МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е.А. ТРОПКИНА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2022

УДК 519.8(075)
ББК 22.161.6я7
Т744

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. С. Я. Новиков,
канд. физ.-мат. наук, доц. Е. А. Алашеева

Тропкина, Елена Андреевна
Т744 **Асимптотические методы**: учебное пособие / *Е.А. Тропкина*. – Самара: Издательство Самарского университета, 2022. – 64 с.

ISBN 978-5-7883-1726-7

Пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения семинарских занятий. В нем вводятся основные понятия и определения теории асимптотических разложений. Наряду с теоретическим материалом подробно разобран ряд примеров. Предлагаются задачи и упражнения для самостоятельного решения.

Предназначено для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Оно может пригодиться для сопровождения курса лекций, читаемого как в очной форме, так и дистанционной, а также для самостоятельного обучения.

УДК 519.8(075)
ББК 22.161.6я7

ISBN 978-5-7883-1726-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математика изучает процессы, происходящие в реальном мире, с помощью математических моделей этих процессов. Такие модели, как правило, содержат довольно сложные зависимости между числовыми параметрами, характеризующими данное явление. По этой причине найти решение в явном виде часто не удается. Однако в случае, когда в задаче имеется малый или большой параметр, задача допускает достаточно простое решение. Методы, позволяющие получить достаточно простое, удобное и в существенном правильное описание изучаемого явления, используя стремление параметра либо к нулю, либо к бесконечности, называют асимптотическими.

В пособии рассматриваются основные понятия и определения теории асимптотических разложений, различные методы построения асимптотических разложений интегралов, зависящих от параметра, а также построение приближенных решений алгебраических уравнений. Наряду с теоретическим материалом подробно разобран ряд примеров. Предлагаются задачи и упражнения для самостоятельного решения.

1 *O*-СИМВОЛИКА

Чтобы описать поведение интересующей нас функции $f(x)$ при $x \to x_0$ в терминах известной функции $g(x)$ часто используют символы, введенные Ландау.

Это некий набор специальных обозначений, который очень коротко позволяет сравнить скорости роста или убывания функций [1-3].

1.1 *o*-малое

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}$ и x_0 – предельная точка множества *D*.

Определение 1

Запись

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \text{ при } x \to x_0 \qquad (1.1)$$

означает, что в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой при $x \to x_0$. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой по сравнению с функцией $g(x)$ в окрестности точки x_0.

Еще в этом случае говорят, что порядок функции $f(x)$ меньше порядка функции $g(x)$ при $x \to x_0$.

Соотношение (1.1) при условии, что $g(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0, может быть переписано в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

или

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Пример 1

$x^2 = o(x)$ при $x \to 0$.

Пример 2

$x^2 = o(e^x)$ при $x \to \infty$.

Предположим, что функция $g(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to \mathrm{x}_0$, то есть

$$\lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} \mathrm{g}(\mathrm{x}) = 0.$$

Тогда, если $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{o}\big(\mathrm{g}(\mathrm{x})\big)$ при $\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0$, то говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем функция $\mathrm{g}(x)$. То есть функция $f(x)$ убывает, причем убывает быстрее, чем функция $g(x)$ при $x \to x_0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то есть

$$\lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} \mathrm{g}(\mathrm{x}) = \infty.$$

Пусть $f(x) = o\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$. Функция $f(x)$ неограниченно растет, но функция $g(x)$ растет еще быстрее при $x \to x_0$. Говорят, что $g(x)$ – бесконечно большая функция более высокого порядка, чем $f(x)$, то есть $g(x)$ неограниченно растет быстрее, чем $f(x)$ при $x \to x_0$.

1.2 *O*-большое

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}$ и x_0 – предельная точка множества *D*, *U* – окрестность точки x_0.

Определение 2

Запись

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \text{ при } x \to x_0 \tag{1.2}$$

означает, что в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ является ограниченной по сравнению с $g(x)$. То есть существуют окрестность U точки x_0, постоянная C такие, что для любого $x \in U \cap D$ выполняется любое из соотношений:

1) $|f(x)| \leq C|g(x)|$;
2) $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq C$, если в окрестности точки x_0 $g(x) \neq 0$;
3) $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $|\alpha(x)| \leq C$.

В этом случае говорят, что порядок функции $f(x)$ не превосходит порядка функции $g(x)$ для любого $x \in U \cap D$.

Пример 3

Докажем, что $x \sin\frac{1}{x} = O(x)$ при $x \to 0$.

Действительно, $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $g(x) = x$ и

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\sin\frac{1}{x}\right| < 1.$$

Пример 4

Проверим, справедливо ли равенство $x \sin\frac{1}{x} = o(x)$ при $x \to 0$.

Для этого вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}.$$

Известно, что предел от $\sin\frac{1}{x}$ не существует при $x \to 0$. Следовательно, рассматриваемое равенство не имеет место и $x\sin\frac{1}{x} \neq$ $\neq o(x)$ при $x \to 0$.

1.3 Свойства и операции с соотношениями порядка

Приведем некоторые свойства и операции с соотношениями порядка [1-3].

$\mathbf{1^0}$ Если $f(x) = o\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$, то $f(x) = O\big(g(x)\big)$.

Обратное утверждение неверно.

Доказательство.

Пусть функция $f(x)$ является бесконечно малой по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$. С учетом определения o-малого, имеем $f(x) = o\big(g(x)\big) = \alpha(x)g(x), x \to x_0$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция. Следовательно, существуют окрестность U точки x_0 и постоянная C такие, что для любого $x \in U \cap D$ выполняется оценка $|\alpha(x)| \leq C$. Тогда, исходя из определения O-большого, получаем

$$f(x) = O\big(g(x)\big), x \to x_0.$$

Обратное утверждение неверно. Это показывает приведенный выше пример: из равенства $x \sin\frac{1}{x} = O(x)$, $x \to 0$ не следует, что $x \sin\frac{1}{x} = o(x)$.

$\mathbf{2^0}$ а) $O\big(f(x)\big) + O\big(f(x)\big) = O\big(f(x)\big)$;
б) $o\big(f(x)\big) + o\big(f(x)\big) = o\big(f(x)\big)$;
в) $O\big(f(x)\big) + o\big(f(x)\big) = o\big(f(x)\big)$.

Доказательство.

Покажем справедливость первого равенства.

Так как через $O\big(f(x)\big)$ обозначается целый класс функций, порядок которых не превосходит порядка функции $f(x)$, то в качестве представителей этого класса возьмем функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$. То есть $g_1(x) = O\big(f(x)\big)$, $g_2(x) = O(f(x))$ и по определению O-большого имеем

$$g_1(x) = O\big(f(x)\big) = \alpha_1(x)f(x),$$

$$g_2(x) = O\big(f(x)\big) = \alpha_2(x)f(x),$$

где $|\alpha_1(x)| \leq C_1$, $|\alpha_2(x)| \leq C_2$ при $x \to x_0$.

Тогда

$$O\big(f(x)\big) + O\big(f(x)\big) = g_1(x) + g_2(x) = \big(\alpha_1(x) + \alpha_2(x)\big)f(x).$$

В силу ограниченности функций $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ их сумма $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$ тоже будет являться ограниченной функцией. Следовательно, по определению O-большого

$$\left(\alpha_1(x)+\alpha_2(x)\right)f(x)=O\left(f(x)\right)$$

и

$$O\left(f(x)\right)+O\left(f(x)\right)=O\left(f(x)\right).$$

$\mathbf{3^0}$ а) $O\left(O\left(f(x)\right)\right)=O\left(f(x)\right)$;

б) $o\left(o\left(f(x)\right)\right)=o\left(f(x)\right)$.

Доказательство.

Покажем справедливость первого равенства.

Пусть $g(x)=O\left(f(x)\right)$, $h(x)=O\left(g(x)\right)$, то есть эти функции представимы в виде

$$h(x)=O\left(g(x)\right)=\alpha_1(x)g(x),$$

$$g(x)=O\left(f(x)\right)=\alpha_2(x)f(x),$$

где $|\alpha_1(x)|\le C_1$, $|\alpha_2(x)|\le C_2$ при $x\to x_0$.

Покажем, что $h(x)=O\left(f(x)\right)$.

Имеем

$$h(x)=O\left(O\left(f(x)\right)\right)=O\left(g(x)\right)=\alpha_1(x)g(x)=\alpha_1(x)\alpha_2(x)f(x).$$

В силу ограниченности функций $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ их произведение $\alpha_1(x)\alpha_2(x)$ тоже будет являться ограниченной функцией. Следовательно, по определению O-большого

$$h(x)=\alpha_1(x)\alpha_2(x)f(x)=O\left(f(x)\right).$$

$\mathbf{4^0}$ а) $O\left(o\left(f(x)\right)\right)=o\left(f(x)\right)$,

б) $o\left(O\left(f(x)\right)\right)=o\left(f(x)\right)$.

Доказательство.

Покажем справедливость первого равенства.

Пусть $g(x) = o\big(f(x)\big)$, $h(x) = O\big(g(x)\big)$, то есть эти функции представимы в виде

$$h(x) = O\big(g(x)\big) = \alpha_1(x)g(x),$$

$$g(x) = o\big(f(x)\big) = \alpha_2(x)f(x),$$

где $|\alpha_1(x)| \le C_1$, $\alpha_2(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Покажем, что $h(x) = o\big(f(x)\big)$.

Имеем

$$h(x) = O\Big(o\big(f(x)\big)\Big) = O\big(g(x)\big) = \alpha_1(x)g(x) = \alpha_1(x)\alpha_2(x)f(x).$$

В силу того, что $\alpha_1(x)$ – ограниченная функция и $\alpha_2(x) \to 0$ при $x \to x_0$, произведение этих функций $\alpha_1(x)\alpha_2(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Следовательно, по определению o-малого

$$h(x) = \alpha_1(x)\alpha_2(x)f(x) = o\big(f(x)\big).$$

$\mathbf{5^0}$ а) $O(Af(x)) = O\big(f(x)\big)$, A – постоянная;

б) $o(Af(x)) = o\big(f(x)\big)$, A – постоянная.

$\mathbf{6^0}$ а) $AO(f(x)) = O\big(f(x)\big)$, A – постоянная;

б) $Ao(f(x)) = o\big(f(x)\big)$, A – постоянная.

$\mathbf{7^0}$ а) $o\big(f(x)\big) \cdot O\big(g(x)\big) = o\big(f(x)g(x)\big)$;

б) $o\big(f(x)\big) \cdot o\big(g(x)\big) = o\big(f(x)g(x)\big)$;

в) $O\big(f(x)\big) \cdot O\big(g(x)\big) = O\big(f(x)g(x)\big)$.

Доказательство.

Покажем справедливость первого равенства.

Пусть $g(x) = o\big(f(x)\big)$, $h(x) = O\big(g(x)\big)$, то есть эти функции представимы в виде

$$h_1(x) = o\big(f(x)\big) = \alpha_1(x)f(x),$$

$$h_2(x) = O\big(g(x)\big) = \alpha_2(x)g(x),$$

где $\alpha_1(x) \to 0$, $|\alpha_2(x)| \le C_1$ при $x \to x_0$.

Покажем, что $h_1(x)h_2(x) = o\big(f(x)g(x)\big)$.

