МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ордена
ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
им. С. П. КОРОЛЕВА

Е. М. МАРКУШИН

ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1971

ПРЕДИСЛОВИЕ

В монографии изложены задача о вычислении квадратических функционалов Н. Н. Красовского и задача оптимальной стабилизации уравнения с запаздыванием по времени.

Задача о вычислении квадратических функционалов тесно связана с задачей вычисления интегральных квадратичных критериев качества переходного процесса систем, движение которых описывается уравнениями с запаздыванием времени.

В частности, полученные квадратические функционалы могут быть использованы при выборе номинальных режимов работы технических изделий, выборе коэффициентов систем автоматического регулирования, исследовании влияния возмущений на работу систем управления и т. д.

Первая глава монографии содержит исследование сходимости применяемых разложений С. Н. Шиманова. Так, например, теорема 3. 1 устанавливает полноту одномерных разложений, однозначность и конкретность которых позволили дополнительно сформулировать в той же главе теоремы о сходимости двумерных разложений для «обратных» разложений функций по собственным решениям уравнения с запаздыванием времени.

Во второй главе дано полное решение задачи о вычислении квадратичных функционалов произвольной структуры для уравнения с запаздыванием времени. Эта задача решается в работе с использованием метода А. М. Ляпунова применительно к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентной рассматриваемому уравнению с запаздыванием времени. Такой подход обеспечивает простоту вычисления квадратичных функционалов и, вследствие этого, эффективность применения их для решения известной из литературы задачи Рауса-Гурвица для квазиполиномов. Схема решения этой задачи путем построения соответствующих квадратичных функционалов приведена в приложении 1.

Третья глава содержит изложение задачи аналитического конструирования регулятора для уравнения с запаздыванием времени.

являющейся одной из прикладных задач теории управления движением. Применение в этом случае разложений С. Н. Шиманова обеспечит эффективный и, видимо, наиболее естественный метод решения.

Материал монографии, например, теоремы о разложении, общая задача о вычислении квадратичных функционалов, может быть сформулирован и рассмотрен с более глубоких позиций, требующих, в частности, множественного обоснования. Однако с целью привлечения более широкого круга читателей автор упростил изложение. Кроме того, во многих случаях приведены схематичные рассуждения и доказательства.

В работе принята следующая система ссылок: первая цифра означает номер главы, вторая номер параграфа, последующие цифры указывают номер формулы. При ссылке на формулу той же главы первая цифра не проставляется. Дополнительная литература в тексте не указывалась.

В заключение автор благодарит Н. З. Балухова за оказанную помощь.

ВВЕДЕНИЕ

В главе приведены необходимые для изложения основных разделов данной работы краткие сведения о дифференциальном уравнении с запаздыванием времени и методах его решения. Полные и подробные сведения по теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом читатель найдет в отечественной [8], [31], [50] и зарубежной литературе [4], [35].

1. Уравнение с запаздыванием времени

В настоящее время при решении различных технических задач нашли широкое применение дифференциальные уравнения с запаздыванием времени. Например, рассмотрим следующую задачу.

Пусть однородная, теплоемкая, нерасширяющаяся жидкость втекает в конец трубы с постоянной скоростью v_0. Труба предполагается однородной по длине (рис. 1).

Ось x расположена вдоль трубы так, что конец A имеет координату $x = 0$, а конец B имеет координату $x = l$. На стенке трубы поддерживается постоянная температура T. Температуру жидкости внутри трубы в точке x обозначим через $u(t)$. Эту же температуру имеет элементарный объем жидкости Δv. Нагрев жидкости происходит за счет теплопередачи через стенку трубы. Предположим, что скорость изменения температуры элементарного объема жидкости Δv пропорциональна разности температур стенки трубы и элементарного объема, то есть

$$\frac{du(t)}{dt} = k\,[T - u(t)], \tag{1.1}$$

где k — положительная постоянная.

Так как скорость жидкости в трубе не изменяется, то элементарный объем Δv переместится из точки A в точку B за время

$$\tau = \frac{l}{v_0}.$$

Пусть в некоторый момент времени t_1 элементарный объем Δv находился в точке A и имел температуру $u_1(t_1)$. Если за отрезок времени τ объем переместится из точки A в точку B, температура его изменится и будет равна $u_2(t_1+\tau)$.

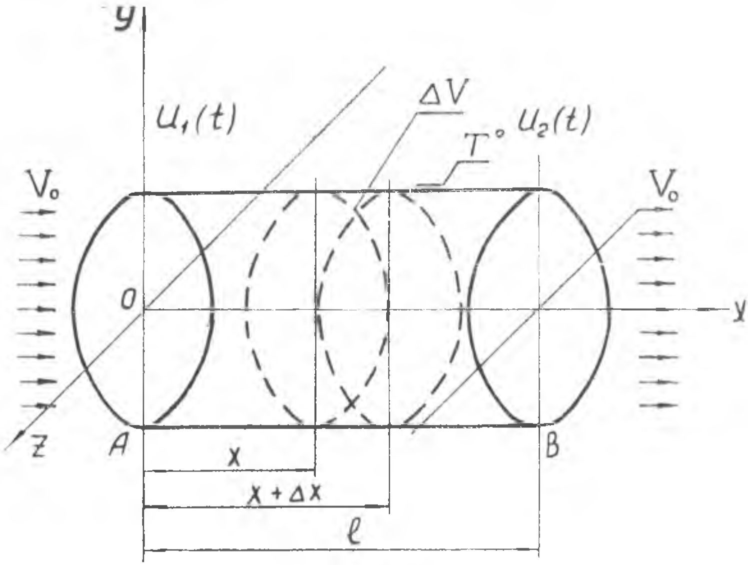


Рис. 1.

Решая уравнение (1. 1), получим

$$u_2(t_1+\tau)=[u_1(t_1)-T]\,e^{-k\tau}+T. \tag{1.2}$$

В (1. 2) t_1 — произвольный фиксированный момент времени, поэтому

$$u_2(t+\tau)=[u_1(t)-T]\,e^{-k\tau}+T. \tag{1.3}$$

Пусть отклонение температуры $u_2(t)$ от заданной постоянной величины u_2° пропорционально скорости изменения температуры $u_1(t)$ на входе в точке A, то есть

$$\frac{du_1(t)}{dt}=a_1\,[u_2(t)-u_2^{0}], \tag{1.4}$$

где a_1 — постоянная пропорциональности.

Но так как в силу (1. 3)

$$u_2(t)=[u_1(t-\tau)-T]\,e^{-k\tau}+T, \tag{1.5}$$

то (1. 4) запишется в виде

$$\frac{dx(t)}{dt}=ax(t-\tau), \tag{1.6}$$

где

$$x(t) = u_1(t) + \frac{T - u_2^0 - a_1 T e^{-k\tau}}{a_1 e^{-k\tau}},$$

$$a = a_1 e^{-k\tau}.$$

К уравнению вида (1.6) приводят не только технические задачи, но и задачи экономики [4], биологии [35].

В данной работе всюду будем полагать в уравнении (1.6) величины a и τ постоянными, и кроме того, $\tau > 0$. Отметим, что уравнение (1.6) имеет функциональную природу. Это, в частности, подтверждается тем, что начальное возмущение уравнения (1.6) представляет собой некоторую функцию, заданную на отрезке запаздывания

$$\varphi(\nu), \quad [-\tau \leqslant \nu \leqslant 0] \tag{1.7}$$

и определяющую собой предысторию движения.

2. Характеристический квазиполином

Вычисление частных решений уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t-\tau) \tag{2.1}$$

вида

$$x(t) = Ae^{\lambda t}, \tag{2.2}$$

где A и λ — постоянные, приводит к вычислению значений λ из характеристического квазиполинома

$$\Delta(\lambda) = \lambda - ae^{-\lambda\tau} = 0. \tag{2.3}$$

Обозначим через $\Delta'(\lambda)$ производную от квазиполинома (2. 3) по λ

$$\Delta'(\lambda) = 1 + a\tau e^{-\lambda\tau}, \tag{2.4}$$

или, в соответствии с (2. 3),

$$\Delta'(\lambda) = 1 + \lambda\tau. \tag{2.5}$$

На основании (2. 5) квазиполином (2. 3) будет иметь простые корни при любом a за исключением

$$a = -\frac{1}{e\tau}.$$

В дальнейшем всюду будем предполагать корни квазиполинома (2. 3) простыми. Квазиполиномы представляют собой целые функции [30], [44], [43].

Нули целых функций имеют предельные точки на бесконечности и в любой конечной области комплексного переменного их конечное число.

Используя упомянутые свойства, можно показать, что справа от мнимой оси комплексного переменного λ квазиполинома (2.3) имеет конечное число нулей.

Действительно,

$$|\Delta(\lambda)| = |\lambda| \left| 1 - \frac{ae^{-\lambda\tau}}{\lambda} \right|. \tag{2.6}$$

Но тогда справа от мнимой оси существует полуокружность конечного радиуса R с центром в начале координат, на которой выполняется неравенство

$$\left| \frac{ae^{-\lambda\tau}}{\lambda} \right| \leqslant \frac{|a|}{R} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

В соответствии с (2.6) и (2.7) корни квазиполинома (2.3) с положительной вещественной частью будут расположены внутри построенной полуокружности, и ,следовательно, их будет конечное число.

На основании изложенного корни квазиполинома (2.3) можно расположить в порядке убывания действительных частей

$$\operatorname{Re} \lambda_1 \geqslant \operatorname{Re} \lambda_2 \geqslant \ldots, \tag{2.8}$$

что и будем предполагать всюду в дальнейшем. При этом далекие по номеру, или асимптотические, корни квазиполинома (2.3) могут быть представлены в виде

$$\lambda_n = -\frac{1}{\tau} \ln \frac{2\pi n}{|a|} + \left(2n + \frac{1}{2} \operatorname{sign} a\right) \frac{\pi}{\tau} i + 0\left(\frac{\ln n}{n}\right), \tag{2.9}$$

$$\lambda_{n+1} = \overline{\lambda}_n,$$

где $\overline{\lambda_n}$ — сопряженный с λ_n корень квазиполинома (2.3), $O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ — погрешность, стремящаяся к нулю при возрастании номера n как величина $\frac{\ln n}{n}$.

3. Вычисление решения методом последовательного интегрирования

Вычисление решения уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t-\tau) \tag{3.1}$$

с начальным возмущением

$$\varphi(\nu), \quad [-\tau \leqslant \nu \leqslant 0] \tag{3.2}$$

методом последовательного интегрирования или методом шагов состоит в следующем.

Подставляя начальное возмущение (3.2) в правую часть уравнения (3.1), определим производную по времени от искомого решения на интервале $[o \leqslant t \leqslant \tau]$. Интегрируя затем уравнение (3.1) и учитывая (3.2), получим

$$\varphi_1(t) = x(t) = \varphi(0) + a \int_{-\tau}^{-\tau+t} \varphi(\nu)\, d\nu. \tag{3.3}$$

Функцию $\varphi_1(t)$, $[0 \leq t \leq \tau]$ можно рассматривать в качестве начального возмущения уравнения (3. 1) с началом отсчета равным нулю. Но тогда, выполнив аналогичное интегрирование, найдем решение $\varphi_2(t)$ уравнения (3. 1) на интервале $[\tau \leq t \leq 2\tau]$, и так далее.

Пример. Пусть начальное возмущение уравнения (3. 1) имеет вид

$$\varphi^*(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\tau \leq \nu < 0, \\ 1 & \text{при } \nu = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

В соответствии с методом последовательного интегрирования искомое решение может быть записано в следующем виде:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{t-\tau}{\tau}\right]+1} a^n \frac{(t-n\tau)^n}{n!}, \tag{3.5}$$

где $t > 0$, $[t]$ — целая часть t.

В частности, из равенства (3. 5) следует, что

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t \leq \tau, \\ 1 + a(t-\tau) & \text{при } \tau \leq t \leq 2\tau. \end{cases} \tag{3.6}$$

4. Решение применением преобразования Лапласа

При исследовании работы систем, движение которых описывается уравнениями с запаздыванием времени, во многих случаях целесообразно применение преобразования Лапласа. Пусть $x(t)$ — некоторая функция, определенная при $t \geq 0$. Преобразование Лапласа функции $x(t)$, которое будем обозначать как $L(z)$, определяется соотношением

$$L(z) = \int_0^\infty e^{-zt} x(t)\, dt, \tag{4.1}$$

где z — комплексное число с достаточно большой вещественной частью.

Эффективность применения преобразования Лапласа обеспечивается его обращением.

Теорема 4.1. Если интеграл справа в (4.1) абсолютно сходится вдоль некоторой прямой $Re z = b$, $(b > 0)$ и $x(t)$ имеет ограниченную производную в точке t, то при $c > b$ имеет место равенство

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tz} L(z)\, dz. \tag{4.2}$$

Приведем пример применения преобразования Лапласа. Пусть требуется найти решение уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t-\tau) \tag{4.3}$$

с начальным возмущением

$$\varphi^*(\nu)=\begin{cases}0 & \text{при } -\tau\leqslant\nu<0,\\ 1 & \text{при } \nu=0.\end{cases} \tag{4.4}$$

Применяя преобразование Лапласа к левой и правой частям уравнения (4.3), получим

$$L(z)=\frac{1}{z-ae^{-z\tau}}, \tag{4.5}$$

и, следовательно, искомое решение $x(t,\ \varphi^*(\nu))$ может быть представлено следующим образом:

$$x(t,\ \varphi^*(\nu))=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{tz}}{z-ae^{-z\tau}}\,dz. \tag{4.6}$$

Интегрируя справа в равенстве (4.6), найдем искомое решение в виде ряда

$$x(t,\ \varphi^*(\nu))=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e^{\lambda_i t}}{\Delta'(\lambda_i)}, \tag{4.7}$$

где λ_i — нули квазиполинома (2.3), $\Delta'(\lambda_i)=1+\lambda_i\tau$.

В заключение найдем аналитическое выражение $L(z)$ решения уравнения (3.1) с начальным возмущением $\varphi(\nu)$, $[-\tau\leqslant v\leqslant 0]$. Применяя преобразование Лапласа к левой части уравнения (3.1), находим, интегрируя по частям,

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-zt}\frac{dx(t)}{dt}\,dt=\varphi(0)+z\int\limits_0^{\infty}e^{-zt}x(t)\,dt. \tag{4.8}$$

Применяя его к правой части, получим

$$a\int\limits_0^{\infty}e^{-zt}x(t-\tau)\,dt=ae^{-z\tau}\int\limits_0^{\infty}e^{-zt}x(t)\,dt+$$

$$+ae^{-z\tau}\int\limits_{-\tau}^{0}e^{-z\nu}\varphi(\nu)\,d\nu. \tag{4.9}$$

Из (4.8) и (4.9) получим

$$L(z)=\frac{\varphi(0)+ae^{-z\tau}\int\limits_{-\tau}^{0}\varphi(\nu)e^{-z\nu}\,d\nu}{z-ae^{-z\tau}}. \tag{4.10}$$

Глава I

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИЙ

В первом параграфе главы приведена техника разложений С. Н. Шиманова, являющихся для данной работы методом исследования рассматриваемых задач.

В последующих параграфах установлены в виде теорем свойства упомянутых разложений. Более подробную информацию о технике разложений С. Н. Шиманова читатель найдет в работах [49], [48], [24].

1. Разложение С. Н. Шиманова

Пусть $x(t)$, $t > 0$ решение уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t-\tau) \tag{1.1}$$

с начальным возмущением

$$x^0(\nu) = \varphi(\nu), \quad [-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]. \tag{1.2}$$

Целесообразно рассматривать в фиксированный момент времени t не значение $x(t)$, а функцию

$$x^t(\nu) = x(t+\nu), \quad [-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]. \tag{1.3}$$

Функцию (1.3) можно рассматривать как результат преобразования некоторым оператором A начального возмущения (1.2).

Пусть начальное возмущение принадлежит функциональному пространству $C[-\tau,0]$, то есть множеству всех непрерывных вещественных функций, заданных на отрезке запаздывания. Тогда, очевидно, любая функция $x(t+\upsilon)$, $t > 0$, $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$ тоже будет принадлежать пространству $C[-\tau,0]$, так как в соответствии с местом последовательных шагов вычисление решения происходит путем интегрирования.

В дальнейшем обычно будем рассматривать некоторое функциональное пространство.

$$C_{[-\tau,0]},\quad C^1_{[-\tau,0]},\quad C^2_{[-\tau,0]},\quad L_2$$

с нормой вида

$$\| x \|^{(\tau)} = \sup (| x (\nu) |) \text{ при } [-\tau \leqslant \nu \leqslant 0],$$

или

$$\| x \|_2^{(\tau)} = \left[\int_{-\tau}^{0} x^2 (\nu)\, d\nu \right]^{\frac{1}{2}}.$$

В выбранном функциональном пространстве уравнению (1. 1) будет соответствовать операторное уравнение

$$\frac{dx^t (\nu)}{dt} = Ax^t (\nu). \tag{1.4}$$

Так как оператор A — оператор дифференцирования, то для любой функции $x^t (\nu)$ выбранного функционального пространства

$$Ax^t (\nu) = \frac{dx (t + \nu)}{d\nu} \text{ при } [-\tau \leqslant \nu < 0], \tag{1.5}$$

ввиду того, что производная по времени определена справа, а при $\nu = 0$, в соответствии с (1.1),

$$Ax^t (\nu) = ax (t - \tau). \tag{1.6}$$

В дальнейшем в качестве основного, рабочего пространства выберем $C^1[-\tau,0]$ с нормой $\{ \| x (\nu) \|^{(\tau)} + \| \dot{x} (\nu) \|^{(\tau)} \}$.

Пусть

$$\frac{du (t)}{dt} = - au (t + \tau) \tag{1.7}$$

уравнение, сопряженное с (1. 1).

Тогда, если

$$e^{\lambda_i \nu},\quad [-\tau \leqslant \nu \leqslant 0],\quad i = 1,\ 2,\ \dots \tag{1.8}$$

собственные функции операторного уравнения (1.4), то

$$e^{-\lambda_j \nu},\quad [-\tau \leqslant \nu \leqslant 0],\quad j = 1,\ 2,\ \dots \tag{1.9}$$

собственные функции операторного уравнения, сопряженного с (1. 4).

Предположим, что

$$\alpha (\nu),\quad \beta (\nu)\quad [-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$$

функции, принадлежащие пространству $C^1[-\tau,0]$.

Определим скалярное произведение функций $\alpha(\nu)$ и $\beta(\nu)$ согласно равенству

$$(\alpha (\nu),\ \beta (\nu)) = \alpha (0)\, \beta (0) + a \int_{-\tau}^{0} \alpha (\nu)\, \beta (\tau + \nu)\, d\nu. \tag{1.10}$$

Легко проверить, что

$$(e^{\lambda_i \nu},\ e^{-\lambda_j \nu}) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \Delta' (\lambda_j) & \text{при } i = j. \end{cases} \tag{1.11}$$

Действительно, пусть $i = j$, то

$$(e^{\lambda_i \nu}, e^{-\lambda_j \nu}) = 1 + a \int_{-\tau}^{0} e^{-\lambda_i \tau} d\nu = \Delta' (\lambda_i).$$

В случае $i \neq j$

$$(e^{\lambda_i \nu}, e^{-\lambda_j \nu}) = 1 + ae^{-\lambda_j \tau} \int_{-\tau}^{0} e^{(\lambda_i - \lambda_j)\nu} d\nu = 1 + \frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_i - \lambda_j} = 0.$$

Пусть

$$y_i (t) = f_i [x^t (\nu)] = x^t (0) + a \int_{-\tau}^{0} x^t (\nu) e^{-\lambda_i (\tau + \nu)} d\nu, \tag{1.12}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N) -$$

— линейные функционалы, заданные на решении $x^t (\nu)$, $t > 0$, $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$ уравнения (1.4).

Представим решение $x^t (\nu)$ уравнения (1.4) в виде

$$x^t (\nu) = \sum_{i=1}^{N} \frac{e^{\lambda_i \nu}}{\Delta' (\lambda_i)} y_i (t) + z_N^t (\nu), \tag{1.13}$$

где $z_N^t (\nu)$ представляет собой остаток разложения элемента $x^t (\nu) \in C^1[-\tau, 0]$ в ряд по первым N собственным функциям оператора A.

Разложение (1.13) было бы определено, если было бы определено изменение функционалов (1.12) по времени t. С этой целью продифференцируем $y_i(t)$, $(i = 1,2,\ldots,N)$ по времени, используя уравнение (1.1), то есть продифференцируем указанные функционалы вдоль решения уравнения (1.1), или, что то же самое, вдоль решения уравнения (1.4).

Найдем

$$\frac{dy_i (t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[x (t) + a \int_{-\tau}^{0} x (t + \nu) e^{-\lambda_i (\tau + \nu)} d\nu \right] =$$

$$= ax (t - \tau) + a \int_{-\tau}^{0} \frac{dx (\tau + \nu)}{d\nu} e^{-\lambda_i (\tau + \nu)} d\nu = \lambda_i y_i (t), \tag{1.14}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N),$$

Но тогда операторное уравнение (1.4) может быть представлено на основании (1.13) и (1.14) в виде

$$\frac{dy_i (t)}{dt} = \lambda_i y_i (t), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1.15}$$

$$\frac{dz_N^t (\nu)}{dt} = Az_N^t (\nu).$$

При этом начальные возмущения y_i^0 переменных $y_i(t)$, $(i = 1,2,\ldots,N)$ найдутся в соответствии с (1.12) из равенств

$$y_i^0 = \varphi(0) + a \int_{-\tau} \varphi(\nu)\, e^{-\lambda_i(\tau+\nu)}\, d\nu, \tag{1.16}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N),$$

где $\varphi(\upsilon)$, $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$ — начальное возмущение уравнения (1. 1).

Аналогичное разложение может быть проведено также для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием времени. Кратко приведем его. Пусть движение системы описывается уравнениями

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} [a_{sj}\, x_j(t) + b_{sj}\, x_j(t-\tau)] +$$

$$+ m_s f(t, x_1, \ldots, x_n), \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.17}$$

где a_{sj}, b_{sj}, m_s, $(S, j = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные, τ — запаздывание, $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ — некоторые функции.

Системе (1. 17) в рассматриваемом пространстве $C^1[-\tau, 0]$ соответствует операторное уравнение

$$\frac{dx^t(\nu)}{dt} = Bx^t(\nu) + Rf(t, x^t(\nu)), \tag{1.18}$$

где $x^t(\nu) = x(t+\nu) = \{x_s(t+\nu)\}$,

$[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$ — n мерная вектор-функция, а операторы B и R определяются следующим образом:

$$Bx^t(\nu) = \begin{cases} \dfrac{dx(t+\nu)}{dt} & \text{при } -\tau \leqslant \nu < 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} [a_{sj} x_j(t) + b_{sj} x_j(t-\tau)] & \text{при } \nu = 0, \end{cases} \tag{1.19}$$

$$R = \begin{cases} 0 & \text{при } -\tau \leqslant \nu < 0, \\ m & \text{при } \nu = 0, \end{cases} \tag{1.20}$$

$m = \{m_s\}$ — n мерная векторная постоянная.

Системе (1. 17) или, что то же самое, уравнению (1. 18) с операторной правой частью соответствует характеристическое уравнение

$$\Delta(\mu) = |\, a = be^{-\mu\tau} - \mu I\, | = 0, \tag{1.21}$$

где a, b — постоянные матрицы

$$a = \{a_{ij}\}, \quad b = \{b_{ij}\}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

I — единичная матрица.

Пусть $\{\mu_\sigma\}$, $\sigma = 1, 2, \ldots, N$ последовательность первых N корней квазиполинома (1. 21). Корни квазиполинома (1. 21) предполагаются простыми и расположенными в порядке убывания действительных частей. Обозначим через $x_j'(\nu)$, $j = 1, 2, \ldots, N$ систему собственных векторов оператора B соответствующих рассматриваемой последовательности корней $\{\mu_z\}$ квазиполинома (1.21), а через $y_i(\nu)$ — аналогичную систему сопряженного оператора $-B^*$.

