



### Литература

1. Соловьев Ю.П., Садовничий В.А., Шавгулидзе Е.Т., Белокуров В.В. Эллиптические кривые и современные алгоритмы теории чисел.- М.-Иж.: Институт комп. исследований, 2003.
2. Математические и компьютерные основы криптологии: Учебн. пособие/ Ю.С. Харин, В.И. Берник, Г.В. Матвеев, С.В. Агиевич. – Мн: Новое знание, 2003.
3. Смарт Н. Криптография. – М.: Техносфера, 2005.
4. Wiener M/ Cryptanalysis of chort RSA secret exponents. – IEEE Trans. Int. Theory, 1989. V. 35. P.54 – 58.
5. Boneh D. Twenty years of attacks of the RSA cryptosystem. – Notes of the Americ. Math. Soc.,1999. V. 46.P.203-213.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и студентов втузов.- Изд. перераб. Пер. с нем. – М.:Наука, 1980.
7. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1965.

И.В. Федоров

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНДИКАТРИСЫ РАССЕЯНИЯ АНСАМБЛЯ ЧАСТИЦ

(Самарский университет)

При испытаниях качества распыливания топлива в газотурбинном двигателе летательного аппарата наблюдению доступна индикатриса рассеяния лазерного излучения, прошедшего через струю распыла. Задачей является оценивание распределения капель по размеру на основе зарегистрированной индикатрисы рассеяния. В работе решаются как прямая задача моделирования индикатрисы рассеяния по заданному распределению ансамбля частиц на основе теории дифракции Фраунгофера, так и обратная задача восстановления гистограммы распределения ансамбля частиц по размерам.

При распыливании форсунками жидкого вещества в струе одновременно могут находиться разнородные по размерам капли, и общее их число чрезвычайно велико. Для измерения размеров капель используется метод малоуглового дифракционного рассеяния света [3].

Главным недостатком метода малоуглового рассеяния [2] является ограничение по пространственной плотности расположения капель в связи с трудностью учета в методах математической обработки влияния эффектов вторичного рассеяния.

Качество работы форсунок оценивается по форме и дальнобойности струй, по обеспечению требуемого закона распределения в пространстве, по величине неравномерности этого распределения, а также по величине диаметров образующихся капель и по количеству капель того или иного диаметра.



### Индикатриса рассеяния

Результат дифракции света на крупной сферической частице, наблюдаемой в дальнем поле, представляет собой картину с ярким пятном в форме круга в центре и набором концентрично расположенных вокруг него и чередующихся темных и светлых колец с постепенно ослабевающей яркостью (дифракция Фраунгофера).

При этом суммарная интенсивность рассеянного света при дифракции на  $N$  различных по размеру частицах (такие частицы называются полидисперсными) будет иметь следующий вид [1]:

$$I_N(\theta_j) = N \frac{E_0 \pi^2}{16 \lambda^2} \sum_{i=1}^n D_i^4 \left[ \frac{2J_1(\rho_i \theta_j)}{\rho_i \theta_j} \right]^2 f(D_i) \Delta D_i, \quad (1)$$

где  $\rho_i = \pi D_i / \lambda > 30$  - условие крупности,  $f(D_i)$  - распределение частиц по размерам,  $E_0$  - интенсивность падающего на каплю света,  $J_1(x)$  - функция Бесселя 1-го рода 1-го порядка,  $\theta$  - малый угол рассеивания.

При  $n \rightarrow \infty$  суммарную интенсивность для любого угла рассеяния  $\theta_j$  можно представить через интеграл, причем без ошибки в величине интеграла можно сменить пределы интегрирования:

$$I_N(\theta_j) = N \frac{E_0 \pi^2}{16 \lambda^2} \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} D^4 \left[ \frac{2J_1(\rho \theta_j)}{\rho \theta_j} \right]^2 f(D) dD = N \frac{E_0 \pi^2}{16 \lambda^2} \int_0^{\infty} D^4 \left[ \frac{2J_1(\rho \theta_j)}{\rho \theta_j} \right]^2 f(D) dD, \quad (2)$$