Имеем

$$h_1(x)h_2(x) = o\big(f(x)\big) \cdot O\big(g(x)\big) = \alpha_1(x)\alpha_2(x)g(x)f(x).$$

В силу того, что $\alpha_2(x)$ – ограниченная функция и $\alpha_1(x) \to 0$, при $x \to x_0$ произведение этих функций $\alpha_1(x)\alpha_2(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Следовательно, по определению o-малого

$$h_1(x)h_2(x) = o\big(f(x)g(x)\big).$$

8^0 а) Пусть $f(x) = O\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$ и постоянная $\gamma > 0$. Тогда $|f(x)|^\gamma = O(|g(x)|^\gamma)$ при $x \to x_0$.

б) Пусть $f(x) = o\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$ и постоянная $\gamma > 0$. Тогда $|f(x)|^\gamma = o(|g(x)|^\gamma)$ при $x \to x_0$.

Доказательство.

Покажем справедливость первого равенства.

Пусть $f(x) = O\big(g(x)\big)$, то есть эта функция представима в виде

$$f(x) = O\big(g(x)\big) = \alpha(x)g(x),$$

где $|\alpha(x)| \le C$ при $x \to x_0$.

Покажем, что $|f(x)|^\gamma = O(|g(x)|^\gamma)$.

Имеем $|f(x)|^\gamma = |\alpha(x)g(x)|^\gamma = |\alpha(x)|^\gamma |g(x)|^\gamma$.

В силу того, что $|\alpha(x)|^\gamma$ – ограниченная функция. Следовательно, по определению O-большого

$$|f(x)|^\gamma = O(|g(x)|^\gamma).$$

9^0 Пусть γ_i – постоянная, функции $f_i(x)$, $g_i(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой области D и $|g_i(x)| \le g$ для любого $i = \overline{1..k}$. Тогда

а) если $f_i(x) = O(g_i(x))$ при $x \to x_0$, то

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i f_i(x) = O\big(g(x)\big);$$

б) если $f_i(x) = o(g_i(x))$ при $x \to x_0$, то

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i f_i(x) = o\big(g(x)\big).$$

Доказательство.

Покажем справедливость первого равенства.

Пусть $f_i(x) = O\big(g_i(x)\big)$, то есть эти функции представимы в виде

$$f_i(x) = O\big(g_i(x)\big) = \alpha_i(x) g(x),$$

где $|\alpha_i(x)| \leq C_i$ при $x \to x_0$ для любого $i = \overline{1..k}$.

Существует такая постоянная A, что $|\gamma_i| \leq A$ для любого $i = \overline{1..k}$.

Имеем

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i f_i(x) \leq \sum_{i=1}^{k} |\gamma_i| \cdot |f_i(x)| \leq A \sum_{i=1}^{k} |f_i(x)| =$$
$$= A \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i(x)||g_i(x)| \leq A g(x) \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i(x)|.$$

В силу ограниченности функций $\alpha_i(x)$ для любого $i = \overline{1..k}$ сумма $\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i(x)|$ тоже будет являться ограниченной функцией. Следовательно, по определению *O*-большого

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i f_i(x) = O\big(g(x)\big).$$

$\mathbf{10^0}$ а) Пусть $a < x < b$, $f(x) = O\big(g(x)\big)$ при $x \to b$. Тогда

$$\int_x^b f(t)\,dt = O\left(\int_x^b |g(t)|dt\right) \text{ при } x \to b;$$

б) Пусть $a < x < b$, $f(x) = o\big(g(x)\big)$ при $x \to b$. Тогда

$$\int_x^b f(t)\,dt = o\left(\int_x^b |g(t)|dt\right) \text{ при } x \to b.$$

Доказательство.

Покажем справедливость первого равенства.

Пусть $f(x) = O\big(g(x)\big)$, то есть эта функция представима в виде

$$f(x) = O\big(g(x)\big) = \alpha(x)g(x),$$

где $|\alpha(x)| \leq C$ при $x \to b$.

Имеем

$$\int_x^b f(t)\,dt \leq \int_x^b |f(t)|\,dt = \int_x^b |\alpha(x)| \cdot |g(x)|\,dt \leq C\int_x^b |g(x)|\,dt.$$

Следовательно, по определению *O*-большого

$$\int_x^b f(t)\,dt = O\left(\int_x^b |g(t)|dt\right) \text{ при } x \to b.$$

$\mathbf{11^0}$ Пусть $x \in \mathbb{R}$, y – параметр, $a < y < b$.

а) если $f(x,y) = o\big(g(x,y)\big)$ равномерно по y при $x \to x_0$, то

$$\int_a^b f(x,y)\,dy = o\left(\int_x^b |g(x,y)|dy\right) \text{ при } x \to x_0;$$

б) если $f(x,y) = O\big(g(x,y)\big)$ равномерно по y при $x \to x_0$, то

$$\int_a^b f(x,y)\,dy = O\left(\int_x^b |g(x,y)|dy\right) \text{ при } x \to x_0.$$

Доказательство.

Покажем справедливость первого равенства.

Пусть $f(x,y) = o\big(g(x,y)\big)$, то есть эта функция представима в виде $f(x,y) = o\big(g(x,y)\big) = \alpha(x,y)g(x,y)$, где $\alpha(x,y) \to 0$ при $x \to x_0$.

Имеем

$$\int_a^b f(x,y)\,dy \le \int_a^b |f(x,y)|\,dy = \int_a^b |\alpha(x,y)| \cdot |g(x,y)|\,dy.$$

В силу того, что $\alpha(x,y) \to 0$ при $x \to x_0$, существует такая функция $\varphi(x)$, что $|\alpha(x,y)| \le \varphi(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 при $y \in (a,b)$. Очевидно, что $\varphi(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Тогда

$$\int_a^b f(x,y)\,dy \le \varphi(x) \int_a^b |g(x,y)|\,dy.$$

Следовательно, по определению o-малого

$$\int_a^b f(x,y)\,dy = o\left(\int_x^b |g(x,y)|dy\right) \text{ при } x \to x_0.$$

1.4 Эквивалентные функции

Введем понятие функций одного порядка и эквивалентных функций [1-3].

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}$ и x_0 – предельная точка множества D.

Теорема 1

Пусть в некоторой окрестности U точки x_0 выполняется $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$.

Тогда для того, чтобы эти функции были функциями одного порядка при $x \to x_0$ достаточно существования конечного предела

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a, \;\; a \neq 0, \;\; a \neq \infty.$$

Доказательство.

Пусть существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

Требуется показать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют один и тот же порядок при $x \to x_0$. То есть докажем, что

$$f(x) = O\big(g(x)\big),$$

$$g(x) = O\big(f(x)\big)$$

при $x \to x_0$.

1) Докажем, что $f(x) = O\big(g(x)\big)$.

С учетом

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a,$$

имеем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = |a| < |a| + 1.$$

Следовательно, $|f(x)| < (|a| + 1)|g(x)|$, что по определению O-большого означает $f(x) = O\big(g(x)\big)$.

2) Докажем, что $g(x) = O\big(f(x)\big)$.

С учетом

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{a},$$

имеем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|g(x)|}{|f(x)|} = \frac{1}{|a|} < \frac{1}{|a|} + 1.$$

Следовательно, $|g(x)| < \left(\frac{1}{|a|} + 1\right)|f(x)|$, что по определению O-большого означает $g(x) = O\big(f(x)\big)$.

Определение 3

Если

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^p} = a \neq 0 \ \ (p > 0),$$

то $f(x)$ называется бесконечно малой порядка p относительно бесконечно малой функции x^p.

Определение 4

Если

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x^p} = a \neq 0 \ \ (p > 0),$$

то $g(x)$ называется бесконечно большой порядка p относительно бесконечно большой функции x^p.

На множестве функций O-большое выделяют особый класс функций – это класс эквивалентных функций.

Определение 5

Функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ в точке x_0, если

$$f(x) = \alpha(x) g(x),$$

где $\alpha(x) \to 1$ при $x \to x_0$.

Или

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

В этом случае пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$.

Пример 5
$\sin x \sim x$ при $x \to 0$.

Пример 6
$(1+x)^2 \sim x^2$ при $x \to \infty$.

Свойства эквивалентных функций

$\mathbf{1^0}$ $f(x) \sim f(x)$ при $x \to x_0$.
$\mathbf{2^0}$ Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$. Тогда $g(x) \sim f(x)$.
Доказательство следует из равенства

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

$\mathbf{3^0}$ Пусть $f(x) \sim g(x)$, $g(x) \sim h(x)$ при $x \to x_0$. Тогда $f(x) \sim h(x)$ при $x \to x_0$.

Доказательство свойства следует из равенства

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} \right) = 1.$$

$\mathbf{4^0}$ Пусть $f_1(x) \sim g_1(x)$, $f_2(x) \sim g_2(x)$ при $x \to x_0$. Тогда
1) $f_1(x) f_2(x) \sim g_1(x) g_2(x)$ при $x \to x_0$,
2) $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ при $x \to x_0$.

Доказательство.
1) Покажем, что $f_1(x) f_2(x) \sim g_1(x) g_2(x)$ при $x \to x_0$.
Доказательство следует из определения эквивалентных функций. Имеем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) f_2(x)}{g_1(x) g_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \right) = 1.$$

2) Покажем, что $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ при $x \to x_0$.

Доказательство следует из определения эквивалентных функций. Имеем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)g_2(x)}{f_2(x)g_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\frac{g_2(x)}{f_2(x)}\right)=1.$$

1.5 Задачи и упражнения

1. Провести доказательство всех свойств из пункта 1.3.
2. Определить порядок выражений при $\varepsilon\to 0$:
   а) $\frac{\sin 5\varepsilon}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$;
   б) $\ln(1+\sin\varepsilon)$;
   в) $\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}$.
3. Найти первые три члена разложения функций, при малых значениях ε.
   а) $\left(1-\frac{3}{8}\varepsilon+\frac{51}{256}\varepsilon^2\right)^{-1}$;
   б) $\cos\sqrt{1-2\varepsilon}$;
   в) $\sqrt{1-\frac{1}{2}\varepsilon+2\varepsilon^2}$.
4. Пусть $x\to 0$ и $n>0$. Показать, что
   а) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)\ \ (n<m)$;
   б) $O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m})$.
5. Пусть $x\to\infty$ и $n>0$. Показать, что
   а) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)\ \ (n>m)$;
   б) $O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m})$.
6. Пусть $x\to 0$. Доказать следующие равенства
   а) $x\sin\sqrt{x}=O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$;
   б) $\ln x=o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)\quad(\varepsilon>0)$;
   в) $(1+x)^n=1+nx+o(x)$.
7. Пусть $x\to\infty$. Доказать следующие равенства
   а) $\frac{1+x}{1+x^2}=O\left(\frac{1}{x}\right)$;
   б) $x+x^2\sin x=o(x^2)$.

2 АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

2.1 Асимптотические последовательности

Рассмотрим множество D, лежащее на действительной прямой, имеющее предельную точку x_0. Пусть U – некоторая окрестность точки x_0 [6].

Определение 6

Последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$, $x \in U \cap D$ называется асимптотической последовательностью при $x \to x_0$, если для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$$

при $x \to x_0$.

