Выводы

1. Разработаны алгоритмы кластеризации объектов по расстоянию с использованием графов и окружностей. Система запускается на сервере, где хранятся необходимые объекты для кластеризации.

2. Предусмотрена защита данных посредством ограничения доступа к уровням для различных пользователей при помощи отображения кластеров лишь на разрешенных уровнях.

3. Решена задача по объединению отдельных объектов в кластеры с помощью графических и аналитических моделей. Построена экспериментальная модель зависимости разбиения кластеров от уровня высоты.

4. Система протестирована на реальной информации. Установлено, что система обладает высоким быстродействием при построении и отображении кластеров на трехмерной карте в Web-интерфейсе.

5. Сформулированы направления дальнейших исследований. В их числе, кластеризация групп объектов, вывод формул для группировки объектов в зависимости от высоты камеры, для расширения диапазона уровней доступа к объектам.

Литература

1. Котов А., Красильников Н. Кластеризация данных. 2006.

2. Воронцов К.В. Алгоритмы кластеризации и многомерного шкалирования. Курс лекций. МГУ, 2007.

В.П. Цветов

О ФАКТОРИЗАЦИИ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

(Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва)

Теория бинарных отношений, в частности, теория упорядоченных полугрупп бинарных отношений, представляет самостоятельный интерес, а также находит обширные применения, например, в теории графов, теории автоматов, теории кодирования и т.п. [1-2].

В докладе рассматривается представление произвольного бинарного отношения в виде произведения двух бинарных отношений, одно из которых функционально, а второе является обратным к функциональному, что может оказаться полезным при исследовании свойств бинарных отношений и разработке алгоритмов решения прикладных задач.

Введем следующие обозначения и определения.

$\mathbb{N}$- множество натуральных чисел;

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$- множество натуральных чисел с нулем;

$m..n = \{m, m+1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}_0$;

$|V|$- мощность множества V;

2^V- булеан над множеством V;

$\chi_{V_1}(v) = \begin{cases} 1, v \in V_1 \\ 0, v \notin V_1 \end{cases}$- индикатор множества $V_1 \in 2^V$;

$V \times U = \{e = (v,u) \mid v \in V \wedge u \in U\}$- декартово произведение множеств V и U;

$2^{V\times U}$- множество бинарных отношений из V в U;

$I_V = \{(v,v) | v \in V\} \in 2^{V\times V}$- тождественное бинарное отношение на множестве V;

$R^{-1} = \{(u,v) | (v,u) \in R\} \in 2^{U\times V}$- обратное к бинарному отношению $R \in 2^{V\times U}$;

$R_1 \circ R_2 = \{(v,w) | \exists u \in U\ (v,u) \in R_1 \wedge (u,w) \in R_2\} \in 2^{V\times W}$- произведение бинарных отношений $R_1 \in 2^{V\times U}$ и $R_2 \in 2^{U\times W}$;

$D_R = \{v | \exists u \in U\ (v,u) \in R\} \in 2^V$- область определения бинарного отношения $R \in 2^{V\times U}$;

$E_R = \{u | \exists v \in V\ (v,u) \in R\} \in 2^U$- область значений бинарного отношения $R \in 2^{V\times U}$;

$R \in 2^{V\times U}$- функционально (функция из V в U), если и только если $R^{-1} \circ R \subseteq I_U$;

$R \in 2^{V\times U}$- инъективно, если и только если $R \circ R^{-1} \subseteq I_V$;

$R \in 2^{V\times U}$- тотально, если и только если $D_R = V$;

$R \in 2^{V\times U}$- сюръективно, если и только если $E_R = U$;

$U^V \in 2^{V\times U}$- множество тотальных функций из V в U;

$2^{V\times U} \ni U^V \ni F$- тотальная биекция из V в U, если и только если F инъективна и сюръектиивна;

$G(V,R)$- модель с основой V и сигнатурой $R \in 2^{V\times V}$ (граф с множеством вершин V и множеством ребер R)

