



П.С. Воеводин, Ю.М. Заболотнов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ОРБИТАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ С ГИБКИМ ТРОСОМ

(Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва)

Рассматривается построение математической модели и анализ пространственного движения электродинамической тросовой системы (ЭДТС) на орбите спутника Земли. ЭДТС предназначена для создания малой тяги при изменении параметров орбиты малых космических аппаратов и наноспутников на околоземной орбите. Малая тяга возникает при взаимодействии троса, по которому пропускается ток, и магнитного поля Земли. Построение математической модели осуществляется методом Лагранжа в орбитальной подвижной системе координат. Полученные уравнения движения учитывают изгиб троса и позволяют исследовать его колебания при действии распределенной нагрузки от сил Ампера. Для описания магнитного поля Земли используется известная дипольная модель. Приводятся численные результаты моделирования, показывающие, что в некоторых случаях возможно возникновение изгибных автоколебаний троса, которые синхронизируются с колебаниями ЭДТС как орбитального гравитационного маятника.

В настоящее время сохраняется устойчивый интерес к ЭДТС, которые можно использовать в различных целях [1]. Наиболее известные применения ЭДТС: 1) создание тяги посредством взаимодействия проводящего троса, по которому пропускается ток, с магнитным полем Земли; 2) генерации электрической энергии, когда в тросе как в проводнике, движущимся в магнитном поле, возникает электродвижущая сила. Возможно и совместное использование этих режимов работы ЭДТС [2]. Для работы ЭДТС на концевых телах системы должны быть установлены специальные устройства, которые обеспечивают контакт с окружающей плазмой магнитного поля Земли.

При построении математической модели концевые тела рассматриваются как материальные точки, соединенные невесомым тросом. Для вывода уравнений движения ЭДТС используются уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_c}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi \quad (1)$$

где r - расстояние между концевыми точками, θ и φ - углы, определяющие положение троса относительно местной вертикали, T_c - кинетическая энергия системы, Π - потенциальная энергия системы в гравитационном поле Земли, Q_i - обобщенные силы, $\dot{q}_i = dq_i / dt$ - обобщенные скорости.



В результате применения уравнений (1), полученная математическая модель орбитального пространственного движения ЭДТС в магнитном поле Земли

$$\ddot{r} - r \left[\dot{\varphi}^2 + (\dot{\theta} + \omega)^2 \cos^2 \varphi + \nu^{-1} \omega^2 (3 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi - 1) \right] = Q_1 / m_e, \quad (2)$$

$$\ddot{\theta} + \dot{\omega} + 2(\dot{\theta} + \omega)(\dot{r} / r - \dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi) + 1.5 \nu^{-1} \omega^2 \sin 2\theta = Q_2 / m_e r^2 \cos^2 \varphi, \quad (3)$$

$$\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi} \dot{r} / r + \left[0.5(\dot{\theta} + \omega)^2 + 1.5 \nu^{-1} \omega^2 \cos^2 \theta \right] \sin 2\varphi = Q_3 / m_e r^2, \quad (4)$$

где $m_e = m_1 m_2 / m$, m_1, m_2 - массы концевых тел, $\omega = \dot{\vartheta} = (K / p^3)^{0.5} \nu^2$ - угловая скорость орбитального движения центра масс системы, ϑ - истинная аномалия, $\dot{\omega} = \ddot{\vartheta} = -2Ke \sin \vartheta / p^3$, $\nu = 1 + e \cos \vartheta$, e - эксцентриситет орбиты, p - параметр орбиты.

Сила Ампера на единицу длины, действующая в магнитном поле Земли, определяется выражением [2]

$$d\mathbf{F} = I \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{B}, \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$ - единичный вектор, направленный по касательной к тросу; τ_x, τ_y, τ_z - направляющие косинусы в орбитальной подвижной системе координат [2], $\mathbf{B} = \mu R_c^{-3} \mathbf{e}_z$ - вектор магнитной индукции, $\mu = 8 \cdot 10^6 \text{ Тл км}^3$ - магнитный момент земного диполя, \mathbf{e}_z - единичный вектор оси земного диполя, I - сила тока.

Обобщенные силы определяются из выражений $Q_1 = \delta A_r / \delta r$, $Q_2 = \delta A_\theta / \delta \theta$, $Q_3 = \delta A_\varphi / \delta \varphi$, где $\delta A_r, \delta A_\theta, \delta A_\varphi$ - работы на возможных перемещениях $\delta r, \delta \theta, \delta \varphi$.

Обобщенные силы определяются из выражений

$$Q_1 = -0.5B|I|r \left(\operatorname{ctg} \psi \cos^2 \varphi + \psi^{-1} \sin^2 \varphi \right), \quad (6)$$

$$Q_2 = B I r \Delta \cos \varphi \left[\cos \varphi \cos i - \sin \varphi \sin i \sin(\theta + u) \right], \quad (7)$$

$$Q_3 = 0.5B|I|r^2 \sin \varphi \cos \varphi \left(\operatorname{ctg} \psi - \psi^{-1} \right) + B I r \Delta \cos(u + \theta) \sin i. \quad (8)$$

где $\Delta = 0.5r(m_2 - m_1) / (m_1 + m_2)$, i - наклонение орбиты, u - аргумент широты, ψ - угол между касательной к тросу, проведенной на его концах, и линией (хордой), соединяющей концевые точки.