Если последовательность бесконечна и $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$ равномерно по n, то $\{\varphi_n(x)\}$ называется асимптотической последовательностью равномерной по n.

Если последовательность $\{\varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_k)\}$ зависит от параметров $y_1, y_2, \dots, y_k$ и

$$\varphi_{n+1}(x, y_1, y_2, \dots, y_k) = o(\varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_k))$$

равномерно относительно параметров, то $\{\varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_k)\}$ называется асимптотической последовательностью равномерной по параметрам.

Пример 7

Последовательность $\{\varphi_n(x)\} = \{(x - x_0)^n\}$ является асимптотической при $x \to x_0$.

Пример 8

Последовательность $\{\varphi_n(x)\} = \{x^{-n}\}, |x| > 1$ является асимптотической при $x \to \infty$.

Пример 9

Последовательность $\{\varphi_n(x)\} = \{x^{-n}e^x\}$, $x > 0$ является асимптотической при $x \to \infty$. Отметим, что в данном примере все функции $\varphi_n(x)$ являются бесконечно большими при $x \to \infty$.

Далее мы будем предполагать, что для любой окрестности U предельной точки x_0 функции $\varphi_n(x), n \in \mathbb{N}$ не обращаются тождественно в нуль на множестве $U \cap D$.

Приведем некоторые свойства асимптотических последовательностей [3].

Свойства асимптотических последовательностей

$\mathbf{1^0}$ Любая подпоследовательность $\varphi_{n_k}(x)$ асимптотической последовательности $\varphi_n(x)$ является асимптотической последовательностью.

Доказательство вытекает из свойства $\mathbf{4^0}$ раздела 1 пункта 1.3.

$\mathbf{2^0}$ Если $\varphi_n(x)$ – асимптотическая последовательность и $\gamma > 0$, то последовательность $\{|\varphi_n(x)|^\gamma\}$ также является асимптотической.

Доказательство вытекает из свойства $\mathbf{8^0}$ раздела 1 пункта 1.3.

$\mathbf{3^0}$ Две последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ и $\{\psi_n(x)\}$ такие, что $\varphi_n(x) = O(\psi_n(x))$ и $\psi_n(x) = O(\varphi_n(x))$ при всех n=0, 1, 2, … называются эквивалентными.

Если $\{\varphi_n(x)\}$ и $\{\psi_n(x)\}$ – эквивалентные последовательности, причем $\{\varphi_n(x)\}$ – асимптотическая последовательность, то $\{\psi_n(x)\}$ также является асимптотической последовательностью.

Доказательство.

Пусть $\varphi_n(x) = O(\psi_n(x))$, $\psi_n(x) = O(\varphi_n(x))$ и $\{\varphi_n(x)\}$ – асимптотическая последовательность, то есть для нее выполняется условие $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$.

Покажем, что $\{\psi_n(x)\}$ – асимптотическая последовательность, то есть, что для нее выполняется условие $\psi_{n+1}(x) = o(\psi_n(x))$.

В силу свойства $\mathbf{4^0}$ раздела 1 пункта 1.3, имеем

$$\psi_{n+1}(x) = O\big(\varphi_{n+1}(x)\big) = O\Big(o\big(\varphi_n(x)\big)\Big) =$$
$$=O(o(O(\psi_n(x)))) = O(o(\psi_n(x))) = o(\psi_n(x)).$$

Таким образом, получили $\psi_{n+1}(x) = o(\psi_n(x))$. Следовательно, согласно определению асимптотической последовательности, последовательность $\{\psi_n(x)\}$ является асимптотической.

$\mathbf{4^0}$ Если $\{\varphi_n(x)\}$ и $\{\psi_n(x)\}$ – асимптотические последовательности, имеющие одно и то же число членов, то $\{\varphi_n(x)\psi_n(x)\}$ является асимптотической последовательностью.

Доказательство.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ и $\{\psi_n(x)\}$ – асимптотические последовательности, то есть для них выполняются условия $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$ и $\psi_{n+1}(x) = o(\psi_n(x))$.

Покажем, что $\{\varphi_n(x)\psi_n(x)\}$ – асимптотическая последовательность.

В силу свойства $\mathbf{7^0}$ раздела 1 пункта 1.3, имеем

$$\varphi_{n+1}(x)\psi_{n+1}(x) = o\big(\varphi_n(x)\big) \cdot o\big(\psi_n(x)\big) = o\big(\varphi_n(x)\psi_n(x)\big).$$

Согласно определению асимптотической последовательности, последовательность $\{\varphi_n(x)\psi_n(x)\}$ является асимптотической.

Новые асимптотические последовательности могут быть получены из исходных с помощью интегрирования двумя различными путями. Данный факт отражают следующие два свойства.

$\mathbf{5^0}$ Если $\{\varphi_n(x,y)\}$ – асимптотическая последовательность равномерная по параметру y, $a<y<b$, при $x \to x_0$ и если сходятся интегралы

$$\Phi_n(x) = \int_a^b |\varphi_n(x,y)|dy,$$

то $\{\Phi_n(x)\}$ является асимптотической последовательностью.

Доказательство.

Пусть $\{\varphi_n(x,y)\}$ – асимптотическая последовательность, то есть для нее выполняется условие $\varphi_{n+1}(x,y) = o(\varphi_n(x,y))$ равномерно по параметру $y \in (a,b)$.

Покажем, что $\{\Phi_n(x)\}$ – асимптотическая последовательность, то есть для нее выполняется условие $\Phi_{n+1}(x) = o(\Phi_n(x))$.

В силу свойства $\mathbf{11^0}$ раздела 1 пункта 1.3, имеем

$$\Phi_{n+1}(x) = \int_a^b |\varphi_{n+1}(x,y)|dy = \int_a^b o(|\varphi_n(x,y)|)dy =$$

$$= o\left(\int_a^b |\varphi_n(x,y)|dy\right) = o\big(\Phi_n(x)\big).$$

Таким образом, получили $\Phi_{n+1}(x) = o(\Phi_n(x))$. Следовательно, согласно определению асимптотической последовательности, последовательность $\{\Phi_n(x)\}$ является асимптотической.

$\mathbf{6^0}$ Если $\{\varphi_n(x)\}$ – асимптотическая последовательность при $x \to b$, $a<x<b$ и если интегралы

$$\Phi_n(x) = \int_x^b |\varphi_n(t)|dt$$

сходятся, то $\{\Phi_n(x)\}$ является асимптотической последовательностью при $x \to b$.

Доказательство.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – асимптотическая последовательность, то есть для нее выполняется условие $\varphi_{n+1}(x) = o\big(\varphi_n(x)\big)$ при $x \to b$.

Покажем, что $\{\Phi_n(x)\}$ – асимптотическая последовательность, т.е. для нее выполняется условие $\Phi_{n+1}(x) = o(\Phi_n(x))$ при $x \to b$.

В силу свойства $\mathbf{10^0}$ раздела 1 пункта 1.3, имеем

$$\Phi_{n+1}(x) = \int_x^b |\varphi_{n+1}(t)|dt = \int_x^b o(|\varphi_n(t)|)dt =$$

$$= o\left(\int_x^b |\varphi_n(t)|dt\right) = o\big(\Phi_n(x)\big).$$

Таким образом, получили $\Phi_{n+1}(x) = o(\Phi_n(x))$. Следовательно, согласно определению асимптотической последовательности, последовательность $\{\Phi_n(x)\}$ является асимптотической.

2.2 Асимптотические ряды

Часто бывает так, что для функции $f(x)$ при $x \to x_0$ имеется бесконечная последовательность O-оценок, причем каждая следующая оценка как бы усовершенствует предыдущую.

Пусть имеется последовательность функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$, удовлетворяющих следующим условиям при $x \to x_0$

$$\varphi_1(x) = o\big(\varphi_0(x)\big), \varphi_2(x) = o\big(\varphi_1(x)\big), \ldots, \varphi_{n+1}(x) = o\big(\varphi_n(x)\big), \ldots$$

и последовательность постоянных $a_0, a_1, a_2, \ldots$ таких, что для функции $f(x)$ при $x \to x_0$ имеется бесконечная последовательность O-оценок

$$\begin{cases} f(x) = O\big(\varphi_0(x)\big), \\ f(x) = a_0\varphi_0(x) + O\big(\varphi_1(x)\big), \\ f(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + O\big(\varphi_2(x)\big), \\ \ldots \\ f(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + O\big(\varphi_n(x)\big), \\ \ldots \end{cases} \quad (2.1)$$

Очевидно, что вторая формула усовершенствует первую, поскольку

$$a_0\varphi_0(x) + O\big(\varphi_1(x)\big) = a_0\varphi_0(x) + \alpha_1(x)\varphi_1(x),$$

где $|\alpha_1(x)| < C_1, C_1 = const.$

С учетом того, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ асимптотическая при $x \to x_0$, то есть имеет место равенство $\varphi_1(x) = o\big(\varphi_0(x)\big)$, получаем $\varphi_1(x) = \alpha_0(x)\varphi_0(x)$, где $\alpha_0(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Тогда

$$a_0\varphi_0(x) + O\big(\varphi_1(x)\big) = \big(a_0 + \alpha_1(x)\alpha_0(x)\big)\varphi_0(x).$$

Так как функция $a_0 + \alpha_1(x)\alpha_0(x)$ является ограниченной в окрестности точки x_0, то в силу определения O-большого, имеем

$$\varphi_1(x) = O\big(\varphi_0(x)\big) \text{ при } x \to x_0.$$

Аналогично, третья формула уточняет вторую и так далее.

Чтобы записать все множество формул (2.1) одной формулой, воспользуемся следующим обозначением:

$$f(x) \approx a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) + \cdots, x \to x_0.$$

Правая часть этого выражения называется асимптотическим рядом для функции $f(x)$ или асимптотическим разложением функции $f(x)$. Это понятие впервые было введено Пуанкаре [1, 2, 6].

Определение 7

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – асимптотическая последовательность функций при $x \to x_0$. Формальный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x),$$

где a_n – постоянные, называется асимптотическим разложением функции $f(x)$, если для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x) = o\big(\varphi_n(x)\big), x \to x_0. \qquad (2.2)$$

При этом ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

называют асимптотическим рядом функции $f(x)$ и употребляют запись

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)\,, x \to x_0. \qquad (2.3)$$

Частичные суммы этого формального ряда называются асимптотическими приближениями к функции $f(x)$. Первый член ряда называется главным членом разложения:

$$f(x) \approx a_0 \varphi_0(x), x \to x_0.$$

Замечание 1

В определении асимптотического разложения вместо равенства (2.2) иногда более удобно использовать эквивалентное ему условие:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x) = O\big(\varphi_n(x)\big), x \to x_0. \qquad (2.4)$$

Покажем, что равенство (2.4) имеет место. Для этого формулу (2.2) перепишем в виде

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x) = a_n \varphi_n(x) + o\big(\varphi_n(x)\big), x \to x_0.$$

Оценим выражение, стоящее в правой части:

$$a_n \varphi_n(x) + o\big(\varphi_n(x)\big) = \big(a_n + \alpha_n(x)\big)\varphi_n(x),$$

где $\alpha_n(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$. В силу того, что $\alpha_n(x) \to 0$ при $x \to x_0$, существует постоянная C_n такая, что в окрестности точки x_0 выполняется неравенство $|\alpha_n(x)| < C_n$. Тогда функция $a_n + \alpha_n(x)$ является ограниченной в окрестности точки x_0 и в силу определения *O*-большого

$$a_n\varphi_n(x) + o\big(\varphi_n(x)\big) = O\big(\varphi_n(x)\big), \quad x \to x_0.$$

Частичные суммы

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k\varphi_k(x)$$

являются приближенными значениями функции $f(x)$ с ошибкой $O(\varphi_n(x))$ при $x \to x_0$, то есть ошибка имеет величину порядка первого отброшенного члена. Если такое асимптотическое разложение существует, то оно единственно и коэффициенты определяются последовательно по формуле

$$a_n = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\varphi_k(x)}{\varphi_n(x)}, n \in \mathbb{N},$$

$$a_0 = \lim_{x\to x_0} f(x). \qquad (2.5)$$

Определение 8

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – асимптотическая последовательность при $x \to x_0$. Функция $f(x)$ называется асимптотическим нулем относительно последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, если $f(x) = o(\varphi_n(x))$, для любого n=0, 1, 2,… при $x \to x_0$.

