Тогда задача (38) имеет единственное решение $v_\omega(t)$. Доказательство этого будет приведено в другой работе.

Пусть $F(t,0)\equiv 0$, и выполнено условие усреднения

$$\lim_{N\to+\infty}\left\| \frac{1}{N}\int_{t_0}^{t_0+N} F(s,A_0^{-\alpha_0}z)\,ds\right\|_{E_2}\cdot\|z\|_E^{-1}=0, \tag{40}$$

равномерно относительно $t_0\geqslant 0$ и $z\neq 0$.

Т е о р е м а 3. Для любых $T>0$ и $\sigma>0$ существует такое $\omega_0=\omega_0(T,\sigma)\geqslant 0$, что при всех $\omega\geqslant\omega_0$ справедлива оценка

$$\|v_\omega(t)-v_\infty(t)\|_D\leqslant\sigma,\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

Здесь $v_\infty(t)$ – решение усредненной задачи (3).

Доказательство теоремы 3 опирается на теоремы I и 2. Теорема 3 допускает обобщение на случаи, когда условия (39) и (40) выполнены локально в E, когда усредненная задача Коши нелинейна. Наконец, при меньших ограничениях гладкости на v_0 и F справедлив принцип усреднения для обобщенных решений.

Л и т е р а т у р а

I. Герштейн Л.М., Соболевский П.Е. Об одном подходе к исследованию эволюционных уравнений. – ДАН УССР; серия "А", 1980, с. 9-I2.

2. Соболевский Е.П. Принцип усреднения для параболических уравнений с переменными коэффициентами. – Тезисы докладов всесоюзной конференции по асимптотическим методам в теории сингулярно возмущенных уравнений, часть I, Алма-Ата, июнь, I979.

3. Соболевский Е.П. Принцип усреднения для уравнений с переменным главным членом. Деп.в ВИНИТИ, №43I5-79, Деп.

4. Красносельский М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, I966.

А.А. Соловьев

К РАСЧЕТУ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ,ВОЗНИКАЮЩИХ В МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ПРИ СКАЧКООБРАЗНОМ ИЗМЕНЕНИИ ИХ ПАРАМЕТРОВ

Под переходными процессами (ПП), как правило, понимаются динамические процессы, возникающие в механической системе (МС) под воздействием изменяющихся внешних сил (моментов) или начальных условий. Однако, такого же рода процессы в системе могут возникнуть и при скачкообразном изменении ее параметров даже при условии, что внешние воздействия на нее при этом остаются без изменения [1] . Такие процессы возникают, например, при работе различных устройств, содержащих переменные инерционные, диссипативные и упругие элементы [2], в частности, при работе амортизаторов со скачкообразно изменяющейся жесткостью [3,4].

В настоящее время для расчета ПП в механических системах, возникающих при скачкообразных изменениях их параметров, в основном используется классический метод – когда для системы с измененными параметрами составляются дифференциальные уравнения при начальных условиях, определенных из условий сопряжения параметров движения системы в момент изменения параметров [2,5]. В данной работе рассматриваются другие методы расчета, основанные на учете дополнительных сил, возникающих в системе при изменении ее параметров. При этом используются допущения о том, что к моменту изменения параметров в МС закончились ПП и процессы успевают устанавливаться.

Здесь ограничиваемся рассмотрением МС с сосредоточенными параметрами, динамика которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. В таких системах в качестве основных пассивных элементов выступают сосредоточенные массы (моменты инерции), демпферы и линейные (угловые) жесткости. При изменении линейной скорости v, действующей на массу m, сопротивление z и упругость c, возникают силы:

$$F_m = m\dot{v}, \quad F_z = z\dot{v}, \quad F_c = c\int v\,dt$$

или, учитывая, что $v=\dot{x}$, где $x(t)$ – линейная координата, предыдущее выражение можно записать в виде [6]

$$F_m = m\ddot{x}, \quad F_z = z\dot{x}, \quad F_c = cx.$$

Таким образом, эти пассивные элементы при заданной скорости $v(t)$ или перемещении $x(t)$ могут быть заменены противоположными силами: $-F_m(t),\ -F_z(t),\ -F_c(t)$.
Причем, такая замена не изменяет в МС распределения сил и скорости [6,7]. Заметим, что аналогичные соотношения можно написать и для механической системы, совершающей вращательное или поступательно-вращательное движение.