$[r_{ij}]$– матрица размерности $n \times m$ с элементами из множества $0..1 = \{0,1\} \subset \mathbb{N}_0$;

$[r_{ij}]^T = [r_{ji}]$– транспонирование матрицы $[r_{ij}]$;

$[r_{ij}^1] \sqcup [r_{ij}^2] = [\max_{\square}(r_{ij}^1, r_{ij}^2)]$– прямая сумма матриц $[r_{ij}^1]$ и $[r_{ij}^2]$ размерностей $n \times m$;

$[r_{ik}^1] \circ [r_{kj}^2] = [\max_{k\in 1..s}(\min_{\square}(r_{ik}^1, r_{kj}^2))]$– произведение матриц $[r_{ik}^1]$ и $[r_{kj}^2]$ размерностей $n \times s$ и $s \times m$, соответственно.

Рассмотрим бинарное отношение $R \in 2^{V\times U}$, и определим бинарное отношение $\vec{R} \in 2^{V\times(V\times U)}$ следующим правилом: будем считать, что $(v_0, e_0) \in \vec{R}$, если и только если $e_0 = (v_0, u) \in R$.

Аналогично определим бинарное отношение $\overleftarrow{R} \in 2^{U\times(V\times U)}$ правилом $(u_0, e_0) \in \overleftarrow{R}$, если и только если $e_0 = (v, u_0) \in R$.

Нетрудно показать, что выполняется соотношения $E_{\vec{R}} = E_{\overleftarrow{R}} = R$, $D_{\vec{R}} = D_R$, $D_{\overleftarrow{R}} = E_R$, $\vec{R}^{-1} \circ \vec{R} \cap \overleftarrow{R}^{-1} \circ \overleftarrow{R} \subseteq I_{V\times U}$, $\vec{R} \circ \vec{R}^{-1} \subseteq I_V$, $\overleftarrow{R} \circ \overleftarrow{R}^{-1} \subseteq I_U$, $R = \vec{R} \circ \overleftarrow{R}^{-1}$, что, в частности, означает функциональность бинарных отношений $\vec{R}^{-1}$ и $\overleftarrow{R}^{-1}$, а также представимость R в виде произведения $\left(\vec{R}^{-1}\right)^{-1} \circ \overleftarrow{R}^{-1}$.

Заметим, что в случае тотальности бинарного отношения $R \in 2^{V\times U}$ выполняется точное равенство $\vec{R} \circ \vec{R}^{-1} = I_V$, а в случае его сюръективности - точное равенство $\overleftarrow{R} \circ \overleftarrow{R}^{-1} = I_U$.

Кроме того, будет иметь место разложение $R = \vec{R} \circ R' \circ R'' \circ \overleftarrow{R}^{-1}$ с произвольными $R' \in 2^{(V\times U)\times W}$, $R'' \in 2^{W\times(V\times U)}$, для которых выполняется равенство $R' \circ R'' = I_{V\times U}$, например, при $R' = G^{-1}$ и $R'' = G$, где $G \in (V \times U)^{V\times U}$ – произвольная тотальная биекция.

Наибольший интерес представляет случай $U = V$, $|V| = n \in \mathbb{N}$, имеющий непосредственную интерпретацию в теории графов. Задав множество вершин графа $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ перечислением элементов, а множество его ребер как $R \in 2^{V\times V}$, можно использовать матричные представления индикаторов бинарных отношений $\vec{R}$, $\overleftarrow{R}$ и матричные операции для представления матриц смежности вершин графа $[r_{ij}]$, инцидентности вершин ребер $[s_{ij}]$, смежности исходящих (входящих) ребер $[\vec{c}_{ij}]$ ($[\overleftarrow{c}_{ij}]$) и т.п. для графа $G(V,R)$.

