сингулярно возмущенных уравнений.– В сб.: Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Куйбышев: КГУ, 1980, с.124–147.

В.И. Кузнецова

О ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С МАЛЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

В статье предлагается приближенный метод исследования устойчивости функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа с неограниченным запаздыванием, зависящим от малого параметра ε. Предполагается, что при $\varepsilon=0$ запаздывание в уравнении становится нулевым, т.е. уравнение превращается в обыкновенное. Выписываются условия, при наличии которых можно из устойчивости уравнения при $\varepsilon=0$ сделать вывод о наличии устойчивости и при $\varepsilon>0$. Близкие вопросы изучались в работах Ван Ляня [1], Эльсгольца Л.Э. [2], Рябова Ю.А. [3], Ахмерова Р.Р. [4] и др. Отличие настоящей работы от предыдущих заключается в том, что, во-первых, ранее рассматривались лишь уравнения с ограниченным запаздыванием, во-вторых, в работах, посвященных уравнениям с малым запаздыванием, обычно предполагается, что оператор A, действующий на производную, является тождественным (уравнение запаздывающего типа) или представим в виде $I+D$, где $\|D\|<1$, в настоящей работе это требование заменяется условием обратимости оператора A. Эффективные признаки обратимости оператора A описываются в п.2.

I. Устойчивость функционально-дифференциальных уравнений с малым отклонением аргумента

Примем следующие обозначения: R – поле действительных чисел; C^n – n-мерное комплексное арифметическое пространство с нормой $|\cdot|$; C – пространство ограниченных непрерывных функций $x: R\to C^n$ с нормой $\|x\|=\sup_{t\in R}|x(t)|$; C^1 – пространство функций $x:R\to C^n$, которые принадлежат C вместе с первой производной, с нормой $\|x\|=\|x\|_C+\|x'\|_C$.

Говорят, что линейный ограниченный оператор $A:C\to C$

(или $A: C^1 \to C$, или $A: C \to C^1$) в о л ь т е р р о в, если для любых $t \in R$ и $x \in C$ из условия $x(s) = 0$ $(s \leqslant t)$ следует равенство $(Ax)(t)=0$ и что вольтерров оператор $A: C \to C$ (или $A: C^1 \to C$ или $A: C \to C^1$) В - о б р а т и м, если он обратим и обратный к нему вольтерров.

Будем говорить, что п а м я т ь с е м е й с т в а вольтерровых операторов $A_\varepsilon : C \to C$ у б ы в а е т н а б е с к о н е ч н о с т и и м а л а п р и м а л ы х $\varepsilon > 0$, если существует семейство функций $\alpha_\varepsilon : [0, \infty) \to [0, \infty)$ такое, что для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ $\alpha_\varepsilon(h) \to 0$ при $h \to +\infty$; для каждого фиксированного $h > 0$ $\alpha_\varepsilon(h) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$ и для любых $t \in R$ и $x \in C$ из условия $x(s) = 0$ $(s \geqslant t - h)$ следует оценка

$$|(A_\varepsilon x)(t)| \leqslant \alpha_\varepsilon(h) \|x\| \quad (\varepsilon > 0).$$

Рассмотрим дифференциальный оператор $L: C^1 \to C$ вида

$$Lx = Ax' + Bx,$$

где $A, B : C \to C$ вольтерровы операторы.

Через $C_f^1(-\infty, t]$ обозначим множество функций $x: (-\infty, t) \to C^n$ непрерывно дифференцируемых и ограниченных вместе с производной на промежутке $(-\infty, t]$, для которых выполнено условие "склейки"

$$A\hat{x}'(t) + B\hat{x}(t) = f(t),$$

где $\hat{x} \in C^1$ - произвольное продолжение функции x на $(-\infty, +\infty)$. По поводу обсуждения условия "склейки" см. [5].

