УДК 330.43 (075.8)

ИНСТРУМЕНТАРИЙ МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ РЯДОВ ДИНАМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИИ РАМСЕЯ

Павлов В.Д.

научный руководитель: д.т.н., д.э.н., профессор Семенычев В.К.

Самарский государственный аэрокосмический университет

им. акад. С.П. Королева

В экономике широкое распространение получили процессы логистической динамики, которые сначала растут медленно, затем ускоряются, а затем снова замедляют свой рост, стремясь к какому-либо уровню насыщения. Уникальным свойством логистического тренда является его способность прогнозировать качественные изменения в развитии динамики, характеризующиеся сменой знака производной.

Однако, несмотря на распространенность данного типа процессов, в данный момент практически отсутствуют программные продукты, позволяющие производить их идентификацию. Широко известные в настоящее время программные продукты, позволяющие осуществлять моделирование и прогнозирование динамики развития многокомпонентных рядов, неприемлемы для работы с логистическими моделями.

Это объясняется, в первую очередь, малой изученностью данного типа моделей, а также громоздкостью методов, предлагаемых для их идентификации. Кроме того, известные методы идентификации дают достаточно низкую точность прогнозирования, что сдерживает их широкое практическое применение.

Поэтому актуальной является проблема построения программного продукта, способного работать с многокомпонентными рядами динамики, в состав которых в качестве основного тренда входит логистическая кривая.

Необходимо разработать методы, позволяющие достаточно просто и на коротких выборках осуществлять параметризацию многокомпонентных рядов динамики, снизить погрешность моделирования за счет возможной нестационарности модели, вычислительной погрешности из-за ограниченности разрядности вычислительной сетки.

Обычно для идентификации логистической динамики используют модели Верхулста (Перла–Рида), Гомперца и другие. К недостаткам данных моделей следует отнести следующее:

- известные методы параметризации данных моделей обычно предполагают априорное знание значений уровня насыщения;
- отсутствуют методы их параметризации при наличии других компонент (колебательных компонент, трендов других моделей) в рядах динамики, что зачастую имеет место в реальной эконометрической практике. При этом колебательная компонента может быть обусловлена, например, сезонными факторами, а линейный тренд может отражать инфляционные процессы.

Поэтому в качестве логистического тренда целесообразнее принять относительно мало известную модель Рамсея, которая позволяет с использованием аппарата Z–преобразования достаточно просто и на коротких выборках осуществить параметризацию многокомпонентных рядов логистической динамики.

Построение многокомпонентных моделей динамики осуществим путем добавления к выбранной нами логистической модели Рамсея линейного и синусоидального трендов:

$$Y_k = C(1-(1+\alpha k\Delta)\exp(-\alpha k\Delta)) + A_1 k\Delta + \theta_k \quad (1)$$

$$Y_k = C(1-(1+\alpha k\Delta)\exp(-\alpha k\Delta)) + A_1 \sin(\omega k\Delta + \varphi) + \theta_k \quad (2)$$

$$Y_k = C(1-(1+\alpha k\Delta)\exp(-\alpha k\Delta)) + A_1 \sin(\omega k\Delta + \varphi) + A_2 k\Delta + \theta_k \quad (3)$$

Разработку методов параметризации подробно покажем на достаточно простом случае, когда моделирование ряда динамики экономического показателя осуществляется логистой Рамсея $C(1-(1+\alpha k\Delta)\exp(-\alpha k\Delta))$ с аддитивной линейной компонентой $A_1 k\Delta$ (формула (1)).

Параметризация двух других моделей осуществляется аналогичным способом.

Воспользуемся Z-преобразованием для конструирования параметрической модели авторегрессии-скользящего среднего, которое при $k \geq 4$ дает

$$Y_k = 2Y_{k-1} - Y_{k-2} + \lambda_1 (2Y_{k-1} - 4Y_{k-2} + 2Y_{k-3}) -$$
$$-\lambda_1^2 (Y_{k-2} - 3Y_{k-3} + Y_{k-4}) + \xi_k, \tag{4}$$

где новая стохастическая компонента повторяет по структуре авторегрессию:

$$\xi_k = 2\theta_{k-1} - \theta_{k-2} + \lambda_1 (2\theta_{k-1} - 4\theta_{k-2} + 2\theta_{k-3}) -$$
$$-\lambda_1^2 (\theta_{k-2} - 3\theta_{k-3} + \theta_{k-4}),\ \lambda_1 = \exp(-\alpha\Lambda).$$

Параметризацию модели (1) проведем в два этапа. На первом, применяя метод наименьших квадратов (МНК) на объеме N выборки, найдем оценку параметра λ_1^0 из условия:

$$\lambda_1^0 = \arg\min_{\lambda_1} \sum_{k=4}^{N} (Y_k - (2Y_{k-1} - Y_{k-2} + \lambda_1 (2Y_{k-1} - 4Y_{k-2} + 2Y_{k-3}) -$$
$$-\lambda_1^2 (Y_{k-2} - 3Y_{k-3} + Y_{k-4})))^2, \tag{5}$$

которое приводит к нормальной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) второго порядка.

По найденному значению λ_1^0 рассчитаем оценку параметра α^0, в соответствии с принятым в (4) обозначением, по формуле: $\alpha^0 = -\frac{\ln \lambda_1}{\Delta}$

На втором этапе для параметризации параметров C, A_1 повторно применяем МНК, который приводит к нормальной СЛАУ 2-го порядка и определению оценок C^0 и A_1^0.