Таким образом распределение значений относительной интенсивности  $\bar{I}_N(\theta)$  - индикатрисой рассеяния - имеет следующий вид [3]:

$$\bar{I}_N(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^4 \left[ \frac{2J_1(\rho_i \theta_j)}{\rho_i \theta_j} \right]^2 f(D_i) \Delta D_i}{\sum_{i=1}^n D_i^4 f(D_i) \Delta D_i} \cong \frac{\int_0^{\infty} D^4 \left[ \frac{2J_1(\rho \theta_j)}{\rho \theta_j} \right]^2 f(D) dD}{\int_0^{\infty} D^4 f(D) dD}.$$

### Линейная регрессия

Для решения прямой задачи моделирования индикатрисы рассеяния  $\bar{I}_N(\theta)$  по заданному распределению ансамбля частиц  $f(D)$ , так и обратной задачи восстановления гистограммы распределения частиц по размерам.  $f(D)$  использовалась модель линейной регрессии [4]:

$$Y = FX + \xi, \quad (3)$$

где  $F = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n D_i^4 \left[ \frac{2J_1(\rho_i \theta_j)}{\rho_i \theta_j} \right]^2 \Delta D_i}{\sum_{i=1}^n D_i^4 f(D_i) \Delta D_i} \right\}_{m \times n}$  - матрица подстановок,  $X = f(D) = \{p_i\}$  - рас-

пределение ансамбля частиц (значения вероятности),  $\xi \square N(0, \sigma^2 I)$  - гауссов шум,  $Y = I_N(\theta_i)$  - значение индикатрисы,  $i = (1, n)$ ,  $j = (1, m)$ .



Согласно методу наименьших квадратов (МНК) искомый вектор параметров  $X$  есть решение нормального уравнения:

$$X = (F^T F)^{-1} F^T Y. \quad (4)$$

При нахождении искомого вектора возникает вырожденность матрицы  $F^T F$ , для устранения которой используется регуляризация Тихонова:

$$X = (F^T F + \lambda I)^{-1} F^T Y,$$

где  $\lambda$  – малый положительный параметр регуляризации.

Для оценки качества восстановления гистограммы используется критерий средней квадратичной погрешности:

$$\varepsilon^2 = \sum_j (\hat{p}_j - p_j)^2,$$

где  $\hat{p}_j$  – оценка гистограммы распределения частиц по размерам ( $p_j$  – истинное значение).

### Экспериментальные исследования

В качестве заданного распределения капель по размерам были взяты нормальное и экспоненциальное.

Рисунок 1 отображает следующее: верхнее изображение – заданное распределение капель по размерам, среднее изображение – индикатриса рассеивания, рассчитанная по формуле 3, нижнее изображение – оценка распределения капель по размерам, полученная по формуле 4.

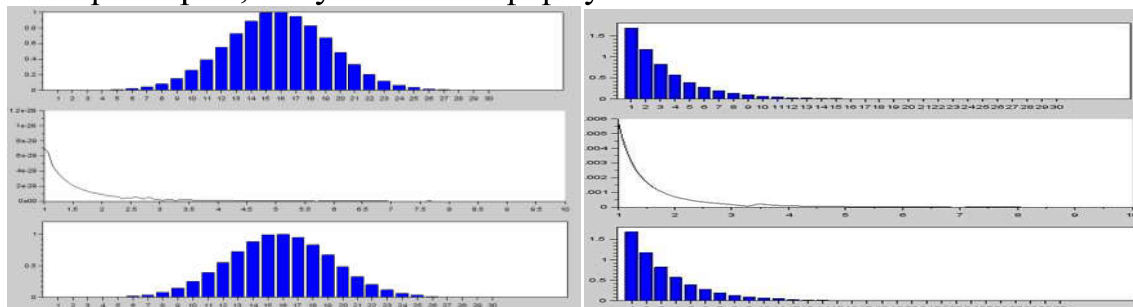


Рисунок 1 – Восстановление распределения капель по размерам с малым шумом

На основе рисунка 1 можно сделать вывод, что при величине шума сопоставимой со значениями индикатрисой рассеивания модель линейной регрессии отлично обрабатывает. Однако, когда шум преобладает в индикатрисе рассеивания, изображенно на рисунке 2, искажаются исходные данные.