Угол ψ определяется из алгебраического уравнения

$$r = L \gamma / \left[\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi (\psi / \sin \psi)^2 \right]^{0.5}, \quad (9)$$

где $\gamma = 2E\psi / (2E\psi - B|I|L)$, E - модуль Юнга материала троса, L - длина троса по дуге окружности. В работе [2] показано, что если трос невесом, то под действием распределенной нагрузки его форма - дуга окружности. Здесь предполагается, что в пределах длины троса магнитная индукция постоянна. Уравнение (9) решается численно при заданных значениях r и φ .



Для расчета движения центра масс ЭДТС используются стандартные уравнения

$$m\ddot{\mathbf{R}}_c = \mathbf{G} + \mathbf{F}, \quad (10)$$

где $\mathbf{G} = -K(m_1 + m_2)\mathbf{R}_c / R_c^3$, \mathbf{R}_c - радиус-вектор центра масс системы, \mathbf{F} - вектор равнодействующей силы Ампера.

На рисунке 1 приводятся результаты моделирования, которые показывают изменение большой полуоси a орбиты центра масс системы, когда $m_1 = m_2 = 30 \text{ кг}$, $I = -2 \text{ А}$ за 10 час . На рисунке 1 R_g - средний радиус Земли. Направление тока для определенности считается положительным, если ток направлен от точки m_1 к точке m_2 . ЭДТС находится в режиме, близком к режиму гравитационной стабилизации. Исходная орбита является круговой (1000 км), длина троса $L = 1 \text{ км}$. В этом случае реализуется подъем высоты орбиты центра масс системы. С увеличением наклона орбиты эффективность применения ЭДТС падает. При наклонении орбиты $i = 60 \text{ град}$ приращение изменения большой полуоси орбиты Δa уменьшается приблизительно в два раза. То есть получается, что приращение Δa при изменении наклона орбиты можно оценить в данном случае достаточно просто не проводя моделирования. Для этого достаточно умножить приращение Δa , определенное при $i = 0$ на $\cos i$. Результаты моделирования показали, что если величина тока не превышает некоторого критического значения, то в системе возникают синхронные колебания, когда наблюдается совпадение частот изгибных колебаний троса и всей ЭДТС относительно местной вертикали.

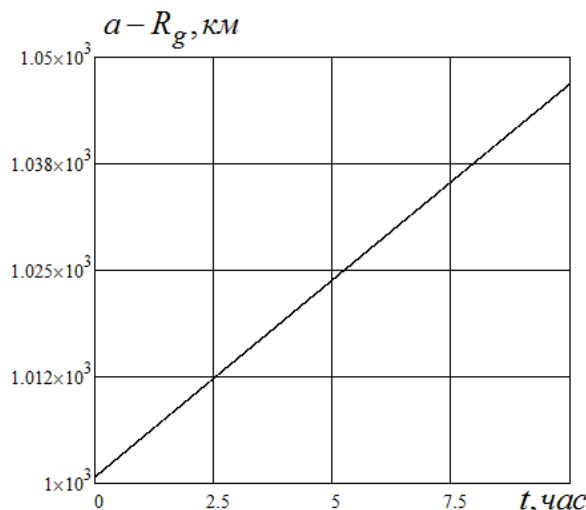


Рисунок 1

Из рисунка 1 следует, что для данного примера приращение большой полуоси орбиты изменяется практически по линейному закону.



Литература

1. Zhong, R., Dynamics of Nanosatellite Deorbit by Bare Electrodynamic Tether in Low Earth Orbit [Текст] / Zhong R., Zhu Z.H. // J. of Spacecraft and Rockets. – 2013. – v.50. – №3. – P.691-700.
2. Белецкий, В.В. Динамика космических тросовых систем [Текст] / В.В. Белецкий, Е.М. Левин – М.: Наука, 1990. – 336 с.

И.Ю. Выгодчикова

ОЦЕНКА ДОПУСТИМЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ АНАЛИЗЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ РЯДОВ

(Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского)

Под многозначным динамическим рядом будем понимать динамический ряд, в котором каждому дискретному значению времени соответствует не одно, а множество численных значений рассматриваемого показателя. Проблема многозначности динамических рядов характерна для интервальных данных. Рассматривая моментальные динамические ряды, можно добавить в каждый момент пространственную составляющую, измеряя значение показателя по разным объектам. При этом значения показателя вовсе не обязательно сосредоточены вблизи одной точки каждого диапазона (среднего значения), они могут быть распределены равномерно или же иметь несколько зон сосредоточения. В связи с этим возникает проблема выбора в каждом диапазоне одного значения, требуемого для построения однозначного ряда и применения известных методов.

Актуальной задачей является построение модели аппроксимации по многозначным данным. Рассмотрим метод анализа многозначных динамических рядов, основанный на минимизации максимума из локальных расстояний Хаусдорфа между диапазонами динамического ряда и значениями аппроксимирующего полинома [1]. Обозначим через $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1}$ вектор коэффициентов алгебраического полинома степени n , $p_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$, а через $f(A, k) = \max\{y_{2,k} - p_n(A, t_k); p_n(A, t_k) - y_{1,k}\}$ – расстояния Хаусдорфа между диапазоном ряда $[y_{1,k}; y_{2,k}]$ и значением полинома в узле t_k сетки $T = \{t_0 < \dots < t_N\}$. Величина $f(A, k)$ есть ошибка аппроксимации диапазона данных полиномом в рассматриваемом узле. Иными словами, это максимум из разности между верхним значением показателя $y_{2,k}$ и значением показателя, определяемого по полиному, и разности между значением показателя, определяемого по полиному, и нижним значением показателя $y_{1,k}$.