Скалярное произведение векторов

$$x^t(\nu), \quad y^t(\nu)$$

в данном случае имеет вид

$$(x^t(\nu),\ y^t(\nu)) = \sum_{j=1}^{n} x_j^t(0)\, y_j^t(0) + \sum_{ij=1}^{n} \int_0^{\tau} x_i^t(\nu-\tau)\, y_j^t(\nu)\, d\nu \qquad (1.22)$$

Из курса высшей алгебры известно, что

$$\Delta'(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \Delta_{jj}(\lambda) + \sum_{j,\,k=1}^{n} b_{jk}\, e^{-\lambda\tau} \cdot \tau\, \Delta_{jk}(\lambda),$$

где $\Delta_{jk}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента из $\Delta(\lambda)$, расположенного в пересечении j строки и k колонки. Так как λ_j простой корень уравнения (1. 21), то среди Δ_{lk}, $(l,k=1,2,...,n)$ найдется по крайней мере один отличный от нуля, ввиду того, что производная $\Delta'(\lambda_j) \neq 0$.

Выберем номера l_j и k_j такие, что

$$\Delta_{l_j\, k_j}(\lambda_j) \neq 0.$$

Тогда собственный вектор $x'_j(\nu)$ оператора B, соответствующий корню λ_j, и собственный вектор $y_j(\nu)$ сопряженного оператора $-B^*$ можно записать в виде:

$$x_j'(\nu) = \left\{ \frac{\Delta_{lk_j}(\lambda_j)\, e^{\lambda_j \nu}}{\Delta_{l_j\, k_j}(\lambda_j)} \right\},$$
$$y_j(\nu) = \left\{ \frac{\Delta_{l_j l}(\lambda_j)\, e^{-\lambda_j \nu}}{\Delta'(\lambda_j)} \right\}. \qquad (1.23)$$

Собственные векторы $x_j'(\nu)$, $y_k(\nu)$ удовлетворяют условиям

$$(x_j'(\nu),\ y_k(\nu)) = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq j, \\ 1 \text{ при } k = j. \end{cases}$$

Но тогда, представив произвольный элемент $x^t(\gamma)$ в виде

$$x^t(\nu) = \sum_{j=1}^{N} x_j'(\nu)\, u_j(t) + z^t(\nu), \qquad (1.24)$$

вместо операторного уравнения (1. 18) получим систему:

$$\frac{du_j(t)}{dt} = \lambda_j u_j(t) + k_j f(t,\ x^t(\nu)),$$
$$(j = 1,\ 2,\ ...,\ N), \qquad (1.25)$$
$$\frac{dz^t(\nu)}{dt} = Bz^t(\nu) + R\, f(t,\, x^t(\nu)) - \sum_{j=1}^{N} x_j'(\nu)\, k_j f(t,\ x^t(\nu)),$$

где согласно (1. 20), (1.22) и (1. 23)

$$k_j = \sum_{s=1}^{n} m_s y_{js}(0) = \sum_{s=1}^{n} \frac{m_s \Delta_{ljs}(\lambda_j)}{\Delta'(\lambda_j)},$$

а $x^l(\nu)$ представлено разложением (1.24).

2. Разложение единичного скачка

Пусть задана некоторая функция $\varphi(\nu)$ на отрезке $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$ Функцию $\varphi(\nu)$ можно рассматривать в качестве начального возмущения для уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t-\tau). \tag{2.1}$$

Решению уравнения (2. 1) с начальным возмущением $\varphi(\nu)$ $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$, в соответствии с разложением С. Н. Шиманова, можно сопоставить экспоненциальный ряд

$$x(t+\nu) \sim \frac{e^{\lambda_1 \nu}}{\Delta'(\lambda_1)} y_1(t) + \frac{e^{\lambda_2 \nu}}{\Delta'(\lambda_2)} y_2(t) + \ldots, \tag{2.2}$$

где $y(t)$, $(i = 1,2,\ldots)$ — линейные функционалы (1. 12)

$$y_i(t) = x(t) + a\int_{-\tau}^{0} x(t+\nu)\, e^{-\lambda_i(\tau+\nu)}\, d\nu. \tag{2.3}$$

Но тогда из (2.2) следует, что начальному возмущению $\varphi(\nu)$ $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$ можно сопоставить ряд

$$\varphi(\nu) \sim \frac{e^{\lambda_1 \nu}}{\Delta'(\lambda_1)} y_1(0) + \frac{e^{\lambda_2 \nu}}{\Delta'(\lambda_2)} y_2(0) + \ldots. \tag{2.4}$$

Сопоставление (2. 4) получено из сопоставления (2. 2) при $t = 0$. Пусть начальное возмущение задано в виде

$$\varphi^*(\nu) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\tau \leqslant \nu < 0, \\ 1 \text{ при } \nu = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Тогда функционалы $y_i(0)$, $(i = 1,2,\ldots)$ в силу (2. 3) найдутся согласно равенству

$$y_i(0) = \varphi^*(0) + a\int_{-\tau}^{0} \varphi^*(\nu)\, e^{-\lambda_i(\tau+\nu)}\, d\nu,$$

или, на основании (2.5),

$$y_i(0) = 1, \quad (i = 1,2,\ldots).$$

Но тогда начальному возмущению (2. 5) может быть сопоставлен ряд

$$\varphi^*(\nu) \sim \frac{e^{\lambda_1 \nu}}{\Delta'(\lambda_1)} + \frac{e^{\lambda_2 \nu}}{\Delta'(\lambda_2)} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i \nu}}{\Delta'(\lambda_i)}. \tag{2.6}$$

Ряд справа в (2.6) имеет своими значениями на отрезке $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i \nu}}{\Delta'(\lambda_i)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } \nu = 0, \\ 0 & \text{при } -\tau < \nu < 0, \\ [\operatorname{sign} a]\,\infty & \text{при } \nu = -\tau, \end{cases} \tag{2.7}$$

а на отрезке $[0 \leqslant \nu \leqslant \tau]$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i \nu}}{\Delta'(\lambda_i)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } \nu = 0, \\ 1 & \text{при } 0 < \nu \leqslant \tau. \end{cases} \tag{2.8}$$

Равенства (2.7) и (2.8) легко установить, используя преобразование Лапласа для решения уравнения (2. 1).

Опуская детальное доказательство, укажем поведение сумм

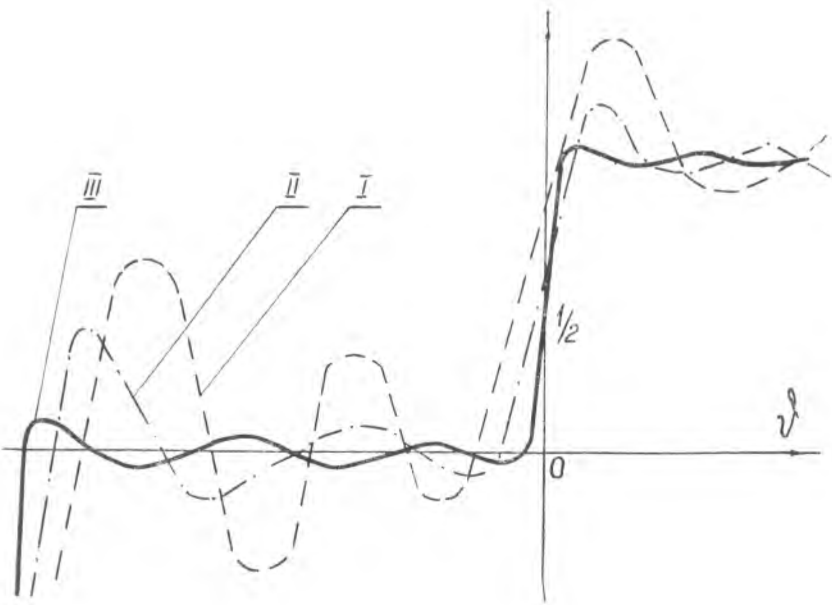
$$\sum_{i=1}^{N} \frac{e^{\lambda_i \nu}}{\Delta'(\lambda_i)}, \ [-\tau \leqslant \nu \leqslant 0] \tag{2.9}$$

при $N = 10, 20, 30$.

Параметры уравнения (2.1) были следующими:

$$a = -1{,}5; \quad \tau = 1.$$

Поведение ряда (2.9) при $N = 10, 20, 30$ приведено на рис. 2.



I — сумма (2.9) при $N = 10$; II — сумма (2.9) при $N = 20$; III — сумма (2.9) при $N = 30$. Расчет был проведен на ЭЦВМ БЭСМ.

3. Основная теорема о разложении

Пусть разлагаемая в экспоненциальный ряд функция $\varphi(\nu)$, $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$ принадлежит пространству C^2 $[-\tau, 0]$, то есть является непрерывной, вместе с ее первыми двумя производными, функцией.

В соответствии с (2.4) функции $\varphi(\nu)$ можно сопоставить ряд

$$\varphi(\nu) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i \nu}}{\Delta'(\lambda_i)} y_i(0), \tag{3.1}$$

где

$$y_i(0) = \varphi(0) + a \int_{-\tau}^{0} \varphi(\nu) e^{-\lambda_i(\tau+\nu)} d\nu. \tag{3.2}$$

Проинтегрируем дважды по частям интеграл в равенстве (3.2). В результате интегрирования получим

$$y_i(0) = \frac{a\varphi(-\tau)}{\lambda_i} - \frac{\dot\varphi(0)}{\lambda_i} + \frac{a\dot\varphi(-\tau)}{\lambda_i^2} + \\ + \frac{1}{\lambda_i} \int_{-\tau}^{0} \ddot\varphi(\nu) e^{-\lambda_i \nu} d\nu. \tag{3.3}$$

В силу равенства (3.3) ряд справа в (3.1) запишем следующим образом:

$$F(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i \nu}}{\Delta'(\lambda_i)} y_i(0) = \varphi(-\tau) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i(\tau+\nu)}}{\Delta'(\lambda_i)} - \\ - \frac{\dot\varphi(0)}{a} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i(\tau+\nu)}}{\Delta'(\lambda_i)} + \frac{\dot\varphi(-\tau)}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i(2\tau+\nu)}}{\Delta'(\lambda_i)} + \\ + \frac{1}{a} \int_{-\tau}^{0} \ddot\varphi(\zeta) \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i(\tau+\nu-\zeta)}}{(\Delta'\lambda_i)} \right] d\zeta. \tag{3.4}$$

Из четвертого параграфа введения следует, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i t}}{\Delta'(\lambda_i)} \tag{3.5}$$

при $t > 0$ представляет собой решение уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t-\tau) \tag{3.6}$$

с начальным возмущением

$$\varphi^*(\nu)=\begin{cases}0 & \text{при } -\tau\leqslant\nu\leqslant 0,\\ 1 & \text{при } \qquad \nu=0.\end{cases}$$

Найдем значение функции $F(\nu)$ при $\nu=0$.

Используя (2. 8) и (0. 3. 5), получим

$$F(0)=\varphi(-\tau)-\frac{\dot\varphi(0)}{a}+\frac{\dot\varphi(-\tau)}{a}(1+a\tau)+$$

$$+\frac{1}{a}\int\limits_{-\tau}^{0}\ddot\varphi(\nu)(1-a\nu)\,d\nu. \tag{3.7}$$

Или, интегрируя справа в (3. 7),

$$F(0)=\varphi(0). \tag{3.8}$$

При $\nu=-\tau$ ряд под знаком интеграла в равенстве (3.4) представляет собой функцию (2. 8).

Поэтому

$$\int\limits_{-\tau}^{0}\ddot\varphi(\zeta)\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_i\zeta}}{\Delta'(\lambda_i)}\right]d\zeta=\dot\varphi(0)-\dot\varphi(-\tau), \tag{3.9}$$

и, в силу (2. 7) и (3. 4),

$$F(-\tau)=\frac{\dot\varphi(0)+a\varphi(-\tau)}{2a}. \tag{3.10}$$

Если ν принимает любое фиксированное значение из промежутка $(-\tau<\nu<0)$, на основании (0. 3. 6), ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e^{\lambda_i(\tau+\nu-\zeta)}}{\Delta'(\lambda_i)}=\begin{cases}1 & \text{при } \nu\leqslant\zeta\leqslant 0,\\ 1+a(\nu-\zeta) & \text{при } -\tau\leqslant\zeta\leqslant\nu.\end{cases}$$

Тогда, интегрируя справа в равенстве (3. 4), получим

$$F(\nu)=\varphi(-\tau)-\frac{\dot\varphi(0)}{a}+\frac{\dot\varphi(-\tau)}{a}[1+a(\tau+\nu)]+$$

$$+\frac{1}{a}\int\limits_{-\tau}^{\nu}\ddot\varphi(\zeta)[1+a(\nu-\zeta)]\,dz+\frac{1}{a}\int\limits_{\nu}^{0}\dddot\varphi(\zeta)\,d\zeta=\varphi(\nu)$$

то есть

$$F(\nu)=\varphi(\nu),\quad(-\tau<\nu<0). \tag{3.11}$$

Таким образом, из (3. 8), (3. 10) и (3. 11)

$$F(\nu)=\begin{cases}\varphi(\nu) & \text{при } -\tau<\nu\leqslant 0,\\ \dfrac{\dot\varphi(0)+a\varphi(-\tau)}{2a} & \text{при } \nu==\tau.\end{cases} \tag{3.12}$$

Пусть разлагаемая в экспоненциальный ряд функция $\varphi(\nu)$, $[-\tau\leqslant\nu\leqslant 0]$ удовлетворяет условию

$$\dot{\varphi}(0) = a\varphi(-\tau). \tag{3.13}$$

Тогда ряд справа в (3. 1) всюду на отрезке $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$ сходится к разлагаемой функции $\varphi(\nu)$ и имеет место следующая:

Теорема 3.1. Если функция $\varphi(\nu)$, $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$, удовлетворяющая условию (3.13), непрерывная вместе с первыми ее двумя производными, то ряд справа в (3.1) равномерно сходится к функции $\varphi(\nu)$ на всем интервале $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$. В силу вышеизложенного для доказательства теоремы достаточно доказать равномерную сходимость.

Действительно, если разлагаемая в ряд функция удовлетворяет условию (3.13), то в соответствии с (3. 1), (3. 4)

$$\varphi(\nu) - \sum_{i=1}^{N} \frac{e^{\lambda_i \nu}}{\Delta'(\lambda_i)} y_i(0) = \frac{\dot{\varphi}(-\tau)}{a} \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i(2\tau+\nu)}}{\Delta'(\lambda_i)} +$$

$$+\frac{1}{a}\int_{-\tau}^{0} \ddot{\varphi}(\zeta) \left[\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i(\tau+\nu-\zeta)}}{\Delta'(\lambda_i)} \right] d\zeta. \tag{3.14}$$

Из (3. 14) следует, что

$$\left| \varphi(\nu) - \sum_{i=1}^{N} \frac{e^{\lambda_i \nu}}{\Delta'(\lambda_i)} y_i(0) \right| \leqslant \left| \frac{\dot{\varphi}(-\tau)}{a} \right| \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i(2\tau+\nu)}}{\Delta'(\lambda_i)} \right| + \tag{3.15}$$

$$+ \left| \frac{1}{a} \right| \int_{-\tau}^{0} \| \ddot{\varphi}(\zeta) \|^{(\tau)} \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i(\tau+\nu-\zeta)}}{\Delta'(\lambda_i)} \right| d\zeta,$$

где

$$\| \varphi(\nu) \|^{(\tau)} = \sup |\varphi(\nu)| \text{ при } [-\tau \leqslant \nu \leqslant 0].$$

Номер N в (3.14), (3.15) выбираем таким образом, чтобы сумма слева была вещественной.

Далее, так как (0. 2. 3)

$$e^{\lambda_i \tau} = \frac{a}{\lambda_i}, \tag{3.16}$$

то

$$\left| \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i(2\tau+\nu)}}{\Delta'(\lambda_i)} \right| \leqslant \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{a^2 \, | e^{\lambda_i \nu} |}{| \Delta'(\lambda_i) | \, | \lambda_i |}. \tag{3.17}$$

Пусть N настолько велико, что при $i \geqslant N$ собственные значения λ_i характеристического квазиполинома (0. 2. 3) могут быть представлены асимптотическими формулами (0. 2. 9)

$$\lambda_n = -\frac{1}{\tau} \ln \frac{2\pi \cdot n}{|a|} + \left(2n + \frac{1}{2} \operatorname{sign} a\right) \frac{\pi}{\tau} i + 0\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

$$\lambda_{n+1} = \bar{\lambda}_n, \quad i = \sqrt{-1}. \tag{3.18}$$

Ввиду того, что $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$, то

$$|e^{\lambda_i \nu}| \leqslant \left|\frac{\lambda_i}{a}\right| \tag{3.19}$$

и, следовательно, при достаточно больших номерах i

$$\left|\frac{e^{\lambda_i \nu}}{\Delta'(\lambda_i)}\right| = \left|\frac{e^{\lambda_i \nu}}{1+\lambda_i \tau}\right| \leqslant \left|\frac{\lambda_i}{a(1+\lambda_i \tau)}\right| \leqslant \frac{2}{|a|\tau}. \tag{3.20}$$

Поэтому ряд слева в (3.17), используя (3.18), мажорируем рядом

$$\frac{4|a|}{\tau}\sum \frac{1}{n^2}. \tag{3.21}$$

Аналогично, так как

$$e^{-\lambda_i \zeta} = \left(\frac{\lambda_i}{a}\right)^{\frac{\zeta}{\tau}},$$

при любом ν на интервале $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$

$$\left|\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i(\tau+\nu-\zeta)}}{\Delta'(\lambda_i)}\right| \leqslant \frac{4|a|}{\tau}\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\frac{\zeta}{\tau}}}, \tag{3.22}$$

и, следовательно, ряд слева в (3.22) равномерно сходится при $[-\tau \leqslant \zeta \leqslant -\delta < 0]$, где δ сколь угодно малая фиксированная положительная постоянная. Но тогда, на основании (2.8), (3.21) и (3.22), для любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε можно выбрать достаточно большой номер N, такой, что для любого ν на интервале $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$ выполняются неравенства:

$$\left|\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i(2\tau+\nu)}}{\Delta'(\lambda_i)}\right| < \varepsilon, \tag{3.23}$$

$$\left|\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i(\tau+\nu-\zeta)}}{\Delta'(\lambda_i)}\right| < \begin{cases} \varepsilon & \text{при} \quad -\tau \leqslant \zeta \leqslant \varepsilon \\ 1 & \text{при} \quad -\varepsilon < \zeta \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Из неравенств (3.15), (3.23) и (3.24) получим

$$\left|\varphi(\nu) - \sum_{i=1}^{N} \frac{e^{\lambda_i \nu}}{\Delta'(\lambda_i)} y_i(0)\right| < |\dot{\varphi}(-\tau)| \frac{\varepsilon}{|a|} + \\ + \frac{1}{|a|} \|\ddot{\varphi}(\nu)\|^{(\tau)} [\varepsilon(\tau-\varepsilon)+\varepsilon]. \tag{3.25}$$

Из неравенства (3.25) следует утверждение теоремы 3.1. Отметим, что условия, наложенные на функцию $\varphi(\nu)$, $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$ можно ослабить. А именно, можно полагать, что функция $\varphi(\nu)$ принадлежит пространству $C^1_{[-\tau,\,0]}$

Схема доказательства в этом случае полностью сохранится, с той лишь разницей, что интегрировать по частям в равенстве (3.2) необходимо один раз.

Разложение функций в экспоненциальные ряды по собственным решениям уравнения с запаздыванием времени рассматривалось в работе [4].

В данном параграфе результат, сформулированный теоремой 3.1, установлен суммированием ряда, с использованием конкретности разложений С. Н. Шиманова.

4. Дополнительные теоремы о разложении функций в ряды типа Фурье

Пусть некоторая функция $\varphi(\mu)$, $[-\tau\leqslant\mu\leqslant 0]$ принадлежит пространству $C_1[-\tau, 0]$.
Тогда, в соответствии с теоремой 3.1, имеет место разложение

$$\varphi(\mu)=\sum_{i=1}^{\infty} p_i \frac{e^{\lambda_i\mu}}{\Delta'(\lambda_i)}, \tag{4.1}$$

где p_i — постоянные коэффициенты.

При этом, если имеет место равенство

$$\dot\varphi(0)=a\varphi(-\tau), \tag{4.2}$$

то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i \frac{e^{\lambda_i\mu}}{\Delta'(\lambda_i)} \tag{4.3}$$

равномерно сходится к функции $\varphi(\mu)$ всюду на интервале $[-\tau\leqslant\mu\leqslant 0]$.

В том случае, когда равенство (4.2) не имеет место, то ряд (4.3) равномерно сходится к функции $\varphi(\mu)$ на интервале $[-\tau<\delta_1\leqslant\mu\leqslant 0]$, где δ_1 фиксированное, сколь угодно близкое к $-\tau$ число.

При значении $\mu=-\tau$ в этом случае ряд (4.3) сходится к величине

$$\frac{\dot\varphi(0)+a\varphi(-\tau)}{2a}. \tag{4.4}$$

Далее полагаем

$$\mu=-\tau-\nu. \tag{4.5}$$

Тогда функция $\varphi_1(\nu)$

$$\varphi(-\tau-\nu)=\varphi_1(\nu), \quad [-\tau\leqslant\nu\leqslant 0]$$

является той же функцией $\varphi(\mu)$, $[-\tau\leqslant\mu\leqslant 0]$ но «читаемой» в обратном порядке. Раскладывая функцию $\varphi_1(\nu)$ в ряд вида (4.1), получим

$$\varphi_1(\nu)=\sum_{i=1}^{\infty} d_i \frac{e^{\lambda_i\nu}}{\Delta'(\lambda_i)}, \tag{4.6}$$

или

$$\varphi(-\tau-\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \frac{e^{-\lambda_i(\tau+\mu)}}{\Delta'(\lambda_i)}. \tag{4.7}$$

Разложение (4.7) обладает такими же свойствами, что и разложение (4.1).

Пусть

$$K(\mu, \eta), \quad [-\tau \leqslant \mu, \eta \leqslant 0] \tag{4.8}$$

функция двух независимых переменных μ и η. При любом фиксированном значении η из интервала $[-\tau, 0]$ функцию $K(\mu, \eta)$ можно рассматривать в качестве начального возмущения уравнения с запаздыванием времени. Тогда в соответствии с (3.2) и (4.1) функция

$$K(\mu, \eta), \quad [-\tau \leqslant \mu, \eta \leqslant 0]$$

представима в виде ряда

$$K(\mu, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\eta) \frac{e^{\lambda_i \mu}}{\Delta'(\lambda_i)}, \tag{4.9}$$

где $p_i(\eta)$, $(i = 1, 2, \ldots)$ — функция переменного η

$$p_i(\eta) = K(0, \eta) + a \int_{-\tau}^{0} K(\mu, \eta)\, e^{-\lambda_i(\tau+\mu)}\, d\mu. \tag{4.10}$$

Раскладывая функции $p_i(\eta)$, $(i = 1, 2, \ldots)$, $[-\tau \leqslant \eta \leqslant 0]$ в ряд вида (4.1) и подставляя в (4.9), получим

$$K(\mu, \eta) = \sum_{i, j=1}^{\infty} d_{ij} e^{\lambda_i \mu}\, e^{\lambda_j \eta}, \tag{4.11}$$

где постоянные коэффициенты d_{ij}, $(ij = 1, 2, \ldots)$ представляют собой квадратичные функционалы

$$d_{ij} = \frac{1}{\Delta'(\lambda_i)\Delta'(\lambda_j)} \Big\{ K(0, 0) + a \int_{-\tau}^{0} K(\mu, 0)\, e^{-\lambda_i(\tau+\mu)}\, d\mu +$$

$$+ a \int_{-\tau}^{0} K(0, \eta)\, e^{-\lambda_j(\tau+\eta)}\, d\eta +$$

$$+ a^2 \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} K(\mu, \eta)\, e^{-\lambda_i(\tau+\mu)}\, e^{-\lambda_j(\tau+\eta)}\, d\mu\, d\eta \Big\}. \tag{4.12}$$

Аналогично теореме 3.1 имеет место результат.