Теперь предположим, что в некоторый момент времени у пассивных элементов скачкообразно изменились значения $\bar{m} = K_m m$, $\bar{z} = K_z z$, $\bar{C} = K_C C$, где $K_m \geqslant 0, K_z \geqslant 0, K_C \geqslant 0$ – некоторые коэффициенты, характеризующие величину скачкообразного изменения параметров. Тогда величины

$$\Delta m = \bar{m} - m = m(K_m - 1), \Delta z = \bar{z} - z = z(K_z - 1), \Delta C = \bar{C} - C = C(K_C - 1) \quad (I)$$

определяют величины скачков параметров. Из сказанного выше следует, что скачкообразное изменение параметров пассивных элементов можно учесть включением в МС дополнительных сил

$$\Delta F_m = -\Delta m \ddot{x}, \Delta F_z = -\Delta z \dot{x}, \Delta F_C = -\Delta C x. \quad (2)$$

Как следует из формул (I) и (2), если коэффициенты K_m, K_z, K_C больше единицы, то $\Delta F_m < 0, \Delta F_z < 0, \Delta F_C < 0$, что эквивалентно включению последовательно с $\Delta m, \Delta z, \Delta C$ сил, направленных противоположно силам на этих элементах при скоростях в МС до изменения ее параметров. Если же коэффициенты K_m, K_z, K_C меньше единицы, то $\Delta F_m > 0, \Delta F_z > 0, \Delta F_C > 0$, что эквивалентно включению последовательно с $\Delta m, \Delta z, \Delta C$ сил, направленных так же, что и силы на этих элементах в МС до изменения ее параметров. Таким образом, скачкообразное изменение значений параметров пассивных элементов в МС приводит одновременно к появлению добавочных сил ΔF_m, ΔF_z, ΔF_C и тогда расчет ПП в такой МС сводится к расчету ПП в МС с измененными параметрами под воздействием скачкообразно приложенных сил ΔF_m, ΔF_z, ΔF_C.

Опираясь на это, можно предложить следующий метод расчета переходных процессов в МС при скачкообразном изменении параметров. ПП в такой системе складывается из установившегося режима в ней до изменения параметров и из переходного режима от включения в МС с измененными параметрами добавочных сил ΔF_m, ΔF_z, ΔF_C. Очевидно, если какой-либо пассивный элемент не изменяет своего значения, то в соответствии с формулами (I) и (2) добавочная сила будет равна нулю. Этот метод (его можно назвать методом включения эквивалентных сил) часто гораздо проще и менее трудоемок предыдущего.

Для расчетов ПП можно использовать и другой метод. Предположим, что в момент изменения параметров в МС исчезают все добавочные силы ΔF_m, ΔF_z, ΔF_C, а затем мгновенно вновь восстанавливаются. Тогда можно считать, что ПП в МС складывается из свободного процесса в МС с измененными параметрами под влиянием запасов механической энергии в ней и из ПП под влиянием вновь восстанавливающихся добавочных сил $\Delta F_m, \Delta F_z, \Delta F_c$. Этот метод (который может быть назван методом переключения эквивалентных сил) предпочтителен в том случае, когда оба процесса, т.е. свободный и переходный, в отдельности легко определяются.

Если же скачкообразное изменение параметров МС сопровождается изменением внешних воздействий, то результирующий ПП, в случае линейности системы, можно получить, суммируя соответствующие ПП от каждого фактора в отдельности.

Порядок применения разработанных алгоритмов рассмотрим на примере расчета ПП в механической колебательной системе со скачкообразно меняющимися параметрами.

Пусть уравнение колебательного процесса в такой системе до изменения ее параметров описывается уравнением $m\ddot{x} + cx = A_0 \cos \Omega t$, а установившийся режим в ней имеет вид

$$x_y(t) = \frac{A_0}{c - m\Omega^2} \cos \Omega t . \qquad (3)$$

Пусть в момент времени $t=0$ параметры системы m и c изменяют свои значения на Δm и Δc и изменилась амплитуда внешней гармонической силы $\bar{A}_0 \cos \Omega t$, $(\bar{A}_0 \neq A_0)$. Тогда уравнение колебательного процесса в МС примет вид $(\bar{m} = m + \Delta m,\ \bar{c} = c + \Delta c)$:

$$\bar{m}\ddot{x} + \bar{c}x = \bar{A}_0 \cos \Omega t, \qquad (4)$$

при начальных условиях

$$x(0) = A_0 / (c - m\Omega^2),\ \dot{x}(0) = 0 . \qquad (5)$$

Решение уравнения (4) при начальных условиях (5) см. [8]

$$x(t) = \left(\frac{A_0}{c - m\Omega^2} - \frac{\bar{A}_0}{\bar{c} - \bar{m}\Omega^2}\right)\cos \bar{\omega} t + \frac{\bar{A}_0}{\bar{c} - \bar{m}\Omega^2} \cos \Omega t \qquad (6)$$

описывает ПП в рассматриваемой МС при изменении параметров и амплитуды гармонического воздействия. Отметим, что выражение (6) после введения обозначений

$$a_0 = \frac{A_0}{m},\ \bar{a}_0 = \frac{\bar{A}_0}{\bar{m}},\ \omega^2 = \frac{c}{m},\ \bar{\omega}^2 = \frac{\bar{c}}{\bar{m}}$$

можно записать в виде

$$x(t) = \left(\frac{a_0}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{\bar{a}_0}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2}\right)\cos \bar{\omega} t + \frac{\bar{a}_0}{\bar{\omega}^2 - \Omega^2} \cos \Omega t .$$