Уравнение $Lx = 0$ называется у с т о й ч и в ы м о т н о с и т е л ь н о п о с т о я н н о д е й с т в у ю щ и х в о з м у щ е н и й, если существует такая константа $K > 0$, что для любых $t \in R$ и $f \in C$, $x_0 \in C_f^1(-\infty, t]$ решение задачи Коши

$$(Lx)(s) = f(s) \qquad (s > t),$$

$$x(s) = x_0(s) \qquad (s \leqslant t)$$

существует, единственно и удовлетворяет оценке

$$\|x\|_{C^1(t, +\infty)} \leqslant K\left[\|f\|_{C[t, +\infty)} + \|x_0\|_{C^1(-\infty, t]}\right].$$

Рассмотрим семейство операторов $L_\varepsilon : C^1 \to C$ вида

$$L_\varepsilon x = A_\varepsilon x' + B_\varepsilon x, \tag{I}$$

где $\varepsilon \geqslant 0$. Будем предполагать, что $A_\varepsilon, B_\varepsilon : C \to C$ - вольтерровы операторы, удовлетворяющие следующим условиям:

1^0. $\sup_{\varepsilon\geqslant 0}\|A_\varepsilon\|\leqslant M<\infty$, $\sup_{\varepsilon\geqslant 0}\|B_\varepsilon\|\leqslant M<\infty$.

2^0. Операторы A_ε и B_ε непрерывны по ε в точке $\varepsilon=0$ на множестве функций-констант, т.е. $\|A_\varepsilon x - B_\varepsilon x\|\to 0$ и $\|B_\varepsilon x - B_0 x\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ для любой функции-константы x.

3^0. Память семейств операторов $\{A_\varepsilon\}$ и $\{B_\varepsilon\}$ убывает на бесконечности и мала при малых $\varepsilon>0$.

4^0. Операторы A_0 и B_0 имеют вид $(A_0x)(t)=a(t)x(t)$ и $(B_0x)(t)=b(t)x(t)$, где $a(t)$ и $b(t)$ действуют из C^n в C^n и отображения $t\mapsto a(t)$ и $t\mapsto b(t)$ равномерно непрерывны.

Подчеркнем, что L_0 имеет вид

$$(L_0x)(t)=a(t)x'(t)+b(t)x(t),$$

т.е. не содержит запаздывания, в то время как операторы L_ε при всех ненулевых ε могут быть операторами с неограниченным запаздыванием. Условия 1^0–4^0 не гарантируют близости операторов L_ε и L_0 не только по норме, но и в сильном смысле. Гарантируется лишь сходимость L_ε к L_0 при $\varepsilon\to 0$ на функциях-константах. Отметим, что малость памяти означает малость запаздывания.

Перечисленным условиям 1^0–4^0 удовлетворяет, например, семейство операторов

$$(A_\varepsilon x)(t)=a_1(t)x(t-\varepsilon)+a_2(t)x(t-2\varepsilon)+$$
$$+\sqrt{\varepsilon}\,a_\varepsilon(t)x(t-4)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{0}c_4\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)x(t+s)\,ds,$$

где отображения $t\mapsto a_k(t)$ $(k=1,2,3)$ равномерно непрерывны и ограничены и $\int_{-\infty}^{0}|a_4(s)|\,ds<\infty$.

Ниже нам потребуются следующие предложения (см. [6]).

Предложение 1. Уравнение $L_\varepsilon x=0$ устойчиво относительно постоянно действующих возмущений тогда и только тогда, когда оператор L_ε В-обратим.

Предложение 2. Множество В-обратимых операторов открыто в пространстве вольтерровых операторов.

Предложение 3. Множество В-обратимых операторов замкнуто в множестве обратимых операторов.

Предложение 4. Суперпозиция вольтерровых (В-обратимых) операторов есть вольтерров (В-обратимый) оператор.

Т е о р е м а 1. Пусть операторы семейства $\{A_\varepsilon:\varepsilon\geqslant 0\}$

В-обратимы и обратные к ним равномерно по ε ограничены. Тогда из устойчивости относительно постоянно действующих возмущений уравнения $L_0 x=0$ следует устойчивость относительно постоянно действующих возмущений уравнения $L_\varepsilon x=0$ при малых $\varepsilon>0$.

Замечание. Требование В-обратимости операторов A_ε является малоограниченным, так как для устойчивости уравнения вида (I), как правило, необходимо, чтобы оператор, действующий на производную, был В-обратим (см. [7]).