Теорема 4.1. Если функция $K(\mu,\eta)$, $[-\tau \leqslant \mu, \eta \leqslant 0]$ непрерывна и ограничена вместе с частными производными

$$\frac{\partial K(\mu, \eta)}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial K(\mu, \eta)}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 K(\mu, \eta)}{\partial \mu\, \partial \eta}$$

и удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial K(0, \eta)}{\partial \mu} = aK(-\tau, \eta),$$
$$\frac{\partial K(\mu, 0)}{\partial \eta} = aK(\mu, -\tau),$$
$$\frac{\partial^2 K(0, 0)}{\partial \mu\, \partial \eta} = a^2 K(-\tau, -\tau),$$

то ряд (4.11) равномерно сходится к функции К (μ, η) во всей области $[-\tau \leqslant \mu, \eta \leqslant 0]$.

Для функции $K(\mu, \eta)$, $[-\tau \leqslant \mu, \eta \leqslant 0]$ могут быть записаны обратные разложения вида (4.7).

Теорема 4.1 может быть обобщена на случай многих независимых переменных.

5. Эквивалентные системы

В соответствии с (1.1) и (1.15) уравнению

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t-\tau), \tag{5.1}$$

где a, τ — постоянные $(\tau > 0)$, эквивалентна система:

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \lambda_i y_i(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

$$\frac{dz_N^t(\nu)}{dt} = Az_N^t(\nu). \tag{5.2}$$

Но, в соответствии с теоремой 3.1,

$$\| z_N^0(\nu) \|^{(\tau)} \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

При достаточно большом номере N решения операторного уравнения

$$\frac{dz_N^t(\nu)}{dt} = Az_N^t(\nu) \tag{5.3}$$

будут убывать сколь угодно быстро, так как спектр оператора A в случае (5.3) начинается собственными значениями, вещественные части которых, в соответствии с (0.2.9), достаточно велики по модулю и отрицательные.

Но тогда имеет место оценка

$$| z_N^t(\nu) | \leqslant \| z_N^0(\nu) \|^{(\tau)} d, \tag{5.4}$$

где d — постоянное, положительное число $(d < \infty)$, и, следовательно, уравнению (5.1) эквивалентна счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \lambda_i y_i(t), \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{5.5}$$

где λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — корни квазиполинома (0.2.9),

$y^i(t)$ — линейные функционалы

$$y_i(t) = x(t) + a \int_{-\tau}^{0} x(t+\nu)\, e^{-\lambda_i(\tau+\nu)}\, d\nu. \tag{5.6}$$

При этом решение $x(t+\nu)$, $t>0$, $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$ представимо в виде ряда

$$x(t+\nu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i \nu}}{\Delta'(\lambda_i)}\, y_i(t). \tag{5.7}$$

Аналогично, системе дифференциальных уравнений с запаздыванием времени

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} [a_{sj} x_j(t) + b_{sj} x_j(t-\tau)], \tag{5.8}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n)$$

на основании (1.25) эквивалентна счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_j(t)}{dt} = \lambda_j u_j(t), \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{5.9}$$

где линейные функционалы $u_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ определены скалярным произведением (1.22)

$$u_j(t) = (x^t(\nu), y_j(\nu)), \tag{5.10}$$

а собственный вектор $y_j(\upsilon)$ — равенством (1.23).

В соответствии с (1.24) решение $x^t(\nu)$ в этом случае может быть представлено в виде ряда

$$x^t(\nu) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j'(\nu)\, u_j(t). \tag{5.11}$$

Счетные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.5) и (5.9) являются каноническими.

Однако на основании (1.25) может быть получена и не каноническая система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Например, если $b_{ii} \neq 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то в соответствии с (1.25) и (5.1) — (5.7), производя разложение по собственным решениям уравнений

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = b_{ss}\, x_s(t-\tau), \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.12}$$

получим n счетных не канонических систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

При этом, как и для систем (5.5) и (5.9), искомое решение с любой степенью точности может быть найдено приближенно методом редукции [5], то есть из систем конечномерных уравнений.

Глава II

ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ (Н. Н. Красовского)

В главе рассматривается задача о вычислении квадратичных функционалов для уравнения с запаздыванием времени.

Из работы [7] Н. Н. Красовского следует, что для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием времени (1.5.8)

$$\frac{ds_s(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}[a_{sj}x_j(t)+b_{sj}x_j(t-\tau)], \tag{0.1}$$

$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где a_{sj}, $в_{sj}$, $(s,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — постоянные, всегда можно найти функционал

$$V=\sum_{i,\ j=1}^{n}\left[E_{ij}x_i(t)\,x_i(t)+x_i(t)\int_{-\tau}^{0}F_j(\nu)\,x_j(t+\nu)\,d\nu+\right.$$

$$\left.+\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0}K_{ij}(\rho,\sigma)\,x_i(t+\rho)\,x_j(t+\sigma)\,d\rho\,d\sigma\right], \tag{0.2}$$

производная от которого по времени в силу системы (0.1) является заданным квадратичным функционалом вида

$$W=\sum_{i,\ j=1}^{n}[C_{ij}x_i(t)\,x_j(t)+x_i(t)\int_{-\tau}^{0}M_j(\nu)\,x_j(t+\nu)\,d\nu+$$

$$\left.+\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0}N_{ij}(\rho,\sigma)\,x_i(t+\rho)\,x_j(t+\sigma)\,d\rho\,o\sigma\right]. \tag{0.3}$$

В (0.2) и (0.3) E_{ij}, C_{ij} — постоянные, $F_j(\nu)$, $M_i(\nu)$, $K_{ij}(\rho,\sigma)$, $N(\rho,\ \sigma)$ — некоторые функции $(ij=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, $[-\tau\leqslant\nu,\ \rho,\ \sigma\leqslant 0]$. Очевидно, для того чтобы задать функционал (0.3), достаточно задать постоянные C_{ij} и функции $M_j(\gamma)$, $N_{ij}(\varrho,\ \sigma)$, а для того, чтобы найти функционал (0,2), достаточно найти постоянные E_{ij} и функции $F_j(\nu)$, K_{ij} $(\rho,\ \sigma)$.

В первых трех параграфах главы рассматривается задача о вычислении квадратичных функционалов для уравнения с запаздыванием времени

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t-\tau). \tag{0.4}$$

В первом параграфе рассматривается первый частный случай.

При этом полное решение задачи разбито на три частных случая, а именно, найден функционал

$$V_1 = Ax^2(t) + x(t)\int_{-\tau}^{0} B(\nu)\, x(t+\nu)\, d\nu +$$

$$+\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} K(\rho, \sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho\, d\sigma, \tag{0.5}$$

производная от которого по времени в силу уравнения (0. 4) является квадратом решения, то есть

$$W_1 = x^2(t). \tag{0.6}$$

Во втором параграфе решена задача о вычислении функционала

$$V_{II} = Ex^2(t) + x(t)\int_{-\tau}^{0} F(\nu)\, x(t+\nu)\, d\nu +$$

$$+\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} R(\rho, \sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho\, d\sigma, \tag{0.7}$$

производная от которого по времени в силу уравнения (0. 4) является произведением решения на заданный линейный функционал

$$W_{II} = ax(t)\int_{-\tau}^{0} C(-\tau-\nu)\, x(t+\nu)\, d\nu. \tag{0.8}$$

В равенстве (0.8) $C(-\tau-\nu)$, $[-\tau\leqslant \nu \leqslant 0]$ — заданная функция.

Третий параграф содержит решение задачи о вычислении квадратичного функционала

$$W_{III} = Dx(t) + x(t)\int_{-\tau}^{0} N(\nu)\, x(t+\nu)\, d\nu +$$

$$+\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} M(\rho, \sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, q\rho\, d\sigma \tag{0.9}$$

в том случае, когда заданный квадратичный функционал содержит кратный интеграл.

А именно:

$$W_{\mathrm{III}} = Q(0, 0)\, x^2(t) + ax(t) \int_{-\tau}^{0} [Q(-\tau-\nu, 0) +$$
$$+ Q(0, -\tau-\nu)]\, x(t+\nu)\, d\nu +$$
$$+ a^2 \int_{-\tau}^{0} \int_{-\tau}^{0} Q(-\tau-\rho, -\tau-\sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho d\sigma, \qquad (0.10)$$

где

$$Q(-\tau-\rho, -\tau-\sigma)$$

заданная функция $[-\tau \leqslant \rho, \sigma \leqslant 0]$.

Решение указанных частных задач полностью решает общую задачу о вычислении квадратичных функционалов в силу уравнения (0.4).

В четвертом параграфе произведено вычисление квадратичных функционалов для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием времени (0.1) в первом частном случае при

$$a_{sj} = 0, \quad (s, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Литература к главе содержится в работах [7], [28], [29].

1. Вычисление квадратичного функционала в первом частном случае

Найдем квадратичный функционал

$$V_{\mathrm{I}} = Ax^2(t) + x(t) \int_{-\tau}^{0} B(\nu)\, x(t+\nu)\, d\nu +$$
$$+ \int_{-\tau}^{0} \int_{-\tau}^{0} K(\rho, \sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho\, d\sigma, \qquad (1.1)$$

производная от которого в силу уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t-\tau) \qquad (1.2)$$

представляет собой квадрат решения, то есть

$$W_{\mathrm{I}} = \frac{dV_{\mathrm{I}}}{dt} = x^2(t). \qquad (1.3)$$

Уравнению (1.2) эквивалентна счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = \lambda_k\, y_k(t), \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad (1.4)$$

где $y_k(t)$, $(k = 1, 2, \ldots)$ — линейные функционалы

$$y_k(t) = x(t) + a \int_{-\tau}^{0} x(t+\nu)\, e^{-\lambda_k(\tau+\nu)}\, d\nu, \qquad (1.5)$$

а решение $x(t+\nu)$, $t>0$, $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$ может быть представлено в виде ряда

$$x(t+\nu)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\lambda_k\nu}\,y_k(t)}{\Delta'(\lambda_k)}. \tag{1.6}$$

Но тогда, очевидно, искомый квадратичный функционал может быть записан следующим образом:

$$V_1=\sum_{j,\,k=1}^{\infty}\frac{y_j\,y_k}{(\lambda_j+\lambda_k)\,\Delta'(\lambda_j)\,\Delta'(\lambda_k)}, \tag{1.7}$$

так как производная от (1.7) по времени в силу системы (1.4) является, на основании (1.6), квадратом решения

$$W_1=\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{y_j}{\Delta(\lambda_j)}\right]^2=x^2(t). \tag{1.8}$$

Подставляя в (1.7) аналитическое выражение линейных функционалов $y_k(t)$, $(k=1,\,2,\,\ldots)$ из (1.5), находим квадратичный функционал (1.1).

При этом

$$A=\sum_{j,\,k=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_j+\lambda_k)\,\Delta'(\lambda_j)\,\Delta'(\lambda_k)}, \tag{1.9}$$

$$B(\nu)=2a\sum_{j,\,k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_j(\tau+\nu)}}{(\lambda_j+\lambda_k)\,\Delta'(\lambda_j)\,\Delta'(\lambda_k)}, \tag{1.10}$$

$$K(\rho,\,\sigma)=a^2\sum\frac{e^{-\lambda_j(\tau+\rho)}\,e^{-\lambda_k(\tau+\sigma)}}{(\lambda_j+\lambda_k)\,\Delta'(\lambda_j)\,\Delta'(\lambda_k)}. \tag{1.11}$$

Для вычисления параметров (1.9), (1.10), (1.11) функционала (1.1) разложим дробную функцию

$$\frac{1}{\Delta(\mu)}=\frac{1}{\mu-ae^{-\mu\tau}} \tag{1.12}$$

на простые дроби. Так как корни квазиполинома (0.2.3) простые, то

$$\frac{1}{\mu-ae^{-\mu\tau}}=-\frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta'(\lambda_k)(\mu-\lambda_k)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta'(\lambda_k)\,\lambda_k}. \tag{1.13}$$

Но, в соответствии с (0.2.3) и (1.2.8),

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta'(\lambda_k)\,\lambda_k}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\lambda_k\tau}}{\Delta'(\lambda_k)}=\frac{1}{a},$$

поэтому

$$\frac{1}{\mu-ae^{-\mu\tau}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta'(\lambda_k)(\mu-\lambda_k)}$$

на всей плоскости комплексного переменного μ.

Или

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta'(\lambda_k)(\lambda_k - \mu)} = -\frac{1}{\mu - ae^{-\mu\tau}}. \qquad (1.14)$$

Пусть $\mu = -\lambda_j$, тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta'(\lambda_k)(\lambda_k + \lambda_j)} = \frac{1}{\lambda_j + ae^{\lambda_j\tau}}. \qquad (1.15)$$

Так как $\lambda_j (j = 1, 2, \ldots)$ является корнем квазиполинома (0.2.3), то

$$\frac{1}{\lambda_j + ae^{\lambda_j\tau}} = \frac{1}{\lambda_j + \frac{a^2}{\lambda_j}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda_j + ia} + \frac{1}{\lambda_j - ia}\right]. \qquad (1.16)$$

В (1.16) и далее $i = \sqrt{-1}$.

Из (1.15) и (1.16) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta'(\lambda_k)(\lambda_k + \lambda_j)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda_j + ia} + \frac{1}{\lambda_j - ia}\right]. \qquad (1.17)$$

Умножая равенство (1.17) слева и справа на множитель

$$\frac{1}{\Delta'(\lambda_j)}$$

и суммируя затем по индексу j, получим

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta'(\lambda_k)\Delta'(\lambda_j)(\lambda_k + \lambda_j)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta'(\lambda_j)(\lambda_j + ia)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta'(\lambda_j)(\lambda_j - ia)}\right].$$

Но, в соответствии с (1.14),

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta'(\lambda_j)(\lambda_j + ia)} = \frac{1}{ia + ae^{ia\tau}}, \qquad (1.18)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta'(\lambda_j)(\lambda_j - ia)} = -\frac{1}{ia - ae^{-ia\tau}}. \qquad (1.19)$$

В силу (1.18) и (1.19)

$$A = \sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta'(\lambda_k)\Delta'(\lambda_j)(\lambda_j + \lambda_k)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{ia + ae^{ia\tau}} - \frac{1}{ia - ae^{-ia\tau}}\right] = \frac{\cos a\tau}{2a(1 + \sin a\tau)}. \qquad (1.20)$$

Пусть

$$\operatorname{Re}\lambda_j<0, \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1.21}$$

Из равенства (1.8) следует, что

$$A = -\int_0^\infty x_1^2(t)\,dt, \tag{1.22}$$

где $x_1(t)$ — решение уравнения (1.2) с начальным возмущением

$$\psi^*(\nu) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\tau \leqslant \nu < 0 \\ 1 \text{ при } \qquad \nu = 0. \end{cases} \tag{1.23}$$

Найдем функцию $B(\nu)$, $[-\tau\leqslant\nu\leqslant 0]$, используя предположение (1.21).

В соответствии (1.21), (1.22) и (1.23)

$$B(\nu) = 2a\sum_{j,\,k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_j(\tau+\nu)}}{\Delta'(\lambda_k)\,\Delta'(\lambda_j)\,(\lambda_k+\lambda_j)} =$$

$$= a\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_j(\tau+\nu)}}{\Delta'(\lambda_j)\,(\lambda_j+ia)}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_j(\tau+\nu)}}{\Delta'(\lambda_j)\,(\lambda_j-ia)}\right] =$$

$$= -a\int_0^\infty [e^{iat}+e^{-iat}]\,x_1(t-\tau-\nu)\,dt, \tag{1.24}$$

где по-прежнему $x_1(t)$ — решение уравнения (1.2) с начальным возмущением (1.23).

При этом

$$A = \frac{B(-\tau)}{2a} = -\frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{iat}x_1(t)\,dt + \int_0^\infty e^{-iat}x_1(t)\,dt\right], \tag{1.25}$$

где в соответствии с (1.18) и (1.19)

$$-\int_0^\infty e^{iat}x_1(t)\,dt = \frac{1}{a\,[\cos a\tau + i\,(1+\sin a\tau)]}, \tag{1.26}$$

$$-\int_0^\infty e^{-iat}x_1(t)\,dt + \frac{1}{a\,[\cos a\tau - i\,(1+\sin a\tau)]}. \tag{1.27}$$

Пусть в равенстве (1.24) $\nu\neq 0$.

Введем новую переменную

$$t-\tau-\nu = t_1,$$

тогда

$$B(\nu) = -a\int_{-\tau-\nu}^{\infty}[e^{ia(t+\tau+\nu)}+e^{-ia(t+\tau+\nu)}]\,x_1(t_1)\,dt_1. \tag{1.28}$$

Но при $\nu\neq0$, $x_1(-\tau-\nu)=0$ за исключением точки $\nu=-\tau$, где $x_1 = 1$, поэтому

$$B(\nu) = -a\left[e^{ia(\tau+\nu)}\int_0^\infty e^{iat_1}(x_1(t_1)\,dt_1 + e^{-ia(\tau+\nu)}\int_0^\infty e^{-iat_1}x_1(t_1)dt_1\right] =$$

$$= \frac{\cos a\nu + \sin a(\tau+\nu)}{1+\sin a\tau}, \tag{1.29}$$

$$[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0].$$

Аналогично найдем

$$K(\rho, \sigma) = a^2\sum_{j,k=1}^\infty \frac{e^{-\lambda_k(\tau+\rho)}e^{-\lambda_j(\tau+\sigma)}}{\Delta'(\lambda_j)\Delta'(\lambda_k)(\lambda_j+\lambda_k)} =$$

$$= -a^2\sum_{k=1}^\infty \frac{e^{-\lambda_k(\tau+\rho)}}{\Delta'(\lambda_k)}\int_0^\infty \sum_{j=0}^\infty \frac{e^{(\lambda_k+\lambda_j)t}e^{-\lambda_j(\tau+\sigma)}}{\Delta'(\lambda_j)}dt =$$

$$= -a^2\sum_{k=1}^\infty \frac{e^{-\lambda_k(\tau+\rho)}}{\Delta'(\lambda_k)}\int_0^\infty e^{\lambda_k t}x_1(t-\tau-\sigma)\,dt. \tag{1.30}$$

Введем подстановку

$$t-\tau-\sigma = t_1,$$

тогда (1.30) примет вид

$$K(\rho, \sigma) = -a^2\sum_{k=1}^\infty \frac{e^{-\lambda_k(\tau+\rho)}}{\Delta'(\lambda_k)}\int_{-\tau-\sigma}^\infty e^{\lambda_k(t_1+\tau+\sigma)}x_1(t_1)\,dt_1 =$$

$$= -a^2\sum_{k=1}^\infty \frac{e^{-\lambda_k(\tau+\rho)}}{\Delta'(\lambda_k)}\int_0^\infty e^{\lambda_k(t_1+\tau+\sigma)}x_1(t_1)\,dt_1, \tag{1.31}$$

так как $x_1(\nu) = 0$ при $[-\tau \leqslant \nu < 0]$.

Из (1.31), в соответствии с (1.29), следует, что

$$K(\rho, \sigma) = -a^2\int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty \frac{e^{\lambda_k(t+\sigma-\rho)}}{(\Delta'\lambda_k)}\sum_{j=1}^\infty \frac{e^{\lambda_j t}}{\Delta'(\lambda_j)}dt =$$

$$= a^2\sum_{j,k=1}^\infty \frac{e^{-\lambda_k(\rho-\sigma)}}{\Delta'(\lambda_j)\Delta'(\lambda_k)(\lambda_j+\lambda_k)} =$$

$$= \frac{a}{2}\,\frac{\cos a(\rho-\sigma-\tau)+\sin a(\rho-\sigma)}{1+\sin a\tau}, \tag{1.32}$$

где $\sigma \leqslant \rho$, так как в (1.29) $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$.

Аналогично, меняя в (1.30) порядок суммирования, получим

$$K(\rho, \sigma) = \frac{a}{2}\,\frac{\cos a(\sigma-\rho-\tau)+\sin a(\sigma-\rho)}{1+\sin a\tau} \tag{1.33}$$

при $\rho \leqslant \sigma$.

Таким образом, искомый функционал V_1 может быть записан в виде

$$V_{\mathrm{I}}=\frac{1}{a^2}K(-\tau,\ -\tau)\,x^2(t)+\frac{1}{a}x(t)\int\limits_{-\tau}^{0}[K(\nu,\ -\tau)+$$

$$+K(-\tau,\ \nu)]\,x(t+\nu)\,d\nu+$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{-\tau}^{0}K(\rho,\ \sigma)\,x(t+\rho)\,x(t+\sigma)\,d\rho\,d\sigma, \tag{1.34}$$

где

$$K(\rho,\sigma)=\frac{a}{2}\begin{cases}\dfrac{\cos a(\rho-\sigma-\tau)+\sin a(\rho-\sigma)}{1+\sin a\tau} & \text{при } \sigma\leqslant\rho,\\[2ex] \dfrac{\cos a(\sigma-\rho-\tau)+\sin a(\sigma-\rho)}{1+\sin a\tau} & \text{при } \sigma\leqslant\rho.\end{cases} \tag{1.35}$$

Полученный квадратичный функционал позволяет вычислить квадратичный интегральный критерий качества переходного процесса решения уравнения (1.2).

Действительно, на основании (1.3)

$$V_{\mathrm{I}}[\varphi(\nu)]=\int\limits_{0}^{\infty}x^2(t)\,dt=\frac{1}{a^2}K(-\tau,\ -\tau)\,\varphi^2(0)+$$

$$+\frac{1}{a}\varphi(0)\int\limits_{-\tau}^{0}[K(\nu,\ -\tau)+K(-\tau,\ \nu)]\,\varphi(\nu)\,d\nu+$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{-\tau}^{0}K(\rho,\sigma)\,\varphi(\rho)\,\varphi(\sigma)\,d\rho\,d\sigma, \tag{1.36}$$

где $\varphi(\nu)$ — начальное возмущение уравнения (1.2). Равенство (1.36) позволяет также при решении некоторых технических задач выбрать номинальный режим движения и, в частности, выбрать параметр a.

Кроме того, квадратичные функционалы представляют информацию о распределении нулей соответствующих квазиполиномов относительно мнимой оси комплексного переменного. Более подробно этот вопрос рассматривается в приложении I.

2. Второй частный случай

В данном параграфе вычисляется функционал

$$V_{\mathrm{II}}=E\,x^2(t)+x(t)\int\limits_{-\tau}^{0}F(\nu)\,x(t+\nu)\,d\nu+$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{-\tau}^{0}R(\rho,\ \sigma)\,x(t+\rho)\,x(t+\sigma)\,d\rho\,d\sigma, \tag{2.1}$$

производная от которого в силу уравнения (1.2) представляет собой произведение решения на заданный линейный функционал, то есть

$$W_{II} = \frac{dV_{II}}{dt} = ax(t)\int\limits_{-\tau}^{0} C(-\tau-\nu)\,x(t+\nu)\,d\nu. \qquad (2.2)$$

В (2.2) $C(-\tau-\nu)$ — заданная функция $[-\tau\leqslant\nu\leqslant 0]$.

Пусть функция $C(-\tau-\nu)$, $[-\tau\leqslant\nu\leqslant 0]$ принадлежит пространству $C^1[-\tau, 0]$.

Тогда, в соответствии с четвертым параграфом первой главы, имеет место разложение

$$C(-\tau-\nu) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i e^{-\lambda_i(\tau+\nu)}, \qquad (2.3)$$

где p_i $(i = 1, 2, ...)$ — постоянные коэффициенты.

При этом функция

$$C(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i e^{\lambda_i t}, \quad (t>0) \qquad (2.4)$$

представляет собой решение уравнения (1.2) с начальным возмущением

$$C(\mu), \quad [-\tau\leqslant\mu\leqslant 0], \quad \mu = -\tau-\nu. \qquad (2.5)$$

В соответствии с равенством (2.3) функционал W_{II} запишем следующим образом:

$$W_{II} = ax(t)\sum_{j=1}^{\infty} p_j \int\limits_{-\tau}^{0} x(t+\nu)\,e^{-\lambda_j(\tau+\nu)}\,d\nu. \qquad (2.6)$$

На основании равенств (1.5) и (1.6) квадратичный функционал (2.6) представим в виде квадратичной формы линейных функционалов $y_k (\kappa = 1, 2, ...)$

$$W_{II} = ax(t)\sum_{j=1}^{\infty} p_j \frac{y_j - x(t)}{a} = -\sum_{j=1}^{\infty} p_j\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{y_i}{\Delta'(\lambda_i)}\right)^2 +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{y_i}{\Delta'(\lambda_i)}\right)\sum_{i=1}^{\infty} p_i y_i. \qquad (2.7)$$

Но функционал V^1_{II}, производная от которого в силу уравнения (1.2) является квадратом решения, умноженным на постоянное число

$$W^1_{II} = +\sum_{i=1}^{\infty} p_i\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{y_i}{\Delta'(\lambda_i)}\right)^2 = -C(0)\,x^2(t), \qquad (2.8)$$

известен из первого параграфа данной главы.