Так же в таблице 1 приведены результаты эксперимента при варьировании следующих параметров:

- $n$  – количество интервалов, разбивающее диапазон возможных значений диаметров капель;

- $l$  – количество интервалов, разбивающее диапазон малого угла;

при следующих заданных данных:

- $N = 100000$  – количество капель в струе;

- $\lambda = 630 \text{ нм}$  – длина волны;



- $[\theta_{\min}, \theta_{\max}] = [1, 10]$  – диапазон малого угла.

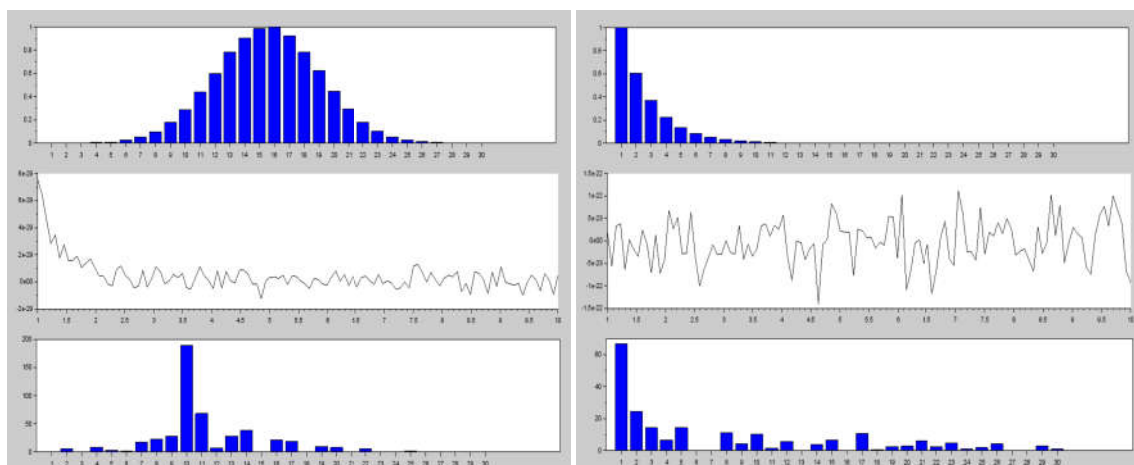


Рисунок 2 – Восстановление распределения капель по размерам с преобладающим шумом

Таблица 1. Ошибка восстановления распределения частиц для нормального и экспоненциального распределения

Тип распределения	Нормальное	Экспоненциальное
$n = 10$	$1.6e^{-4}$	$1.7e^{-5}$
$n = 20$	$1.0e^{-4}$	$3.4e^{-4}$
$n = 30$	$7.2e^{-3}$	$9.3e^{-4}$
$m = 80$	$2.5e^{-3}$	$1.3e^{-3}$
$m = 100$	$1.9e^{-3}$	$4.6e^{-4}$
$m = 120$	$4.7e^{-4}$	$8.6e^{-5}$

Из полученных результатов видно, при вариации количества интервалов, разбивающих диапазон малого угла и возможных значений диаметров капель, можно добиться достаточно точного построения индикатрисы рассеяния и восстановления распределения ансамбля частиц. Однако при преобладающем шуме в индикатриссе рассеяния происходит искажение восстановленных исходных данных.

### Литература

- 1 Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – Москва.: Наука, 1973. –720с.
- 2 Голубев А.Г., Ягодкин В.Н. Оптические методы измерения дисперсности аэрозолей. / Труды ЦИАМ № 828. –М.: ЦИАМ, 1981. –14с.
- 3 Байвель Л.П., Логунов А.С. Измерение и контроль дисперсности частиц методом светорассеяния под малыми углами. –Москва: Энергия, 1977. –87с.
- 4 G. Peuré, The Numerical Tours of Signal Processing - Advanced Computational Signal and Image Processing IEEE Computing in Science and Engineering, vol. 13(4), pp. 94-97, 2011.