Пример 10

Функция e^{-4x} является асимптотическим нулем относительно последовательности $\{x^{-n}\}, n = 0, 1, 2, \dots, x \to \infty$ и справедливо равенство

$$e^{-4x} \approx 0\cdot 1 + 0\cdot x^{-1} + 0\cdot x^{-2} + \cdots, x \to \infty.$$

Определение 9

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются асимптотически совпадающими при $x \to x_0$ относительно асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, если $(f(x) - g(x))$ – разность этих функций является асимптотическим нулем относительно асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$.

Теорема 2

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – асимптотическая последовательность при $x \to x_0$. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ допускают асимптотические разложения по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, то эти разложения совпадают тогда и только тогда, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ асимптотически совпадают относительно последовательности $\{\varphi_n(x)\}$.

Доказательство.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют один и тот же асимптотический ряд, то есть

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \approx g(x), x \to x_0,$$

то из определения асимптотического разложения следует, что для любого n=0, 1, 2, … выполняется равенство

$$f(x) - g(x) = o\big(\varphi_n(x)\big),$$

то есть функции $f(x)$ и $g(x)$ асимптотически совпадают относительно последовательности $\{\varphi_n(x)\}$.

Предположим теперь, что функции $f(x)$ и $g(x)$ асимптотически совпадают относительно последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ и допускают асимптотические разложения

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

$$g(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(x),$$

при $x \to x_0$, что означает представимость этих функций в виде

$$f(x) = a_0 \varphi_0(x) + o\big(\varphi_0(x)\big),$$

$$g(x) = b_0 \varphi_0(x) + o\big(\varphi_0(x)\big).$$

Вычтем одно равенство из другого, получим

$$(a_0 - b_0)\varphi_0(x) = o(\varphi_0(x)).$$

Последнее равенство, возможно лишь при $(a_0 - b_0) = 0$, то есть при $a_0 = b_0$.

Теперь найдем разность между следующими выражениями

$$f(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + o\big(\varphi_1(x)\big),$$

$$g(x) = a_0\varphi_0(x) + b_1(x)\varphi_1(x) + o\big(\varphi_1(x)\big),$$

получим

$$(a_1 - b_1)\varphi_1(x) = o(\varphi_1(x)).$$

Откуда $(a_1 - b_1) = 0$, то есть $a_1 = b_1$.

Повторяя аналогичные рассуждения, получим $a_n = b_n$ для любого $n = 0, 1, 2, \dots$.

Следствие 1

Если функция $f(x)$ допускает асимптотическое разложение по последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, то это разложение является единственным.

Доказательство.

Пусть функция $f(x)$ имеет два асимптотических разложения по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ при $x \to x_0$:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)\,, x \to x_0, \qquad (2.6)$$

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} b_n\varphi_n(x)\,, x \to x_0. \qquad (2.7)$$

Обозначим через k наименьшее из чисел n, для которых $a_n \neq b_n$. Из соотношения (2.6) вычтем (2.7)

$$0 = (a_k - b_k)\varphi_k(x) + O\big(\varphi_{k+1}(x)\big).$$

Разделим обе части равенства на $(a_k - b_k)$. Это сделать можно в силу того, что $a_k \neq b_k$. Получим $\varphi_k(x) = O(\varphi_{k+1})$, что противоречит условию: $\{\varphi_n(x)\}$ – асимптотическая последовательность и $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n)$ при $x \to x_0$.

2.3 Степенные асимптотические разложения

Степенными называются разложения по асимптотическим последовательностям вида $\{(x - x_0)^n\}$ при $x \to x_0$ или $\{(x - x_0)^{-n}\}$ при $x \to \infty$. Простой заменой переменной эти последовательности приводятся к случаю асимптотической последовательности $\{x^{-n}\}$ при $x \to \infty$ [2, 6].

Определение 10

Асимптотическое разложение функции $f(x)$ по последовательности $\{x^{-n}\}$ при $x \to \infty$ имеет вид

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}, x \to \infty$$

и называется асимптотическим степенным рядом.

Действия над асимптотическими степенными рядами

Предположим, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют асимптотические разложения по последовательности $\{x^{-n}\}$ при $x \to \infty$

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad g(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}.$$

1. Асимптотические степенные ряды можно умножать на константу. В результате получается асимптотический степенной ряд. Если A – постоянная, то

$$Af(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Aa_n}{x^n}, \qquad x \to \infty.$$

Данный результат следует из определения асимптотического степенного ряда.

2. Асимптотические степенные ряды можно складывать. В результате получается асимптотический степенной ряд.

$$f(x) + g(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{x^n}, \qquad x \to \infty.$$

Данный результат следует из определения асимптотического степенного ряда.

3. Асимптотические степенные ряды можно перемножать. В результате получается асимптотический степенной ряд.

$$f(x)g(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}, \qquad x \to \infty,$$

где $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$, n=0, 1, 2, … .

Для любого n=0, 1, 2, … имеем

$$f(x) \approx a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \qquad x \to \infty,$$

$$g(x) \approx b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_n}{x^n} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \qquad x \to \infty.$$

Перемножим последние два выражения, получим

$$f(x)g(x) \approx c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right),$$

где $c_0 = a_0 b_0,\ \ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,\ \ \ldots,\ \ c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$.

Что и требовалось доказать.

4. Если $a_0 \neq 0$, то

$$\frac{1}{f(x)} \approx \frac{1}{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{x^n}, \ \ x \to \infty.$$

Покажем справедливость данного соотношения.

Для любого n = 0, 1, 2, … имеем

$$f(x) \approx a_0 + a_1 x^{-1} + \cdots + a_n x^{-n} + O\left(x^{-(n+1)}\right), \qquad x \to \infty.$$

Получим разложение в асимптотический степенной ряд функции $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \cdots}$. Чтобы определить коэффициенты этого разложения, воспользуемся формулой (2.5):

$$d_0 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x)},$$

$$d_n = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{f(x)} - \sum_{k=0}^{n-1} d_k x^{-k}}{x^{-n}}.$$

При $n = 1$ имеем

$$d_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{d_0}{x^0}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{a_0 + a_1 x^{-1} + O(x^{-2})} - \frac{1}{a_0}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-a_1 + O(x^{-1})}{a_0(a_0 + a_1 x^{-1} + O(x^{-2}))} = -\frac{a_1}{a_0^2}.$$

$$d_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{f(x)} - d_0 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + O(x^{-2})} - \frac{1}{a_0} + \frac{a_1}{a_0^2 x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^2}.$$

Аналогичным образом определяются все последующие коэффициенты разложения функции $\frac{1}{f(x)}$ в асимптотический степенной ряд при $x \to \infty$.

5. Если $f(x)$ непрерывна при $x > a > 0$, то при $x > a$ функция

$$F(x) = \int_x^\infty \left\{f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t}\right\} dt$$

разлагается в асимптотический степенной ряд

$$F(x) \approx \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{nx^n} + \cdots, x \to \infty.$$

Так как $f(t) - a_0 - a_1 t^{-1}$ непрерывна при $t > a$ и имеет порядок $O(t^{-2})$ при $t \to \infty$, то интеграл $F(x)$ существует при $x > a$.

Так как

$$F(x) = \int_x^{\infty} \left\{ \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{t^k} + O\left(\frac{1}{t^{k+1}}\right) \right\} dt$$

для каждого целого числа $n \geq 2$, то имеем

$$F(x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{(k-1)x^{k-1}} + O\left(\frac{1}{x^n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{kx^k} + O\left(\frac{1}{x^n}\right), x \to \infty.$$

Таким образом, утверждение доказано.

6. Если $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, которая разлагается в асимптотический степенной ряд при $x \to \infty$, то это разложение имеет вид

$$f'(x) \approx -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)a_{n-1}}{x^n}.$$

Предположим, что

$$f'(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, x \to \infty.$$

Так как $f'(x)$ непрерывна, то

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt = \int_x^y \left\{ f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} + b_0 + \frac{b_1}{t} \right\} =$$

$$= b_0(y - x) + b_1 \ln\frac{y}{x} + \int_x^y \left\{ f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} \right\} dt.$$

Но $f(y) \to a_0$ при $y \to \infty$ и интеграл

$$\int_x^{\infty} \left\{ f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} \right\} dt$$

сходится, так как подынтегральная функция имеет порядок $O(t^{-2})$. Следовательно, $b_0 = b_1 = 0$ и

$$a_0 - f(x) = \int_x^{\infty} \left\{ f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} \right\} dt.$$

Согласно формулам из предыдущего пункта, имеем

$$a_0 - f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{n x^n}, \ \ x \to \infty.$$

С другой стороны, знаем, что

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad x \to \infty,$$

откуда

$$a_0 - f(x) \approx -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \ \ x \to \infty.$$

Так как разложение в асимптотический степенной ряд единственно, то $b_{n+1} = -n a_n$, откуда $b_n = -(n-1)a_{n-1}$ и

$$f'(x) \approx -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)a_{n-1}}{x^n}, x \to \infty.$$

Другими словами, асимптотические степенные разложения допускают формальное почленное дифференцирование.

2.4 Сравнение сходящихся и степенных рядов

Классический пример использования асимптотических оценок дает формула Тейлора, позволяющая аппроксимировать значения гладкой функции значениями соответствующего полинома [6].

Так ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

сходится на всей числовой прямой и является разложением функции $f(x) = e^{-x}$. Для произвольного n = 0, 1, 2, … представим ряд в виде суммы двух функций

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} = S_n(x) + R_n(x),$$

где $S_n(x)$ – частичная сумма ряда, а $R_n(x)$ – остаточный член.

При этом $f(0) = S_n(0)$, а в произвольной фиксированной точке $x \neq 0$ остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Следовательно, при увеличении степени полинома Тейлора абсолютная погрешность стремится к нулю, что позволяет вычислить значение функции в фиксированной точке с любой наперед заданной точностью.

