, что следующие уравнения не имеют решений типа бегущей волны

$$a) w_t = (ww_x)_x + x,$$
$$b) w_{tt} = (ww_x)_x + t^2.$$

6. Используя метод подобия, найти точные решения типа бегущей волны уравнения Борна – Инфельда

$$(1 - w_t^2)w_{xx} + 2w_x w_t w_{xt} - (1 + w_x^2)w_{tt} = 0.$$

7. Показать, что уравнение Кортевега – де Фриза

$$w_t + w_{xxx} - 6ww_x = 0$$

имеет следующее решение типа бегущей волны

$$w = -\frac{\lambda}{2\,\mathrm{ch}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}(z - z_0)\right]}, \qquad z = x - \lambda t,$$

где z_0 и λ –произвольные постоянные.

8. Используя метод подобия, найти решение типа бегущей волны уравнения Буссинеска

$$w_{tt} + a(ww_x)_x + bw_{xxxx} = 0.$$

9. Используя метод подобия, рассмотреть уравнение теплопроводности с нелинейным источником степенного типа

$$w_t = aw_{xx} + bw^n$$

и показать, уравнение допускает введение автомодельной переменной $\zeta = xt^{-1/2}$ и автомодельное решение вида

$$w = t^{1/(1-n)}U(\zeta), \qquad \zeta = xt^{-1/2},$$

где функция $U(\zeta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$aU''_{\zeta\zeta} + \frac{1}{2}\zeta U' - \zeta + \frac{1}{n-1}U + bU^n.$$

10. Используя метод подобия, рассмотреть нелинейное уравнение

$$w_{tt} = a\left[w^n w_x\right]_x,$$

которое встречается в задачах волновой и газовой динамики, и показать, уравнение допускает введение автомодельной переменной $\zeta = xt^{-\frac{1}{2}mn-1}$ и автомодельное решение вида

$$w = t^m U(\zeta), \qquad \zeta = xt^{-\frac{1}{2}mn-1}$$

(m – любое).

11. Найти автомодельные решения нелинейных уравнений теплопроводности

$$\begin{aligned} &a) w_t = a(ww_x)_x, \\ &b) w_t = a(w^n w_x)_x, \\ &c) w_t = a(e^w w_x)_x. \end{aligned}$$

12. Найти автомодельные решения нелинейных уравнений теплопроводности с источником

$$\begin{aligned} &a) w_t = ax^{-n}(x^n ww_x)_x + b, \\ &b) w_t = ax^{-n}(x^n ww_x)_x + bw^m, \\ &c) w_t = a(x^n w_x)_x + bw^k, \\ &d) w_t = a(w^n w_x)_x + bx^k. \end{aligned}$$

13. Найти автомодельное решение задачи о диффузионном пограничном слое на плоской пластине, которая описывается уравнением

$$4ayx^{-1/2}w_x + ay^2x^{-3/2}w_y = w_{yy}$$

и граничными условиями

$$w = w_1 \quad \text{при } x = 0, \qquad w = w_2 \quad \text{при } y = 0, \qquad w \to w_1 \quad \text{при } y \to +\infty.$$

14. Найти автомодельные решения нелинейных волновых уравнений

$$\begin{aligned} &a) w_{tt} = a(ww_x)_x + b, \\ &b) w_{tt} = a(w^n w_x)_x + bw^k, \\ &c) w_{tt} = a(e^{\lambda w} w_x)_x. \end{aligned}$$

15. Найти автомодельные решения нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} &a) w_t = f(w_{xx}), \\ &b) w_{tt} = [f(w_x)]_x, \\ &c) w_{tt} = f(w_{xx}). \end{aligned}$$

16. Найти автомодельные решения однородного и неоднородных уравнений Монжа – Ампера:

$$\begin{aligned} &a) w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy}, \\ &b) w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy} + ax^n, \\ &c) w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy} + ayx^n. \end{aligned}$$

17. Найти автомодельные решения уравнений типа Кортевега – де Фриза:

$$\begin{aligned} &a) w_t + w_{xxx} + aww_x bt^{-1}w = 0, \\ &b) w_t + w_{xxx} + aw^n w_x = 0, \\ &c) w_t + w_{xxx} + a(w_x)^n = 0. \end{aligned}$$

