2. Вычислительный эксперимент.

В работе был проведен вычислительный эксперимент на примере планарного графа с D=4 (рис. 1). Зададим веса ребер графа, находящихся в пересечении граней $z_i \cap z_j, 1 \le i \ne j \le 10$: $b_{12}(1) = b_{13}(1) = b_{14}(1) = b_{15}(1) = 1.01$ (ребра выделены фиолетовым цветом), остальные веса положим равными 1.02.

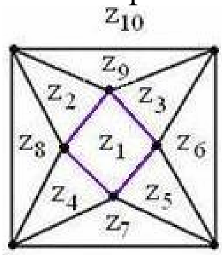

Рис. 1. Пример графа с D=4

Из формулы (2) нетрудно получить $\mathcal{B}_4 = 8.56190839$. Положим h=0.05 и вычислим вероятность несвязности $\bar{P}$ по асимптотической формуле (1) и методом Монте-Карло, обозначив ее $\bar{P}^*$, с числом реализаций 10^7 : $\bar{P} \approx$ 0.0000535119, $\bar{P}^* \approx$ 0.0000523. Время счета по формуле (1) составляет несколько секунд, а методом Монте-Карло - несколько часов.

Литература

1. Tsitsiashvili . G.Sh. Complete calculation of disconnection probability in planar graphs // Reliability: Theory and Applications — 2012. — Vol. 7, № 1. — 154 - 159 с.

2. Harary F., Manvel B. On the Number of Cycles in a Graph // Matematicky casopis — 1971. — Vol. 21, № 1. — 55 - 63 с.

3. Прасолов В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. — 2004. – М.: МЦНМО — с. 352 с.

И.А. Чернов

ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЕТИ

(Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН,
Петрозаводский государственный университет)

Рассмотрим вычислительную систему типа «грид», состоящую из сервера и клиентов, осуществляющих расчеты, причем клиенты — персональные компьютеры, принадлежащие сторонним лицам, участвующим в проекте добровольно [1,2]. Не исключено проникновение в сеть злоумышленников, намеренно отсылающие на сервер неверные ответы. Очевидным способом защиты является проверка ответов, в частности — репликация: задание посылается m различным узлам, причем ответ принимается только в том случае, если он одинаков для всех реплик. Пусть для определенности возможных ответов два. Вероятность получения неверного ответа не равна нулю, но убывает с ростом m и возрастает с увеличением числа k компьютеров, принадлежащих злоумышленнику.

Предположим, что злоумышленник имеет выгоду в случае, если будет принят неверный ответ, однако несет расходы по внедрению компьютеров в сеть. Построим простую модель такой грид-системы и приведем пример, показывающий, что возможна игровая ситуация, то есть расходы игроков (хозяина сети и злоумышленника) зависят от действий, предпринимаемых и тем, и другим; более того, игра не обязательно решается в чистых стратегиях: иными словами, в ряде случаев имеет смысл случайно выбирать уровень репликации m и число внедренных вычислительных устройств k. Вместо переменного числа внедренных устройств можно говорить о правильном ответе со стороны части из них; таким образом, при определенных условиях можно заставить злоумышленника содействовать проекту.

Игрок 1 (организатор вычислительного проекта) несет расходы, связанные с вычислениями, примем за единицу одноразовый расчет задания. В случае неверного ответа к расходам добавляется штраф F, связанный, например, с упущенной прибылью, ударом по репутации, и т.п. Вероятность получения неверного ответа в одном расчете обозначим i. Тогда средние расходы игрока 1 составляют

$$C = m + p^m F.$$

В самом деле, неверный ответ принимается в том случае, если все m реплик решены неверно: вероятность этого события, при условии независимости расчетов (что предполагаем) равна p^m .

Игрок 2 внедряет k компьютеров в вычислительную сеть, состоящую из N узлов; таким образом, вероятность p неверного ответа, при условии независимого выбора узлов, равна $k/N.$ Предположим для простоты, что штраф игрока 1 каким-либо образом переходит к игроку 2, однако он несет потери, связанные с внедрением, a единиц на каждый узел. Тогда выигрыш определяется выражением

$$V = p^m F - pNa.$$

Итак, если выбрать константы N, a и F и определить диапазон изменения m и k, то имеем игровую ситуацию: выигрыши игроков зависят от выбора каждого из них. Приведем простой пример, показывающий, что игра может быть нетривиальной: решаться только в смешанных стратегиях.

Пусть уровень репликации m принимает значения 1, 2 и 3, а число внедренных злоумышленником узлов k — значения 1, 10 и 25; число узлов сети N=100, F=100, затраты на внедрение одного узла $a=0.2$. Напомним, что единица измерения стоимости — (средняя) стоимость расчета одного задания.