Поэтому для решения рассматриваемой в данном параграфе задачи достаточно найти квадратичный функционал V^2_{II}, производная от которого в силу уравнения (1.2) представима на основании (1.6), в виде следующей квадратичной формы линейных функционалов y_k ($\kappa=1, 2, \ldots$):

$$W_{\mathrm{II}}^2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{\Delta'(\lambda_i)} \right) \sum_{j=1}^{\infty} p_j y_j. \tag{2.9}$$

В силу эквивалентности системы (1.4) уравнению (1.2), на основании (2.9), искомый квадратичный функционал V_{II}^2 представляет собой следующую квадратичную форму:

$$V_{\mathrm{II}}^2 = \sum_{i,\, j=1}^{\infty} \frac{p_j y_j y_i}{\Delta'(\lambda_i)(\lambda_i + \lambda_j)}. \tag{2.10}$$

Или, в соответствии с (1.5),

$$V_{\mathrm{II}}^2 = Q(-\tau, -\tau)\, x^2(t) + a x(t) \int_{-\tau}^{0} [Q(\nu, -\tau) + Q(-\tau, -\nu)]\, x(t+\nu)\, d\nu + a^2 \int_{-\tau}^{0} \int_{-\tau}^{0} Q(\rho, \sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho\, d\sigma, \tag{2.11}$$

где

$$Q(\rho, \sigma) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j e^{-\lambda_j(\tau+\rho)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_i(\tau+\sigma)}}{\Delta'(\lambda_i)(\lambda_i + \lambda_j)}, \tag{2.12}$$

$$[-\tau \leqslant \rho, \ \sigma \leqslant 0].$$

Полагая вещественные части корней λ_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots$) квазиполинома (0.2.3) отрицательными, второй ряд справа в (2.12) представим следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_i(\tau+\sigma)}}{\Delta'(\lambda_i)(\lambda_i + \lambda_j)} = -\int_{0}^{\infty} e^{\lambda_j t}\, x_1(t - \tau - \sigma)\, dt, \tag{2.13}$$

где $x_1(t)$ — решение уравнения (1.2) с начальным возмущением (1.23).

Вводя новую переменную

$$t_1 = t - \tau - \sigma$$

и учитывая (1.23), получим

$$\int_{0}^{\infty} e^{\lambda_j t}\, x_1(t - \tau - \sigma)\, dt = e^{\lambda_j(\tau+\sigma)} \int_{0}^{\infty} e^{\lambda_j t}\, x_1(t)\, dt. \tag{2.14}$$

Из равенства (2.13) при $\sigma = -\tau$ следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta'(\lambda_i)(\lambda_i + \lambda_j)} = -\int_{0}^{\infty} e^{\lambda_j t}\, x_1(t)\, dt. \tag{2.15}$$

Но тогда из равенств (1.15), (2.12) — (2.15) получим

$$Q(\rho, \sigma) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \frac{e^{\lambda_j(\sigma-\rho)}}{\lambda_j + ae^{\lambda_j \tau}}, \tag{2.16}$$

$$[-\tau \leqslant \rho, \sigma \leqslant 0].$$

Из равенств (1.16) и (2.16) следует

$$Q(\rho, \sigma) = -\int_0^{\infty} \cos at \left[\sum_{j=1}^{\infty} p_j e^{\lambda_j(t+\sigma-\rho)}\right] dt, \tag{2.17}$$

$$[-\tau \leqslant \rho, \sigma \leqslant 0].$$

Полагая в равенстве (2.17) $t+\sigma-\rho = t_1$ и опуская затем индекс, на основании разложения (2.4) получим

$$Q(\rho, \sigma) = -\int_{\sigma-\rho}^{\infty} \cos a(t+\rho-\sigma)\, C(t)\, dt, \tag{2.18}$$

$$[-\tau \leqslant \rho, \sigma \leqslant 0],$$

где $C(t)$ — решение уравнения (1.2) с начальным возмущением (2.5).

Равенство (2.18) можно записать следующим образом:

$$Q(\rho, \sigma) = \sin(\rho-\sigma)\, a \int_0^{\infty} \sin at\, C(t)\, dt -$$

$$- \cos(\rho-\sigma)\, a \int_0^{\infty} \cos at\, C(t)\, dt +$$

$$+ \int_0^{\infty} \cos a(t+\rho-\sigma)\, C(t)\, dt. \tag{2.19}$$

В равенстве (2.19) интеграл

$$\int_{\sigma-\rho}^{0} \cos a(t+\rho-\sigma)\, C(t)\, dt \tag{2.20}$$

определен начальным возмущением (2.5). Заметим, что при $\sigma-\rho>0$, $[-\tau \leqslant \rho, \sigma \leqslant 0]$ в интеграле (2.20) $C(t)$ находятся методом последовательного интегрирования. Далее, из четвертого параграфа введения следует, что:

$$\int_0^{\infty} \cos at\, C(t)\, dt = \frac{L(ia) + L(-ia)}{2}, \tag{2.21}$$

$$\int_0^{\infty} \sin at\, C(t)\, dt = \frac{L(ia) - L(-ia)}{2i}. \tag{2.22}$$

Но тогда на основании (2.19) и (2.11) определен квадратичный функционал V_{11}^2 и, следовательно, квадратичный функционал V_{11}.

Пример. Вычислим интеграл

$$I[x^\circ] = a\int_0^\infty \left[x_1(t) \int_{-\tau}^{0} x_1(t+\nu)\, d\nu \right] dt, \tag{2.23}$$

где $x_1(t)$ — решение уравнения (1.2) с начальным возмущением (1.23).

Интегрируя равенство

$$\frac{dV}{dt} = W,$$

получим

$$I[x^\circ] = -V_{\text{II}}[x^\circ] = -V_{\text{II}}^1[x^\circ] - V_{\text{II}}^2[x^\circ]. \tag{2.24}$$

В соответствии с параграфом 2.1

$$V_{\text{II}}^1[x^\circ] = \frac{\cos a\tau}{2a(1+\sin a\tau)}. \tag{2.25}$$

На основании равенства (2.18)

$$V_{\text{II}}^2[x^\circ] = -Q(-,\tau-\tau) = \int_0^\infty \cos at\, C(t)\, dt, \tag{2.26}$$

где $C(t)$ — решение уравнения (1.2) с начальным возмущением

$$C(\mu) = 1, \quad [-\tau \leqslant \mu \leqslant 0]. \tag{2.27}$$

Интегрируя уравнение (1.2) с начальным возмущением (2.27), получим

$$\int_0^\infty \cos at\, C(t)\, dt = \frac{L(ia) + L(-ia)}{2},$$

где

$$L(ia) = -\frac{1 + ae^{ia\tau}\int_{-\tau}^{0} e^{iat}\, dt}{ia + ae^{ia\tau}}.$$

Или

$$\int_0^\infty \cos at\, C(t)\, dt = -\frac{1}{2a}.$$

Но тогда из равенств (2.24), (2.25) и (2.26) следует, что

$$I[x^\circ] = \frac{\cos a\tau}{2a(1+\sin a\tau)} - \frac{1}{2a}.$$

3. Третий частный случай

В параграфе рассматривается задача о вычислении квадратичного функционала в том случае, когда производная от искомого функционала в силу уравнения с запаздыванием времени содержит кратный интеграл, а именно, требуется найти функционал

$$V_{\text{III}} = Dx^2(t) + x(t)\int_{-\tau}^{0} N(\nu)\, x(t+\nu)\, d\nu +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} M(\rho, \sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho\, d\sigma, \tag{3.1}$$

производная от которого в силу уравнения (1.2) является заданным функционалом вида

$$W_{\text{III}} = K(0, 0)\, x^2(t) + \alpha x(t)\int_{-\tau}^{0} [K(-\tau-\nu, 0) +$$

$$+ K(0, -\tau-\nu)]\, x(t+\nu)\, d\nu +$$

$$+ a^2 \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} K(-\tau-\rho, -\tau-\sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho\, d\sigma. \tag{3.2}$$

Воспользуемся разложением (1.4.11), тогда кратный интеграл функционала (3.2) может быть записан следующим образом:

$$a^2 \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} K(-\tau-\rho, -\tau-\sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho\, d\sigma =$$

$$= a^2 \sum_{j, k=1}^{\infty} d_{jk} \int_{-\tau}^{0} x(t+\rho)\, e^{-\lambda_j(\tau+\rho)}\, d\rho \int_{-\tau}^{0} x(t+\sigma)\, e^{-\lambda_k(\tau+\sigma)}\, d\sigma. \tag{3.3}$$

Но, в соответствии с (1.5),

$$\int_{-\tau}^{0} x(t+\mu)\, e^{-\lambda_k(\tau+\mu)}\, d\mu = \frac{y_k - x(t)}{a},$$

и, следовательно,

$$a^2 \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} K(-\tau-\rho, -\tau-\sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho\, d\sigma =$$

$$= \sum_{j, k=1}^{\infty} d_{jk}\, y_j y_k - x(t) \sum_{j, k=1}^{\infty} d_{jk}(y_j + y_k) + x^2(t) \sum_{j, k=1}^{\infty} d_{jk}. \tag{3.4}$$

На основании разложения (1.4.11) второе и третье слагаемые справа в (3.4) могут быть записаны следующим образом:

$$x^2(t) \sum_{j, k=1}^{\infty} d_{jk} = K(0, 0)\, x^2(t),$$

$$x(t) \sum_{j, k=1}^{\infty} d_{jk}(y_j + y_k) = 2K(0, 0)\, x^2(t) +$$

$$+ ax(t) \int_{-\tau}^{0} [K(-\tau-\nu, 0) + K(0, -\tau-\nu)]\, x(t+\nu)\, d\nu. \tag{3.5}$$

Но тогда из равенства (3.2), (3.4) и (3.5) следует, что

$$W_{\text{III}} = \sum_{j, k=1}^{\infty} d_{jk}\, y_j y_k. \tag{3.6}$$

Искомый квадратичный функционал V_{III} в силу (1.6) также может быть представлен в виде квадратичной формы линейных функционалов $y_к$ ($к = 1, 2, ...$).

Из (1.4) и (3.6) находим

$$V_{III} = \sum_{j,\,k=1}^{\infty} d_{jk} \frac{y_j\, y_k}{\lambda_j + \lambda_k}. \tag{3.7}$$

Подставляя в (3.7) аналитическое выражение линейных функционалов $y_к$ ($к = 1, 2, ...$) в соответствии с равенством (1.5), искомый квадратичный функционал V_{III} представим в виде

$$V_{III} = F(0,\ 0)\, x^2(t) + ax(t) \int_{-\tau}^{0} [F(-\tau-\nu,\ 0) + F(0,\ -\tau-\nu)]\, x(t+\nu)\, d\nu + a^2 \int_{-\tau}^{0} \int_{-\tau}^{0} F(-\tau-\rho,\ -\tau-\sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho\, d\sigma, \tag{3.8}$$

где

$$F(-\tau-\rho,\ -\tau-\sigma) = \sum_{j,\,k=1}^{\infty} d_{jk} \frac{e^{-\lambda_j(\tau+\rho)}\ e^{-\lambda_k(\tau+\sigma)}}{\lambda_j + \lambda_k}. \tag{3.9}$$

Из равенства (3.8) следует, что аналитическое выражение функционала V_{III} будет определено, если будет определено аналитическое выражение функции

$$F(-\tau-\rho,\ -\tau-\sigma),\ [-\tau \leqslant \rho,\ \sigma \leqslant 0].$$

Полагая вещественные части корней $\lambda_к$ ($к = 1, 2, ...$) квазиполинома (0.2.3) отрицательными, на основании разложения (1.4.11) искомую функцию $F(-\tau-\rho,\ -\tau-\sigma)$ в силу (3.9) представим в виде

$$F(-\tau-\rho,\ -\tau-\sigma) = -\int_{0}^{\infty} K(t-\tau-\rho,\ t-\tau-\sigma)\, dt, \tag{3.10}$$

или

$$F(\mu,\ \eta) = -\int_{0}^{\infty} K(t+\mu,\ t+\eta)\, dt, \tag{3.11}$$

где

$$\begin{gathered} -\tau-\rho = \mu, \quad -\tau-\sigma = \eta, \\ [-\tau \leqslant \rho,\ \sigma,\ \mu,\ \eta \leqslant 0]. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Поясним содержание равенства (3.11) на следующем частном случае:

$$K_j(\mu,\ \eta) = f_j(\mu)\, g_j(\eta). \tag{3.13}$$

Тогда, в соответствии с (3.10), искомая функция

$$F_j(\mu,\ \eta),\quad [-\tau \leqslant \mu,\ \eta \leqslant 0]$$

может быть представлена следующим образом:

$$F_j(\mu, \eta) = -\int_0^\infty f_j(t+\mu)\, g_j(t+\eta)\, dt, \tag{3.14}$$

где, в силу разложения (1.6), функции $f_j(t)$, $q_j(t)$ представляют собой решения уравнения (1.2) с начальными возмущениями

$$f_j(\mu),\ g_j(\eta),\ [-\tau \leqslant \mu,\ \eta \leqslant 0]. \tag{3.15}$$

Вычислим интеграл в (3.11)

$$I = \int_0^\infty K(t+\mu,\ t+\eta)\, dt.$$

В соответствии с разложением (1.4.9)

$$I = \sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty \left[e^{\lambda_j(\tau+\mu)} \frac{p_j(t+\eta)}{\Delta'(\lambda_j)} \right] dt, \tag{3.16}$$

где функции $p_j(t+\eta)$ находятся на основании равенства (1.4.10).

Рассмотрим j-ое слагаемое интеграла I.

$$I_j = \frac{1}{\Delta'(\lambda_j)} \int_0^\infty e^{\lambda_j(t+\mu)}\, p_j(t+\eta)\, dt. \tag{3.17}$$

Пусть $\eta = \mu$.

Вводя новую переменную $t_1 = t + \eta$ и опуская затем индекс, функционал I_j запишем в виде суммы

$$I_j = I_j^1 + I_j^2, \tag{3.18}$$

где

$$I_j^1 = \frac{e^{\lambda_j(\mu-\eta)}}{\Delta'(\lambda_j)} \int_\eta^0 e^{\lambda_j t}\, p_j(t)\, dt, \tag{3.19}$$

$$I_j^2 = \frac{e^{\lambda_j(\mu-\eta)}}{\Delta'(\lambda_j)} \int_0^\infty e^{\lambda_j t}\, p_j(t)\, dt. \tag{3.20}$$

Так как $\mu \leqslant \eta$, то функционал I_j^1 определен начальным возмущением

$$K(\mu, \eta),\ [-\tau \leqslant \mu,\ \eta \leqslant 0]$$

в соответствии с равенством (1.4.10).

Используя равенство (0.4.10), получим

$$I_j^2 = -\frac{e^{\lambda_j(\mu-\eta)}}{\Delta'(\lambda_j)} \frac{p_j(0) + ae^{\lambda_j\tau} \int_{-\tau}^0 p_j(\nu)\, e^{\lambda_j(\nu)}\, d\nu}{\lambda_j + ae^{\lambda_j\tau}}. \tag{3.21}$$

Далее, так как имеет место равенство (1.16)

$$\frac{1}{\lambda_k + ae^{\lambda_k\tau}} = \frac{1}{2(\lambda_k + ia)} + \frac{1}{2(\lambda_k - ia)}, \tag{3.22}$$

то из (3.21) следует, что

$$I_j^2 = -\frac{p_j(0)}{2}\left[\frac{e^{\lambda_j(\mu-\eta)}}{\Delta'(\lambda_j)(\lambda_j+ia)} + \frac{e^{\lambda_j(\mu-\eta)}}{\Delta'(\lambda_j)(\lambda_j-ia)}\right] -$$

$$-\frac{a}{2}\int_{-\tau}^{0} p_j(\nu)\left[\frac{e^{\lambda_j(\tau+\nu+\mu-\eta)}}{\Delta'(\lambda_j)(\lambda_j+ia)} + \frac{e^{\lambda_j(\tau+\nu+\mu-\eta)}}{\Delta'(\lambda_j)(\lambda_j-ia)}\right] d\nu. \tag{3.23}$$

Суммируя в равенствах (3.19) и (3.23) по индексу j, получим

$$I^1 = \sum_{j=1}^{\infty} I_j^1 = \int_{\eta}^{0} K(\nu+\mu-\eta,\ \nu)\,d\nu, \tag{3.24}$$

$$I^2 = \sum_{j=1}^{\infty} I_j^2 = Q(\mu-\eta,\ 0) +$$

$$+a\int_{-\tau}^{0} Q(\tau+\nu+\mu-\eta,\ \nu)\,d\nu, \tag{3.25}$$

где

$$Q(\tau+\nu+\mu-\eta,\ \nu) = \int_{0}^{\infty} \cos at\, K(t+\tau+\nu+\mu-\eta,\ \nu)\,dt. \tag{3.26}$$

Вычисление интеграла (3.26) производится при помощи равенства (0.4.10).

На основании равенств (3.24), (3.25) и (3.26) находится значение функционала I и, следовательно, в силу равенства (3.11) аналитическое выражение искомой функции $F(\mu,\ \eta)$, определяющей функционал V_{III}.

При $\mu \geqslant \eta$ получим аналогично

$$I = -F(\mu,\ \eta) = \int_{\mu}^{0} K(\nu,\ \nu+\eta-\mu)\,d\nu +$$

$$+\int_{0}^{\infty} \cos at\, K(0,\ t+\eta-\mu)\,dt +$$

$$+a\int_{-\tau}^{0}\int_{0}^{\infty} \cos at\, K(\nu,\ t+\tau+\nu+\eta-\mu)\,dt\,d\nu. \tag{3.27}$$

Пример. Пусть требуется вычислить интеграл

$$I[x] = \int_{0}^{\infty}\left| f(0)\,x_1(t) + a\int_{-\tau}^{0} f(-\tau-\nu)\,x_1(t+\nu)\,d\nu\right|^2 dt, \tag{3.28}$$

где $x_1(t)$ — решение уравнения (1.2) с начальным возмущением

$$x_1^0(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\tau\leqslant\nu<0, \\ 1 & \text{при } \nu=0, \end{cases} \tag{3.29}$$

$f(-\tau-\nu)$ — заданная на отрезке $[-\tau\leqslant\nu\leqslant 0]$ функция.

В соответствии с равенством (3.2)

$$I[x^0] = -\frac{1}{a^2} F(-\tau, -\tau), \tag{3.30}$$

или в силу (3. 10)

$$I[x^0] = \int_0^\infty f^2(t)\, dt, \tag{3.31}$$

где $f(t)$ — решение уравнения (1. 2) с начальным возмущением

$$f(\mu), \quad [-\tau \leqslant \mu \leqslant 0], \quad \mu = -\tau - \nu.$$

В соответствии с первым параграфом данной главы значение интеграла (3. 31) известно. А именно:

$$\int_0^\infty f^2(t)\, dt = -\frac{\cos a\tau}{2a(1+\sin a\tau)} f^2(0) -$$

$$-f(0) \int_{-\tau}^{0} f(\mu) \left[\frac{\cos a\mu + \sin a(\tau+\mu)}{1+\sin a\tau}\right] d\mu -$$

$$-\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} D(\mu, \eta) f(\mu) f(\eta)\, d\mu\, d\eta, \tag{3.32}$$

где

$$D(\mu, \eta) = \begin{cases} \dfrac{\cos a(\mu-\eta-\tau) + \sin a(\mu-\eta)}{1+\sin a\tau}, & \text{при } \eta \leqslant \mu, \\ \dfrac{\cos a(\eta-\mu-\tau) + \sin a(\eta-\mu)}{1+\sin a\tau}, & \text{при } \mu \leqslant \eta. \end{cases} \tag{3.33}$$

4. Построение квадратичных функционалов для систем с запаздыванием времени

Метод вычисления квадратичных функционалов, изложенный в предыдущих параграфах главы для уравнения с запаздыванием времени (1. 2), естественным путем можно распространить на системы дифференциальных уравнений с запаздыванием времени. В данном параграфе, в частности, дано решение задачи, аналогичной рассматриваемой в первом параграфе, в том случае, когда правые части системы дифференциальных уравнений содержат лишь слагаемые с запаздыванием времени.

Пусть движение некоторой системы описывается уравнениями

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = b_{s1}\, x_1(t-\tau) + \ldots + b_{sn}\, x_n(t-\tau), \tag{4.1}$$

$$(S = 1, 2, \ldots, n),$$

где b_{sj} $(s, j = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные коэффициенты.

τ — запаздывание времени ($\tau = \text{Const} > 0$).

Предположим, что корни μ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ характеристического полинома

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} b_{11}-\mu, & b_{12}, & \ldots, & b_{1n} \\ b_{21}, & b_{22}-\mu, & \ldots, & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots, & \cdot \\ b_{n1}, & b_{n2}, & \ldots, & b_{nn}-\mu \end{vmatrix} = 0 \tag{4.2}$$

отличны от нуля, простые и вещественные.

Перейдем к новым переменным $y_к(t)$ $(к = 1, 2, \ldots, n)$ при помощи подстановки

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{H_s(\mu_k)}{\Delta'(\mu_k)}\, y_k(t), \tag{4.3}$$

где $\Delta'^1(\mu_к)$ — производная от определителя (4. 2) по μ при $\mu = \mu_к$, а H_s, (μ_k) — определитель (4. 2) у которого s-ый столбец заменен числами h_i,

$$\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \neq 0.$$

Тогда система (4. 1) в новых переменных $y_к(t)$ запишется следующим образом:

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = \mu_k y_k(t-\tau), \ (k = 1, \ 2, \ \ldots, \ n). \tag{4.4}$$

Обозначим через

$$x_s(\nu) = \psi_s(\nu), \quad [-\tau \leqslant \nu \leqslant 0] \tag{4.5}$$

начальные возмущения системы (4. 1).

Пусть требуется вычислить функционал

$$I[\psi(\nu)] = \int_0^\infty x_1^2(t)\, dt, \ \psi(\nu) = \{\psi_s(\nu)\}. \tag{4.6}$$

При вычислении функционала (4. 6) предполагаем, что решения системы (4. 1) асимптотически устойчивы.

Вычисление функционала (4. 6) будет произведено, если будет вычислен функционал $V[\psi(\nu)]$, $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$, производная от которого по времени, взятая в силу уравнений (4. 4), является квадратом решения, то есть

$$W = \frac{dV}{dt} = x_1^2(t). \tag{4.7}$$

На основании (4. 3)

$$\int_0^\infty x_1^2(t)\, dt = \sum_{i,\, j=1}^{n} c_{ij} \int_0^\infty y_i(t)\, y_j(t)\, dt. \tag{4,8}$$

В силу преобразования (4. 3), постоянные c_{ij}, $(i, = 1,2,\ldots,n)$ и начальные возмущения

$$y_k^0 = \varphi_k(\nu), \quad [-\tau \leqslant \nu \leqslant 0] \tag{4.9}$$

системы (4. 4), при известных возмущениях (4. 5) системы (4. 1), определены.