18. Найти автомодельное решение уравнения Буссинеска

$$w_{tt} + a(ww_x)_x + bw_{xxxx} = 0.$$

19. Показать, что нестационарное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]$$

допускает автомодельное решение вида

$$w = w(z), \qquad z = xt^{-1/2},$$

а функция $w(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$[f(w)w]' + \frac{1}{2}zw' = 0.$$

20. Показать, что нестационарное уравнение теплопроводности с источником

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left[w^n\frac{\partial w}{\partial x}\right] + bw^k$$

допускает автомодельное решение вида

$$w = t^p u(z), \qquad z = xt^q, \qquad p = \frac{1}{1-k}, \qquad q = \frac{k-n-1}{2(1-k)},$$

а функция $u(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$a(u^n u')' - qzu' + bu^k - pu = 0.$$

21. Показать, что уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\frac{\partial w}{\partial x}$$

допускает автомодельное решение вида

$$w = t^{-1/2}u(z), \qquad z = xt^{-1/2},$$

а функция $u(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$au'' + buu' + \frac{1}{2}zu' + \frac{1}{2}u = 0.$$

22. Показать, что потенциальное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

допускает автомодельное решение вида

$$w = u(z), \qquad z = xt^{-1/2},$$

а функция $u(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$au'' + b(u')^2 + \frac{1}{2}zu' = 0.$$

23. Показать, что уравнение нелинейной фильтрации

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k$$

допускает автомодельное решение вида

$$w = t^p u(z), \qquad z = xt^q, \qquad p = -\frac{(k+2)q+1}{k}$$

q – любое, а функция $u(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$a(u')^k u'' = qzu' + pu.$$

24. Показать, что волновое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]$$

допускает автомодельное решение вида

$$w = w(z), \qquad z = x/t,$$

а функция $w(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(z^2 w')' = [f(w)w']'.$$

25. Показать, что уравнение теплопроводности с источником

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw^n$$

допускает автомодельное решение вида

$$w = x^{2/(1-n)}u(z), \qquad z = y/x,$$

а функция $u(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(1+z^2)u'' - \frac{2(1+n)}{1-n}zu' + \frac{2(1+n)}{(1-n)^2}u - au^n = 0.$$

26. Показать, что уравнение трансзвукового течения газа

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

допускает автомодельное решение вида

$$w = x^{-3k-2}u(z), \qquad z = x^k y,$$

k – любое, а функция $u(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{a}{k+1}u'u'' + \frac{k^2}{k+1}z^2u'' - 5kzu' + 3(3k+2)u = 0.$$

27. Показать, что уравнение Кортевега де Фриза

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + bw\frac{\partial w}{\partial x}$$

допускает автомодельное решение вида

$$w = t^{-2/3}u(z), \qquad z = xt^{-1/3},$$

а функция $u(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$au''' + buu' + \frac{1}{3}zu' + \frac{2}{3}u = 0.$$

28. Показать, что уравнение пограничного слоя

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}$$

допускает автомодельное решение вида

$$w = x^{\lambda+1}u(z), \qquad z = x^{\lambda}y,$$

λ – любое, а функция $u(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(2\lambda+1)(u')^2 - (\lambda+1)uu'' = au'''.$$

3. Метод обобщенного разделения переменных

1. Получите решения с аддитивным разделением переменных следующих уравнений

$$
\begin{aligned}
&a) f(x)w_x^2 + g(y)w_y^2 = h_1(x) + h_2(y),\\
&b) f(x)w_x^n + g(y)w_y^n = aw,\\
&c) \left[f(x)w_x\right]_x + \left[g(y)w_y\right]_y = 0,\\
&d) \left[f(x)w_x\right]_x + \left[g(y)w_y\right]_y = aw,\\
&e) w_t = aw_{xx} + bw_x^2 + c,\\
&f) w_t = \left[f(x)w_x\right]_x + aw_x^2 + bw,\\
&g) w_t = a(e^{\lambda w}w_x)_x + be^{\lambda w},\\
&h) w_t = aw_{xx}^k,\\
&i) w_{tt} = a(e^{\lambda w}w_x)_x + b,\\
&j) w_{tt} + aw_t = b(e^{\lambda w}w_x)_x,\\
&k) w_{xt} = a(e^{\lambda w}w_x)_x + be^{\lambda w},\\
&l) w_{tt} = w_{xxx} + f(w_x) + aw.
\end{aligned}
$$