Т е о р е м а 2. Путь операторы семейства $\{A_\varepsilon : \varepsilon \geqslant 0\}$ В-обратимы и обратные к ним равномерно по ε ограничены. Пусть, кроме того, оператор L_0 обратим, но уравнение $L_0 x=0$ не является устойчивым относительно постоянно действующих возмущений. Тогда уравнение $L_\varepsilon x=0$ также не является устойчивым относительно постоянно действующих возмущений при малых $\varepsilon>0$.

Эти теоремы помогает доказать следующая лемма.

Л е м м а. Операторы $\mathcal{L}_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} L_\varepsilon$ сходятся к оператору $\mathcal{L}_0 = A_0^{-1} L_0$ по норме при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Легко видеть, что верна следующая цепочка равенств

$$\mathcal{L}_\varepsilon - \mathcal{L}_0 = A_\varepsilon^{-1} B_\varepsilon - A_0^{-1} B_0 = [A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}] B_0 + A_\varepsilon^{-1}[B_\varepsilon - B_0] =$$

$$= A_\varepsilon^{-1}[A_0 - A_\varepsilon] A_0^{-1} B_0 + A_\varepsilon^{-1}[B_\varepsilon - B_0] =$$

$$= A_\varepsilon^{-1}[a_\varepsilon + b_\varepsilon], \tag{2}$$

где $a_\varepsilon = [A_0 - A_\varepsilon] A_0^{-1} B_0$, $b_\varepsilon = B_\varepsilon - B_0$.
В силу равномерной ограниченности A_ε^{-1} из равенства (2) следует, что для сходимости $\mathcal{L}_\varepsilon$ к $\mathcal{L}_0$ при $\varepsilon \to 0$ достаточно, чтобы $a_\varepsilon \to 0$ и $b_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

I) Будем рассматривать b_ε как операторы, действующие из C^1 в C. Покажем, что $b_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Имеем

$$\| b_\varepsilon \| = \| B_\varepsilon - B_0 \| = \sup_{t\in R,\, \|x\|_{C^1} \leqslant 1} |(B_\varepsilon x)(t) - (B_0 x)(t)|.$$

Положим $\bar{x}_t(s) \equiv x(t)$ $(s \in R)$. Прибавляя и вычитая из правой части последнего равенства выражения $(B_\varepsilon \bar{x}_t)(t)$ и $(B_0 \bar{x}_t)(t)$, получим, что

$$\|b_\varepsilon\| \leqslant \sup_{t\in R, \|x\|_{C^1}\leqslant 1} |(B_\varepsilon(x-\bar{x}_t)(t)| + \sup_{t\in R, \|x\|_{C^1}\leqslant 1} |(B_\varepsilon \bar{x}_t)(t) -$$

$$-(B_0\bar{x}_t)(t)| + \sup_{t\in R, \|x\|_{C^1}\leqslant 1} |(B_0\bar{x}_t)(t) - (B_0 x)(t)|. \tag{3}$$

В силу условий 2^0 и 4^0 второе слагаемое в правой части мало при малых $\varepsilon>0$, а третье – равно нулю. Осталось оценить первое слагаемое. Для этого разность $x-\bar{x}_t$ представим в виде суммы $u[x,t]+$ $+v[x,t]$, где

$$u[x,t](s)=0 \qquad (s\geqslant t-\gamma), \tag{4}$$

$$v[x,t](s)=0 \qquad (s\leqslant t-2\gamma), \tag{5}$$

$$v[x,t](s)=v[x,t](2t-s-2\gamma) \quad (t-2\gamma<s<t-\gamma), \tag{6}$$

а $\gamma>0$ произвольно. Легко видеть, что $\|v[x,t]\|\leqslant\|x-\bar{x}_t\|\leqslant 2$ и $\|u[x,t]\|\leqslant\|x-\bar{x}_t\|+\|v[x,t]\|\leqslant 4$. В силу условия 3^0 и предположения (4) имеем

$$\sup_{t\in R, \|x\|_{C^1}\leqslant 1} |(B_\varepsilon u[x,t])(t)| \leqslant \alpha_\varepsilon(\gamma)\|u\| \leqslant 4\alpha_\varepsilon(\gamma),$$

