



Е.А. Зенцова, В.Н. Клячкин

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА МНОГОМЕРНОГО КОНТРОЛЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРЕДУПРЕЖДАЮЩИХ ГРАНИЦ

(Ульяновский государственный технический университет)

Для диагностики нарушений технологического процесса, качество которого определяется множеством коррелированных показателей, проводится многомерный статистический контроль с применением карты Хотеллинга. Эта карта предназначена для проверки гипотезы о том, что средний уровень процесса соответствует заданным спецификациям.

Пусть p показателей качества имеют нормальное распределение с вектором средних $\bar{\mu}_0 = (\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0p})$ и ковариационной матрицей Σ . Если μ_0 и Σ неизвестны, их значения могут быть оценены на основе вектора средних \bar{X} и ковариационной матрицы S , рассчитанных для m выборок объемом по n наблюдений. Тогда T^2 -статистика Хотеллинга и значение k , определяющее положение контрольной границы, рассчитываются по формулам:

$$T^2 = n(\bar{X}_i - \bar{X})' \bar{S}^{-1} (\bar{X}_i - \bar{X}), \quad (1)$$

$$k = C(m, n, p) F_{p, v, \alpha}, \quad (2)$$

где \bar{X}_i - вектор результатов i -го наблюдений. $F_{p, v, \alpha}$ - α -квантиль распределения Фишера с p и v степенями свободы. При $n > 1$ $C(m, n, p) = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn - m - p + 1}$,
 $v = mn - m - p + 1$.

При нарушении технологического процесса его показатели имеют нецентральное распределение Фишера с p и v степенями свободы и параметром нецентральности $\eta = nd^2$, где $d^2 = (\bar{\mu} - \bar{\mu}_0)' \Sigma^{-1} (\bar{\mu} - \bar{\mu}_0)$ - оценка смещения среднего уровня процесса, d - расстояние Махаланобиса.

При высокой скорости обнаружения значительных нарушений стандартная карта Хотеллинга (*FRS* – fixed ratio sample) обладает низкой чувствительностью к малым смещениям уровня настройки процесса. Чувствительность может быть повышена путем введения предупреждающей границы [1,2]. Смена параметров карты при попадании значения статистики Хотеллинга в предупреждающую область позволяет повысить чувствительность карты, что подтверждено для карты с переменным объемом выборок и одной предупреждающей границей (*VSS* – variable sample size) [3].

Рассмотрим модифицированную контрольную карту Хотеллинга с переменным объемом выборки и двумя предупреждающими границами (*3VSS* – variable sample size). Положение значения выборочной статистики относительно предупреждающих границ определяет одно из трех значений для объема выборки [4-5]:



$$n_i = \begin{cases} n_1 & 0 \leq T_{i-1}^2 \leq w_1, \\ n_2 & w_1 \leq T_{i-1}^2 \leq w_2, \\ n_3 & w_2 \leq T_{i-1}^2 \leq k. \end{cases} \quad (3)$$

Для оценки чувствительности карты к обнаружению нарушений процесса используют величину *AATS* (adjusted average time to signal), которая позволяет оценить среднее время между разладкой процесса и получением сигнала:

$$AATS = ATC - 1/\lambda, \quad (4)$$

ATC (average time of the cycle) характеризует время между наладкой процесса и сигналом карты, $1/\lambda$ - оценка продолжительности состояния статистической управляемости процесса. *ATC* можно оценить на основе аппарата марковских цепей. Состояния марковской цепи представлены в табл. 1. Элементы матрицы переходных вероятностей определяются параметрами контроля.

Таблица 1. Состояния марковской цепи

Процесс управляем	Процесс нарушен
Состояние 1: $0 \leq T^2 \leq w_1, d = 0$;	Состояние 5: $0 \leq T^2 \leq w_1, d \neq 0$;
Состояние 2: $w_1 \leq T^2 \leq w_2, d = 0$;	Состояние 6: $w_1 \leq T^2 \leq w_2, d \neq 0$;
Состояние 3: $w_2 \leq T^2 \leq k, d = 0$;	Состояние 7: $w_2 \leq T^2 \leq k, d \neq 0$;
Состояние 4: $T^2 \geq k, d = 0$.	Состояние 8: $T^2 \geq k, d \neq 0$.

Значение *ATC* может быть найдено так:

$$ATC = b' (I - Q)^{-1} h, \quad (5)$$

где $b' = (0,0,1,0,0,0,0)$ - вектор начальных вероятностей, I - единичная матрица, Q - матрица, полученная из матрицы переходных вероятностей путем удаления элементов, отвечающих за поглощающее состояние, h - вектор значений интервалов между взятием выборок.