2. Получите решения с мультипликативным разделением переменных следующих уравнений

$$
\begin{aligned}
&a) w_t = a(ww_x)_x + bw,\\
&b) w_t = a(ww_x)_x + bw^2,\\
&c) w_t = a(w^n w_x)_x + bw,\\
&d) w_t = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1} + cw,\\
&e) w_{tt} = a(w^n w_x)_x,\\
&f) w_{tt} = a(w^n w_x)_x + bw,\\
&g) w_{tt} = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1},\\
&h) w_{tt} = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1} + cw,\\
&i) w_{xt} = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1}.
\end{aligned}
$$

3. Найдите решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения первого порядка

$$w_x = w_y^2 - aw^2 + f(x)w.$$

Решение следует искать в виде

$$w = \varphi(x) + \psi(x)e^{\lambda y}.$$

4. Найдите решение с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности

$$
\begin{aligned}
&a) w_t = a(ww_x)_x,\\
&b) w_t = a(ww_x)_x + b,\\
&c) w_t = a(ww_x)_x + bw.
\end{aligned}
$$

Вид решения:

$$w = f(t)x + g(t)$$

и

$$w = f(t)x^2 + g(t)x + h(t).$$

5. Найдите решение с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности (значение $n = 1$ соответствует решению с осевой симметрией, $n = 2$ – решению с центральной симметрией)

$$\begin{aligned}
&a) w_t = ax^{-n}(x^n w w_x)_x,\\
&b) w_t = ax^{-n}(x^n w w_x)_x + b,\\
&c) w_t = ax^{-n}(w x^n w_x)_x + bw.
\end{aligned}$$

Вид решения:

$$w = f(t)x^2 + g(t).$$

6. При каком значении параметра a нелинейное уравнение

$$w_t = w w_{xx} + a w_x^2 + b$$

имеет решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w = f(t)x^3 + g(t)x^2 + h(t)x + p(t)?$$

7. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения

$$w_t = w_{xx} + w_x^2 + aw^2.$$

Решение искать в виде

$$\begin{aligned}
&a) w = f(t) + g(t)e^{\lambda x},\\
&b) w = f(t) + g(t)\operatorname{sh}(\lambda x),\\
&c) w = f(t) + g(t)\operatorname{ch}(\lambda x),\\
&d) w = f(t) + g(t)\sin(\lambda x + C).
\end{aligned}$$

8. Рассмотреть нелинейное уравнение четвертого порядка для функции тока

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = \nu\Delta\Delta w, \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{1}$$

Найти точные решения уравнения с разделяющимися переменными вида

$$w = \varphi(x) + \psi(y)$$

(использовать метод дифференцирования). Показать, что подстановка

$$w = \varphi(x) + \psi(y)$$

в исходное уравнение позволяет получить следующее функционально-дифференциальное уравнение

$$\psi'_y\varphi'''_{xxx} - \varphi'_x\psi'''_{yyy} = \nu\varphi''''_{xxxx} + \nu\psi''''_{yyyy}.$$

4. Симметрии нелинейных уравнений второго порядка

1. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения Бюргерса и потенциального уравнения Бюргерса

$$a) w_t + ww_x = aw_{xx},$$
$$b) w_t + aw_x^2 = bw_{xx}$$

2. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты обобщенного уравнения Бюргерса

$$w_t + f(w)w_x = aw_{xx}$$

3. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нестационарных уравнений теплопроводности с нелинейным источником

$$a) w_t = a(ww_x)_x + bw,$$
$$b) w_t = a(ww_x)_x + bw^2,$$
$$c) w_t = aw_{xx} + f(w).$$

Провести классификацию симметрий последнего уравнения для всех $f(w)$.

4. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нелинейных уравнений

$$a) w_t = w_{xx} + a(w_x)^2,$$
$$b) w_t = w_{xx} + aw(w_x)^2.$$

5. Показать, что уравнение околозвукового течения газа

$$w_x w_{xx} + w_{yy} = 0$$

допускает операторы

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_w,$$
$$X_4 = y\partial_w, \quad X_5 = x\partial_x + 3w\partial_w, \quad X_6 = y\partial_y - 2w\partial_w$$

и найти соответствующие инварианты.

6. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения движения нелинейной вязко-пластической среды

$$w_t = f(w_x)w_{xx}.$$

Провести классификацию симметрий последнего уравнения для всех $f(w_x)$.

7. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нелинейного уравнения теории фильтрации

$$w_t = [f(w_x)w_x]_x.$$

Провести классификацию симметрий последнего уравнения для всех $f(w_x)$.

8. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нелинейного телеграфного уравнения

$$w_{tt} + f(w)w_t = aw_{xx}.$$

Провести классификацию симметрий последнего уравнения для всех $f(w)$.

9. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нелинейного уравнения теплопроводности в анизотропных средах:

$$[f(x)w_x]_x + [g(y)w_y]_y = h(w).$$

Провести классификацию симметрий последнего уравнения для всех $f(x)$, $g(y)$ при произвольной функции $h(w)$.

10. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения Калоджеро

$$w_{xt} = ww_{xx} + f(w_x).$$

Провести классификацию симметрий последнего уравнения для всех $f(u)$.

11. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нелинейного уравнения

$$w_{tt} = f(w_{xx}).$$

Провести классификацию симметрий последнего уравнения для всех $f(u)$.

12. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения минимальных поверхностей

$$(1 + w_y^2)w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + (1 + w_x^2)w_{yy} = 0.$$

13. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения Борна – Инфельда

$$(1 - w_t^2)w_{xx} + 2w_x w_t w_{xt} - (1 + w_x^2)w_{tt} = 0.$$

14. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты неоднородных уравнений Монжа – Ампера

$$\begin{aligned}
&a) w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = f(x),\\
&b) w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = yf(x),\\
&c) w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = y^2 f(x),\\
&c) w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = e^y f(x).
\end{aligned}$$

Провести классификацию симметрий уравнений для всех $f(x)$.

5. Использование симметрий для поиска точных решений

1. Найти инвариантные решения следующих уравнений

$$\begin{aligned}
&a) w_x w_{xx} + w_{yy} = 0,\\
&b) w_{tt} + f(w)w_t = a w_{xx},\\
&c) w_{xt} = f(w),\\
&d) w_{xt} = w w_{xx} + f(w_x),\\
&e) w_{tt} = f(w_{xx}),\\
&f) (1 + w_y^2)w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + (1 + w_x^2)w_{yy} = 0,\\
&g) (1 - w_t^2)w_{xx} + 2w_x w_t w_{xt} - (1 + w_x^2)w_{tt} = 0,\\
&h) w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = 0.
\end{aligned}$$

2. Найти инвариантные решения следующих уравнений

$$\begin{aligned}
&a) x w_x + y w_y = a w_{xx} + f(w),\\
&b) x w_x + y w_y = w_{xx} + w_{yy} + f(w).
\end{aligned}$$

3. Найти инвариантные решения уравнений параболического типа

$$
\begin{aligned}
&a) w_t + w w_x = a w_{xx},\\
&b) w_t = w_{xx} + a(w_x)^2,\\
&c) w_t = w_{xx} + a w (w_x)^2,\\
&d) w_t = a(w w_x)_x + b w,\\
&e) w_t = a(w w_x)_x + b w^2,\\
&f) w_t + f(w) w_x = a w_{xx},\\
&g) w_t = a w_{xx} + f(w),\\
&h) w_t = f(w_x) w_{xx},\\
&i) w_t = [f(w_x) w_x]_x .
\end{aligned}
$$

6. Уравнения старших порядков

1. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения Кортевега-де Фриза

$$w_t + w_{xxx} - 6 w w_x = 0.$$

2. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза

$$w_t + w_{xxx} - 6 w^2 w_x = 0.$$

3. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнений типа Кортевега-де Фриза

$$
\begin{aligned}
&a) w_t + w_{xxx} + a w w_x + b t^{-1} w = 0,\\
&b) w_t + w_{xxx} + a w_x^2 = 0,\\
&c) w_t + w_{xxx} + a w_x^3 = 0.
\end{aligned}
$$

4. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза

$$w_t + w_{xxx} + f(w) w_x = 0.$$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(w)$.

5. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения, которое встречается в гидродинамике вязкой жидкости

$$w_{xt} + w_x^2 - w w_{xx} = \nu w_{xxx}.$$

6. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения, которое встречается в гидродинамике вязкой жидкости

$$w_{xt} + w_y^2 - ww_{xx} = \nu w_{xxx} + f(t).$$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(t)$.

7. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения стационарного безградиентного гидродинамического пограничного слоя

$$w_y w_{xy} - w_x w_{yy} = w_{yyy}.$$

8. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения стационарного градиентного гидродинамического пограничного слоя

$$w_y w_{xy} - w_x w_{yy} = w_{yyy} + f(x).$$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(x)$.

7. Симметрии систем уравнений математической физики

1. Показать, что координата ζ_{22} продолженного оператора

$$\underset{2}{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial u} + \chi\frac{\partial}{\partial v} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial u_y} + \chi_1\frac{\partial}{\partial v_x} + \chi_2\frac{\partial}{\partial v_y} + \\ + \zeta_{11}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \zeta_{12}\frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \zeta_{22}\frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \chi_{11}\frac{\partial}{\partial v_{xx}} + \chi_{12}\frac{\partial}{\partial v_{xy}} + \chi_{22}\frac{\partial}{\partial v_{yy}}$$

вычисляется по формуле

$$\zeta_{22} = \zeta_{yy} + 2\zeta_{yu}u_y + 2\zeta_{yv}v_y + \zeta_{uu}u_y^2 + 2\zeta_{uv}u_y v_y + \zeta_{vv}v_y^2 + \zeta_u u_{yy} + \zeta_v v_{yy} - \\ -u_x\left(\xi_{yy} + \xi_{uy}u_y + 2\xi_{yv}v_y + \xi_{uy}u_y + \xi_{uu}u_y^2 + 2\xi_{uv}u_y v_y + \xi_u u_{yy} + \xi_{vv}v_y^2 + \right. \\ \left. +\xi_v v_{yy}\right) - u_y\left(\eta_{yy} + \eta_{uy}u_y + 2\eta_{yv}v_y + \eta_{uy}u_y + \eta_{uu}u_y^2 + 2\eta_{uv}u_y v_y + \eta_u u_{yy} + \right. \\ \left. +\eta_{vv}v_y^2 + \eta_v v_{yy}\right) - 2u_{xy}\left(\xi_y + \xi_u u_y + \xi_v v_y\right) - 2u_{yy}\left(\eta_y + \eta_u u_y + \eta_v v_y\right).$$

2. Рассмотреть систему уравнений стационарного пограничного слоя

$$uu_x + vu_y + f(x) = u_{yy},$$
$$u_x + v_y = 0.$$

Показать, что расщепление условий инвариантности по независимым переменным приводит к двум переопределенным системам уравнений. Первое условие инвариантности приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{array}{ll}
u_x u_{xy}: & 3\xi_v = 0 \\
u_y u_{xy}: & 2\xi_u - \eta_v = 0 \\
u_{xy}: & 2\xi_y + \zeta_v = 0 \\
u_x^3: & \xi_{vv} = 0 \\
u_x^2 u_y: & 2\xi_{uv} - \eta_{vv} = 0 \\
u_x u_y^2: & \xi_{uu} - 2\eta_{uv} = 0 \\
u_y^3: & \eta_{uu} = 0 \\
u_x^2: & v\xi_v - 2u\eta_v - \zeta_{vv} - 2\xi_{yv} = 0 \\
u_x u_y: & 2\zeta_{uv} + 2u\eta_u - 2\eta_{yv} - v\eta_v + 2\xi_{yu} = 0 \\
u_y^2: & v\eta_u + 2\eta_{yu} - \zeta_{uu} = 0 \\
u_x v_x: & u\xi_v = 0 \\
u_y v_x: & u\eta_v = 0 \\
u_x: & \xi_{yy} - v\xi_y - v\xi_v - u\xi_x - 2f\eta_v + 2u\eta_y + f\xi_u + \zeta + 2\zeta_{yv} = 0 \\
u_y: & \eta_{yy} + v\eta_y - u\eta_x + 3f\eta_u - 2\zeta_{yu} + \chi = 0 \\
v_x: & u\zeta_v = 0 \\
1: & f'\xi - \zeta_{yy} + u\zeta_x + v\zeta_y - f\zeta_u + 2f\eta_y = 0.
\end{array}$$