Более сложным и обычно в большей мере соответствующим экономической практике является случай логисты с аддитивной синусоидальной колебательной компонентой (формула (2)).

Для (2) аналогично модели (1) получим:

$$Y_k = Y_{k-1}(2\lambda_1 + \lambda_2 + 1) - Y_{k-2}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1 + \lambda_2(2\lambda_1 + 1) + 1) +$$

$$+Y_{k-3}(\lambda_1^2+2\lambda_1+1+\lambda_2(\lambda_1^2+2\lambda_1))-Y_{k-4}(\lambda_1^2+2\lambda_1+\lambda_1^2\lambda_2)+$$
$$+Y_{k-5}\lambda_1^2+\xi_k,$$
(6)

где $\lambda_1=\exp(-\alpha\Delta)$, $\lambda_2=2\cos(\omega\Delta)$, ξ_k - новая стохастическая компонента, повторяющая по структуре авторегрессионную часть.

Далее, аналогично процессу идентификации модели (1), в два этапа определим коэффициенты модели (2). На первом этапе из формулы (6), применяя МНК, находим оценки параметров λ_1 и λ_2, зная которые можно рассчитать оценку параметра α^0 и оценку частоты ω^0.

На втором этапе для параметризации C, A_1 и φ, повторно применяем МНК, что приводит к нормальной СЛАУ 3-го порядка, решая которую найдем оценки параметров C^0, A_1^0 и φ^0.

Наиболее полной является модель, учитывающая как линейные, так и колебательные компоненты (формула (3)).

Для модели (3) получим следующую параметрическую модель:

$$Y_k=2Y_{k-1}-2Y_{k-2}+2Y_{k-3}-Y_{k-4}+m_1(2Y_{k-1}-4Y_{k-2}+4Y_{k-3}-4Y_{k-4}$$
$$+2Y_{k-5})-m_2(Y_{k-2}-2Y_{k-3}+2Y_{k-4}-2Y_{k-5}+Y_{k-6})+$$
$$+m_3(Y_{k-1}-2Y_{k-2}+Y_{k-3})-m_4(2Y_{k-2}-Y_{k-3}+2Y_{k-4})+$$
$$+m_5(Y_{k-3}-2Y_{k-4}+Y_{k-5})+\xi_k,$$
(7)

где $m_1=\lambda_1$, $m_2=\lambda_1^2$, $m_3=\lambda_2$, $m_4=\lambda_1\lambda_2$, $m_4=\lambda_1^2\lambda_2$, $\lambda_1=\exp(-\alpha\Delta)$, $\lambda_1=\exp(-\alpha\Delta)$, ξ_k -новая стохастическая компонента.

Далее, аналогично процессу параметризации предыдущих моделей, в два этапа определим коэффициенты модели (3).

На первом этапе из формулы (7), применяя МНК, находим оценки λ_1^0 и λ_2^0, зная которые легко определить оценки параметров α^0 и ω^0 по формулам: $\alpha^0=-\dfrac{\ln m_1^0}{\Delta}$, $\omega^0=\dfrac{\arccos(m_3^0/2)}{\Delta}$.

На втором этапе, повторно используя МНК, определим оценки C^0, A_1^0, A_2^0 и φ^0.

Для проверки работоспособности предложенных моделей разработана программа, позволяющая по статистическим данным находить параметры выбранной модели. В качестве среды разработки использовался программный продукт Borland Delphi 7.

Проверка проводилась на модельных и реальных статистических данных.

На примере моделирования динамики роста цен на бензин проследим зависимость степени адекватности модели статистическим данным от присутствия в ней линейного и синусоидального трендов:

1. При использовании модели (1) получен коэффициент детерминации $R^2 = 0.5472$ а погрешность прогноза при горизонте прогноза в 3 отсчета γ =27 %.
2. При использовании модели (2) $R^2 = 0.6578$ а погрешность прогноза при горизонте прогноза в 3 отсчета γ =24 %.
3. При использовании модели (3) $R^2 = 0.8882$ а погрешность прогноза при горизонте прогноза в 3 отсчета γ =7 %.

Видим, что при моделировании цен на бензин хороших результатов обычно можно добиться при использовании наиболее сложной модели в виде логисты с синусоидальной и линейной компонентами.

Однако в ряде случаев можно использовать более простые модели (1) или (2). Так, например, при моделировании динамики роста цен на красный кирпич использование синусоидального тренда является нецелесообразным, т.к. в исходном тренде отсутствует явно выраженная циклическая компонента.

При этом были получены следующие результаты моделирования формулой (1) данных по красному кирпичу: коэффициент детерминации $R^2 = 0.9856$, погрешность прогноза γ при горизонте прогноза в 3 отсчета составила 4 %.

При моделировании данных валюты баланса по Центробанку РФ большей точности удалось достичь только при использовании логисты с линейным и синусоидальным трендами ($R^2 = 0.9819$, погрешность прогноза при горизонте прогноза в 3 отсчета составила 3 %), что свидетельствует о присутствии этих составляющих в исходных данных

Таким образом, описанные многокомпонентные ряды динамики с использованием логисты Рамсея, и методы их идентификации позволяют достаточно просто по малому числу наблюдений осуществлять параметризацию модели, а разработанная программа делает возможным практическое применение предложенных моделей для моделирования и прогнозирования динамики развития многих экономических процессов.