Однако при изучении поведения функции в окрестности нуля часто более полезной оказывается другая оценка, связанная с формулой Тейлора,

$$e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} = o(x^n), x \to 0.$$

В этой оценке важно, что каждое слагаемое частичной суммы $S_n(x)$ является при $x \to 0$ величиной бесконечно малой по сравнению с предыдущим слагаемым, а остаточный член $R_n(x)$ является величиной бесконечно малой по сравнению с последним слагаемым в частичной сумме ряда. Из этого следует, что для фиксированного n при замене функции на соответствующий полином Тейлора относительная погрешность стремится к нулю при $x \to 0$.

Оказывается, что для получения такого типа оценок могут использоваться расходящиеся ряды.

Пример 11

Еще в XVIII веке Леонардом Эйлером был рассмотрен расходящийся всюду кроме нуля степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k!\,x^k. \tag{2.8}$$

Оказалось, что этот ряд может быть получен в результате формального разложения в степенной ряд функции

$$E(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{1+xt}.$$

Разложив по степеням t функцию $\frac{1}{xt+1}$ и учтя формулу для суммы геометрической прогрессии, имеем

$$(1+xt)^{-1} = 1 - xt + \dots + (-1)^n(xt)^n + (-1)^{n+1}(xt)^{n+1} + \dots =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(xt)^k + (-1)^{n+1}(xt)^{n+1} + (-1)^{n+2}(xt)^{n+2} + \dots =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(xt)^k + \frac{(-1)^{n+1}(xt)^{n+1}}{1+xt}.$$

Следовательно,

$$E(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(xt)^k + \frac{(-1)^{n+1}(xt)^{n+1}}{1+xt}\right\}dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-x)^k\int_0^{\infty} e^{-t}t^k dt + (-1)^{n+1}x^{n+1}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}t^{n+1}}{1+xt}dt.$$

Таким образом, функцию $E(x)$ можно представить в виде

$$E(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

где, с учетом выражения для Эйлерова интеграла,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k \int_0^{\infty} e^{-t}t^k dt = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k k!$$

является частичной суммой ряда (2.8), а

$$R_n(x) = (-x)^{n+1} \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^{n+1}}{1 + xt} dt$$

представляет собой остаточный член.

Поскольку n-ый член разложения имеет вид

$$S_n(x) - S_{n-1}(x) = (-1)^k k!\, x^k,$$

то последовательность частичных сумм не имеет конечного предела ни в одной точке отличной от нуля.

Таким образом получается парадоксальная ситуация – однозначно определенной функции $E(x)$ ставится в соответствие ряд, расходящийся всюду кроме точки $x = 0$. Возникает вопрос: в каком смысле расходящийся ряд (2.8) характеризует данную функцию, и какую полезную информацию о поведении функции $E(x)$ можно получить, используя данный ряд?

Зафиксировав точку $x \neq 0$, легко заметить, что абсолютная погрешность $|E(x) - S_n(x)|$ растет при увеличении номера n. Поэтому мы не можем использовать частичные суммы ряда (2.8) для нахождения значения функции $E(x)$ в точке $x \neq 0$.

Однако ситуация выглядит иначе, если зафиксировать номер n и устремить x к нулю. Рассмотрим область $\Omega = \{x \in \mathbb{R}, |x| > 0\}$.

Существует постоянная M такая, что для любых $x \in \Omega$ и $t \in [0, \infty)$ выполняется неравенство $|1 + xt|^{-1} < M$, и следовательно при $x \to 0$ имеем

$$|R_n(x)| \leq M(n+1)!\, |x|^{n+1} = O(x^{n+1}).$$

Таким образом, при $x \to 0$ в области Ω остаточный член является величиной бесконечно малой по сравнению с последним слагаемым в частичной сумме ряда, и при замене функции частичной суммой ряда (3.8) погрешность стремится к нулю при $x \to 0$. При этом можно заметить, что каждое слагаемое в частичной сумме ряда также является величиной бесконечно малой по сравнению с предыдущим слагаемым.

Таким образом, найденный Эйлером расходящийся ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k!\, x^k$$

обладает тем свойством, что для любого n = 0, 1, 2, …

$$E(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\, x^k + O(x^{n+1}), \qquad x \to 0.$$

В данном случае мы имеем дело с некоторым новым взглядом на вопрос представимости функций степенными рядами, основанным на оценке относительной (а не абсолютной, как в классическом случае) погрешности приближения значений функции частичными суммами ряда. Возникающие при таком подходе ряды принято называть асимптотическими. При этом довольно часто асимптотические ряды оказываются расходящимися и используются не столько для оценки значения функции в конкретной точке сколько для изучения поведения функции при стремлении аргумента к некоторому предельному значению.

2.5 Задачи и упражнения

1. Показать, что последовательности функций:
   а) $\{x^{-5n}\}$;
   б) $\{(x+3)x^{-2n}\}$;
   в) $\{(x^2-2x+4)x^{-3n}\}$

являются асимптотическими при $x \to \infty$.

2. Найти степенные асимптотические разложения функций:
   а) $f(x) = (x^2-2x-3)^{-1}$ при $x \to \infty$;
   б) $g(x) = x^3 e^{-x}$ при $x \to \infty$.

3. Показать, что функции $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1+e^{-x}}{1+x}$ имеют при $x \to \infty$ одно и то же асимптотическое разложение

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{-(k+1)}.$$

3 ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

3.1 Разложение подынтегральной функции

Задача нахождения определенного интеграла полностью решается применением формулы Ньютона-Лейбница. Однако эту формулу не всегда возможно или удобно применять, так как полученные выражения для первообразных могут быть очень громоздки или первообразная может не выражаться через элементарные функции. Для приближенного вычисления определённого интеграла используются различные приближенные методы. Рассмотрим использование разложений в степенной ряд для решения этой задачи. Степенные разложения удобны для этой цели, так как первообразные от степенных функций выражаются просто и вычисления сводятся к суммированию членов полученного ряда. Основой для таких приложений служат свойства функциональных рядов, отраженные в следующей теореме [7].

Теорема 3

Если функции $f_n(x), n \in \mathbb{N}$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (3.1)$$

равномерно сходится на отрезке $[a, b]$, то ряд (3.1) можно интегрировать почленно в пределах от a до $x \in [a, b]$ и выполняется равенство

$$\int_a^x (f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t) + \cdots)dt =$$

$$= \int_a^x f_1(x)dt + \int_a^x f_2(x)dt + \cdots + \int_a^x f_n(x)dt + \cdots$$

или

$$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt. \quad (3.2)$$

Причем ряд (3.2) сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Разложение в ряд (3.2) позволяет вычислить приближенное значение интеграла.

Пример 12

Оценим величину интеграла

$$I(\varepsilon) = \int_0^1 \sin(\varepsilon x^2)dx \quad (3.3)$$

при малых ε. Разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора дает

$$\sin(\varepsilon x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(\varepsilon x^2)^{2n-1}}{(2n-1)!} =$$
$$= \varepsilon x^2 - \frac{1}{6}\varepsilon^3 x^8 + \frac{1}{120}\varepsilon^5 x^{10} + O(\varepsilon^7). \quad (3.4)$$

Применяя к полученному ряду (4.4) признак Даламбера, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}(\varepsilon x^2)^{2n-1}(2n-3)!}{(2n-1)!\,(-1)^n(\varepsilon x^2)^{2n-3}} = 0$$

Следовательно, ряд (3.4) сходится при любых значениях εx^2. Поскольку $|x| < 1$, а ε мало, то остаточный член в формуле (3.4) есть величина порядка ε^7 для всех значений x из промежутка интегрирования. Подставляя теперь ряд (3.4) в исходный интеграл (3.3) и интегрируя почленно, получаем

$$I(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\varepsilon^{2n-1}}{(2n-1)!} \int_0^1 x^{4n-2}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\varepsilon^{2n-1}}{(2n-1)!\,(4n-1)} =$$
$$= \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{1}{42}\varepsilon^3 + \frac{1}{1320}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^7).$$

Пример 13

Рассмотрим полный эллиптический интеграл первого рода

$$I(\varepsilon) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \varepsilon \sin^2 x}} \tag{3.5}$$

при малых ε. Используя биномиальную формулу, можно записать

$$(1 - \varepsilon \sin^2 x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon \sin^2 x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-\varepsilon \sin^2 x)^2 +$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-\varepsilon \sin^2 x)^3 +$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{4!}(-\varepsilon \sin^2 x)^4 + O(\varepsilon^5). \tag{3.6}$$

Применения признака Даламбера дает

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)(n-2)!\,(-\varepsilon \sin^2 x)^{n-1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(-\frac{2n-5}{2}\right)(n-1)!\,(-\varepsilon \sin^2 x)^{n-2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-3)\varepsilon \sin^2 x}{2(n-1)} = \varepsilon \sin^2 x < 1.$$

Таким образом, ряд (3.6) сходится при всех значениях *x*, для которых $\varepsilon \sin^2 x < 1$. Поскольку $\sin^2 x \leq 1$, а параметр ε с самого начала предполагается малым, то остаточный член в формуле (3.6) представляет собой величину порядка ε^5для любых значений *x*.

Подставляя ряд (3.6) в формулу (3.5) и интегрируя почленно, получаем

$$I(\varepsilon) = \int_0^{\pi/2} dx + \frac{1}{2}\varepsilon \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx + \frac{3}{8}\varepsilon^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx +$$

$$+ \frac{5}{16}\varepsilon^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx + \frac{35}{128}\varepsilon^4 \int_0^{\pi/2} \sin^8 x\,dx + O(\varepsilon^5).$$

Воспользовавшись формулой

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx = \frac{(2n)!\,\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}},$$

можно переписать разложение в виде

$$I(\varepsilon) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{9}{64}\varepsilon^2 + \frac{25}{256}\varepsilon^3 + \frac{1225}{16384}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5)\right].$$

Пример 14

Рассмотрим интеграл

$$I(x) = \int_0^x t^{-5/8} e^{-t} dt \qquad (3.7)$$

при малых x. Разложим экспоненту, входящую в подынтегральное выражение, в ряд Тейлора

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} = 1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + O(t^5). \quad (3.8)$$

Используя признак Даламбера, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n t^n (n-1)!}{n!\,(-1)^{n-1} t^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-t}{n} = 0$$

для любых *t*. Следовательно, ряд (3.8) сходится при всех значениях *t*. Подставляя теперь ряд (3.8) в интеграл (3.7) и интегрируя почленно, получаем

$$I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{n-3/4} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+3/8}}{n!\,(n+3/8)} =$$
$$= \frac{8}{3}x^{\frac{3}{8}} - \frac{8}{11}x^{\frac{11}{8}} + \frac{4}{19}x^{\frac{19}{8}} - \frac{4}{81}x^{\frac{27}{8}} + O\left(x^{\frac{35}{8}}\right).$$

Пример 15

Рассмотрим неполную гамма-функцию

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (\alpha > 0, x > 0). \qquad (3.9)$$

Разложим экспоненту, входящую в подынтегральное выражение, в ряд Тейлора

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} = 1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + O(t^5). \quad (3.10)$$

Используя признак Даламбера, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n t^n (n-1)!}{n!\,(-1)^{n-1} t^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-t}{n} = 0$$

для любых t. Следовательно, ряд (3.10) сходится при всех значениях t. Подставляя теперь ряд (3.10) в интеграл (3.9) и интегрируя почленно, получаем

$$\gamma(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{\alpha+n-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+\alpha}}{n!\,(n+\alpha)}.$$

Поскольку ряд является асимптотическим при $x \to 0+$, то его частичные суммы дают хорошую аппроксимацию функции $\gamma(\alpha, x)$ при малых положительных значениях аргумента x.