Обозначив $[\vec{r}_{ij}] = [\chi_{\vec{R}}(v_i, e_j)]$ и $[\overleftarrow{r}_{ij}] = [\chi_{\overleftarrow{R}}(v_i, e_j)]$, приходим к легко проверяемым равенствам $[r_{ij}] = [\vec{r}_{ij}] \circ [\overleftarrow{r}_{ij}]^T$, $[s_{ij}] = [\vec{r}_{ij}] \sqcup [\overleftarrow{r}_{ij}]$, $[\vec{c}_{ij}] = [\vec{r}_{ij}]^T \circ [\vec{r}_{ij}]$ ($[\overleftarrow{c}_{ij}] = [\overleftarrow{r}_{ij}]^T \circ [\overleftarrow{r}_{ij}]$).

В качестве примера рассмотрим пару бинарных отношений $R_1 \in 2^{V\times V}$ и $R_2 \in 2^{V\times V}$ в предположении существования тотальной биекции $F_0 \in V^V$, для которой выполняется равенство

$$R_2 = F_0 \circ R_1 \circ {F_0}^{-1}. \tag{1}$$

На основании ранее полученного представления приходим к справедливости равенства

$$R_2 = \vec{R}_2 \circ \overleftarrow{R}_2^{-1} = F_0 \circ \vec{R}_1 \circ \overleftarrow{R}_1^{-1} \circ {F_0}^{-1} = \left(F_0 \circ \vec{R}_1 \circ G^{-1}\right) \circ \left(F_0 \circ \overleftarrow{R}_1 \circ G^{-1}\right)^{-1}, \tag{2}$$

с произвольной тотальной биекцией $G \in (V \times V)^{V\times V}$.

Можно показать существование тотальной биекции $G_0 \in (V \times V)^{V\times V}$, для которой условие выполнения (2) равносильно выполнению системы равенств

$$\begin{cases} \vec{R}_2 = F_0 \circ \vec{R}_1 \circ {G_0}^{-1} \\ \overleftarrow{R}_2 = F_0 \circ \overleftarrow{R}_1 \circ {G_0}^{-1} \end{cases} \tag{3}$$

Выполнение системы равенств (3) эквивалентно выполнению системы матричных равенств

$$\begin{cases} [\vec{r}_{ij}^{\,2}] = [f_{ij}] \circ [\vec{r}_{ij}^{\,1}] \circ [g_{ij}]^T \\ [\overleftarrow{r}_{ij}^{\,2}] = [f_{ij}] \circ [\overleftarrow{r}_{ij}^{\,1}] \circ [g_{ij}]^T \end{cases} \tag{4}$$

с матрицами $[\vec{r}_{ij}^{\,1}]$, $[\overleftarrow{r}_{ij}^{\,1}]$, $[\vec{r}_{ij}^{\,2}]$, $[\overleftarrow{r}_{ij}^{\,2}]$ размерности $n \times n^2$, построенными по индикаторам соответствующих бинарных отношений $\vec{R}_1$, $\overleftarrow{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\overleftarrow{R}_2$ и двумя независимыми матрицами перестановок строк и столбцов $[f_{ij}]$ и $[g_{ij}]$ размерности $n \times n$ и $n^2 \times n^2$, построенными по индикаторам тотальных биекций F и G.

Размерность матриц в (4) можно понизить, рассматривая бинарные отношения $\vec{R}_1$, $\overleftarrow{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\overleftarrow{R}_2$ не как отношения из множества V в множество $V \times V$, а как отношения из множества V в множества $R_1 \times R_1$ и $R_2 \times R_2$, соответственно, при выполнении естественного условия $|R_1| = |R_2|$. При этом матрица $[g_{ij}]$, может быть интерпретирована как матрица, построенная по индикатору тотальной биекции $G \in {R_1}^{R_2}$.

Литература

1. Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп [Текст]: в 2 т. / А. Клиффорд, Г. Престон. – М.: Мир, 1972.

2. Биркгоф, Г. Теория структур [Текст] / Г. Биркгоф. – М.: Издательство иностранной литературы, 1952.– 407 с.