а из условия I^0 следует, что

$$\sup_{t\in R, \|x\|_{C^1}\leqslant 1} |(B_\varepsilon v[x,t](t)| \leqslant M \sup_{s\leqslant t, \|x\|_{C^1}\leqslant 1} |v[x,t](s)| =$$

$$= M \sup_{t\in R, s\in[t-2\gamma,t], \|x\|_{C^1}\leqslant 1} |v[x,t](s)|.$$

Для оценки $|v[x,t](s)|$ воспользуемся предположениями (4) и (6)

$$\sup_{s\in[t-2\gamma,t]} |v[x,t](s)| = \sup_{s\in[t-\gamma,t]} |x(s)-\bar{x}_t(s)|.$$

Из условия $\|x\|_{C^1}\leqslant 1$ вытекает, что это выражение не больше γ. Итак,

$$\sup_{t\in R, \|x\|_{C^1}\leqslant 1} |(B_\varepsilon v[x,t](t)| \leqslant M\gamma.$$

А поэтому

$$\sup_{t\in R, \|x\|_{C^1}\leqslant 1} |(B_\varepsilon(x-\bar{x}_t))(t)| \leqslant 4\alpha_\varepsilon(\gamma)+M\gamma.$$

В силу произвольности γ, малости ε и свойств функции α это выражение можно сделать сколь угодно малым.

Таким образом, каждое слагаемое в равенстве (3) стремится к нулю, а поэтому $\|B_\varepsilon - B_0\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

2) Перейдем к оценке оператора $a_\varepsilon = (A_0 - A_\varepsilon)A_0^{-1}B_0$. Легко видеть, что оператор $A_0^{-1}B_0$ переводит единичный шар пространства C^1 в равностепенно непрерывное и равномерно ограниченное множество функций. С учетом его замечания доказательство малости a_ε при малых ε аналогично доказательству сходимости b_ε к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Из условий $a_\varepsilon \to 0$ и $b_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ следует, что $\mathcal{L}_\varepsilon \to \mathcal{L}_0$ при $\varepsilon \to 0$. Это и требовалось доказать.

Доказательство теоремы I. В силу предложения I достаточно показать, что из В-обратимости L_0 следует В-обратимость L_ε при малых $\varepsilon > 0$. А в силу предложения 4 и В-обратимости операторов A_ε доказательство последнего утверждения сводится к проверке того, что В-обратимость $\mathcal{L}_0$ влечет В-обратимость $\mathcal{L}_\varepsilon$ при малых $\varepsilon > 0$. Это, в свою очередь, следует из сходимости $\mathcal{L}_\varepsilon$ к $\mathcal{L}_0$ при $\varepsilon \to 0$ и предложения 2. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Предположим противное, т.е. пусть L_0 не является В-обратимым, но существует последовательность индексов $\varepsilon_i \to 0$ такая, что операторы L_{ε_i} В-обратимы. Тогда в силу предложения 4 В-обратимы и операторы $\mathcal{L}_{\varepsilon_i}$, а из сходимости $\mathcal{L}_\varepsilon$ к $\mathcal{L}_0$ при $\varepsilon \to 0$ и предложения 3 следует В-обратимость $\mathcal{L}_0$ и, следовательно, В-обратимость оператора L_0. Полученное противоречие доказывает теорему.

П. Признаки В-обратимости операторов с малым отклонением аргумента

Теоремы I,2 вопрос о сохранении свойств устойчивости и неустойчивости уравнения $L_\varepsilon x = 0$ при переходе от $\varepsilon = 0$ к малому $\varepsilon > 0$ сводят к вопросу о В-обратимости операторов A_ε, действующих на производную в уравнении. Опишем поэтому в этом п. признаки В-обратимости оператора A_ε.

I) Пусть A_ε представим в виде $I - D_\varepsilon$, где I – тождественный оператор, D_ε – вольтерров оператор и $\|D_\varepsilon\| \leq K < 1$.