3.2 Интегрирование по частям

Асимптотические разложения некоторых интегралов, зависящих от параметра, могут быть получены последовательным интегрированием по частям. Члены асимптотического ряда находятся один за другим повторным применением этой операции, а асимптотический характер полученного ряда затем устанавливается исследованием остаточного члена, который имеет интегральный вид [6, 7].

Пример 16

Найдем асимптотический при $x \to \infty$ ряд для функции

$$I(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^3} dt.$$

Метод интегрирования по частям основан на равенстве

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Обычно разбиение на множители u и dv при интегрировании по частям осуществляется таким образом, чтобы выражение dv можно было проинтегрировать. Кроме того, u и dv следует выбирать так, чтобы последовательные члены разложения интеграла u и $I(x)$, получающиеся при интегрировании по частям, являлись бы величинами более высокого порядка по малому параметру.

Применяя операцию интегрирования по частям несколько раз, получим

$$I(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^3} dt = \frac{e^{-x}}{x^3} - 3\int_x^\infty t^{-4}e^{-t}dt =$$
$$= \frac{e^{-x}}{x^3} - \frac{3e^{-x}}{x^4} + 3 \cdot 4\int_x^\infty t^{-4}e^{-t}dt = \cdots =$$
$$= \frac{2!\, e^{-x}}{2x^3} - \frac{3!\, e^{-x}}{2x^4} + \cdots + \frac{(-1)^n (n-1)!\, e^{-x}}{2x^n} +$$
$$+ \frac{(-1)^{n+1} n!}{2} \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt.$$

Таким образом, имеем

$$I(x) = \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!\, e^{-x}}{2x^k} + \frac{(-1)^n n!}{2} \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt.$$

Остаточный член ряда имеет вид

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{2} \int\limits_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt.$$

В силу того, что $\frac{1}{t^{n+1}} \leq \frac{1}{x^{n+1}}$ при всех $x \leq t < \infty$, остаточный член ряда можно оценить

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^{n+1} n!}{2} \int\limits_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt \right| \leq \frac{n!}{2x^{n+1}} \int\limits_x^{\infty} e^{-t} dt =$$

$$= \frac{n!\, e^{-x}}{2x^{n+1}} = e^{-x} O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \to \infty.$$

Следовательно,

$$I(x) = \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!\, e^{-x}}{2x^k} + e^{-x} O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \to \infty. \quad (3.11)$$

Заметим, что ряд (3.11) расходится по признаку Даламбера. Однако при фиксированном n остаточный член в разложении (3.11) может быть сделан сколь угодно малым за счет выбора достаточно большого x.

4.3 Задачи и упражнения

1. Найти разложение интегралов при малых ε при больших положительных x:

а) $\int_0^1 \frac{\sin(\varepsilon t)}{\sqrt{t}} dt$;

б) $\int_0^1 \frac{1-\cos(\varepsilon t)}{\sqrt[3]{t}} dt$;

в) $\int_0^{\varepsilon} \frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}} dt$.

2. Найти разложение интегралов при больших положительных x:

а) $\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$;

б) $\int_0^1 e^{-xt} \ln(2+t)\, dt$;

в) $\int_x^\infty e^{-t^2}\, dt$.

4 ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Будем исследовать алгебраические уравнения, зависящие от малого параметра. Их приближенные решения будут строиться в виде асимптотических разложения.

4.1 Регулярно возмущенные алгебраические уравнения. Невырожденный случай

Проанализируем квадратные и кубические уравнения, рассмотрим несколько примеров, сравнивая полученные результаты с точными решениями. В данном пункте рассмотрим невырожденный случай, то есть случай, когда невозмущенное уравнение имеет корни кратности 1 [7].

Пример 17

Будем искать корни уравнения

$$x^2 - (3 + 4\varepsilon)x + 2 + 3\varepsilon = 0 \tag{4.1}$$

при малом ε. В случае $\varepsilon = 0$ имеем уравнение

$$x^2 - 3x + 2 = 0. \tag{4.2}$$

Уравнение (4.2) имеет корни $x = 1$ и $x = 2$. Уравнение (4.1) называется возмущенным, а (5.2) – невозмущенным. При малом ε естественно ожидать, что корни уравнения (4.1) будут лишь немного отличаться от значений 1 и 2.

Предположим, что искомые корни можно представить в виде разложения

$$x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots, \tag{4.3}$$

где $x_0, x_1, x_2, \ldots$ – некоторые числа. В большинстве случаев определяют только один или два члена разложения, поскольку вычисление членов высших порядков оказывается весьма громоздким.

Далее подставим разложение (4.3) в исходное уравнение (4.1), получим

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots)^2 - (3 + 4\varepsilon)(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots) + \\ +2 + 3\varepsilon = 0. \qquad (4.4)$$

Сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра. Используя для разложения первого члена биномиальную формулу, получим

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots)^2 = x_0^2 + 2x_0(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots) + \\ +(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots)^2 = x_0^2 + 2\varepsilon x_0 x_1 + \varepsilon^2(2x_0 x_2 + x_1^2) + \cdots. \qquad (4.5)$$

Здесь сохранены лишь члены порядка ε^2, согласно выбранной форме разложения. Если бы искали разложение с точностью до членов порядка ε^n, где $n \geq 3$, то в выражении (4.5) следовало бы сохранить члены того же порядка. Выполнив умножение во втором слагаемом в (4.4), получим

$$(3 + 4\varepsilon)(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots) = 3x_0 + \\ +\varepsilon(3x_1 + 4x_0) + \varepsilon^2(3x_2 + 4x_1) + \cdots. \qquad (4.6)$$

Здесь также сохранены лишь члены порядка ε^2. Подставляя (4.5) и (4.6) в (4.4), имеем

$$x_0^2 + 2\varepsilon x_0 x_1 + \varepsilon^2(2x_0 x_2 + x_1^2) - 3x_0 - \\ -\varepsilon(3x_1 + 4x_0) - \varepsilon^2(3x_2 + 4x_1) + 2 + 3\varepsilon + \cdots = 0.$$

Собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$(x_0^2 - 3x_0 + 2) + \varepsilon(2x_0 x_1 - 3x_1 - 4x_0 + 3) + \\ +\varepsilon^2(2x_0 x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 4x_1) + \cdots = 0. \qquad (4.7)$$

Далее будем приравнивать коэффициенты при соответствующих степенях малого параметра к нулю. Для обоснования этого шага устремим ε к нулю в выражении (4.7). В результате получим уравнение

$$x_0^2 - 3x_0 + 2 = 0. \tag{4.8}$$

При этом (5.7) примет вид

$$\varepsilon(2x_0x_1 - 3x_1 - 4x_0 + 3) +$$
$$+\varepsilon^2(2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 4x_1) + \cdots = 0.$$

Разделив на ε, приходим к равенству

$$(2x_0x_1 - 3x_1 - 4x_0 + 3) +$$
$$+\varepsilon(2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 4x_1) + \cdots = 0, \tag{4.9}$$

которое при $\varepsilon \to 0$ дает

$$2x_0x_1 - 3x_1 - 4x_0 + 3 = 0. \tag{4.10}$$

Тогда (4.9) принимает вид

$$\varepsilon(2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 4x_1) + \cdots = 0,$$

или после деления на ε

$$2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 4x_1 + O(\varepsilon) = 0.$$

Устремив ε к нулю, получим

$$2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 4x_1 = 0. \tag{4.11}$$

Отметим, что соотношения (4.8), (4.10) и (4.11) можно получить непосредственно из формулы (4.7), приравнивая к нулю коэффициенты при соответствующих степенях малого параметра ε.

Далее будем последовательно решать уравнения (4.8), (4.10) и (4.11). Уравнение (4.8) совпадает с вырожденным уравнением (4.2), и, следовательно, его решениями будут

$$x_0 = 1 \text{ и } x_0 = 2.$$

Зная x_0, из уравнения (5.10) мы можем найти x_1.

$$x_1 = \frac{4x_0 - 3}{2x_0 - 3}.$$

Зная x_0 и x_1, можно разрешить уравнение (4.11) относительно x_2:

$$x_2 = \frac{4x_1 - x_1^2}{2x_0 - 3}.$$

Таким образом, при $x_0 = 1$ находим

$$x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 5.$$

При $x_0 = 2$ имеем

$$x_1 = 5 \text{ и } x_2 = -5.$$

Осталось подставить полученные значения x_0, x_1 и x_2 в разложение (4.3).

При $x_0 = 1$, $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$ это разложение приобретает вид

$$x(\varepsilon) = 1 - \varepsilon + 5\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \tag{4.12}$$

а при $x_0 = 2$, $x_1 = 5$ и $x_2 = -5$ имеем

$$x(\varepsilon) = 2 + 5\varepsilon - 5\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \tag{4.13}$$

Формулы (4.12) и (4.13) дают приближенные выражения для корней уравнения (4.1). Для того, чтобы выяснить насколько удачны эти приближения, сравним их с точным решением

$$x = \frac{1}{2}\left[3 + 4\varepsilon \pm \sqrt{1 + 12\varepsilon + 16\varepsilon^2}\right]. \tag{4.14}$$

Используя биномиальную формулу, получаем

$$(1 + 12\varepsilon + 16\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(12\varepsilon + 16\varepsilon^2) +$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(12\varepsilon + 16\varepsilon^2)^2 + \cdots = 1 + 6\varepsilon - 10\varepsilon^2 + \cdots,$$

что при подстановке в (4.14) дает

$$x = \frac{1}{2}[3 + 4\varepsilon \pm (1 + 6\varepsilon - 10\varepsilon^2 + \cdots)]$$

или

$$x = \begin{cases} 2 + 5\varepsilon - 5\varepsilon^2 + \cdots, \\ 1 - \varepsilon + 5\varepsilon^2 + \cdots, \end{cases}$$

что соответствует формулам (4.12) и (4.13).

Пример 18

Рассмотрим кубическое уравнение

$$x^3 - (6 + \varepsilon)x^2 + (11 + 2\varepsilon)x - 6 + \varepsilon^2 = 0. \qquad (4.15)$$

Будем искать приближенное решение этого уравнения в виде разложения по целым степеням малого положительного параметра

$$x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots, \qquad (4.16)$$

где $x_0, x_1, x_2, \ldots$ – некоторые числа.