Рассмотрим далее применение метода включения эквивалентных сил. До изменения параметров установившийся режим в СМС определяется выражением (3). Вызванные этим режимом силы на дополнительных массе Δm и жесткости Δc будут:

$$\Delta F_m = -\Delta m \ddot{x}_y(t) = \frac{\Delta m A_0 \Omega^2}{c - m\Omega^2} \cos \Omega t,$$

$$\Delta F_c = -\Delta c\, x_y(t) = -\frac{\Delta c A_0}{c - m\Omega^2} \cos \Omega t.$$

Кроме того, необходимо учесть изменение внешней силы, которая будет равна $\Delta F_B = (\bar{A}_0 - A_0)\cos \Omega t$. Тогда внешняя сила, действующая на МС с измененными параметрами будет

$$\Delta F = \Delta F_B + F_m + F_c = \left[\bar{A}_0 - \frac{A_0(c - m\Omega^2)}{c - m\Omega^2}\right] \cos \Omega t,$$

а уравнение для ПП имеет вид

$$\bar{m}\ddot{x}_n + \bar{c}x_n = \left[\bar{A}_0 - \frac{A_0(\bar{c} - \bar{m}\Omega^2)}{c - m\Omega^2}\right] \cos \Omega t$$

со следующими начальными условиями $x_n(0) = 0,\ \dot{x}_n(0) = 0$.

Запишем решение уравнения (7) при начальных условиях (8):

$$x_n(t) = \left(\frac{A_0}{c - m\Omega^2} - \frac{\bar{A}_0}{\bar{c} - \bar{m}\Omega^2}\right)(\cos \bar{\omega} t - \cos \Omega t).$$

Тогда, суммируя выражения $x_y(t)$ и $x_n(t)$, получим выражение для ПП, совпадающее с (6), полученное классическим методом.

Далее рассмотрим применение метода переключения сил, согласно которому определим свободный процесс $x_c(t)$ в системе с измененными параметрами при отсутствии внешней силы при ненулевых начальных условиях:

$$\bar{m}\ddot{x}_c + \bar{c}x_c = 0,$$

$$x_c(0) = A_0 / (c - m\Omega^2),\ \dot{x}(0) = 0.$$

Из решения этого уравнения определим:

$$x_c(t) = \frac{A_0}{c - m\Omega^2} \cos \omega t.$$

Определим ПП $x_n(t)$ от включения внешней силы $A_0 \cdot \cos \Omega t$ в МС с измененными параметрами. Дифференциальное уравнение для него имеет вид $\bar{m}\ddot{x}_n + \bar{c}x_n = \bar{A}_0 \cos \Omega t$ с нулевыми началь-

ными условиями $x_n(0)=0$, $\dot{x}_n(0)=0$. Решение данного уравнения будет $x_n(t)=\frac{\bar{A}_0}{c-\bar{m}\Omega^2}(\cos\Omega t-\cos\omega t)$.
Суммируя $x_c(t)$ и $x_n(t)$ получим выражение, совпадающее с (6).

Таким образом, предлагаемые методы дают те же результаты, что и классический, но они гораздо проще классического и соответствуют инженерному подходу к решению задач о ПП подобного рода [9].

В заключение отметим, что предлагаемые методы могут быть использованы и при расчете ПП в МС, возникающих в них при скачкообразных структурных изменениях, под которыми здесь понимается удаление из системы имеющихся или введение в нее новых пассивных элементов. В случае удаления какого-либо элемента m, z или c соответствующий коэффициент K_m, K_z или K_c полагается равным нулю, а в случае введения новых элементов $\bar{m}=\Delta m, \bar{z}=\Delta z$ или $\bar{c}=\Delta c$ и соответственно параметры m, z или c в МС до изменения параметров полагаются равными нулю.

Литература

1. Тондл А. Автоколебания механических систем. М.: Мир, 1979, 434 с.

2. Паномарев А.С. Релаксационные колебания и их расчет. - Прикладная мех-ка и процессы упр-ия, вып. 1/ Вестник Харьковского политехн.ин-та, № 148. Харьков: Вища школа, 1979, с.11-13.

3. Грибов М.М. Регулируемые амортизаторы радиоэлектронной аппаратуры. М.: Сов.радио, 1974, 144 с.

4. Фролов К.В., Фурман Ф.А. Прикладная теория виброзащитных систем. М.: Машиностроение, 1980, 276с.

5. Соловьев А.А. К исследованию переходных режимов движения одномерных деформируемых систем. - Труды V научн.-техн.конф. фак-та матем.знаний Куйбышевского политехн.ин-та, ч.2. Куйбышев: КПтИ, 1980, с.20-26 (Депонир.ВИНИТИ 3 марта 1982 г. № 896-82 деп).

6. Дружинский И.А. Механические цепи. Л.: Машиностроение, 1977, 240 с.

7. Березкин К.Н. Курс теоретической механики. М.: МГУ, 1974, 647 с.

8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1961, 312 с.

9. Гинзбург С.Г. Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. М.: Высш.школа, 1967, 388с.