Тогда, очевидно, $A_\varepsilon^{-1} = I + D_\varepsilon + D_\varepsilon^2 + D_\varepsilon^3 + \cdots$

Легко видеть, что полученный оператор A_ε^{-1} вольтерров (предложение 3), а поэтому A_ε В-обратим.

2) Пусть $(A_\varepsilon x)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x(t - \varepsilon h_k)$,

где $h_k \geq 0$, a_k – матрицы размера $n \times n$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|a_k\| < \infty$.

Отметим, что оператор A_ε представим в виде $T_\varepsilon^{-1} A_1 T_\varepsilon$, где T_ε – оператор подобия $(T_\varepsilon u)(s) = u(\varepsilon s)$, поэтому для B-обратимости A_ε необходима и достаточна B-обратимость A_1. Причем из обратимости A_1 следует равномерная ограниченность обратных к A_ε. B-обратимость оператора A_1 проверяется с помощью следующего предложения.

Предложение 5. Оператор A_1 B-обратим тогда и только тогда, когда при всех $\lambda \in C$ таких, что $Re\lambda \geq 0$, обратима матрица

$$\Psi_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(-\lambda h_k) \text{ и } \sup_{Re\lambda \geq 0} \|\Psi_\lambda^{-1}\| < \infty.$$

По поводу доказательства и обсуждения этого утверждения см. работы [8–12].

3) Обозначим через $C(-\infty, 0]$ пространство всех непрерывных функций $x : (-\infty, 0] \to C^n$; через x_t – функцию из $C(-\infty, 0]$, определенную формулой $x_t(s) = x(t+s)$ $(s \leq 0), t \in C$; через G – пространство вектор-функционалов $g : C(-\infty, 0] \to C^n$ с естественной нормой. Заметим, что вольтерров оператор $A : C \to C$ можно представить в виде

$$(Ax)(t) = g(t, x_t),$$

где $g(t, \cdot) \in G$ $(t \in R)$ – некоторое семейство вектор-функционалов.

Пусть отображение $t \mapsto g(t, \cdot)$ ограничено и равномерно непрерывно по норме.

Рассмотрим семейство операторов

$$(A_\varepsilon x)(t) = g(\varepsilon t, x_t). \tag{7}$$

Замечание. Семейство (7) не удовлетворяет условиям 1^0–4^0 (вместо малого запаздывания оно имеет медленно меняющиеся "коэффициенты"). Тем не менее, семейство (7) с помощью замены $T_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon T_\varepsilon$ приводится к ранее рассматриваемому виду. Мы пользуемся записью (7), так как она удобнее для дальнейших рассуждений, использующих метод "замораживания".

Введем вспомогательное семейство операторов

$$(A[s]x)(t) = g(s, x_t) \quad (s \in R).$$

Теорема 3. Для того, чтобы операторы A_ε при малых $\varepsilon > 0$ были B-обратимы и обратные к ним были равномерно по ε ограничены, необходимо и достаточно, чтобы все $A[S]$ $(S\in R)$ были B-обратимы и обратные к ним равномерно по S ограничены.

Замечание. Исследовать операторы $A[S]$ проще, чем A_ε, поскольку, во-первых, $A[S]$ не зависят от ε, во-вторых, имеют более простую структуру. Так, например, если

$$(A_\varepsilon x)(t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\varepsilon t)x(t-h_k),$$

то $$(A[s]x)(t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k(s)x(t-h_k),$$

т.е. $A[s]$ есть оператор с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием, для которых существуют эффективные признаки B-обратимости (предложение 5).

Доказательство. I. Достаточность.

Определим вспомогательное семейство операторов формулой

$$(C_\varepsilon f)(t)=(A^{-1}[\varepsilon t]f)(t).$$

Из равномерной непрерывности отображения $s\mapsto A[s]$ и формулы

$$A^{-1}[s]-A^{-1}[t]=A^{-1}[s](A[t]-A[s])A^{-1}[t]$$

следует равномерная непрерывность отображения $s\mapsto A^{-1}[s]$. А поэтому оператор C_ε переводит C в C.