Второе условие инвариантности приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{array}{ll}
u_x^2: & \xi_u + \eta_v = 0 \\
u_y: & \chi_u - \eta_x = 0 \\
v_x: & \zeta_y - \xi_y = 0 \\
1: & \zeta_x + \chi_y = 0.
\end{array}$$

3. Показать, что координаты третьего продолжения инфинитезимального оператора определяются формулами

$$\begin{aligned}
\zeta_{111} &= \zeta_{xxx} + 3\zeta_{xxw}w_x + 3\zeta_{xww}w_x^2 + 3\zeta_{xw}w_{xx} + 3\zeta_{ww}w_x w_{xx} + \zeta_{www}w_x^3 + \\
&+\zeta_w w_{xxx} - 3w_{xx}\left(\xi_{xx} + 2\xi_{xw}w_x + \xi_{ww}w_x^2 + \xi_w w_{xx}\right) - \\
&-3w_{xy}\left(\eta_{xx} + 2\eta_{xw}w_x + \eta_{ww}w_x^2 + \eta_w w_{xx}\right) - \\
&-w_x\left(\xi_{xxx} + 3\xi_{xxw}w_x + 3\xi_{xww}w_x^2 + 3\xi_{xw}w_{xx} + \xi_{www}w_x^3 + 3\xi_{ww}w_x w_{xx} + \xi_w w_{xxx}\right) - \\
&-w_y\left(\eta_{xxx} + 3\eta_{xxw}w_x + 3\eta_{xww}w_x^2 + 3\eta_{xw}w_{xx} + \eta_{www}w_x^3 + 3\eta_{ww}w_x w_{xx} + \eta_w w_{xxx}\right) - \\
&-3w_{xxx}\left(\xi_x + \xi_w w_x\right) - 3w_{xxy}\left(\eta_x + \eta_w w_x\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\zeta_{112} = {} & \zeta_{xxy} + \zeta_{xxw} w_y + 2\zeta_{xyw} w_x + 2\zeta_{xww} w_x w_y + 2\zeta_{xw} w_{xy} + \zeta_{yww} w_x^2 + \\
& + \zeta_{www} w_x^2 w_y + 2\zeta_{ww} w_x w_{xy} + \zeta_{yw} w_{xx} + \zeta_{ww} w_y w_{xx} + \zeta_w w_{xxy} - \\
& - 2w_{xx} \left(\xi_{xy} + \xi_{xw} w_y + \xi_{yw} w_x + \xi_{ww} w_x w_y + \xi_w w_{xy}\right) - \\
& - w_{xy} \left(\xi_{xx} + 2\xi_{xw} w_x + \xi_{ww} w_x^2 + \xi_w w_{xx}\right) \\
& - 2w_{xy} \left(\eta_{xy} + \eta_{xw} w_y + \eta_{yw} w_x + \eta_{ww} w_x w_y + \eta_w w_{xy}\right) - \\
& - w_{yy} \left(\eta_{xx} + 2\eta_{xw} w_x + \eta_{ww} w_x^2 + \eta_w w_{xx}\right) - \\
& - w_x \left(\xi_{xxy} + \xi_{xxw} w_y + 2\xi_{xyw} w_x + 2\xi_{xww} w_x w_y + 2\xi_{xw} w_{xy} + \xi_{wwy} w_x^2 + \right. \\
& \left. + \xi_{www} w_x^2 w_y + 2\xi_{ww} w_x w_{xy} + \xi_{yw} w_y w_{xx} + \xi_y w_{xx} + \xi_w w_{xxy}\right) - \\
& - w_y \left(\eta_{xxy} + \eta_{xxw} w_y + 2\eta_{xyw} w_x + 2\eta_{xww} w_x w_y + 2\eta_{xw} w_{xy} + \eta_{wwy} w_x^2 + \right. \\
& \left. + \eta_{www} w_x^2 w_y + 2\eta_{ww} w_x w_{xy} + \eta_{yw} w_y w_{xx} + \eta_y w_{xx} + \eta_w w_{xxy}\right) - \\
& - w_{xxy} \left(2\xi_x + 2\xi_w w_x + \eta_y + \eta_w w_y\right) - w_{xxx} \left(\xi_y + \xi_w w_y\right) - 2w_{xyy} \left(\eta_x + \eta_w w_x\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta_{122} = {} & \zeta_{xyy} + \zeta_{yyw} w_x + 2\zeta_{xyw} w_y + 2\zeta_{yww} w_x w_y + 2\zeta_{yw} w_{xy} + \zeta_{xww} w_y^2 + \\