Но тогда для определения функционала (4.7) достаточно определить функционал

$$I_{jk}=\int_0^\infty y_j(t)\, y_k(t)\, dt, \tag{4.10}$$

$$[j,\ \kappa = 1,2,...,n]$$

В соответствии с разложением (1. 6) функционал

$$I_{jk}[\varphi_j(\nu),\ \varphi_k(\nu)],\quad [-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$$

представим следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{jk} &= K(-\tau,\ -\tau)\,\varphi_j(0)\,\varphi_k(0) + \\ &+ \varphi_j(0)\,\mu_\kappa \int_{-\tau}^{0} K(-\tau,\ \nu)\,\varphi_k(\nu)\,d\nu + \\ &+ \varphi_k(0)\,\mu_j \int_{-\tau}^{0} K(\nu,\ -\tau)\,\varphi_j(\nu)\,d\nu + \\ &+ \mu_j\mu_k \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} K(\rho,\ \sigma)\,\varphi_j(\rho)\,\varphi_k(\sigma)\,d\rho\,d\sigma, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где

$$K(\rho,\ \sigma) = \int_0^\infty \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{\infty} \frac{e^{(\lambda_{j\alpha}+\lambda_{k\beta})t}\, e^{-\lambda_{j\alpha}(\tau+\rho)}\, e^{-\lambda_{k\beta}(\tau+\sigma)}}{\Delta_j'(\lambda_{j\alpha})\,\Delta_\kappa(\lambda_{k\beta})}\, dt. \tag{4.12}$$

В равенстве (4. 12) $\lambda_{j\alpha}$ и $\lambda_{\kappa\beta}$ корни квазиполиномов

$$\begin{aligned} \Delta_j(\lambda_j) &= \lambda_j - \mu_j\, e^{-\lambda_j\tau} = 0, \\ \Delta_k(\lambda_k) &= \lambda_k - \mu_k\, e^{-\lambda_k\tau} = 0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

а $\Delta_j'(\lambda_{j\alpha})$ и $\Delta_k'(\lambda_{k\beta})$ суть

$$\begin{aligned} \Delta_j'(\lambda_{j\alpha}) &= 1 + \lambda_{j\alpha}\tau, \\ \Delta_k'(\lambda_{k\beta}) &= 1 + \lambda_{k\beta}\tau. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Найдем функцию

$$K(\rho,\ \sigma),\quad [-\tau \leqslant \rho,\ \sigma \leqslant 0].$$

Из равенства (4. 12) следует, что

$$K(\rho,\ \sigma) = \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_{k\beta}(\tau+\sigma)}}{\Delta_k'(\lambda_{k\beta})} \int_0^\infty e^{\lambda_{k\beta}t} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_{j\alpha}(t-\tau-\rho)}}{\Delta_j'(\lambda_{j\alpha})}\, dt. \tag{4.15}$$

Но ряд под знаком интеграла в (4. 15) представляет собой решение уравнения

$$\frac{dy_j(t)}{dt} = \mu_j y_j(t-\tau) \tag{4.16}$$

с начальным возмущением

$$y_j^0(\mu) = \varphi_j^*(\mu) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\tau \leqslant \mu < 0, \\ 1 \text{ при } \mu = 0, \end{cases} \tag{4.17}$$

где

$$\mu = -\tau - \rho, \quad [-\tau \leqslant \mu, \ \rho \leqslant 0].$$

Используя равенства (0. 4. 10) и (1. 15), из равенства (4. 15) находим

$$K(\rho, \sigma) = -\sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_{k\beta}(\tau+\sigma)}}{\Delta_k'(\lambda_{k\beta})} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_j'(\lambda_{j\alpha})(\lambda_{k\beta}+\tau+\rho+\lambda_{j\alpha})}. \tag{4.18}$$

Или, полагая вещественные части корней отрицательными,

$$K(\rho, \sigma) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_j'(\lambda_{j\alpha})} \int_0^{\infty} e^{\lambda_{j\alpha} t} \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_{k\beta}(t+\rho-\sigma)}}{\Delta_k'(\lambda_{k\beta})}\, dt. \tag{4.19}$$

В равенстве (4. 19) ряд под знаком интеграла также представляет собой решение уравнения

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = \mu_k y_k(t-\tau) \tag{4.20}$$

с начальным возмущением

$$y_k^0(\nu) = \varphi_k^*(\nu) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\tau \leqslant \eta < 0, \\ 1 \text{ при } \quad \eta = 0, \end{cases} \tag{4.21}$$

где $\eta = \rho - \sigma$ при $\rho \leqslant \sigma$, так как $[-\tau \leqslant \eta \leqslant 0]$.

Но тогда, воспользовавшись снова равенствами (0. 4. 10) и (1. 15), при $\rho \leqslant \sigma$ получим

$$K(\rho, \sigma) = -\frac{\cos\sqrt{\mu_j\mu_k}(\sigma-\rho-\tau) + \sqrt{\frac{\mu_j}{\mu_k}} \sin\sqrt{\mu_j\mu_k}(\sigma-\rho)}{\mu_j + \mu_k - 2\sqrt{\mu_j\mu_k}\sin\sqrt{\mu_j\mu_k}\,\tau}. \tag{4.22}$$

Аналогично, меняя порядок суммирования в равенстве (4. 15), при $\sigma \leqslant \rho$ получим

$$K(\rho, \sigma) = -\frac{\cos\sqrt{\mu_j\mu_k}(\rho-\sigma-\tau) + \sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_j}} \sin\sqrt{\mu_j\mu_k}(\rho-\sigma)}{\mu_j + \mu_k + 2\sqrt{\mu_j\mu_k}\sin\sqrt{\mu_j\mu_k}\,\tau}. \tag{4.23}$$

В силу равенств (4. 22) и (4. 23) определена функция $K(\rho, \sigma)$. $[-\tau \leqslant \rho, \sigma \leqslant 0]$ и, следовательно, искомый функционал (4. 11).

Полученные равенства (4. 22) и (4. 23) обобщают соответствующие равенства первого параграфа. Подобное обобщение легко проводится также для результатов второго и третьего параграфов.

Глава III

ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

В главе рассматривается задача аналитического конструирования регулятора для систем с запаздыванием времени, состоящая в следующем.

Пусть движение некоторой системы автоматического регулирования описывается уравнениями

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} [a_{sj} x_j(t) + b_{sj} x_j(t-\tau)] + m_s \xi, \tag{0.1}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

где a_{sj}, b_{sj}, m_s $(s, j = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные, τ — запаздывание ($\tau = \text{Const} > 0$), ξ — неизвестное воздействие регулятора.

Пусть задан критерий оптимальности переходного процесса в виде

$$I(\xi) = \int_0^\infty \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^2(t) + c\xi^2 \right] dt, \tag{0.2}$$

α_j, c, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные.

В равенстве (0.2) подинтегральная функция знакоопределенная.

Задача, рассматриваемая в данной главе, состоит в том, чтобы найти такое управление $\xi = \xi^*$, при котором система (0.1) становится асимптотически устойчивой, а интеграл (0.2) принимает наименьшее значение. Будем предполагать, что допустимыми уравнениями, из которых выбирается оптимальное ξ^*, является множество функционалов, определенных на непрерывных кривых $x_s(t)$, $t > 0$, $s = 1, 2, \ldots, n$ и удовлетворяющих условиям Коши-Липшица

$$\| \xi [x'(t+\nu)] - \xi [x(t+\nu)] \|^{(\tau)} \leqslant L_\xi \| x'(t+\nu) - x(t+\nu) \|^{(\tau)},$$

где $x(t+\nu) = \{ x_s(t+\nu) \}$, а норма определена равенством

$$\| x(t+\nu) \|^{(\tau)} = \sup [x(t+\nu)], \quad [-\tau \leqslant \nu \leqslant 0].$$

Н. Н. Красовский показал [7], что если система (0. 1) стабилизируемая [11], то искомое управление ξ^* существует и имеет вид

$$\xi^* = \sum_{s=1}^{n} \left[\beta_s x_s(t) + \int_{-\tau}^{0} \sigma_s(\nu)\, x(t+\nu)\, d\nu \right], \tag{0.3}$$

где β_s — постоянные,, $\sigma_s(\nu)$ — некоторые функции, $(s=1, 2,..., n)$. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений задача вида (0. 1) — (0. 3) носит название задачи А. М. Летова [16].

В главе подробно рассмотрена задача аналитического конструирования регулятора или задача оптимальной стабилизации для уравнения с запаздыванием времени

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t-\tau) + \xi. \tag{0.4}$$

При этом управление ξ ищется из условия минимума интеграла

$$I(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^2(t) + \xi^2]\, dt. \tag{0.5}$$

При решении указанных задач возникают технические трудности. В связи с этим в главе развивается приближенный метод решения задач.

Изложение в основном ведется по работам [24], [25] и [26], выполненным совместно с С. Н. Шимановым.

Задача (0. 1), (0. 2) допускает обобщение. Например, квадратичный интегральный критерий качества переходного процесса для системы (0. 1) может быть записан в виде

$$I(\xi) = \int_0^\infty \left[\sum_{i,\, j=1}^{n} \alpha_{ij} u_i u_j + c\,\xi^2 \right] dt, \tag{0.6}$$

где

$\alpha_{ij} u_i u_j$ — квадратичная знакоопределенная форма линейных функционалов u_κ $(\kappa = 1,2,..., n)$,

$$u_k(t) = \alpha_k x_k(t) + \int_{-\tau}^{0} \beta_k(\nu)\, x_k(t+\nu)\, d\nu. \tag{0.7}$$

В равенстве (0.7) α_k — постоянные, $\beta_k(\nu)$ — некоторые функции.

1. Некоторые замечания

Пусть движение некоторой системы автоматического регулирования описывается уравнением (0. 4)

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t-\tau) + \xi, \tag{1.1}$$

где a, τ $(\tau = \text{Const} > 0)$ — постоянные,
ξ — воздействие регулятора. Предположим также, что управление $\xi[x(\nu)]$ ищется из условия минимума интеграла (0. 5).

$$I(\xi)=\frac{1}{2}\int_0^\infty [x^2(t)+\xi^2]\,dt. \tag{1.2}$$

В соответствии с расщеплением функционального пространства, изложенному в первой главе, уравнению (1.1) может быть сопоставлена следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i(t)}{dt}=\lambda_i y_i(t)+\xi, \quad (i=1,\ 2,\ \ldots), \tag{1.3}$$

где $y_i(t)$, $(i=1,2,\ldots,)$ — линейные функционалы

$$y_i(t)=x(t)+a\int_{-\tau}^{0} x(t+\nu)\,e^{-\lambda_i(\tau+\nu)}\,d\nu. \tag{1.4}$$

При этом координата $x(t)$ может быть представлена в виде ряда

$$x(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{y_i(t)}{\Delta'(\lambda_i)}. \tag{1.5}$$

Рассмотрим задачу А. М. Летова для усеченной по отношению к (1. 3) системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i(t)}{dt}=\lambda_i y_i(t)+\xi_N, \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{1.6}$$

Пусть управление ξ_N системы (1. 6) ищется из условия минимума усеченного интеграла (1. 2)

$$I(\xi_N)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i(t)}{\Delta'(\lambda_i)}\right)^2+\xi_N^2\right]dt. \tag{1.7}$$

Составим функцию

$$H=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i(t)}{\Delta'(\lambda_i)}\right)^2+\frac{1}{2}\,\xi_N^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{N} z_i(\dot{y}_i-\lambda_i y_i-\xi_N), \tag{1.8}$$

тогда, в соответствии с вариационным методом решения задачи, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{dy_i(t)}{dt}=\lambda_i y_i(t)+\sum_{j=1}^{N} z_j(t),$$
$$\frac{dz_j(t)}{dt}=\frac{1}{\Delta'(\lambda_j)}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i(t)}{\Delta'(\lambda_i)}\right)-\lambda_j z_j(t), \tag{1.9}$$
$$(i,\ j=1,\ 2,\ldots,\ N).$$

Характеристический определитель системы (1. 9) может быть записан в виде

$$\Delta_1(\mu)=\begin{vmatrix} \lambda_1-\mu, & 0, & \dots, & 0, & \frac{1}{\Delta'(\lambda_1)}, & \frac{1}{\Delta'(\lambda_2)}, & \dots, & \frac{1}{\Delta'(\lambda_N)} \\ -(\lambda_1-\mu), & \lambda_2-\mu, & \dots, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -(\lambda_1-\mu), & 0, & \dots, & \lambda_N-\mu, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ \frac{1}{\Delta'(\lambda_1)}, & \frac{1}{\Delta'(\lambda_2)}, & \dots, & \frac{1}{\Delta'(\lambda_N)}, & -(\lambda_1+\mu), & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & (\lambda_1+\mu), & -(\lambda_2+\mu) & \dots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots, & \cdot & \cdot & \cdot & \dots, & \cdot \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & (\lambda_1+\mu), & 0, & \dots, & -(\lambda_N+\mu) \end{vmatrix} \quad (1.10)$$

Раскрывая определитель (1. 10) по элементам первой строки и сокращая на множитель

$$\prod_{i=1}^{N}(\lambda_i^2-\mu^2),$$

получим

$$\Delta_2(\mu)=1+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Delta'(\lambda_i)(\lambda_i-\mu)}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\Delta'(\lambda_j)(\lambda_j+\mu)}. \quad (1.11)$$

Оптимальное управление задачи А. М. Летова имеет вид

$$\xi_N^{*}=\sum_{i=1}^{N}p_i\,y_i(t), \quad (1.12)$$

где p_i — постоянные коэффициенты,

$y_i(t)$ — линейные функционалы (1. 4).

Так как управление (1. 12) обеспечивает асимптотическую устойчивость решениям системы (1. 6), то корни полинома (1. 11) с $\mathrm{Re}\,\mu_j<0$, $(j=1,2,\dots,N)$ являются корнями определителя

$$\Delta_3(\mu)=\begin{vmatrix} \lambda_1+p_1-\mu, & p_2, & \dots, & p_N \\ p_1, & \lambda_2+p_2-\mu, & \dots, & p_N \\ \cdot & \cdot & \dots, & \cdot \\ p_1, & p_2, & \dots, & \lambda_N+p_N-\mu \end{vmatrix}=0. \quad (1.13)$$

Или

$$\prod_{i=1}^{N}(\lambda_i-\mu)+\sum_{i=1}^{N}p_i\prod_{j=1}^{N\,|}(\lambda_j-\mu)=0. \quad (1.14)$$

Символ (I) означает, что в произведении П отсутствует сомножитель с номером $i=j$. Пусть в (1. 11) $N\to\infty$. Так как корни квазиполинома (0. 2. 3) простые, то (2. 1. 14)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta'(\lambda_i)(\lambda_i-\mu)}=-\frac{1}{\mu-ae^{-\mu\tau}} \quad (1.15)$$

и, следовательно, получим характеристический квазиполином

$$\Delta_4(\mu) = 1 + (\mu - ae^{-\mu\tau})(-\mu - ae^{\mu\tau}) = 0. \qquad (1.16)$$

Равенство (1. 16) запишем в виде

$$\mu - ae^{-\mu\tau} = \frac{1}{\mu + ae^{\mu\tau}}. \qquad (1.17)$$

Если $\mathrm{Re}\mu$ отрицательно и достаточно мало, а это возможно в силу (0. 2. 9), то величина справа в (1. 17) будет по модулю меньше любого наперед заданного числа.

Вследствие этого асимптотические корни с $\mathrm{Re}\mu < 0$ уравнения (1. 16) сколь угодно близки, начиная с некоторого достаточно большого номера, к асимптотическим корням квазиполинома (0. 2. 3). Поэтому, при достаточно больших номерах k и N, корни полинома (1. 13) могут быть представлены в виде

$$\mu_k = \lambda_k + \Theta_1 (\mathrm{Re}\,\lambda_{k+2} - \mathrm{Re}\,\lambda_k) + \Theta_2 (\mathrm{Im}\,\lambda_{k+2} - \mathrm{Im}\,\lambda_k)\, i, \qquad (1.18)$$

где

$$|\Theta_j| \leqslant \frac{1}{2}, \ (j = 1,\ 2),\ i = \sqrt{-1}.$$

2. Основные неравенства

Из соотношения (1. 11) имеем

$$-|\lambda_n - \mu_n|\, n^{\frac{s}{2}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{|\lambda_n - \mu_n|\, n^{\frac{s}{2}}}{\Delta'(\lambda_i)(\lambda_i - \mu_u)} \sum_{j=1}^{N} \frac{n^{\frac{s}{2}}}{\Delta(\lambda_j)(\lambda_j + \mu_n)}. \qquad (2.1)$$

Покажем, что сумма

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{|\lambda_n - \mu_n|\, n^{\frac{s}{2}}}{\Delta'(\lambda_k)(\lambda_k - \mu_n)} \qquad (2.2)$$

ограничена при любом сколь угодно большом $n (n \leqslant N)$ и $s < 2$ некоторым конечным числом d_1, не зависящим от выбора N. Действительно,

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\Delta'(\lambda_k)} \frac{|\lambda_n - \mu_n|\, n^{\frac{s}{2}}}{\lambda_k - \mu_n}\right| < \sum_{k=1}^{n-1} \left|\frac{1}{\Delta'(\lambda_k)}\right| \frac{|\lambda_n - \mu_n|\, n^{\frac{s}{2}}}{|\lambda_k - \mu_n|} +$$

$$+ 2\left|\frac{n^{\frac{s}{2}}}{\Delta'(\lambda_n)}\right| + \sum_{k=n+1}^{N} \left|\frac{1}{\Delta'(\lambda_k)}\right| \frac{|\lambda_n - \mu_n|\, n^{\frac{s}{2}}}{|\lambda_k - \mu_u|}, \qquad (2.3)$$

где, в соответствии с (0. 2. 9), $\overline{\lambda_k}$ сопряженный с λ_k корень квазиполинома (0. 2. 3.).

В силу равенства (0. 2. 9.) второе слагаемое в правой части (2.3) конечно при любом n $(n \leqslant N)$.

Это следует из того, что при достаточно большом n

$$|\Delta'(\lambda_n)| = |1 + \lambda_n \tau| \geqslant n. \tag{2.4}$$

Далее, из равенства (1.18) следует, что модуль $|\lambda_n - \mu_n|$ ограничен при любом n, то есть

$$|\lambda_n - \mu_n| < \gamma, \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$
$$\gamma = \text{const} < \infty, \tag{2.5}$$

тогда суммы в правой части (2.3) при любом N мажорируются, начиная с некоторого значения κ_2 ($\kappa_2 = \text{Const}$), в соответствии с (2.4), рядом

$$2 \sum_k \frac{\gamma n^{\frac{s}{2}}}{k\,(n-k)}, \tag{2.6}$$

где $n \neq \kappa$ в силу разбиения (2.3).

Ряд (2.6) сходится при любом целом n и $s < 2$, а его сумма равномерно ограничена по n. Действительно, так как $n \neq \kappa$, то

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma n^{\frac{s}{2}}}{k\,(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\gamma n^{\frac{s}{2}}}{k\,(n-k)} + \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\gamma n^{\frac{s}{2}}}{k\,(n-k)}. \tag{2.7}$$

Воспользуемся признаком Маклорена-Коши

$$\int_1^{n-1} \frac{\gamma n^{\frac{s}{2}}}{x\,(n-x)}\,dx = \frac{\gamma n^{\frac{s}{2}}}{n}\,[2\ln(n-1)].$$

Отсюда следует, что сумма первых слагаемых в (2.7), при достаточно большом n и $s < 2$, сколь угодно мала.

Для второго слагаемого в (2.7)

$$\int_{n+1}^{N} \frac{\gamma n^{\frac{s}{2}}}{x\,(x-n)}\,dx = \frac{\gamma n^{\frac{s}{2}}}{n}\left[\ln\frac{N-n}{N} - \ln\frac{1}{n+1}\right].$$

Так как второе слагаемое существует лишь при $N \geqslant n+1$, то его сумма сколь угодно мала при достаточно большом n независимо от величины N.

Следовательно, сумма (2.2) равномерно ограничена по n некоторым положительным числом d_1, не зависящим от выбора числа N. Аналогично показывается ограниченность суммы

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\Delta'(\lambda_k)}\ \frac{n^{\frac{s}{2}}}{\lambda_k + \mu_k}. \tag{2.8}$$

Действительно,

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\Delta'(\lambda_k)}\frac{n^{\frac{s}{2}}}{\lambda_k+\mu_n}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{\Delta'(\lambda_k)}\right|\frac{n^{\frac{s}{2}}}{|\lambda_k+\mu_n|}+2\left|\frac{1}{\Delta'(\bar\lambda_n)}\right|\frac{n^{\frac{s}{2}}}{|\bar\lambda_n+\mu_n|}+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{N}\left|\frac{1}{\Delta'(\lambda_k)}\right|+2\frac{n^{\frac{s}{2}}}{|\lambda_n+\mu_n|}. \qquad (2.9)$$

Так как $s<2$ и $|\bar\lambda_n+\mu_n|\geqslant\ln\frac{\pi n}{|a|}$, то второе слагаемое правой части (2.9) ограничено при любом n. Далее, слагаемые

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{\Delta'(\lambda_k)}\right|\frac{n^{\frac{s}{2}}}{|\lambda_k+\mu_u|},$$

$$\sum_{k=n+2}^{N}\left|\frac{1}{\Delta'(\lambda_k)}\right|\frac{n^{\frac{s}{2}}}{|\lambda_k+\mu_n|}$$

при любом N мажорируются рядом

$$2\sum_{k}\frac{n^{\frac{s}{2}}}{k\,|n-k|},$$

сумма которого равномерно ограничена по n. Поэтому сумма (2.8) также ограничена при любом n и $s<2$ некоторым положительным числом d_2, независящим от выбора числа N. Из ограниченности сумм (2.2) и (2.8) и равенства (2.1) следует

$$|\lambda_n-\mu_n|\leqslant\frac{c_1}{n^s},\quad (c_1=\text{const}<\infty), \qquad (2.10)$$

где $s<2$, $c_1=d_1d_2$.

Далее, используя (1.14), получим

$$\prod_{i=1}^{N}(\lambda_i-\mu)+\sum_{i=1}^{N}p_i\prod_{j=1}^{N}(\lambda_j-\mu)=\prod_{i=1}^{N}(\mu_i-\mu), \qquad (2.11)$$

где μ_i $(i=1,2,\ldots,N)$ — корни характеристического уравнения (1.13). При $\mu=\lambda_i$ равенство (2.11) примет вид

$$p\prod_{j=1}^{N}(\lambda_j-\lambda_i)=\prod_{k=1}^{N}(\mu_k-\lambda_i). \qquad (2.12)$$

Вводя обозначение

$$\mu_k=\lambda_k+\varepsilon_k, \qquad (2.13)$$

запишем (2. 12) в виде

$$p_i = \varepsilon_i \prod_{j=1}^{N|} \left(1 + \frac{\varepsilon_j}{\lambda_j - \lambda_i}\right). \tag{2.14}$$

Из равенства (2. 14) следует, что

$$|p_i| \leqslant |\varepsilon_i| \prod_{j=1}^{N|} \left(1 + \frac{|\varepsilon_j|}{|\lambda_j - \lambda_i|}\right). \tag{2.15}$$

Но произведение справа в (2. 15) ограничено при любом N, так как при достаточно большой разности $(i - j)$ в силу (0. 2. 9)

$$|\lambda_i - \lambda_j| \geqslant 1, \tag{2.16}$$

а $|\varepsilon_j|$ удовлетворяет неравенству (2. 10), то есть

$$\prod_{j=1}^{N|} \left(1 + \frac{|\varepsilon_j|}{|\lambda_j - \lambda_i|}\right) \leqslant B_1, \ (B_1 = \text{const} < \infty), \tag{2.17}$$

где величина B_1 не зависит от выбора N.
Поэтому из (2. 15) и (2. 10)

$$|p_i| \leqslant \frac{B}{n^s}, \quad (B = \text{const} < \infty), \tag{2.18}$$

где $s < 2$, а величина B не зависит от выбора N.

Отметим, что неравенства (2. 10) и (2. 18) имеют место и при $s = 2$.

В частности, это будет следовать из шестого параграфа данной главы.