Подстановка разложения (4.16) в исходное уравнение (4.15) дает

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots)^3 - (6 + \varepsilon)(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots)^2 + \\ +(11 + 2\varepsilon)(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots) - 6 + \varepsilon^2 = 0. \quad (4.17)$$

Сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра. Используя для разложения первого и второго членов биномиальную формулу, получим

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots)^3 = x_0^3 + 3\varepsilon x_0^2 x_1 + \\ +3\varepsilon^2 x_0^2 x_2 + 3\varepsilon^2 x_0 x_1^2 + \cdots, \qquad (4.18)$$

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots)^2 = x_0^2 + 2x_0(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots) + \\ +(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots)^2 = x_0^2 + 2\varepsilon x_0 x_1 + \varepsilon^2(2x_0 x_2 + x_1^2) + \cdots. (4.19)$$

Здесь сохранены лишь члены порядка ε^2, согласно выбранной форме разложения. Принимая во внимания выражения (4.18) и (4.19), сгруппируем коэффициенты (4.17) с одинаковыми степенями ε, получим

$$x_0^3 - 6x_0^2 + 11x_0 - 6 +$$
$$+\varepsilon(3x_0^2x_1 - 12x_0x_1 - x_0^2 + 11x_1 + 2x_0) + \varepsilon^2(3x_1^2x_0 + 3x_0^2x_2 -$$
$$-6x_1^2 - 12x_0x_2 - 2x_0x_1 + 11x_2 + 2x_1 + 1) + \cdots = 0. \quad (4.20)$$

Далее будем приравнивать коэффициенты при соответствующих степенях малого параметра к нулю.

При нулевой степени ε имеем

$$x_0^3 - 6x_0^2 + 11x_0 - 6 = (x_0 - 1)(x_0 - 2)(x_0 - 3) = 0.$$

Откуда находим

$$x_0 = 1, x_0 = 2, x_0 = 3.$$

При ε получаем

$$3x_0^2x_1 - 12x_0x_1 - x_0^2 + 11x_1 + 2x_0 = 0.$$

Зная x_0, из последнего уравнения мы можем найти x_1.

$$x_1 = \frac{x_0^2 - 2x_0}{3x_0^2 - 12x_0 + 11}. \quad (4.21)$$

Зная x_0 и x_1, можно разрешить уравнение, которое получается приравниванием к нулю коэффициентов при ε^2 в (4.20):

$$3x_1^2x_0 + 3x_0^2x_2 - 6x_1^2 - 12x_0x_2 - 2x_0x_1 + 11x_2 + 2x_1 + 1 = 0,$$

относительно x_2:

$$x_2 = \frac{6x_1^2 - 3x_1^2x_0 + 2x_0x_1 - 2x_1 - 1}{3x_0^2 - 12x_0 + 11}. \quad (4.22)$$

Таким образом, при $x_0 = 1$ из (4.21) и (4.22) находим

$$x_1 = -\frac{1}{2} \text{ и } x_2 = -\frac{1}{8}.$$

Тогда один из корней исходного уравнения дается разложением

$$x(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

При $x_0 = 2$ из (4.21) и (4.22) находим

$$x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 1.$$

Разложение для второго корня можно записать как

$$x(\varepsilon) = 2 + \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

При $x_0 = 3$ из (4.21) и (4.22) находим

$$x_1 = \frac{3}{2} \text{ и } x_2 = -\frac{7}{8}.$$

Третий корень представляется в виде разложения

$$x(\varepsilon) = 3 + \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{7}{8}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

4.2 Регулярно возмущенные алгебраические уравнения. Вырожденный случай

Рассмотрим несколько примеров, в которых алгебраические уравнения имеют корни кратности выше 1. Опишем методы, с помощью которых будут построены приближения решений для этих уравнений [8].

Метод весовых функций

Пример 19

Рассмотрим уравнение

$$(x-2)^2(x-3) + 4\varepsilon = 0. \tag{4.23}$$

Невозмущенное уравнение

$$(x-2)^2(x-3) = 0$$

имеет корни

$$x = 2, x = 2 \text{ и } x = 3.$$

Так как корень $x = 3$ простой, то приближенное решение в окрестности этого корня может быть найдено с помощью метода, изложенного в пункте 4.1. Корень $x = 2$ является кратным и теория предыдущего пункта неприменима.

Будем искать решения уравнения (4.23), находящиеся вблизи кратного корня, в виде асимптотического ряда по некоторой последовательности $\delta_0(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), \dots,$ а именно

$$x = x_0\delta_0(\varepsilon) + x_1\delta_1(\varepsilon) + x_2\delta_2(\varepsilon) + \cdots,$$

где $x_0, x_1, x_2, \dots$ – некоторые числа. Первый элемент последовательности удобно взять $\delta_0(\varepsilon) = 1$, так как мы знаем нулевое приближение решения $x_0 = 2$. Требуется определить коэффициенты разложения $x_1, x_2, \dots$ и последовательность $\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), \dots$. Чтобы иметь возможность определить все неизвестные величины, наложим некоторые дополнительные условия на последовательность $\{\delta_i(\varepsilon)\}$: будем предполагать, что последовательность асимптотическая. Определим x_1 и $\delta_1(\varepsilon)$. Для этого подставим приближенное решение

$$x = 2 + x_1\delta_1(\varepsilon)$$

в исходное уравнение, получим

$$(x_1\delta_1)^3 - (x_1\delta_1)^2 + 4\varepsilon = 0.$$

Так как функция $\delta_1 < 1$, то $\delta_1^3 \ll \delta_1^2$. Пренебрегая первым слагаемым в виду его малости, получаем

$$-(x_1\delta_1)^2 + 4\varepsilon = 0.$$

Оставшиеся слагаемые должны быть одного порядка. Предположим, что это не так. Если доминантное первое слагаемое, то тогда $x_1 = 0$, и мы не получаем улучшения для приближенного решения. Если доминантное второе слагаемое, то тогда получаем, что $\varepsilon = 0$, что противоречит условию задачи. Единственно возможный вариант – это принять, что δ_1^2 того же порядка, как ε.

Предположим, что $\delta_1^2 = \varepsilon$, то есть

$$\delta_1 = \varepsilon^{1/2},$$

тогда

$$-\left(x_1\varepsilon^{1/2}\right)^2 + 4\varepsilon = 0,$$

откуда

$$x_1 = \pm 2.$$

Таким образом, в окрестности кратного корня $x = 2$ рассматриваемое уравнение имеет приближенные решения

$$x = 2 + 2\varepsilon^{1/2} + \cdots,$$

$$x = 2 - 2\varepsilon^{1/2} + \cdots.$$

Для того, чтобы улучшить приближение $x = 2 + 2\varepsilon^{1/2} + \cdots$, подставим в уравнение (4.23) решение вида

$$x = 2 + 2\varepsilon^{1/2} + x_2\delta_2(\varepsilon).$$

Получаем

$$-4x_2\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta_2\right) - x_2^2\delta_2^2 + 8\varepsilon^{\frac{3}{2}} + 12x_2(\varepsilon\delta_2) + 6x_2^2\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta_2^2\right) + x_2^3\delta_2^3 = 0.$$

Так как δ_2 является членом асимптотической последовательности, то

$$\delta_2^3 \ll \delta_2^2,\ \varepsilon\delta_2 \ll \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta_2,\ \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta_2^2 \ll \delta_2^2.$$

Отбрасывая малые слагаемые, получаем уравнение:

$$-4x_2\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta_2\right) - x_2^2\delta_2^2 + 8\varepsilon^{\frac{3}{2}} = 0. \qquad (4.24)$$

Будем считать, что два слагаемых здесь одного порядка, а третье существенно меньше. Перебирая возможные варианты, мы должны выбрать такую пару x_2, δ_2, чтобы последовательность $\{\delta_i(\varepsilon)\}$ была асимптотической, а $x_2 \neq 0$.

Предположим, что первое и второе слагаемые в (4.24) имеют одинаковый порядок, а последнее слагаемое является малым по сравнению с предыдущими. Тогда $\delta_2 = \sqrt{\varepsilon}$. Но такой вариант нам не подходит, так как в этом случае последовательность $\{\delta_i(\varepsilon)\}$ не будет асимптотической.

Пусть теперь порядок второго слагаемого совпадает с порядком третьего. Тогда $\delta_2 = \varepsilon^{3/4}$. Подставив это значение в (4.24) и отбросив малые слагаемые при $\varepsilon \to 0$, получим, что $x_2 = 0$, и мы не получаем улучшения для приближенного решения.

Предположим, что порядок второго слагаемого совпадает с порядком третьего слагаемого, а первое является малым по сравнению с ними. В этом случае условия, накладываемые на последовательность $\{\delta_i(\varepsilon)\}$ и x_2 не нарушаются.

Тогда подставив значение $\delta_2 = \varepsilon$ в (4.24) и отбросив малые слагаемые при $\varepsilon \to 0$, получим, что $x_2 = 2$.

Таким образом, приближенное решение имеет вид

$$x = 2 + 2\varepsilon^{1/2} + 2\varepsilon + \cdots.$$

Аналогичным образом уточняем решение $x = 2 - 2\varepsilon^{1/2} + \cdots$:

$$x = 2 - 2\varepsilon^{1/2} + 2\varepsilon + \cdots.$$

Метод перенормировки

Пример 20

Найдем приближенное решение уравнения

$$(x - 8)^3 + \varepsilon x = 0. \tag{4.25}$$

Вырожденное уравнение имеет корень $x_0 = 8$ кратности 3. Сначала с помощью метода весовых функций определим δ_1

$$x = 8 + x_1\delta_1(\varepsilon).$$

Подставим это приближение в исходное уравнение

$$(x_1\delta_1)^3 + \varepsilon(x_1\delta_1) + \varepsilon = 0.$$

В силу того, что $\varepsilon\delta_1 \ll \varepsilon$, получим

$$(x_1\delta_1)^3 + \varepsilon = 0.$$

Для того, чтобы слагаемые были одного порядка, необходимо чтобы $\delta_1 = \varepsilon^{1/3}$. Тогда $x_1 = -1$.

Произведем замену переменных

$$x = x_0 + \mu y,$$

где $\mu = \varepsilon^{1/3}, x_0 = 8$. В новых переменных получаем уравнение

$$y^3 + \mu y + 8 = 0. \tag{4.26}$$

Невозмущенное уравнение

$$y^3 + 8 = 0$$

имеет три различных корня

$$y = -2, y = 1 + \sqrt{3}i, y = 1 - \sqrt{3}i.$$

Согласно теории, изложенной в пункте 4.1, уравнение (4.26) имеет следующие приближенные решения

$$y = -2 + \frac{1}{6}\mu - \frac{1}{10368}\mu^3 + \cdots,$$

$$y = 1 + \sqrt{3}i - \frac{1}{12}\left(1 - \sqrt{3}i\right)\mu - \frac{1}{5184}\left(1 + \sqrt{3}i\right)\mu^3 + \cdots,$$

$$y = 1 - \sqrt{3}i - \frac{1}{12}\left(1 + \sqrt{3}i\right)\mu - \frac{1}{5184}\left(1 - \sqrt{3}i\right)\mu^3 + \cdots.$$

С помощью обратной замены $y = \frac{x-8}{\varepsilon^{1/3}}$ найдем решения исходного уравнения

$$x = 8 - 2\varepsilon^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{6}\varepsilon^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{10368}\varepsilon^{\frac{4}{3}} + \cdots,$$

$$x = 8 + \left(1 + \sqrt{3}i\right)\varepsilon^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{12}\left(1 - \sqrt{3}i\right)\varepsilon^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{5184}\left(1 + \sqrt{3}i\right)\varepsilon^{\frac{4}{3}} + \cdots,$$

$$x = 8 + \left(1 - \sqrt{3}i\right)\varepsilon^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{12}\left(1 + \sqrt{3}i\right)\varepsilon^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{5184}\left(1 - \sqrt{3}i\right)\varepsilon^{\frac{4}{3}} + \cdots.$$

Представление решения в виде разложения

$$\boldsymbol{x = x_0 + \varepsilon^{\nu} x_1 + \varepsilon^{2\nu} x_2 + \cdots, \nu > 0}$$

Пример 21

Построим разложение для каждого из корней

$$x^3 - (3 + \varepsilon)x^2 + (\varepsilon - 9)x - 5 + \varepsilon^2 = 0 \qquad (4.27)$$

при малом ε.