Тогда выигрыши игроков заданы следующими матрицами B и A:

Выигрыш игрока 2, *B*			
p:	0.01	0.10	0.25
m=1	0.8	8	20
m=2	-0.19	-1	1.25
m=3	-0.2	-1.9	-3.44

Выигрыш игрока 1, *A*			
p:	0.01	0.10	0.25
m=1	-2	-11	-26
m=2	-2.01	-3	-8.25
m=3	-3	-3.1	-4.56

Игрок 1 ориентируется на минимизацию затрат *C*, а в силу монотонного их убывания по *p* худший исход достигается при максимальном *p*; при такой большой вероятности ошибки требуется максимальная репликация, что приводит к выбору стратегии $m=3$. Лучший выигрыш игрока 2 при таком выборе игрока 1, очевидно, равен -0.2 и достигается при $p=0.01$. Аналогично, игрок 2 имеет худший исход при $m=3$ для любого своего выбора, а лучший среди них — при $p=0.01$. Оптимальное значение игрока 1 в таком случае равно 0.8 при $m=1$.

Эти рассуждения показывают, что игра не имеет решения в чистых стратегиях. Введем распределение вероятностей на множествах чистых стратегий: $\bar{q}=(q_1, q_2, q_3)$ для игрока 1 и $\bar{p}=(p_1, p_2, p_3)$ для игрока 2.

Теорема 5.3 [3] утверждает, что вполне смешанная стратегия, если существует, задается равенствами

$$\bar{q}=\frac{uB^{-1}}{uB^{-1}u'},\quad \bar{p}=\frac{A^{-1}u'}{uA^{-1}u'},\quad u=(1,1,1).$$

Нетрудно проверить, что при этом $q_2<0$ и $p_2<0$, то есть вполне смешанной стратегии нет; положим $p_2=q_2=0$, исключив соответствующие чистые стратегии. Тогда получим игру двумя стратегиями у каждого игрока, имеющую единственную вполне смешанную стратегию. Таким образом, решение игры:

$$\bar{q}=(0.14, 0, 0.86),\quad \bar{p}=(0.96, 0, 0.045).$$

При этом игрок 2 в среднем проигрывает 0.056 единиц, а средние затраты игрока 1 составляют 3.07.

Содержательная интерпретация этого простого примера показывает, что

1. затраты на внедрение в вычислительную сеть со злым умыслом при оптимальных действиях сторон способны привести к отказу от попытки внедрения: средний выигрыш злоумышленника меньше нуля;
2. некоторые действия сторон могут быть нерациональны при оптимальном поведении;
3. оптимальный выбор уровня репликации и количества внедренных узлов принципиально случаен;
4. наиболее вредоносная (но дорогая) стратегия игрока 2 ($i=3$) используется при оптимальных действиях относительно редко;
5. наиболее безопасная (но дорогая) стратегия игрока 1 ($m=3$) используется относительно часто.

В аналогичном примере большей размерности (при $i = 1, \ldots, 10$, $p_i = 0.01(1+5i)$, $m = 1, \ldots, 10$, $F = 100$, $a = 0.02$) большинство чистых стратегий несущественны; игра также сводится к двум чистым стратегиям для каждого игрока, а оптимальной вполне смешанной стратегией является

$$\bar{q} = (0.04, 0.96), \quad \bar{p} = (0.63, 0.37).$$

на чистых стратегиях с номерами 2 и 10, при этом средний проигрыш игрока 2 равен 0.11, а средние затраты игрока 1 равны 10.02. Справедливы те же выводы, что в предыдущем примере. Отметим еще, что при широком выборе числа внедренных устройств актуальным оказался максимальный вариант; таким образом, следуя оптимальной стратегии, злоумышленник внедряет более половины устройств, но затем он вынужден более чем в половине случаев (приблизительно в двух из трех) возвращать правильный ответ, фактически сотрудничая с проектом, несмотря на то, что изначально интересы злоумышленника противоположны интересам автора расчетного проекта.

Работа поддержана Программой стратегического развития ПетрГУ и грантом РФФИ №а-13-07-00008.

Литература

1. Foster, I. The Grid: Blueprint for a New Computing Infrastructure / I. Foster, C. Kesselman. — San Francisco : Morgan Kaufmann, 1999. — 675 p.
2. Foster, I. The anatomy of the grid: Enabling scalable virtual organizations / I. Foster, C. Kesselman, S. Tuecke // International J. Supercomputer Applications. — 2001. — Vol. 15. — P. 200–222.
3. Петросян, Л. Теория игр / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. — М.: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998. — 304 р.