3. Ограниченность управления

Рассмотрим усеченную по отношению к (1. 3) систему уравнений

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \lambda_i \, y_i(t) + \xi_N, \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{3.1}$$

где

$$\xi_N = \sum_{i=1}^{N} p_i \, y_i(t). \tag{3.2}$$

В соответствии с (1. 4) начальные значения $y_i(0)$ определяются из равенств

$$y_i(0) = \varphi(0) + a \int_{-\tau}^{0} (\varphi(\nu) \, e^{-\lambda_i(\tau+\nu)} \, d\nu.$$

Пусть начальная кривая $\varphi(\nu), [-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$ ограничена вместе с ее первой производной. Тогда, предварительно интегрируя по частям, получим

$$|y_i(0)| \leqslant 2|\varphi(0)| + |\varphi(-\tau)| \, e^{-\mathrm{Re}\,\lambda_i \tau} +$$
$$+ \|\dot{\varphi}(\nu)\|^{(\tau)} \left| \frac{1 - e^{\mathrm{Re}\,\lambda_i \tau}}{\mathrm{Re}\,\lambda_i \tau} \right| \leqslant D \{ \|\varphi(\nu)\|^{(\tau)} + \|\dot{\varphi}(\nu)\|^{(\tau)} \}, \tag{3.3}$$

где

$$\|\varphi(\nu)\|^{(\tau)}=\sup|\varphi(\nu)|,\quad [-\tau\leqslant\nu\leqslant 0],\quad D=\text{const}<\infty.$$

Используя преобразование А. И. Лурье [19], приведем систему (3. 1) к каноническому виду

$$\frac{dz_\rho(t)}{dt}=\mu_\rho z_\rho(t),\quad (\rho=1,\ 2,\ ...,\ N). \tag{3.4}$$

Корни характеристического уравнения (1. 13) μ_i, $(i = 1,2,..., N)$ предполагаются простыми. Преобразование в этом случае осуществляется подстановкой

$$y_k(t)=\sum_{\rho=1}^{N}\frac{H_k(\mu_\rho)}{D'(\mu_\rho)}z_\rho(t), \tag{3.5}$$

где $D'_1(\mu_p)$ — производная от определителя (1.13), а
$H_к(\mu_\rho)$—определитель (1. 13), у которого $к$-ый столбец заменен числами h_i.

В данном случае полагаем

$$h_1 = 1,\ h_i = 0,\ (i = 2,3,..., N). \tag{3.6}$$

Переменные z_ρ могут быть представлены в виде

$$z_\rho = \frac{1}{H_m(\mu_\rho)}\sum_{\alpha=1}^{N}D_{\alpha m}(\mu_\rho)\,y_\alpha, \tag{3.7}$$

$$(\rho = 1,2,..., N),$$

где $D_{\alpha m}$ — алгебраическое дополнение элемента из α-ой строки и $к$-го столбца определителя (1. 13). Определитель (1.13) запишем следующим образом:

$$\begin{vmatrix} p_1+\lambda_1-\mu, & p_2, & ..., & p_N \\ -(\lambda_1-\mu), & \lambda_2-\mu, & ..., & 0 \\ . & . & ..., & . \\ -(\lambda_1-\mu), & 0, & ..., & \lambda_N-\mu \end{vmatrix}=0. \tag{3.8}$$

Тогда, полагая в (3. 7) $m = 1$, получим

$$z_j=y_1+\sum_{i=2}^{N}\frac{p_i}{\lambda_i-\mu_j}\,y_i, \tag{3.9}$$

и, следовательно,

$$|z_j(0)|\leqslant|y_1(0)|=\sum_{i=2}^{N}\left|\frac{p_i}{\lambda_i-\mu_j}\right|\,|y_i(0)|. \tag{3.10}$$

Неравенство (3. 10) запишем в виде

$$|z_j| \leqslant |y_1| + \left| \frac{p_j y_j}{\lambda_j - \mu_j} \right| + \sum_{i=1}^{N|} \left| \frac{p_i}{\lambda_i - \mu_j} \right| |y_i|,$$

где (|) означает, что в сумме Σ отсутствует слагаемое с номером $i = j$.

Но

$$\left| \frac{p_j}{\lambda_j - \mu_j} \right| \leqslant k_1, \quad (k_1 = \text{const} < \infty). \tag{3.11}$$

Действительно, согласно (1. 14)

$$\left| \frac{p_j}{\lambda_j - \mu_j} \right| \leqslant 1 + {\sum_{k=1}^{N}}' \left| \frac{p_k}{\lambda_k - \mu_j} \right|. \tag{3.12}$$

Так как при достаточно большой разности $(\kappa - j)$

$$\left| \frac{1}{\lambda_k - \lambda_j} \right| \leqslant 1, \tag{3.13}$$

то сумма справа в (3. 12) при любом N мажорируется сходящимся на основании (2. 18) рядом

$$\sum_k |p_k| \tag{3.14}$$

и, следовательно, имеет место неравенство (3. 11). При этом величина κ_1 не зависит от выбора номера N.

На основании (3. 3), (3. 11) и (3. 13) получим

$$|z_j(0)| \leqslant c_3 \{ \| \varphi(\nu) \|^{(\tau)} + \| \dot{\varphi}(\nu) \|^{(\tau)} \}, \quad c_3 = \text{const} < \infty,$$

где $j = 1,2,..., N$, а величина c_3 не зависит от выбора номера N.

В силу (3. 4)

$$|z_j(t)| \leqslant |z_j(0)| \leqslant c_3 \{ \| \varphi(\nu) \|^{(\tau)} = \| \dot{\varphi}(\nu) \|^{(\tau)} \}. \tag{3.15}$$

Из равенства (3. 8)

$$\frac{H_k(\mu_\rho)}{D'(\mu_\rho)} = - \frac{1}{(\lambda_k - \mu_\rho) \left| \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{p_i}{(\lambda_i - \mu_\rho)^2} \right|} \tag{3.16}$$

На основании (2.14)

$$\left| \frac{p_i}{\varepsilon_i} \right| > \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \left| \frac{\varepsilon_j}{\lambda_j - \lambda_i} \right| \right).$$

Но так как произведение справа ограничено при любом сколь угодно большом N, то при достаточно больших ρ, в соответствии с (2. 10), получим

$$\left| \frac{p_\rho}{(\lambda_\rho - \mu_\rho)} \right| \leqslant k_2 \rho^{2-\varepsilon}, \quad (k_2 \neq 0),$$

где ε — наперед заданное сколь угодно малое число. Поэтому

$$\left| \sum_{i=0}^{N}{}' \frac{p_i}{(\lambda_i - \mu_\rho)^2} \right| \geqslant k_2 \rho^{2-\varepsilon} - \sum_{i=1}^{N}{}' \left| \frac{p_i}{(\lambda_i - \mu_\rho)^2} \right|. \tag{3.17}$$

Но так как при достаточно большом

$$|\lambda_i - \mu_\rho| \geqslant 1, \quad (i \neq \rho),$$

то

$$\sum_{i=1}^{N}{}' \left| \frac{p_i}{(\lambda_i - \mu_\rho)^2} \right| \leqslant k_3, \quad (k_3 = \mathrm{const} < \infty),$$

где k_3 не зависит от выбора номера N.

Поэтому при $k \neq \rho$

$$\left| \frac{H_k(\mu_\rho)}{D'(\mu_\rho)} \right| \leqslant \frac{1}{k_2 \rho^{2-\varepsilon} - k_3}. \tag{3.18}$$

Если же $k = \rho$, то величина слева в неравенстве (3. 18) остается ограниченной в силу (2. 18).

В соответствии с (3.5)

$$|y_k(t)| \leqslant \sum_{\rho=1}^{N} \left| \frac{H_k(\mu_\rho)}{D'(\mu_\rho)} \right| |z_\rho(t)|. \tag{3.19}$$

Но так как

$$|z_j(t)| \leqslant |z_j(0)|,$$

то

$$|y_k(t)| \leqslant c_3 \sum_{\rho=1}^{N} \left| \frac{H_k(\mu_\rho)}{D'(\mu_\rho)} \right| \{ \| \varphi(\nu) \|^{(\tau)} + \| \dot{\varphi}(\nu) \|^{(\tau)} \}. \tag{3.20}$$

Сумма справа в неравенстве (3. 20) на основании (3. 18) ограничена при любом N, поэтому

$$|y_k(t)| \leqslant A_1 \{ \| \varphi(\nu) \|^{(\tau)} + \| \dot{\varphi}(\nu) \|^{(\tau)} \}, \quad A_1 = \mathrm{const} < \infty, \tag{3.21}$$

и величина A_1 не зависит от номера N.

Используя (3. 2) и (3. 21), получим

$$|\xi_N| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |p_i| \, |y_i| \leqslant A_1 \sum_{i=1}^{N} |p_i| \{ \| \varphi(\nu) \|^{(\tau)} + \| \varphi(\nu) \|^{(\tau)} \}.$$

Но так как ряд $\sum_k |p_k|$. сходится, то

$$|\xi_N| \leqslant A \{ \| \varphi(\nu) \|^{(\tau)} + \| \dot{\varphi}(\nu) \|^{(\tau)} \}, \tag{3.22}$$

а постоянная A не зависит от номера N.

Из равенства (1. 17) следует, что оптимальные собственные значения усеченной задачи μ_j $(j = 1,2,..., N)$ удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \mu_j \leqslant -\gamma, \tag{3.23}$$

где γ — постоянное, положительное число не зависящее от выбора номера N.

Но тогда, в силу (3. 5), имеет место неравенство

$$| y_k (t) \leqslant A_1 \{ \| \varphi (\nu) \|^{(\tau)} + \| \dot{\varphi} (\nu) \|^{(\tau)} \} e^{-\gamma t}. \tag{3.24}$$

и, следовательно, неравенство

$$| \xi_N | \leqslant A \{ \| \varphi (\nu) \|^{(\tau)} + \| \dot{\varphi} (\nu) \|^{(\tau)} \} e^{-\gamma t}. \tag{3.25}$$

4. Метод последовательных приближений

Естественно предположить, что при приближенном определении оптимального управления ξ^* для уравнения (1. 1) достаточно решить задачу аналитического конструирования оптимального управления ξ_N^* для усеченной системы обыкновенных уравнений (1. 6)

$$\frac{dy_i (t)}{dt} = \lambda_i \, y_i (t) + \xi_N, \quad (i = 1, \ 2, \ ..., \ N). \tag{4.1}$$

При этом искомое управление ξ_N^* должно стабилизировать систему (4. 1) и обеспечивать минимум интегралу

$$I_N = \int_0^\infty V_N \, dt, \tag{4.2}$$

где V_N — форма вида

$$V_N = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^N \frac{y_j}{\Delta' (\lambda_j)} \right)^2 + \frac{1}{2} \xi_n^2 . \tag{4.3}$$

Допустим, что оптимальное управление ξ_N^* найдено. Оно имеет вид

$$\xi_N^* = \sum_{i=1}^N p_i^{(N)} \, y_i (t). \tag{4.4}$$

В равенствах (4. 3) и (4. 4) $y_i(t)$, $(i = 1,2,..., N)$ линейные функционалы

$$y_i (t) = x (t) + a \int_{-\tau}^0 x (t + \nu) \, e^{-\lambda_i (\tau + \nu)} \, d\nu. \tag{4.5}$$

В силу (4. 5) функционал ξ_N^* может быть представлен следующим образом:

$$\xi_N^* = \left[\sum_{i=1}^{N} p_i^{(N)} \right] x(t) +$$

$$+ a \int_{-\tau}^{\theta} \left[\sum_{i=1}^{N} p_i^{(N)} e^{-\lambda_i(\tau+\nu)} \right] x(t+\nu)\, d\nu. \tag{4.6}$$

Этот функционал естественно рассматривать как приближенный по отношению к оптимальному функционалу задачи (1. 1), (1. 2), имеющему, в соответствии с (0.3), вид

$$\xi^* = \beta x(t) + \int_{-\tau}^{0} \sigma(\nu)\, x(t+\nu)\, d\nu. \tag{4.7}$$

Следовательно, рассматриваемый приближенный метод решения задачи (1. 1), (1. 2) состоит в следующем.

При приближенном решении задачи выбираем N первых корней характеристического квазиполинома (0. 2. 3) и рассматриваем при этом систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4. 1).

Для системы (4. 1) решаем задачу аналитического конструирования регулятора с критерием качества (4. 2).

Допустим, что мы решили эту задачу.

Оптимальное управление задачи (4. 1), (4. 2) имеет вид (4. 6). Управление (4. 6) рассматриваем как приближенный оптимальный функционал задачи (1. 1), (1. 2). Это возможно, так как при достаточно больших N он будет сколь угодно точно минимизировать интеграл (1. 2), то есть величина интеграла (1. 2) будет сколь угодно близка к минимальной.

В частности имеет место результат.

Теорема 4. 1. Если подставить в уравнение (1. 1) функционал (4. 6), то величина интеграла (1. 2) при достаточно большом номере N будет сколь угодно близка к минимальной, то есть имеет место оценка

$$| I(\xi_N^*) - I(\xi^*) | \leqslant \delta \{ \| \varphi(\nu) \|^{(\tau)} + \| \bar{\varphi}(\nu) \|^{(\tau)} \},$$

где δ — сколь угодно малая положительная постоянная при достаточно большом номере N.

Доказательство теоремы легко провести используя разложение (1. 1. 13) и оценку (3.25). Подробное доказательство теоремы приведено в работе [26].

Точное решение задачи (1. 1), (1. 2) приводит на основании (1.14) к решению счетной системы алгебраических уравнений

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{\lambda_i - \mu_j} = 0, \tag{4.8}$$
$$(j = 1,\ 2, \ldots),$$

где μ_j ($j=1,2\ldots$) нули квазиполинома (1. 16) с отрицательной вещественной частью.

Решение системы (4. 8) затруднительно, поэтому при решении конкретных задач удобно воспользоваться указанным выше приближенным методом.

Пример. Пусть движение некоторой системы автоматического регулирования описывается уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t-1) + \xi, \tag{4.9}$$

а управление ξ ищется из условия минимума интеграла

$$I(\xi) = \frac{1}{2}\int_0^\infty [x^2(t) + \xi^2]\, dt. \tag{4.10}$$

Первые два корня характеристического квазиполинома

$$\lambda = -e^{-\lambda} \tag{4.11}$$

представляют собой следующие величины:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0{,}35 + 1{,}32\, i, \\ \lambda_2 &= -0{,}35 - 1{,}32\, i, \end{aligned} \tag{4.12}$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Решим задачу (4. 9), (4. 10) приближенно. Рассмотрим усеченную систему

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \lambda_1 y_1(t) + \xi_2, \quad \frac{dy_2(t)}{pt} = \lambda_2 y_2(t) + \xi_2, \tag{4.13}$$

где $\lambda_i (i = 1{,}2)$ величины из (4. 12), а неизвестное управление ξ ищется из условия минимума интеграла

$$I(\xi_2) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\left(\frac{y_1}{\Delta'(\lambda_1)} + \frac{y_2}{\Delta'(\lambda_2)}\right)^2 + \xi_2^2\right] dt. \tag{4.14}$$

Оптимальные собственные значения μ_1, μ_2 задачи (4. 13), (4. 14) удовлетворяют уравнению

$$\begin{gathered} (\lambda_1^2 = \mu^2)(\lambda_2^2 - \mu^2) + \left[\frac{1}{\Delta'(\lambda_1)}(\lambda_2 - \mu) + \frac{1}{\Delta'(\lambda_2)}(\lambda_1 - \mu)\right] \times \\ \times \left[\frac{1}{\Delta'(\lambda_1)}(\lambda_2 + \mu) + \frac{1}{\Delta'(\lambda_2)}(\lambda_1 + \mu)\right] = \mu^4 - \left[\lambda_1^2\lambda_2^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\Delta'(\lambda_1)} + \frac{1}{\Delta'(\lambda_2)}\right)^2\right]\mu^2 + (\lambda_1\lambda_2)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\Delta'(\lambda_1)} + \frac{\lambda_1}{\Delta'(\lambda_2)}\right)^2 = 0. \end{gathered}$$

Или, в соответствии с (4. 12),

$$\mu^4 + 2{,}98\mu^2 + 6{,}63 = 0. \tag{4.15}$$

Искомые корни полинома (4. 15) суть

$$\mu_1 = -0{,}74 + 1{,}42i, \ \mu_2 = -0{,}74 - 1{,}42i.$$

Но тогда

$$p_1=(\mu_1-\lambda_1)\left(1+\frac{\mu_2-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\right)=-0{,}39+0{,}038\,i,$$
$$p_2=(\mu_2-\lambda_2)\left(1+\frac{\mu_1-\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)=-0{,}39-0{,}038\,i, \quad (4.16)$$

и искомое приближенное оптимальное управление примет вид

$$\xi_2^*=(p_1+p_2)\,x\,(t)-\int\limits_{-1}^{0}[p_1e^{-\lambda_1(1+\nu)}+p_2e^{-\lambda_2(1+\nu)}]\,x\,(t+\nu)\,d\nu=$$
$$=-0{,}78\,x\,(t)+\int\limits_{-1}^{0}[0{,}09\cos 1{,}32\,\nu+0{,}52\sin 1{,}32\,\nu]\times$$
$$\times\,e^{0{,}35\nu}\,x\,(t+\nu)\,d\nu.$$

5. Метод редукции

Укажем другой способ вычисления коэффициентов $p_i (i=1,2,...)$ искомого оптимального управления ξ^* задачи (1. 1), (1. 2). Для этого систему (4. 8) запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_i\,(\lambda_j-\mu_j)}{\lambda_i-\mu_j}=-(\lambda_j-\mu_j), \quad (5.1)$$
$$(j=1,\ 2,...).$$

В системе (5. 1) μ_j $(j=1,2,...)$ — корни квазиполинома

$$1-(\mu-ae^{-\mu\tau})(\mu+ae^{\mu\tau})=0 \quad (5.2)$$

с отрицательными действительными частями.
Корни μ_i $(j=1,2,...)$ расположены в порядке убывания действительных частей.

Пусть l^2 комплексное пространство числовых последовательностей $a=\{a_i\}$, $(i=1,2,...)$ с нормой

$$\|a\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2}.$$

Систему (5. 1) запишем в виде

$$(I-A)P=B,$$

где I — тождественный оператор,

A — оператор, определенный матрицей

$$\left(\frac{\lambda_j-\mu_j}{\lambda_i-\mu_j}\right),\quad (i,\ j=1,\ 2,\ ...),\ (i\neq j), \quad (5.3)$$

а свободный член B и решение P образуют последовательности

$$B=\{\lambda_j-\mu_j\},\quad (j=1,2,...),$$
$$P=\{p_i\},\qquad (i=1,2,...).$$

Покажем, что оператор A — ограничен, а $B\in l^2$. Действительно, на основании неравенства (2. 10) имеет место оценка

$$|\lambda_k-\mu_k| \leqslant \frac{d}{k^2}, \tag{5.4}$$

где постоянная d, $(d = \mathrm{Const} < \infty)$ не зависит от номера κ.

Но тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k-\mu_k|^2 \leqslant d^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}. \tag{5.5}$$

Ряд справа в (5.5) сходится и, следовательно, $B \in l^2$. Далее, рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}^{|} \frac{1}{|\lambda_k-\mu_n|^2}, \tag{5.6}$$

где символ ($|$) означает, что у суммы Σ отсутствует слагаемое с номером $\kappa = n$.

В соответствии с равенством (0. 2. 9) ряд (5. 6) мажорируется, начиная с некоторого значения $\kappa = \kappa_1$, сходящимся по признаку Маклорена-Коши рядом

$$\sum_k{}' \frac{1}{(k-n)^2} \tag{5.7}$$

при любом выборе номера n.

Но тогда сходится и ряд (2. 6) и имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}^{|} \frac{1}{|\lambda_k-\mu_n|^2} \leqslant c, \tag{5.8}$$

где постоянная c, $(c = \mathrm{Const} < \infty)$ не зависит от выбора номера n.

На основании неравенств (5.5) и (5.8) ряд

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}{}^{|} \left|\frac{\lambda_j-\mu_j}{\lambda_i-\mu_j}\right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j-\mu_j|^2 \sum_{i=1}^{\infty}{}^{|} \frac{1}{|\lambda_i-\mu_j|^2}$$

сходится и, следовательно, оператор A ограничен. Так как решение задачи (1. 1), (1. 2) единственно [7], то в силу теоремы 12. 3. 1 работы [5] при вычислении коэффициентов p_i $(i = 1,2,...)$ оптимального управления (1. 8) для системы (1. 11) можно воспользоваться методом редукции.

6. Асимптотический функционал

Вычисление искомых коэффициентов p_i $(i = 1,2,...)$ оптимального управления ξ^* задачи (1. 1), (1. 2) из системы (5. 1) затруднительно.

Однако можно указать аналитическое выражение для вычисления достаточно далеких по номеру коэффициентов оптимального управления.

Из равенств (2. 13) и (2. 14) при $N \longrightarrow \infty$ следует, что коэффициенты p_i $(i = 1,2,...)$ оптимального управления задачи (1. 1), (1. 2) могут быть представлены в виде

$$p_i = (\mu_i - \lambda_i) \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu_j - \lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}\right), \tag{6.1}$$
$$(i = 1, 2, \ldots),$$

где λ_i $(i = 1,2,\ldots)$ — корни квазиполинома (0. 2. 3), а
μ_i $(i = 1,2,\ldots)$ — корни квазиполинома (1. 16)

$$(\mu - ae^{-\mu\tau}) (\mu + ae^{\mu\tau}) - 1 = 0. \tag{6.2}$$

Символ (|) в (6. 1) означает, что в произведении Π отсутствует сомножитель с номером $i = j$.

Для разности

$$d_n = \mu_n - \lambda_n \tag{6.3}$$

на основании (2. 10) имеет место оценка

$$|d_n| \leqslant \frac{B}{n^{2-\varepsilon}}, \tag{6.4}$$

где ε — фиксированная, положительная, сколь угодно малая постоянная, B — ограниченная постоянная ($B = \mathrm{Const} < \infty$). Пусть μ_n корень квазиполинома (6. 2) с достаточно большой по модулю вещественной частью. Это возможно при достаточно большом n в силу (2. 10). В дальнейшем, не нарушая общности, полагаем $\tau = 1$. Воспользуемся (6. 3) и запишем квазиполином (6. 2) при $\mu = \mu_n$ следующим образом:

$$(\lambda_n + d_n - ae^{-\lambda_n - d_n}) (-\lambda_n - d_n - ae^{\mu_n}) + 1 = 0. \tag{6.5}$$

Так как при большом номере n в силу (6. 4) величина d_n мала, то сохраняя в разложении

$$e^{-d_n}$$

лишь слагаемое первого порядка малости, из (6.5) получим

$$(\lambda_n + d_n - ae^{-\lambda_n} + ae^{-\lambda_n} d_n) (-\lambda_n - d_n - ae^{\mu_n}) + 1 = 0, \tag{6.6}$$

или

$$d_n (1 + ae^{-\lambda_n}) \lambda_n \left(1 + \frac{d_n}{\lambda_n} + \frac{ae^{\mu_n}}{\lambda_n}\right) = 1, \tag{6,7}$$

так как λ_n — корень квазиполинома (0. 2. 3).

Так как величина

$$\frac{d_n}{\lambda_n} + \frac{ae^{\mu_n}}{\lambda_n} \tag{6.8}$$

при достаточно большом n сколь угодно мала по сравнению с единицей, то, пренебрегая ею, получим

$$d_n = \frac{1}{\lambda_n (1 + ae^{-\lambda_n})} = \frac{1}{\lambda_n \Delta' (\lambda_n)}. \tag{6,9}$$

Из равенства (6.9), в частности, следует, что величину ε в неравенстве (6. 4) можно полагать равной нулю.

На основании (6.5)—(6.9) окончательно

$$d_n = \frac{1}{\lambda_n \Delta'(\lambda_n)} + 0\,(d_n), \tag{6.10}$$

где $O(d_n)$ при достаточно большом n величина сколь угодно малая по сравнению с d_n.

Из равенства (6.1) следует, что

$$p_n = d_n \prod_{k=1}^{\infty}{}' \left(1 + \frac{d_k}{\lambda_k - \lambda_n}\right),$$

или

$$p_n = d_n\, e^{s_{1n}} \tag{6.11}$$

где s_{1n} — сумма ряда

$$s_{1n} = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \ln\left(1 + \frac{d_k}{\lambda_k - \lambda_n}\right). \tag{6.12}$$

Символ (|) означает, что отсутствует слагаемое с номером $\kappa = n$.