Невозмущенное уравнение

$$x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$$

имеет решения $x = 5$ кратности 1 и $x = -1$ кратности 2.

Так как корень $x = 5$ простой, то приближенное решение в окрестности этого корня может быть найдено с помощью метода, изложенного в пункте 5.1:

$$x = 5 + \frac{5}{9}\varepsilon + \cdots.$$

Корень $x = -1$ является кратным и теория предыдущего пункта неприменима.

Для построения разложения, пригодного при $x = -1$, будем использовать разложение вида

$$x = x_0 + \varepsilon^{\nu} x_1 + \varepsilon^{2\nu} x_2 + \cdots, \nu > 0, \qquad (4.28)$$

где значение ν найдем в ходе вычислений. Подставляя (4.28) в (4.27), получаем

$$(x_0 + \varepsilon^{\nu} x_1 + \varepsilon^{2\nu} x_2 + \cdots)^3 - (3+\varepsilon)(x_0 + \varepsilon^{\nu} x_1 + \varepsilon^{2\nu} x_2 + \cdots)^2 + \\ +(\varepsilon - 9)(x_0 + \varepsilon^{\nu} x_1 + \varepsilon^{2\nu} x_2 + \cdots) - 5 + \varepsilon^2 = 0.$$

Группируя коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε, имеем

$$(x_0 + 1)^2(x_0 - 5) + \varepsilon^{\nu} 3(x_0^2 - 2x_0 - 3)x_1 + \\ +\varepsilon^{2\nu} 3[(x_0^2 - 2x_0 - 3)x_2 + x_1^2(x_0 - 1)] + \varepsilon(-x_0^2 + x_0) + \cdots = 0.$$

При $x_0 = 1$ отсюда имеем $-6x_1^2\varepsilon^{2\nu} - 2\varepsilon + \cdots = 0$. Для того чтобы главные члены в этом равенстве скомпенсировали друг друга необходимо, чтобы $2\nu = 1$ или $\nu = \frac{1}{2}$. При этом должно выполняться условие

$$-6x_1^2 - 2 = 0.$$

Отсюда

$$x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} i.$$

Подставив значения для x_0 и x_1 в (4.28), получим разложения для второго и третьего корней уравнения

$$x = -1 + \frac{1}{\sqrt{3}} i\varepsilon^{1/2},$$
$$x = -1 - \frac{1}{\sqrt{3}} i\varepsilon^{1/2}.$$

4.3 Сингулярно возмущенные алгебраические уравнения

Рассмотрим два способа, с помощью которых будут построены приближения решений для сингулярно возмущенных алгебраических уравнений [7, 8].

1 способ

Пример 22

Найдем приближенные решения уравнения

$$\varepsilon x^2 + x + 1 = 0. \tag{4.29}$$

Это сингулярно возмущенное уравнение. Невозмущенное уравнение

$$x + 1 = 0$$

имеет единственное решение кратности 1

$$x = -1.$$

Согласно методу, изложенному в пункте 4.1, разложение для первого корня уравнения (4.29) имеет вид

$$x = -1 - \varepsilon - 2\varepsilon^2 + \cdots.$$

Второй корень уравнения существует только при $\varepsilon \neq 0$, следовательно, найти его с помощью методов предыдущих пунктов не представляется возможным. Будем искать приближенное решение в виде асимптотического ряда по некоторой асимптотической последовательности $\{\delta_i(\varepsilon)\}$. Найдем нулевое приближение в виде

$$x = x_0 \delta_0.$$

В данном примере мы уже не можем брать $\delta_0 = 1$, так как неизвестно нулевое приближение решения. Подставляя это разложение в (4.29), получим

$$\varepsilon x_0^2 \delta_0^2 + x_0 \delta_0 + 1 = 0.$$

Возможны три варианта выбора весовой функции δ_0: $\delta_0 = \varepsilon^{-1}$, $\delta_0 = \varepsilon^{-1/2}$, $\delta_0 = 1$. Второй случай должен быть опущен, так как это ведет к тому, что второе слагаемое становится доминантным, а первое и третье – существенно меньше. Третий случай тоже должен быть опущен, так как при таком выборе δ_0 мы получаем только один корень. Следовательно, выбираем $\delta_0 = \varepsilon^{-1}$. Тогда $x_0 = -1$.

Произведем замену

$$x = \delta_0 y$$

или

$$x = \frac{y}{\varepsilon}.$$

В новых координатах уравнение имеет вид

$$y^2 + y + \varepsilon = 0.$$

Невозмущенное уравнение

$$y^2 + y = 0$$

имеет два различных корня

$$y = 0, y = -1.$$

Следовательно, мы можем применить метод из пункта 4.1 и вычислить коэффициенты асимптотического разложения приближенного решения уравнения

$$y = -\varepsilon - \varepsilon^2 + \cdots,$$
$$y = -1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots.$$

С учетом обратной замены $y = \varepsilon x$, получим

$$x = -1 - \varepsilon + \cdots,$$
$$x = -\varepsilon^{-1} + 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots.$$

2 способ

Пример 22

Построим разложения для каждого из корней кубического уравнения

$$\varepsilon x^3 - (4 - \varepsilon)x + 3 = 0 \qquad (4.30)$$

при малом ε.

Невозмущенное уравнение

$$-4x + 3 = 0$$

имеет единственное решение кратности 1

$$x = \frac{3}{4}.$$

Согласно методу, изложенному в пункте 4.1, разложение для первого корня уравнения (4.30) имеет вид

$$x = \frac{3}{4} + \frac{75}{256}\varepsilon + \cdots.$$

Второе приближенное решение будем искать в виде разложения

$$x = \frac{y}{\varepsilon^\nu} + x_0 + \varepsilon^\nu x_1 + \cdots, \nu > 0. \qquad (4.31)$$

Число ν определим в процессе дальнейшего решения. подставляя (4.31) в (4.30), получим

$$\varepsilon\left(\frac{y}{\varepsilon^\nu} + x_0 + \varepsilon^\nu x_1 + \cdots\right)^3 - (4 - \varepsilon)\left(\frac{y}{\varepsilon^\nu} + x_0 + \varepsilon^\nu x_1 + \cdots\right) + 3 = 0.$$

Отсюда можно получить

$$\frac{y^3}{\varepsilon^{3\nu-1}} - \frac{4y}{\varepsilon^\nu} + \frac{3y^2x_0}{\varepsilon^{2\nu-1}} - 4x_0 + 3 + \frac{3y^2x_1 + 3yx_0^2 + y}{\varepsilon^{\nu-1}} - 4\varepsilon^\nu x_1 +$$
$$+\varepsilon(x_0^3 + 6yx_0x_1 + x_0 + \cdots) + \varepsilon^{\nu+1}(3yx_1^2 + x_1 + \cdots) +$$
$$\varepsilon^{3\nu+1}x_1^3 + \cdots = 0. \qquad (4.31)$$

Главными членами в (4.31) являются $\frac{y^3}{\varepsilon^{3\nu-1}}$ и $\frac{4y}{\varepsilon^\nu}$. Они должны компенсировать друг друга, то есть $\frac{y^3}{\varepsilon^{3\nu-1}} - \frac{4y}{\varepsilon^\nu} = 0$. Для этого необходимо выполнение условия $3\nu - 1 = \nu$, откуда $\nu = \frac{1}{2}$. При этом выполняется равенство

$$y^3 - 4y = 0.$$

Последнее уравнение имеет три различных корня

$$y = 0, y = 2 \text{ и } y = -2.$$

Случай $y = 0$ соответствует первому корню уравнения (4.30), поэтому дальше его рассматривать не будем.

С учетом $\nu = \frac{1}{2}$ и равенства $y^3 - 4y = 0$ уравнение (4.31) с точностью до членов порядка $\varepsilon^{1/2}$ принимает вид

$$3y^2x_0 - 4x_0 + 3 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}(3y^2x_1 - 4x_1 + 3yx_0^2 + y) + \cdots = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε, получаем систему уравнений

$$3y^2x_0 - 4x_0 + 3 = 0,$$

$$(3y^2 - 4)x_1 + (3x_0^2 + 1)y = 0,$$

решая которую, находим

$$x_0 = \frac{3}{4 - 3y^2}, x_1 = \frac{(3x_0^2 + 1)y}{4 - 3y^2}.$$

Откуда при $y = 2$ имеем

$$x_0 = -\frac{3}{8}, x_1 = -\frac{91}{256}.$$

При $y = -2$ имеем

$$x_0 = -\frac{3}{8}, x_1 = \frac{91}{256}.$$

Таким образом, второй и третий корни уравнения (4.30) представимы в виде разложений

$$x = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{3}{8} - \sqrt{\varepsilon}\frac{91}{256} + \cdots,$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{3}{8} + \sqrt{\varepsilon}\frac{91}{256} + \cdots.$$

5.4 Задачи и упражнения

1. Построить разложения для каждого из корней алгебраических уравнений
   а) $x^3 - (3+\varepsilon)x^2 - (6-2\varepsilon)x + 8 = 0$,
   б) $x^3 + 2x^2 - (11+3\varepsilon)x - 12 = 0$.
2. Построить разложения для кратных корней алгебраических уравнений тремя способами, изложенными в пункте 5.2
   а) $x^3 + \varepsilon x^2 - 3x + 2 - 3\varepsilon = 0$,
   б) $x^3 + (6+\varepsilon)x^2 + (12-\varepsilon)x + 8 = 0$.
3. Построить разложения для каждого из корней сингулярно возмущенных алгебраических уравнений
   а) $\varepsilon x^3 + x^2 - 4 = 0$,
   б) $\varepsilon x^3 + x - 3 = 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Брейн, Н.Г. Асимптотические методы в анализе / Н.Г. Брейн. – Москва : Мир, 1961.
2. Копсон, Э. Асимптотические разложения / Э. Копсон. – Москва : Мир, 1966.
3. Эрдейи, А. Асимптотические разложения / А. Эрдейи. – Москва : Физматлит, 1962.
4. Олвер, Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции / Ф. Олвер. – Москва : Наука, 1978.
5. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе / А.М. Ильин, А.Р. Данилин. – Москва : Физматлит, 2009.
6. Романов, А.С. Элементарные асимптотические методы : учебное пособие / А.С. Романов. – Новосибирск: НГУ, 2003.
7. Найфе, А. Введение в методы возмущений / А. Найфе. – Москва : Мир, 1984.
8. Видилина, О.В. Асимптотические методы в анализе : методические указания / О.В. Видилина, Е.В. Щетинина. – Самара: Универс групп, 2010.

Учебное издание

Тропкина Елена Андреевна

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Учебное пособие

Редактор Л.Р. Дмитриенко
Компьютерная верстка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 25.04.2022. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 4,0.
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 5(Р1У)/2022.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА» (САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.