Покажем, что $A_\varepsilon C_\varepsilon\to I$ при $\varepsilon\to 0$.

$$\|A_\varepsilon C_\varepsilon - I\| = \sup_{t\in R,\|x\|_{C^1}\leqslant 1}|(A_\varepsilon C_\varepsilon f)(t)-f(t)| = \sup_{t\in R,\|x\|_{C^1}\leqslant 1}|(A_\varepsilon C_\varepsilon f)(t)-$$

$$-(A[\varepsilon t]A^{-1}[\varepsilon t]f)(t)| = \sup_{t\in R,\|x\|_{C^1}\leqslant 1}|(A_\varepsilon(C_\varepsilon -$$

$$-A^{-1}[\varepsilon t])f)(t)|.$$

Выражение $(C_\varepsilon-A^{-1}[\varepsilon t])f$ можно представить в виде суммы $u[f,t]+v[f,t]$, где $u[f,t]$ и $v[f,t]$ удовлетворяют предположениям (4)- (6), тогда

$$|(A_\varepsilon(C_\varepsilon-A^{-1}[\varepsilon t])f)(t)|\leqslant M\sup_{s\in[t-2\gamma,t]}|v[f,t](s)|+2\alpha_1(\gamma)\|u\|.$$

Оба слагаемых последнего выражения легко оцениваются с помощью предположений (4)-(6). В итоге получаем

$$\|A_\varepsilon C_\varepsilon - I\| \leqslant M \sup_{\|f\|\leqslant 1, t\in R, s\in[t-\gamma, t]} |((C_\varepsilon - A^{-1}[\varepsilon t])f)(s)| +$$

$$+2\alpha_1(\gamma)L = M \sup_{\|f\|\leqslant 1, t\in R, s\in[t-\gamma, t]} |((A^{-1}[\varepsilon s] - A^{-1}[\varepsilon t])f)(s)| +$$

$$+2L\alpha_1(\gamma),$$

где $L = \sup_{s\in R} \|A^{-1}[s]\|$. Второе слагаемое мало при больших $\gamma > 0$, а первое слагаемое мало при каждом фиксированном $\gamma > 0$ и малых $\varepsilon > 0$ в силу равномерной непрерывности отображения $s \mapsto A^{-1}[s]$. Таким образом, $A_\varepsilon C_\varepsilon \to I$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому при малых $\varepsilon > 0$ В-обратим оператор $A_\varepsilon C_\varepsilon$ (предложение 2).

Заметим, что В-обратимость $A[s]$ влечет асимптотическую устойчивость уравнения $(A[s]x)(t) = 0$ (см.теоремы 2 и 4 работы [6]), причем, как нетрудно убедиться, константы в определении устойчивости не зависят от s. А из асимтотической устойчивости, в свою очередь, вытекает убывание памяти оператора $A^{-1}[s]$, причем убывание равномерное по s. Последнее утверждение легко проверяется с помощью сравнения определений асимптотической устойчивости и убывания памяти оператора (см. [6]).

С учетом этого замечания доказательство сходимости $C_\varepsilon A_\varepsilon$ к I при $\varepsilon \to 0$ аналогично доказательству сходимости $A_\varepsilon C_\varepsilon$ к I. Поэтому $C_\varepsilon A_\varepsilon$ при малых $\varepsilon > 0$ также В-обратим.

Из В-обратимости $A_\varepsilon C_\varepsilon$ и $C_\varepsilon A_\varepsilon$ при малых $\varepsilon > 0$ следует обратимость A_ε и C_ε при малых $\varepsilon > 0$ и вольтерровость A_ε^{-1}, поскольку A_ε^{-1} представим в виде произведения вольтерровых операторов $(C_\varepsilon A_\varepsilon)^{-1} = A_\varepsilon^{-1} C_\varepsilon^{-1}$ и C_ε. А вольтерровость A_ε^{-1} означает В-обратимость A_ε.