& + \zeta_{www} w_x w_y^2 + 2\zeta_{ww} w_x w_{xy} + \zeta_{xw} w_{yy} + \zeta_{ww} w_x w_{yy} + \zeta_w w_{xyy} - \\
& - w_{xx} \left(\xi_{yy} + 2\xi_{yw} w_y + \xi_{ww} w_y^2 + \xi_w w_{yy}\right) - \\
& - w_{xy} \left(\eta_{yy} + 2\eta_{yw} w_y + \eta_{ww} w_y^2 + \eta_w w_{yy}\right) \\
& - 2w_{xy} \left(\xi_{xy} + \xi_{yw} w_x + \xi_{xw} w_y + \eta_{ww} w_x w_y + \xi_w w_{xy}\right) - \\
& - 2w_{yy} \left(\eta_{xy} + \eta_{yw} w_x + \eta_{wx} w_y + \eta_{ww} w_x w_y + \eta_w w_{xx}\right) - \\
& - w_x \left(\xi_{xyy} + \xi_{xyw} w_x +, \xi_{xyw} w_x + \xi_{yww} w_x^2 + \xi_{yw} w_{xx} + \right. \\
& + \xi_{xxw} w_y + \xi_{ww} w_x w_{xy} + \xi_{wx} w_{xy} + \xi_{xww} w_x w_y + \xi_{wx} w_{xy} + \\
& \left. + \xi_{xww} w_x w_y + \xi_{www} w_x^2 w_y + \xi_{ww} w_{xx} w_y + \xi_{ww} w_x w_{xy}\right) - \\
& - w_y \left(\eta_{xyy} + \eta_{xyw} w_y + \eta_{yyw} w_x + \eta_{yww} w_x w_y + \eta_{yw} w_{xy} + \eta_{wxy} w_y + \eta_{wx} w_{yy} + \right. \\
& \left. + \eta_{wwy} w_x w_y + \eta_{www} w_x w_y^2 + \eta_{ww} w_y w_{xy} + \eta_{ww} w_x w_{yy} + \eta_{wy} w_{xy} + \eta_{ww} w_y w_{xy}\right) - \\
& - w_{xyy} \left(\xi_x + \xi_w w_x + 2\eta_y + 2\eta_w w_y\right) - 2w_{xxy} \left(\xi_y + \xi_w w_y\right) - w_{xyy} \left(\eta_x + \eta_w w_x\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta_{222} = {} & \zeta_{yyy} + 3\zeta_{yyw} w_y + 3\zeta_{yww} w_y^2 + 3\zeta_{yw} w_{yy} + 3\zeta_{ww} w_y w_{yy} + \zeta_{www} w_y^3 + \\
& + \zeta_w w_{yyy} - 3w_{xy} \left(\xi_{yy} + 2\xi_{yw} w_y + \xi_{ww} w_y^2 + \xi_w w_{yy}\right) - \\
& - 3w_{yy} \left(\eta_{yy} + 2\eta_{yw} w_y + \eta_{ww} w_y^2 + \eta_w w_{yy}\right) - \\
& - w_x \left(\xi_{yyy} + 3\xi_{yyw} w_y + 3\xi_{yww} w_y^2 + 3\xi_{yw} w_{yy} + \xi_{www} w_y^3 + 3\xi_{ww} w_y w_{yy} + \xi_w w_{yy}\right) - \\
& - w_y \left(\eta_{yyy} + 3\eta_{yyw} w_y + 3\eta_{yww} w_y^2 + 3\eta_{yw} w_{yy} + \eta_{www} w_y^3 + 3\eta_{ww} w_y w_{yy} + \eta_w w_{yyy}\right) - \\
& - 3w_{xyy} \left(\xi_y + \xi_w w_y\right) - 3w_{yyy} \left(\eta_y + \eta_w w_y\right).
\end{aligned}
$$

8. Прямой метод подобия Кларксона – Крускала

1. Показать, что уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = u_{xx}$$

допускает решение специального вида

$$u(x,t) = A(x,t) + B(x,t)U(z(x,t)),$$

где z – автомодельная переменная.