Рассмотрим ряд

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{d_k}{\lambda_k - \lambda_n} \tag{6.13}$$

и разобьем его на два слагаемых

$$s_n = \sum_{k=1}^{k_1}{}' \frac{d_k}{\lambda_k - \lambda_n} + \sum_{k=k_1+1}^{\infty}{}' \frac{d_k}{\lambda_k - \lambda_n}, \tag{6.14}$$

при этом λ_κ, $(\kappa = \kappa_1 + 1,\ \kappa_1 + 2, \ldots)$ могут быть вычислены с заданной погрешностью по асимптотическим формулам (0.2.9). Так как n предполагается достаточно большим, то можно считать, что

$$n >> \kappa_1. \tag{6.15}$$

Но тогда, в силу (6.4) и (6.15),

$$\left|\sum_{k=1}^{k_1} \frac{d_k}{\lambda_k - \lambda_n}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{k_1} \frac{|d_k|}{|\lambda_k - \lambda_n|} \leqslant \varepsilon_1(n), \tag{6.16}$$

где $\varepsilon_1(n)$ — положительная, сколь угодно малая при достаточно большом n постоянная. Во второй сумме справа в (6.14) на основании (0.2.9).

$$|\lambda_k - \lambda_n| \geqslant |k - n|, \tag{6.17}$$

$$(\kappa = \kappa_1 + 1,\ \kappa_1 + 2, \ldots).$$

Поэтому, используя (6.4), получим

$$\left|\sum_{k=k_1+1}^{\infty}{}' \frac{d_k}{\lambda_k - \lambda_n}\right| \leqslant \sum_{k=k_1+1}^{\infty}{}' \frac{B}{k\,|k-n|}, \tag{6.18}$$

$$(k \neq n,\ B = \text{const} < \infty).$$

Но ряд справа в (6.18) по признаку Маклорена-Коши сходится и при достаточно большом n имеет суммой сколь угодно малую величину, поэтому из (6. 18)

$$\left| \sum_{k=k+1}^{\infty} \frac{d_k}{\lambda_k - \lambda_n} \right| \leq \varepsilon_2 (n), \tag{6.19}$$

где $\varepsilon_2(n)$ — величина сколь угодно малая при достаточно большом n.

Из неравенств (6. 16) и (6. 19) следует, что

$$| s_n | \leq \varepsilon_1 (n) + \varepsilon_2 (n) = \varepsilon (n). \tag{6.20}$$

Рассмотрим ряд (6. 12). Так как при достаточно большом n каждая из величин

$$\frac{d_k}{\lambda_k - \lambda_n}, \quad (k = 1, \ 2, \ ...), \quad n \neq k$$

в силу (0. 2. 9) и (6. 4) сколь угодно мала и так как ряд в (6. 13) абсолютно сходящийся к сколь угодно малой величине при достаточно большом n на основании оценки (6.20), то, ограничиваясь при разложении логарифма лишь величинами первого порядка малости, получим

$$s_{1n} = s_n + 0 (s_n), \tag{6.21}$$

где $O(s_n)$ — величина сколь угодно малая по сравнению с s_n при достаточно большом номере n.

Но тогда из (6. 10) и (6. 11)

$$p_n = \frac{1}{\lambda_n \Delta' (\lambda_n)} + 0 (p_n), \tag{6.22}$$

где О (p_n) — величина сколь угодно малая по сравнению с p_n при достаточно большом номере n.

Используя для вычисления коэффициентов p_i $(i = 1,2,...)$ выражение (6. 22), на основании равенства (4. 6) при $N \to \infty$ получим асимптотический функционал задачи (1. 1), (1. 2)

$$\xi = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i \Delta' (\lambda_i)} \right] x (t) + a \int_{-\tau}^{0} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_i (1+v)}}{\lambda_i \Delta' (\lambda_i)} \right] x (t + \nu) \, d\nu, \tag{6.23}$$

или, в силу (0. 2. 3) и (1. 2. 8),

$$\xi = \frac{1}{a} x (t) + \int_{-\tau}^{0} x (t + \nu) \, d\nu. \tag{6.24}$$

7. Метод последовательных приближений для систем с запаздыванием времени

Пусть движение некоторой системы описывается уравнениями

$$\frac{dx_s (t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} [a_{sj} x_j (t) + b_{sj} x_j (t - \tau)] + m_s \xi, \tag{7.1}$$

где a_{sj}, b_{sj}, m_s, $(s, j = 1,2,..., n)$ — постоянные коэффициенты, ξ — искомое управление.

Пусть в качестве критерия оптимальности переходного процесса выбран интеграл

$$I(\xi) = \int_0^\infty \left\{ \sum_{s=1}^n a_s x_s^2(t) + c\xi^2 \right\} dt, \tag{7.2}$$

то есть рассматривается задача (0. 1), (0. 2). В соответствии с разложением (1. 1. 24) задачс (7. 1), (7. 2) можно сопоставить задачу аналитического конструирования регулятора для счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{du_j(t)}{dt} = \lambda_j u_j(t) + k_j \xi, \tag{7,3}$$

$$(j = 1, 2,...).$$

При этом искомое оптимальное управление ξ^* ищется из условия минимума интеграла

$$I(\xi) = \int_0^\infty \left\{ \sum_{s=1}^n a_s \left[\sum_{j=1}^\infty x_{sj}(0) u_j(t) \right]^2 + c\xi^2 \right\} dt. \tag{7.4}$$

Естественно предположить, что задача (7. 1), (7. 2), как и задача (0. 4), (0. 5), может быть решена с любой заданной точностью последовательностью конечномерных задач А. М. Летова.

Рассмотрим усеченную задачу (7. 3), (7. 4)

$$\frac{du_j(t)}{dt} = \lambda_j u_j(t) + k_j \xi_N, \tag{7.5}$$

$$(j = 1, 2, ..., N).$$

Оптимальное управление $\xi_N{}^*$в этом случае ищется из условия минимума интеграла

$$I_N(\xi_N) = \int_0^\infty \left\{ \sum_{s=1}^n a_s \left[\sum_{j=1}^N x'_{sj}(0) u_j(t) \right]^2 + c\xi_N^2 \right\} dt. \tag{7.6}$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 7. 1. Если подставить в систему (7. 1) оптимальное управление $\xi_N{}^*$ задачи (7. 5), (7. 6), то величина интеграла (7. 2) при достаточно большом номере N будет сколь угодно близка к минимальной, то есть имеет место оценка

$$| I(\xi_N^*) - I(\xi^*) | \leq \delta \{ \| \varphi(\nu) \|^{(\tau)} + \| \varphi(\nu) \|^{(\tau)} \},$$

где δ — сколь угодно малая при достаточно большом номере N положительная постоянная, ξ^* — оптимальное управление задачи (7. 1), (7. 2), $\varphi(\upsilon) = \{\varphi_s(\upsilon)\}$,
$[-\tau \leq \vartheta \leq 0]$, $(s = 1,2,..., n)$ — начальное возмущение, а норма определена равенством

$$\| \varphi(\nu) \|^{(\tau)} = \sup | \varphi(\nu) |, \quad [-\tau \leq \nu \leq 0].$$

Пример. Пусть движение регулируемой системы описывается уравнениями

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \tag{7.7}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\left[x_2(t) + x_2(t-\pi)\right] - x_1(t) + \xi,$$

где неизвестное управляющее воздействие ξ должно минимизировать интеграл

$$I(\xi) = \frac{1}{2}\int_0^\infty [x^2(t) + \xi^2]\,dt. \tag{7.8}$$

Характеристический квазиполином, соответствующий системе (7. 7), имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + 1 + \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda\pi} = 0. \tag{7.9}$$

Первые два корня квазиполинома (7. 9) равны

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{-1}, \\ \lambda_2 &= -\sqrt{-1}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

В соответствии с разложением решений, имеют место равенства

$$x_1(t+\nu) = \sum_{i=1}^{2} \frac{e^{\lambda_i \nu}}{\Delta'(\lambda_i)} y_i(t) + z_1^t(\nu),$$

$$x_2(t+\nu) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda_i e^{\lambda_i \nu}}{\Delta'(\lambda_i)} y_i(t) + z_2^t(\nu). \tag{7.11}$$

Рассмотрим задачу (7. 7), (7. 8) при $z_i^t(\nu)$, $(i = 1,2)$ из (7. 11) равных нулю

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + \xi_2, \quad (t = 1,\ 2), \tag{7.12}$$

$$I(\xi_2) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\left(\sum_{i=1}^{2} \frac{y_i(t)}{\Delta'(\lambda_i)}\right)^2 + \xi_2^2\right] dt. \tag{7.13}$$

Переменные $y_i(t)$, $(i = 1,\ 2)$, в (7. 12) и (7. 13) представляют собой линейные функционалы

$$y_i(t) = -\frac{x_1(t)}{\lambda_i} + x_2(t) - \frac{1}{2}\int_0^\pi x_2(t+v-\pi)\, e^{-\lambda_i \nu}\, d\nu. \tag{7.14}$$

Задача (7. 12), (7. 13) — задача аналитического конструирования регулятора для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решая ее, получим

$$\xi_2^* = -0{,}16\, x_1(t) - 0{,}56\, x_2(t) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\pi [0{,}16 \sin\nu - 0{,}56\cos\nu]\, x_2(t+\nu-\pi)\, d\nu.$$

Приложение I

ЗАДАЧА РАУСА-ГУРВИЦА ДЛЯ КВАЗИПОЛИНОМОВ

Квадратичные функционалы Н. Н. Красовского могут быть использованы, в частности, для решения известной из литературы [30] задачи Рауса-Гурвица для квазиполиномов. В приложении на конкретных примерах приведена схема применения квадратичных функционалов для решения упомянутой задачи.

1. Задачи Рауса-Гурвица для квазиполиномов

Пусть движение некоторой системы описывается уравнением

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y^{(k)}(t) + \sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{\eta=1}^{N} d_{\mu\tau_\eta} y^{(\mu)}(t-\tau_\eta) = 0, \tag{1}$$

где $c_к$, $d_{м\eta}$, τ_η — постоянные ($\tau_\eta \leqslant 0$). Уравнению (1) соответствует следующий характеристический квазиполином:

$$\sum_{k=1}^{n} c_h \lambda^k + \sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{\eta=1}^{N} d_{\mu\tau_\eta} \lambda^{\mu} e^{-\lambda\tau_\eta} = 0. \tag{2}$$

Задача Рауса-Гурвица для квазиполинома (2) состоит в том, чтобы найти условия, налагаемые на коэффициенты $c_к$, $d_{\mu\tau_\eta}$ и запаздывания τ_η, при которых все корни рассматриваемого квазиполинома имеют отрицательные действительные части. При $\tau_\eta = 0$, ($\eta = 1, 2, ..., N$) квазиполином (2) обращается в полином, для которого решение рассматриваемой задачи известно.

Решение рассматриваемой задачи путем использования принципа аргумента для конкретных квазиполиномов получено в работах Л. С. Понтрягина [37], [38], Н. Г. Чеботарева, Н. Н. Меймана [30] и др.

Однако при решении задачи Рауса-Гурвица с успехом могут быть использованы также квадратичные функционалы Н. Н. Красовского, построение которых в простейших случаях развито во второй главе.

При этом для исследования задачи обычно достаточно вычислить коэффициент при квадрате решения в функционале V.

2. Задача Рауса-Гурвица в простейшем случае

В параграфе рассматривается задача Рауса-Гурвица для квазиполинома, соответствующего дифференциальному уравнению

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx^{\tau}(t-\tau), \tag{3}$$

где a, b — постоянные, то есть для характеристического квазиполинома

$$\Delta(\lambda) = \lambda - a - be^{-\lambda\tau} = 0. \tag{4}$$

Для решения рассматриваемой задачи, состоящей в том, чтобы найти условия, налагаемые на постоянные a, b и τ, при которых все корни квазиполинома (4) имеют отрицательные действительные части, найдем квадратичный функционал

$$V = Ax^2(t) + x(t)\int_{-\tau}^{0} B(\nu)\,x(t+\nu)\,d\nu +$$
$$+\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} K(\rho, \sigma)\,x(t+\rho)\,x(t+\sigma)\,d\rho\,d\sigma, \tag{5}$$

производная от которого по времени в силу уравнения (3) является квадратом решения

$$W = \frac{dV}{dt} = x^2(t). \tag{6}$$

В соответствии с расщеплением пространства, содержание которого изложено в первой главе, уравнению (2.1) будет эквивалентна счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \lambda_i y_i^{\tau}(t), \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

где λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — корни характеристического квазиполинома

$$\Delta_1(\lambda) = \lambda - be^{-(a+\lambda)\tau}, \tag{8}$$

а $y_i(t)$ — линейные функционалы

$$y_i(t) = x(t)\,e^{-at} + b\int_{-\tau}^{0} x(t+\nu)\,e^{-a(t+\tau+\nu)}\,e^{-\lambda_i(\tau+\nu)}\,d\nu. \tag{9}$$

Корни квазиполинома (8) предполагаются простыми и расположенными в порядке убывания действительных частей. При этом решение уравнения (3) может быть представлено в виде ряда

$$x(t+\nu) = e^{a(t+\nu)}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e^{\lambda_i\nu}}{\Delta'(\lambda_i)}\,y_i(t), \tag{10}$$

где $\Delta'(\lambda_j)$ — производная от характеристического квазиполинома (8) по λ при $\lambda = \lambda_i$.

Используя построения первого параграфа данной главы, находим

$$V = e^{2at} \sum_{i, j=1}^{\infty} \frac{y_i y_j}{(2a + \lambda_i + \lambda_j)\, \Delta'(\lambda_i)\, \Delta'(\lambda_j)}. \qquad (11)$$

Или, подставляя аналитическое выражение линейных функционалов $y_\kappa(t)$ $(\kappa = 1, 2, \ldots)$, искомый квадратичный функционал представим в виде

$$V = \frac{e^{2a\tau}}{b^2} K(-\tau, -\tau)\, x^2(t) + \frac{e^{a\tau}}{b} x(t) \int_{-\tau}^{0} [K(-\tau, \nu) + K(\nu, -\tau)]\, x(t+\nu)\, d\nu + \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} K(\rho, \sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho\, d\sigma, \qquad (12)$$

где

$$K(\rho, \sigma) = b^2 e^{-2a\tau} \sum_{i, j=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_i(\tau+\rho)}\, e^{-\lambda_j(\tau+\sigma)}}{(2a + \lambda_i + \lambda_j)\, \Delta'(\lambda_i)\, \Delta'(\lambda_j)}. \qquad (13)$$

Используя результаты первого параграфа, из равенства (13), суммируя, получим $\sigma \leqslant \rho$

$$K(\rho, \sigma) = \frac{b^2 e^{a(\rho+\sigma)}}{2k} \frac{b \sin k(\rho-\sigma) + a \sin k(\rho-\sigma-\tau) + k \cos k(\rho-\sigma-\tau)}{b + a \cos k(\rho-\sigma-\tau) + k \sin k(\rho-\sigma-\tau)}, \qquad (14)$$

а при $\rho \leqslant \sigma$

$$K(\rho, \sigma) = \frac{b e^{a(\rho+\sigma)}}{2k} \frac{b \sin k(\sigma-\rho) + a \sin k(\sigma-\rho-\tau) + k \cos k(\sigma-\rho-\tau)}{b + a \cos k(\sigma-\rho-\tau) + k \sin k(\sigma-\rho-\tau)}. \qquad (15)$$

В равенствах (14) и (15)

$k = \sqrt{b^2 - a^2}.$

Из равенств (6) и (12) следует, что

$$V[\varphi(\nu)] = \frac{e^{2a\tau}}{b^2} K(-\tau, -\tau)\, \varphi^2(0) + \frac{e^{a\tau}}{b} \varphi(0) \int_{-\tau}^{0} [K(-\tau, \nu) + K(\nu, -\tau)]\, \varphi(\nu)\, d\nu + \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} K(\rho, \sigma)\, \varphi(\rho)\, \varphi(\sigma)\, d\rho\, d\sigma = -\int_{0}^{\infty} x^2(t)\, dt,$$

где $\varphi(\upsilon)$ — начальное возмущение уравнения (3), а функция

$$K(\rho, \sigma), \quad [-\tau \leq \rho, \sigma \leq 0]$$

определена равенствами (14), (15).

Для того, чтобы все решения уравнения (3) были асимптотически устойчивы, необходимо, чтобы квадратичный функционал

$V[\varphi(\nu)]$ равенства (16) принимал на всех рассматриваемых начальных возмущениях $\varphi(\nu)$, $[-\tau \leqslant \nu \leqslant 0]$ отрицательные значения Упомянутое условие

$$V[\varphi(\nu)] < 0 \tag{17}$$

будет также достаточным до первого изменения знака неравенства. Последнее утверждение следует из того факта, что увеличение запаздывания может привести лишь к уменьшению области асимптотической устойчивости на плоскости параметров a и b уравнения (2.1).

Естественно, при этом предполагается, что при $\tau = 0$ область асимптотической устойчивости существует. Для практического решения рассматриваемой задачи можно привлекать не весь квадратичный функционал $V[\varphi(\nu)]$, а лишь его часть. Например, пусть начальное возмущение имеет вид

$$\varphi^*(\nu) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\tau \leqslant \nu < 0, \\ 1 \text{ при } \qquad \nu = 0. \end{cases} \tag{18}$$

В силу (9) и (18) среди начальных возмущений переменных y_k нет равных нулю, так как

$$y_k(0) = \varphi^*(0) + b\int_{-\tau}^{0} \varphi^*(\nu)\, e^{-(a+\lambda_k)(\tau+\nu)}\, d\nu = 1, \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Но тогда, на основании (5) и (18) для определения области

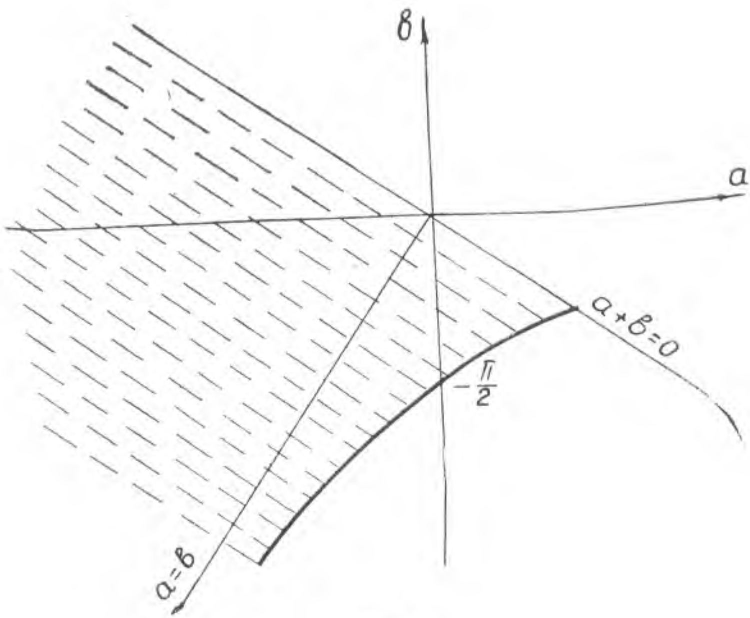


Рис. 3.

асимптотической устойчивости достаточно вычислить коэффициент A.

В данном случае область асимптотической устойчивости определится неравенством

$$\frac{a \cos k\tau - a \sin k\tau}{b + a \cos k\tau + k \sin k\tau} < 0 \tag{19}$$

до первой смены знака. Неравенство (19) следует из (6) и (12).

Опуская исследование неравенства (19), приведем геометрическое изображение области асимптотической устойчивости решений уравнения (3) при $\tau = 1$ (рис. 3).

3. Задача Рауса-Гурвица для уравнения первого порядка с двумя запаздываниями

Пусть движение некоторой системы описывается уравнением

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = ax\,(t) + b_1 x\,(t - \tau_1) + b_2 x\,(t - \tau_2), \tag{20}$$

где a, b_1, b_2 — постоянные коэффициенты,

τ_1, τ_2 — запаздывания

$$(\tau_1,\ \tau_2 = \mathrm{Const},\ \tau_2 > \tau_1).$$

Движение, описываемое уравнением (20), будет определено, если будет задано начальное возмущение

$$\varphi\,(\nu), \quad [-\tau_2 \leqslant \nu \leqslant 0].$$

Уравнению (20) соответствует характеристический квазиполином

$$\Delta\,(\lambda) = \lambda - a - b_1 e^{-\lambda\tau_1} - b_2 e^{-\lambda\tau_2} = 0. \tag{21}$$

Корни квазиполинома (21) предполагаем простыми, расположенными в порядке убывания действительных частей.

Кратко приведем разложение С. Н. Шиманова в данном случае. Сопряженное с (20) уравнение имеет вид

$$\frac{dy\,(t)}{dt} = -ay\,(t) - b_1 y\,(t + \tau_1) - b_2 y\,(t + \tau_2). \tag{22}$$

Обозначим через

$$x_i\,(\nu) = a_i e^{\lambda_i \nu}, \quad y_j\,(\nu) = b_j e^{-\lambda_j \nu}, \tag{23}$$

$$[-\tau_2 \leqslant \nu \leqslant 0), \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots)$$

собственные вектора операторных уравнений, соответствующих уравнениям (20) и (22).

Их скалярное произведение определим равенством

$$(x_i\,(\nu),\ y_j\,(\nu)) = a_i b_j \left[1 + b_1 \int\limits_0^{-\tau_1} e^{\lambda_i(\nu - \tau_1)}\, e^{-\lambda_j \nu}\, d\nu + \right.$$

$$+b_2 \int_0^{\tau_2} e^{\lambda_i(\nu-\tau_2)} e^{-\lambda_j \nu} d\nu \Bigg] =$$

$$= a_i b_j \left[1 + b_1 \frac{e^{-\lambda_j \tau_1} - e^{-\lambda_i \tau_1}}{\lambda_i \lambda_j} + b_2 \frac{e^{-\lambda_j \tau_2} - e^{-\lambda_i \tau_2}}{\lambda_i \lambda_j} \right]. \tag{24}$$

Из равенства (24) на основании (21) находим

$$(x_i(\nu),\ y_j(\nu)) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ a_i b_i \Delta'(\lambda_i) & \text{при } i = j, \end{cases} \tag{25}$$

где $\Delta'(\lambda_i)$ — производная от квазиполинома $\Delta(\lambda)$ по λ при $\lambda = \lambda_i$.

Полагая

$$\begin{aligned} b_i &= 1, \\ a_i &= \frac{1}{\Delta'(\lambda_i)}, \end{aligned} \tag{26}$$

на основании (25) получим

$$(x_i(\nu),\ y_j(\nu)) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j. \end{cases} \tag{27}$$

Рассмотрим линейный функционал

$$u_i(t) = (x(t+\nu),\ y_i(\nu)) =$$

$$= x(t) + b_1 \int_{-\tau_1}^{0} x(t+\nu) e^{-\lambda_i(\tau_1+\nu)} d\nu +$$

$$+ b_2 \int_{-\tau_2}^{0} x(t+\nu) e^{-\lambda_i(\tau_2+\nu)} d\nu. \tag{28}$$

Легко показать, что

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \lambda_i u_i(t), \quad (i = 1,\ 2,\ \dots). \tag{29}$$

Действительно,

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + b_1 x(t+\nu) e^{-\lambda_i(\tau_1+\nu)} \Big|_{-\tau_1}^{0} +$$

$$+ b_2 x(t+\nu) e^{-\lambda_i(\tau_2+\nu)} \Big|_{-\tau_2}^{0} + \lambda_i \Bigg\{ b_1 \int_{-\tau_1}^{0} x(t+\nu) e^{-\lambda_i(\tau+\nu)} d\nu +$$

$$+ b_2 \int_{-\tau_2}^{0} x(t+\nu) e^{-\lambda_i(\tau_2+\nu)} d\nu \Bigg\} = \lambda_i u_i(t).$$

Но тогда уравнению (20) эквивалентна счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений (29). При этом решение $x(t+\nu)$, $[-\tau_2 \leqslant \nu \leqslant 0]$, $t > 0$ представимо в виде ряда

$$x(t+\nu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i \nu}}{\Delta'(\lambda_i)} u_i(t). \tag{30}$$

Перейдем к нахождению условий, обеспечивающих асимптотическую устойчивость решений уравнения (20).