Равномерная ограниченность A_ε^{-1} вытекает из следующей цепочки неравенств

$$\|A_\varepsilon x\| = \sup_{t\in R} |(A[\varepsilon t]x)(t) \geqslant \frac{1}{\sup\limits_{t\in R}\|A^{-1}[\varepsilon t]\|} \|x\| \geqslant \frac{1}{L}\|x\|.$$

II. Необходимость. Введем вспомогательное семейство операторов $C_\varepsilon[s]$ с помощью формулы

$$(C_\varepsilon[s]f)(t) = (A_\varepsilon^{-1} f_{s-t})(s).$$

Нетрудно показать, что при любом $S \in R$ произведение $C_\varepsilon[S]A[\varepsilon S]$ сходится к I при $\varepsilon \to 0$ равномерно по S (доказательство аналогичное доказательству сходимости $A_\varepsilon C_\varepsilon$ к I при $\varepsilon \to 0$). Поэтому при малых $\varepsilon > 0$ оператор $C_\varepsilon[S]A[\varepsilon S]$ В-обратим $(S \in R)$.

Оценим теперь норму разности $A[\varepsilon S]C_\varepsilon[S] - I$.

$$\sup_{S\in R}\|A[\varepsilon S]C_\varepsilon[S]-I\| = \sup_{t,S\in R,\|f\|\leq 1}|(A[\varepsilon S]C_\varepsilon[S]f)(t)-f(t)| =$$

$$= \sup_{t,S\in R,\|f\|\leq 1}|(A[\varepsilon S]C_\varepsilon[S]f_{S-t})(S)-(A_\varepsilon A_\varepsilon^{-1}f_{S-t})(S)| \leq$$

$$\leq M \sup_{t,S\in R,\|f\|\leq 1,\tau\in[S-\gamma,S]}|(C_\varepsilon[S]f_{S-t})(\tau)-(A_\varepsilon^{-1}f_{S-t})(\tau)| + 2L\alpha_1(\gamma).$$

Второе слагаемое мало при больших γ, а первом можно преобразовать следующим образом. Обозначим f_{S-t} через φ. Тогда

$$|(C_\varepsilon[S]f_{S-t})(\tau)-A_\varepsilon^{-1}f_{S-t})(\tau)| = |(C_\varepsilon[S]\varphi)(\tau)-$$

$$-(A_\varepsilon^{-1}\varphi)(\tau)| = |(A_\varepsilon^{-1}\varphi_{S-\tau})(S)-(A_\varepsilon^{-1}\varphi)(\tau)|.$$

Пусть $(A_\varepsilon^{-1}\varphi)(\xi) = x(\xi)$ и $A_\varepsilon^{-1}\varphi_{S-\tau}(\xi) = y(\xi)$.

Тогда $\varphi(\xi) = (A_\varepsilon x)(\xi) = A_\varepsilon y(\xi+S-\tau)$ или

$g(\varepsilon\xi, x_\xi) = g(\varepsilon(\xi+S-\tau), y_{\xi+S-\tau})$ или

$g(\varepsilon\xi, x_\xi) - g(\varepsilon\xi, y_{\xi+S-\tau}) = g(\varepsilon(\xi+S-\tau),$ или
$y_{\xi+S-\tau}) - g(\varepsilon\xi, y_{\xi+S-\tau})$.

Правая часть последнего выражения стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, поэтому и левая часть должна стремиться к нулю. Заметим далее, что левая часть представима в виде $A_\varepsilon(x-y_{\tau-S})(\xi)$ и операторы A_ε^{-1} равномерно по ε ограничены, а поэтому разность $x-y_{\tau-S}$ мала при малых ε, т.е. $A_\varepsilon^{-1}g(S) - A_\varepsilon^{-1}g_{S-\tau}(\tau) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, $A[\varepsilon S]C_\varepsilon[S] \to I$ при $\varepsilon \to 0$ и, следовательно, при малых $\varepsilon > 0$ В-обратим оператор $A[\varepsilon S]C_\varepsilon[S]$.
Из В-обратимости операторов $A[\varepsilon S]C_\varepsilon[S]$ и $C_\varepsilon[S]A[\varepsilon S]$ следует В-обратимость оператора $A[\varepsilon S]$.