Эффективность карты состоит не только в оперативном выявлении нарушений процесса, но и в их ликвидации с наименьшими затратами. Для построения оптимального плана будем использовать модель оценки затрат Лоренцена и Вэнса [6]. Она включает затраты на исследование сигналов ложной тревоги, на поиск и устранение разладки процесса, на взятие и обработку результатов выборочных наблюдений. Технологический процесс в данной модели представлен серией циклов, как показано на рис. 1.



Рис. 1. Схема цикла технологического процесса

Средние затраты за цикл могут быть определены как отношение затрат $E(C)$ за цикл к его продолжительности: $E(A) = E(C) / E(T)$. Задача построения модели затрат модифицированной карты Хотеллинга заключается в определе-



нии параметров контрольной карты $(n_1, n_2, n_3, w_1, w_2, k, h)$ при известных параметрах процесса. Постановка задачи оптимизации может иметь вид:

$$\text{Min } E(A)$$

$$\text{при: } 0.1 \leq h \leq 8, 0 < w_1 < w_2 < k, \quad (6)$$

$$n_1 < n_2 < n_3 \in Z^+, ANF \leq 0.5, AATS \leq 7.$$

Решая задачу оптимизации для $3VSS$ -, VSS - и FRS карт с помощью генетического алгоритма, получим параметры карт и значения затрат за цикл при разных величинах смещения (рис. 2).

Сравнительный анализ затрат за цикл для данных карт показывает, что при малых и средних значениях смещения ($d \leq 1.25$) применение карт с переменным объемом выборок ($3VSS$, VSS) позволяет значительно снизить величину затрат. При больших смещениях ($d > 1.25$) введение предупреждающих границ не оказывает значительного влияния на величину затрат.

Сравнение эффективности VSS - и $3VSS$ карт позволяет отметить, что $3VSS$ карта требует меньших затрат на контроль при всех типах смещений, однако, учитывая сложность применения, ее выбор оправдан при $d \leq 0.75$.

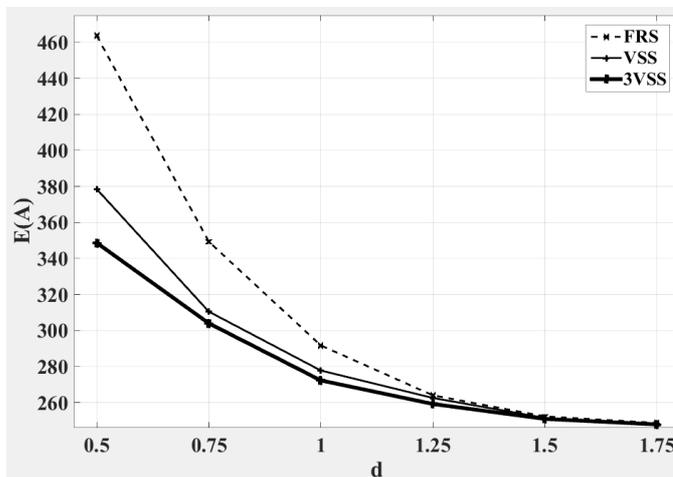


Рис. 2. График зависимости функции затрат от смещения среднего уровня процесса

Литература

1. Клячкин, В.Н. Модели и методы статистического контроля многопараметрического технологического процесса. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 196с.
2. Клячкин, В.Н., Кравцов Ю.А. Повышение эффективности статистического контроля многопараметрического технологического процесса на основе карты Хотеллинга с предупреждающей границей // Автоматизация. Современные технологии. – 2013. – №10. – С. 35-37.
3. Aparisi, F. Hotelling's T^2 control chart with adaptive sample sizes // Int. J. Prod. Res. – 1996. – Vol. 34(10). – P.2853-2862.
4. Клячкин, В.Н., Зенцова Е.А. Оптимизация статистического контроля многопараметрического процесса // Радиотехника. – 2016. – №9. – С.48-51.
5. Зенцова Е.А. Экономическая модель многомерной контрольной карты Хотеллинга // Сб. научных трудов конференции: «Информатика и вычислительная техника» – Ульяновск: УлГТУ. – 2015. – С. 215-220.
6. Lorenzen, T. J., Vance, L. C. The economic design of control charts: a unified approach // Technometrics. – 1986. – Vol. 28. – P.3-10.