Показать, что функции $A(x,t)$ и $B(x,t)$ могут быть найдены таким образом, что

$$u(x,t) = \frac{b}{2}x(bt+b_0)^{-1} + ax(bt+b_0)^{-1}[\beta + U(z)],$$

$$z(x,t) = -a(bt+b_0)^{-1/2}x,$$

а функция $U(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U'' + (\beta + U)U' - \frac{b^2}{4a^4}z = 0.$$

2. Показать, что уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = u_{xx}$$

допускает решение специального вида

$$u(x,t) = A(x,t) + B(x,t)U(z(x,t)),$$

где z – автомодельная переменная.

Показать, что функции $A(x,t)$ и $B(x,t)$ могут быть найдены таким образом, что

$$u(x,t) = -\frac{c}{b_0} + \frac{b_1}{b_0}\frac{b_0x + ct + d}{b_1t + a} + b_0x(b_0x + ct + d)^{-1}[U(z) - 3],$$

$$z(x,t) = b + \ln(b_1t + a) + \ln b_0(b_0x + ct + d)^{-1},$$

а функция $U(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$3 - 4U + U^2 + UU' + U'' = 0.$$

3. Найти автомодельные представления решений обобщенных уравнений Бюргерса

$$
\begin{aligned}
&a) u_t + uu_x + \frac{ju}{2t} = u_{xx}, \qquad j > 0,\\
&b) u_t + u^2 u_x + \frac{ju}{2t} = u_{xx},\\
&c) u_t + u^2 u_x = u_{xx},\\
&d) u_t + uu_x + f(x,t) = g(t) u_{xx},\\
&e) u_t + u^\beta u_x + f(t) u^\alpha = g(t) u_{xx}.
\end{aligned}
$$

4. Показать, что уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x + \frac{ju}{2t} = u_{xx}, \qquad j > 0$$

допускает автомодельное представление вида

$$
\begin{aligned}
&u(x,t) = \frac{x}{2t} + \frac{ad_0}{b_0} t^{\alpha - 1/2} + b_0 t^{-1/2} U(z),\\
&z = -b_0 x t^{-1/2} + d_0 t^\alpha,
\end{aligned}
$$

где функция $U(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U'' + UU' - \lambda U + az = 0,$$

где константы α и j связаны соотношением

$$\alpha^2 + \frac{j\alpha}{2} + \frac{j-1}{4} = 0.$$

5. Показать, что уравнение Бюргерса

$$u_t + u^2 u_x + \frac{ju}{2t} = u_{xx}$$

допускает автомодельное представление вида

$$
\begin{aligned}
&u(x,t) = t^{-1/2} U(z),\\
&z = x t^{-1/2},
\end{aligned}
$$

где функция $U(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U'' - U^2 U' + \frac{1}{2} z U' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - j\right) U = 0.$$

6. Показать, что уравнение Бюргерса

$$u_t + u^2 u_x = u_{xx}$$

допускает автомодельное представление вида

$$u(x,t) = t^{-1/2}U(z),$$
$$z = xt^{-1/2},$$

где функция $U(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U'' - U^2U' + \frac{1}{2}zU' + \frac{1}{4}U = 0.$$

7. Показать, что уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x + f(x,t) = g(t)u_{xx}$$

допускает автомодельное представление вида

$$u(x,t) = -xB'(t)/B(t) + K(t) + B(t)U(z),$$
$$z = -xB(t)/g(t) + D(t),$$

где функция $U(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U'' + UU' + azU' + F(z) = 0,$$

а функции $g(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$g(t)D' + aB^2D - KB = 0,$$

$$g' = aB^2,$$

$$f(x,t) = \left[\left(\frac{B'}{B}\right)' - \left(\frac{B'}{B}\right)^2\right]x - K' + \frac{KB'}{B} - g^{-1}B^3F(z).$$

Рекомендуемый библиографический список

1. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. М.: Гидрометеоиздат, 1978. 256 с.

2. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.

3. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.

4. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1978. 428 с.

5. Sadchev P.L. Self-similarity and beyond. Exact solutions of nonlinear problems. New York: Chapman and Hall/CRC, 2000. 315 p.

6. Barenblatt G.I. Scaling phenomena in fluid mechanics. Cambridge University Press, 1994. 50 p.

Оглавление