Равномерная ограниченность $A^{-1}[S]$ вытекает из соотношений

$$\|A[\varepsilon S]x\| = \sup_{t\in R}|(A_\varepsilon x_{S-t})(S)| \geq \frac{1}{\sup_\varepsilon\|A_\varepsilon^{-1}\|}\sup_{t\in R}\|x_{S-t}\| \geq \frac{1}{L}\|x\|.$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность Р.Р.Ахмерову за постановку задачи и Б.Н.Садовскому за полезные обсуждения и ценные советы.

Литература

I. Вань Лянь. Об устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом.- Science Record 1959, т.3:7, № 5, с.280-288.

2. Эльсгольц Л.Э. К вопросу о влиянии на устойчивость малого отклонения аргумента. - Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Ун-т дружбы народов им.Патриса Лумумбы, 1962, т.I, с.II4-II5.

3. Рябов Ю.А. Применение метода малого параметра к исследованию систем автоматического регулирования с запаздыванием.- Автоматика и телемеханика, 1960, т.2I, № 6, с.729-739.

4. Ахмеров Р.Р. Существование и устойчивость ограниченных решений функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа с малым запаздыванием.- В кн.: Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Изд-во Куйб.ун-та, Куйбышев, 1982, с.3-16.

5. Ахмеров Р.Р. К принципу усреднения для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. - Украинский математический журнал, 1973, т.25, № 5, с.579-589.

6. Курбатов В.Г. Об обратимости функционально-дифференциальных уравнений.- Дифференциальные уравнения, 198I, т.I7, № 6, с. 963-972.

7. Курбатов В.Г. О сведении устойчивости уравнения нейтрального типа к уравнению запаздывающего типа.- Сиб.матем.журнал,1983, т.24, № 4, с.209-2I2.

8. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е. Коммутативные нормированные кольца. - М.; Физматгиз, 1960, 3I6с.

9. Bochner S., Phillips P.S. Absolutely convergent Fourier expansion for non-commutative normed rings.- Annals of Math., 1942, v.43, N3, c.409-418.

I0. Курбатов В.Г., Фролов И.С. Об обратимости дифференциально-разностных операторов в банаховом пространстве.- Воронеж, 1978.- 57с.- Деп. в ВИНИТИ, 1978, № 848-78.

II. Фролов И.С. Спектры некоторых разностных операторов.- В кн.: Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Изд-во Куйбыш.ун-та. Куйбышев, 1982,с.I57-I66.

12. Фролов И.С. Обратимость некоторых разностных и дифференциально-разностных операторов. - Кандидатская диссертация. Воронеж, 1982.

Ю.А. Смирницкий

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЭРЦИТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В РАВНОМЕРНЫХ МЕТРИКАХ

Известно, что коэрцитивный подход к исследованию разностных уравнений позволяет не только устанавливать их разрешимость, но и получать двусторонние оценки погрешности решения. В наиболее интересных для приложений C нормах коэрцитивные оценки для разностных эллиптических и параболических уравнений не имеют места, так как они не имеют места в дифференциальном случае. В [1] установлено, что для эллиптических разностных уравнений второго порядка и второго порядка аппроксимации без смешанных производных справедливы почти коэрцитивные оценки в равномерной метрике, отличающиеся от коэрцитивных оценок логарифмически растущим множителем при стремлении к нулю шага сетки. В [2] разработан метод, позволяющий получать почти коэрцитивные оценки в C норме для разностных параболических уравнений при помощи оценок фундаментального решения соответствующего уравнения. Однако эти оценки устанавливаются в предположении жесткой связи между шагами сетки по временной и пространственной переменным. Предлагаемый в настоящей работе метод позволяет получать почти коэрцитивные оценки в C норме для многомерных разностных эллиптических и параболических уравнений произвольного порядка аппроксимации без ограничений на соотношения между шагами сетки по разным направлениям.

I. Абстрактные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$A_1 u + \dots + A_n u = f \tag{I}$$

в банаховом пространстве E с линейными операторами $A_1, \dots, A_n$. Это уравнение называется коэрцитивно разрешимым в пространстве E, если пересечение областей определения операторов $A_k (k=1,\dots,n)$