Для этого рассмотрим следующую квадратичную форму:

$$V = \sum_{i,\, j=1}^{\infty} \frac{u_i\, u_j}{(\lambda_i + \lambda_j)\, \Delta'(\lambda_i)\, \Delta'(\lambda_j)}. \tag{31}$$

Очевидно, что

$$W = \frac{dV}{dt} = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i}{\Delta'(\lambda_i)} \right|^2 = x^2(t). \tag{32}$$

Подставляя в (31) вместо u_k $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ их аналитическое выражение, получим

$$\begin{aligned} V = {} & Ax^2(t) + x(t) \int_{-\tau_1}^{0} B_1(\nu)\, x(t+\nu)\, d\nu + \\ & + x(t) \int_{-\tau_2}^{0} B_2(\nu)\, x(t+\nu)\, d\nu + \\ & + \int_{-\tau_1}^{0} \int_{-\tau_1}^{0} K_1(\rho,\ \sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho\, d\sigma + \\ & + \int_{-\tau_2}^{0} \int_{-\tau_2}^{0} K_2(\rho,\ \sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho\, d\sigma + \\ & + \int_{-\tau_1}^{0} \int_{-\tau_2}^{0} D(\rho,\ \sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho\, d\sigma, \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i,\, j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)\, \Delta'(\lambda_i)\, \Delta'(\lambda_j)}, \\ B_q(\nu) &= 2b_q \sum_{i,\, j=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_j(\tau_q+\nu)}}{(\lambda_i + \lambda_j)\, \Delta'(\lambda_i)\, \Delta'(\lambda)_j}, \\ K_q(\rho,\ \sigma) &= b_q^{\,2} \sum_{i,\, j=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_i(\tau_q+\rho)}\, e^{-\lambda_j(\tau_q+\sigma)}}{(\lambda_i + \lambda_j)\, \Delta'(\lambda_i)\, \Delta'(\lambda_j)}, \\ D(\rho,\ \sigma) &= 2b_1 b_2 \sum_{i,\, j=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_i(\tau_1+\rho)}\, e^{-\lambda_j(\tau_2+\sigma)}}{(\lambda_i + \lambda_j)\, \Delta'(\lambda_i)\, \Delta'(\lambda_j)}, \end{aligned} \tag{34}$$

$q = 1,\ 2.$

Пусть начальное возмущение уравнения (20) задано в виде

$$\varphi^*(\nu) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\tau_2 \leqslant \nu < 0, \\ 1 \text{ при } \qquad\quad \nu = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Тогда среди начальных значений $u_j(0)$ нет равных нулю, а именно, в соответствии с (28)

$$u_j(0) = 1,\ (j = 1,\ 2,\ \ldots)$$

и, следовательно, для исследования рассматриваемой задачи достаточно вычислить коэффициент A

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)\,\Delta'(\lambda_i)} \right] \frac{1}{\Delta'(\lambda_j)}. \tag{36}$$

В соответствии с [43, 44]

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda)\,\Delta'(\lambda_i)} = -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \tag{37}$$

на всей плоскости комплексного переменного λ.
Или

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)\,\Delta'(\lambda_i)} = \frac{1}{\lambda_j + a + b_1 e^{\lambda_j \tau_1} + b_2 e^{\lambda_j \tau_2}}. \tag{38}$$

Подставляя (38) в (36), находим

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_j + b_1 e^{\lambda_j \tau_1} + b_2 e^{\lambda_j \tau_2})\,\Delta'(\lambda_j)}. \tag{39}$$

Предположим, что запаздывания τ_1 и τ_2 кратны между собой, а именно:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau, \\ \tau_2 &= 2\tau_1 = 2\tau. \end{aligned} \tag{40}$$

Введем новое переменное

$$z = e^{\lambda\tau}, \tag{41}$$

или

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \ln z. \tag{42}$$

Характеристический квазиполином (21) запишется в виде

$$\Delta(z) = \frac{1}{\tau} \ln z - a - \frac{b_1}{z} - \frac{b_2}{z^2} = 0, \tag{43}$$

при этом

$$\Delta'(\lambda_j) = \tau z_j \Delta'(z_j), \tag{44}$$

где $\Delta'(z_j)$ — производная от характеристического квазиполинома (43) по z при $z = z_j$.

Из равенств (3.20) и (44) следует, что

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau} \ln z_j + a + b_1 z_j + b_2 z_j^2\right) \tau z_j \Delta'(z_j)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2a + \frac{b_1}{z_j} + \frac{b_2}{z_j^2} + b_1 z_j + b_2 z_j^2\right) \tau z_j \Delta'(z_j)}. \tag{45}$$

Обозначим через $\alpha_к$, ($к = 1, 2, 3, 4$) корни полинома

$$b_2 z_j^4 + b_1 z_j^3 + 2az_j^2 + b_1 z_j + b_2 = 0. \tag{46}$$

Полагая корни полинома (46) простыми, на основании равенства (45) получим

$$A = \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_k}{b_2 (z_j - \alpha_k (\Delta' (s_j))}, \tag{47}$$

где постоянные $c_к$ определены разложением функции

$$\frac{z_j}{b_2 z_j^4 + b_1 z_j^3 + 2az_j^2 - b_1 z_j + b_2} \tag{48}$$

на простые дроби.

На основании равенства, аналогичного равенству (37), из (3.28) получим

$$A = -\frac{1}{b_2 \tau} \sum_{k=1}^{4} \frac{c_k}{\frac{1}{\tau} \ln \alpha_k - a - \frac{b_1}{\alpha_k} - \frac{b_2}{\alpha_k^2}}. \tag{49}$$

Но тогда в силу (32) и (33) область асимптотической устойчивости решений уравнения (20) найдется из условия

$$\frac{1}{b_2 \tau} \sum_{k=1}^{4} \frac{c_k}{\frac{1}{\tau} \ln \alpha_k - a - \frac{b_1}{\alpha_k} - \frac{b_2}{\alpha_k^2}} > 0. \tag{50}$$

В соотвествии с изложенным в предыдущем параграфе неравенство (50) рассматривается до первой смены знака при увеличении запаздывания. Естественно, при этом предполагается, что при $\tau = 0$ область асимптотической устойчивости решений уравнения (20) существует.

Отметим, что при $b_1 = 0$ неравенство (50) совпадает с соответствующим неравенством предыдущего параграфа.

Рассмотренная в данном параграфе задача допускает обобщение на n запаздываний.

4. Частный случай задачи Рауса-Гурвица для уравнения второго порядка

Движение некоторых технических систем может быть описано уравнением

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = b \frac{dx(t)}{dt} + dx(t-\tau), \tag{51}$$

где b, d — постоянные, τ — запаздывание.

Введем обозначения

$$x(t) = x_1(t),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = x_2(t).$$

Тогда уравнение (51) может быть записано в виде системы двух дифференциальных уравнений,

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt}=bx_2(t)+dx_1(t-\tau). \tag{52}$$

В соответствии с расщеплением С. Н. Шиманова, системе (52) эквивалентна счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i(t)}{dt}=\lambda_i\, y_i(t),\ (i=1,\ 2,\ \ldots), \tag{53}$$

где λ_i — корни характеристического квазиполинома

$$\Delta(\lambda)=\lambda^2-b\lambda-de^{-\lambda\tau}=0, \tag{54}$$

а $y_i(t)$ — линейные функционалы

$$y_i(t)=x_1(t)+\frac{1}{\lambda_i-b}\,x_2(t)+$$

$$+\frac{d}{\lambda_i-b}\int\limits_{-\tau}^{0}x_1(t+\nu)\,e^{-\lambda_i(\tau+\nu)}\,d\nu. \tag{55}$$

При этом решения $x_1(t+\nu)$, $x_2(t+\nu)$, $t>0$, $[-\tau\leqslant\nu\leqslant0]$ системы (52) представимы в виде:

$$x_1(t+\nu)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\lambda_i-b)\,e^{\lambda_i\nu}}{\Delta'(\lambda_i)}\,y_i(t),$$

$$x_2(t+\nu)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i(\lambda_i-b)\,e^{\lambda_i\nu}}{\Delta'(\lambda_i)}\,y_i(t), \tag{56}$$

где $\Delta'^1(\lambda_j)$ — производная от характеристического квазиполинома (54) по λ при $\lambda=\lambda_i$.

Как и выше, корни квазиполинома (54) предполагаются простыми, расположенными в порядке убывания действительных частей. Рассмотрим следующую квадратичную форму

$$V=\sum_{i,\,j=1}^{\infty}\frac{(\lambda_i-b)(\lambda_j-b)\,y_iy_j}{(\lambda_i+\lambda_j)\,\Delta'(\lambda_i)\,\Delta'(\lambda_j)}. \tag{57}$$

Производная по времени от формы V в силу системы (53) представляет собой квадрат решения уравнения (51), то есть

$$W=\frac{dV}{dt}=x_1^2(t). \tag{58}$$

Подставляя в (57) вместо $y_к$ ($к=1,\ 2,\ \ldots$) их аналитическое выражение, определенное равенством (55), получим

$$V = Ax_1^2(t) + Bx_1(t)\,x_2(t) + Cx_2^2(t) +$$
$$+ x_1(t)\int_{-\tau}^{0} D(\nu)\,x_1(t+\nu)\,d\nu + x_2(t)\int_{-\tau}^{0} E(\nu)\,x_1(t+\nu)\,d\nu +$$
$$+ \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} K(\rho,\ \sigma)\,x_1(t+\rho)\,x_1(t+\sigma)\,d\rho\,d\sigma, \tag{59}$$

где

$$A = \sum_{i,\ j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_i - b)(\lambda_j - b)}{(\lambda_i + \lambda_j)\,\Delta'(\lambda_i)\,\Delta'(\lambda_j)}, \tag{60}$$

$$B = 2\sum_{i,\ j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_i - b)}{(\lambda_i + \lambda_j)\,\Delta'(\lambda_i)\,\Delta'(\lambda_j)}, \tag{61}$$

$$C = \sum_{i,\ j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)\,\Delta'(\lambda_i)\,\Delta'(\lambda_j)}, \tag{62}$$

$$D(\nu) = 2d\sum_{i,\ j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_i - b)\,e^{-\lambda_j(\tau+\nu)}}{(\lambda_i + \lambda_j)\,\Delta'(\lambda_i)\,\Delta'(\lambda_j)}, \tag{63}$$

$$E(\nu) = 2d\sum_{i,\ j=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_i(\tau+\nu)}}{(\lambda_i + \lambda_j)\,\Delta'(\lambda_i)\,\Delta'(\lambda_j)}, \tag{64}$$

$$K(\rho,\ \sigma) = d^2\sum_{i,\ j=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_i(\tau+\rho)}\,e^{-\lambda_j(\tau+\sigma)}}{(\lambda_i + \lambda_j)\,\Delta'(\lambda_i)\,\Delta'(\lambda_j)}. \tag{65}$$

Покажем, что

$$C = -\int_0^{\infty} x_1^2(t)\,dt, \tag{66}$$

где $x_1(t)$ — решение системы (52) с начальным возмущением

$$x_2^0(\nu) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\tau \leqslant \nu < 0, \\ 1 \text{ при } \qquad\quad \nu = 0. \end{cases}$$

Действительно, так как

$$y_i(0) = \frac{1}{\lambda_i - b}, \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{67}$$

то на основании системы (53) решение $x_1(t)$ системы (52) может быть представлено в виде ряда

$$x_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_j t}}{\Delta'(\lambda_j)}.$$

Но тогда

$$\int_0^\infty x_1^2(t)\,dt = \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_i t}}{\Delta'(\lambda_i)}\right]^2 dt,$$

и, предполагая вещественные части корней квазиполинома (54) отрицательными, получим

$$C = \sum_{i,\,j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)\,\Delta'(\lambda_i)\,\Delta'(\lambda_j)} =$$

$$= -\int_0^\infty \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{e^{(\lambda_i+\lambda_j)t}}{\Delta'(\lambda_i)\,\Delta'(\lambda_j)}\,dt = -\int_0^\infty x_1^2(t)\,dt.$$

Вычислим коэффициент C.

В силу работ [43, 44] имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda)\,\Delta'(\lambda_i)} = -\frac{1}{\lambda^2 - b\lambda - de^{-\lambda\tau}} \tag{68}$$

на всей плоскости комплексного переменного λ.

Но тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)\,\Delta'(\lambda_j)} = -\frac{1}{\lambda_i^2 + b\lambda_i - de^{\lambda_i\tau}}. \tag{69}$$

Так как λ_i — корни уравнения (54), то

$$e^{\lambda_i\tau} = \frac{d}{\lambda_i^2 - b\lambda_i},$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)\,\Delta'(\lambda_j)} = -\frac{\lambda_i^2 - b\lambda_i}{\lambda_i^4 - b^2\lambda_i^2 - d^2}. \tag{70}$$

Подставляя (70) в (62), находим

$$C = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2 - b\lambda_i}{[\lambda_i^4 - b^2\lambda_i^2 - d^2]\,\Delta'(\lambda_i)}.$$

Полагая

$$\frac{\lambda_i^2 - b\lambda_i}{\lambda_i^4 - b^2\lambda_i^2 - d^2} = \frac{A_1}{\lambda_i + k_1} + \frac{A_2}{\lambda_i - k_1} + \frac{A_3}{\lambda_i + k_2} + \frac{A_4}{\lambda_i - k_2},$$

где

$$k_{1,2}^1 = \frac{b^2}{2} \pm \sqrt{\frac{b^4}{4} + d^2},$$

получим

$$C = -\frac{1}{2k_1(k_2^2 - k_1^2)}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{bk_1 + k_1^2}{(\lambda_i + k_1)\Delta'(\lambda_i)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{bk_1 - k_1^2}{(\lambda_i - k_1)\Delta'(\lambda_i)}\right] - \frac{1}{2k_2(k_1^2 - k_2^2)} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{bk_2 + k_2^2}{(\lambda_i + k_2)\Delta'(\lambda_i)} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{bk_2 - k_2^2}{(\lambda_i - k_2)\Delta'(\lambda_i)}\right]. \tag{71}$$

Но тогда на основании (69)

$$C = \frac{k_1 \operatorname{sh} k_1\tau - b \operatorname{ch} k_1\tau}{2(k_2^2 - k_1^2)[d - k_1^2 \operatorname{ch} k_1\tau + bk_1 \operatorname{sh} k_1\tau]} +$$

$$+ \frac{k_2 \operatorname{sh} k_2\tau - b \operatorname{ch} k_2\tau}{2(k_1^2 - k_2^2)[d - k_2^2 \operatorname{ch} k_2\tau + bk_2 \operatorname{sh} k_2\tau]}. \tag{72}$$

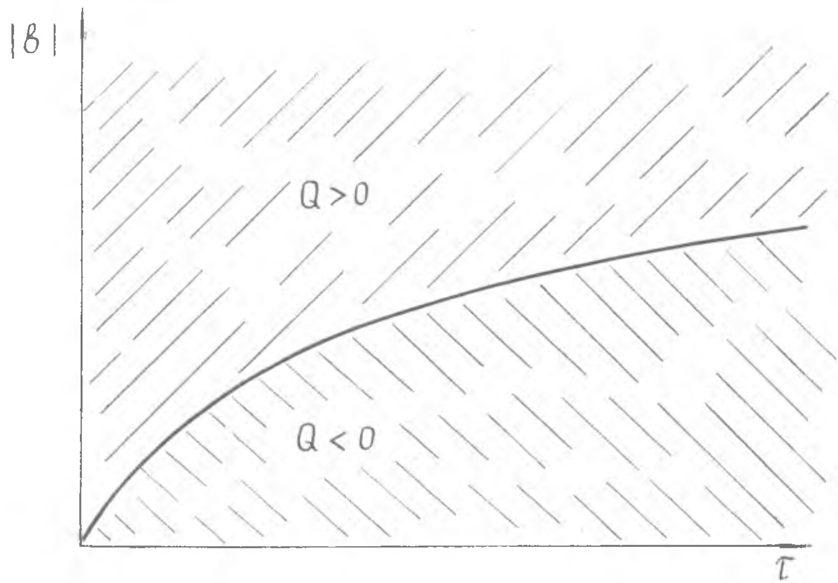


Рис. 4.

Полагая в равенстве (72)

$$ik_2\tau = \pi$$

здесь и далее $i = \sqrt{-1}$, получим

$$C = \frac{1}{2(k_2^2 - k_1^2)}\left[\frac{k_1 \operatorname{sh} \mu - b \operatorname{ch} \mu}{d - k_1^2 \operatorname{ch} \mu + bk_1 \operatorname{sh} \mu} - \frac{b}{d + k_2^2}\right], \tag{73}$$

где

$$\mu = \frac{k_1 \pi}{i k_2}.$$

Ввиду того, что все начальные возмущения переменных $y_к$ ($к = 1, 2, \ldots$) в соответствии с (67) отличны от нуля, то решения уравнения (51) будут асимптотически устойчивы при

$$Q = \left| \frac{k_1 \operatorname{sh} \mu - b \operatorname{ch} \mu}{d - k_1^2 \operatorname{ch} \mu + b k_1 \operatorname{sh} \mu} - \frac{b}{d + k_2^2} \right| > 0, \tag{74}$$

так как

$$\kappa_2^2 - \kappa_1^2 < 0.$$

При этом неравенство $Q > 0$ берется до первой смены знака.

Опуская детальное исследование неравенства (74), приведем область асимптотической устойчивости на плоскости параметров b и τ ($b<0$) (рис. 4).

5. О решении задачи для уравнений более высокого порядка

В заключение приложения приведем схему решения рассматриваемой задачи для уравнения n-го порядка

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) + a_0 x(t-\tau) = 0, \tag{75}$$

где $a_к$ ($к = 0, 1, \ldots, n$), τ — постоянные ($\tau > 0$).

Уравнение (75) может быть записано в виде системы:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\dot{x}_{n-1} = x_n \\ &\dot{x}_n = -a_1 x_n(t) - \ldots - a_n x_1(t) - a_0 x_1(t-\tau). \end{aligned} \tag{76}$$

В соответствии с разложением С. Н. Шиманова системе (76) эквивалентна счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_i(t) = \lambda_i y_i(t), \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{77}$$

где λ_i — корни квазиполинома

$$\begin{aligned} &\Delta(\lambda) = f(\lambda) + a_0 e^{-\lambda\tau} = 0, \\ &f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n, \end{aligned} \tag{78}$$

а $y_i(t)$ — линейные функционалы

$$y_i(t) = x_1(t) + x_2(t) \frac{\lambda_i^{n-2} + a_1 \lambda_i^{n-3} + \ldots + a_{n-2}}{\lambda_i^{n-1} + a_1 \lambda_i^{n-2} + \ldots + a_{n-1}} +$$

$$+ \ldots + x_n(t) \frac{1}{\lambda_i^{n-1} + a_1 \lambda_i^{n-2} + \ldots + a_{n-1}} +$$

$$-\frac{a^0}{\lambda_i^{n-1}+a_1\lambda_i^{n-2}+\ldots+a_{n-1}}\int_{-\tau}^{0}x_1(t+\nu)\,e^{-\lambda_i(\tau+\nu)}\,d\nu. \qquad (79)$$

При этом j-ое решение системы (76) может быть представлено в виде ряда

$$x_j(t+\nu)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^{j-1}(\lambda_i^{n-1}+a_1\lambda_i^{n-2}+\ldots+a_{n-1})\,e^{\lambda_i\nu}}{\Delta'(\lambda_i)}\,y_i(t), \qquad (80)$$

где $\Delta'(\lambda_j)$ — производная от квазиполинома (78) по λ.

Предположим, что исследование задачи будем проводить путем вычисления квадратичного функционала V, производная от которого в силу системы (76) является квадратом решения уравнения (75), то есть

$$\frac{dV}{dt}=W=x_1^2(t)=x^2(t). \qquad (81)$$

Покажем, что исследование в этом случае может быть произведено, если задан полином $f(\lambda)$.

Действительно, в соответствии с (81) и (80) искомый квадратичный функционал может быть представлен в виде

$$V=\sum_{i,\,j=1}^{\infty}\frac{\psi(\lambda_i)\,\psi(\lambda_j)}{(\lambda_i+\lambda_j)\,\Delta'(\lambda_i)\,\Delta'(\lambda_j)}\,y_i(t)\,y_j(t), \qquad (82)$$

где $\varphi(\lambda)$ следующий полином:

$$\psi(\lambda)=\lambda_i^{n-1}+a_1\lambda_i^{n-2}+\ldots+a_{n-1}. \qquad (83)$$

Полагая начальные возмущения равными

$$x_i^0(\nu)=0,\quad [-\tau\leqslant\nu\leqslant 0],\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

$$x_n^0(\nu)=\begin{cases}0 \text{ при } -\tau\leqslant\nu\leqslant 0\\ 1 \text{ при } \qquad\quad \nu=0,\end{cases} \qquad (84)$$

сведем исследование задачи к исследованию суммы

$$A=\sum_{i,\,j=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_i+\lambda_j)\,\Delta'(\lambda_i)\,\Delta'(\lambda_j)}. \qquad (85)$$

Суммирование справа в (85) аналогично вышеизложенным.

Так как имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_i+\lambda_j)\,\Delta'(\lambda_i)}=\frac{f(\lambda_j)}{f(-\lambda_j)\,f(\lambda_j)-a_0^2},$$

то, разлагая на простые множители

$$\frac{f(\lambda_j)}{f(-\lambda_j)\,f(\lambda_j)-a_0^2}=\sum_{m=1}^{n}\frac{A_m}{l_j+k_m}+\sum_{m=1}^{n}\frac{B_m}{l_j-k_m}$$

и затем повторно суммируя, найдем аналитическое выражение коэффициента A.

Естественно, при этом корни полинома $f(-\lambda)f(\lambda) - a_o^2 = 0$ предполагаются простыми.

Вычисление области асимптотической устойчивости решений уравнения (75) может быть проведено с использованием аналитического выражения коэффициента A на ЭЦВМ.

Приложение II

ПРЯМОЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

При вычислении квадратичных функционалов для линейных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием времени можно использовать способ, аналогичный способу вычисления квадратичных форм для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Указанный способ был применен в работе [40] для уравнения первого порядка в том случае, когда производная от искомого квадратичного функционала в силу рассматриваемого уравнения является квадратом решения. Приведем схему применения его в простейшем случае.

1. Схема вычисления квадратичного функционала

Пусть требуется вычислить квадратичный функционал

$$V = Ax^2(t) + x(t)\int_{-\tau}^{0} B(\nu)\,x(t+\nu)\,d\nu + \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} K(\rho,\sigma)\,x(t+\rho)\,x(t+\sigma)\,d\rho\,d\sigma, \quad (1)$$

производная от которого по времени в силу уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t-\tau), \quad (2)$$

где a, τ — Const, $(\tau > 0)$, является заданным квадратичным функционалом вида

$$W = \frac{dV}{dt} = Ex^2(t) + x(t)\int_{-\tau}^{0} F(\nu)\,x(t+\nu)\,d\nu + \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} M(\rho,\sigma)\,x(t+\rho)\,x(t+\sigma)\,d\rho\,d\sigma. \quad (3)$$

Производная от первого слагаемого функционала (1) в силу уравнения (2) суть

$$\frac{dAx^2(t)}{dt}=2aAx(t)\,x(t-\tau). \qquad (4)$$

Производную от второго слагаемого указанного выше функционала находим следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)\int_{-\tau}^{0}B(\nu)\,x(t+\nu)\,d\nu\right]=ax(t-\tau)\int_{-\tau}^{0}B(\nu)\,x(t+\nu)\,d\nu+$$

$$+x(t)\int_{-\tau}^{0}B(\nu)\,\frac{dx(t+\nu)}{d\nu}\,d\nu. \qquad (5)$$

Интегрируя по частям, второе слагаемое равенства (5) представим в виде

$$x(t)\int_{-\tau}^{0}B(\nu)\,dx(t+\nu)=B(0)\,x^2(t)-B(-\tau)\,x(t)\,x(t-\tau)-$$

$$-x(t)\int_{-\tau}^{0}\frac{dB(\nu)}{d\nu}\,x(t+\nu)\,d\nu. \qquad (6)$$

Аналогично

$$\frac{d}{dt}\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0}K(\rho,\ \delta)\,x(t+\rho)\,x(t+\sigma)\,d\rho\,d\sigma=$$

$$=x(t)\int_{-\tau}^{0}[K(0,\ \nu)+K(\nu,\ 0)]\,x(t+\nu)\,d\nu-$$

$$-x(t-\tau)\int_{-\tau}^{0}[K(-\tau,\ \nu)+K(\nu,\ -\tau)]\,x(t+\nu)\,d\nu-$$

$$-\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0}\left[\frac{\partial K(\rho,\sigma)}{\partial\rho}+\frac{\partial K(\rho,\sigma)}{\partial\sigma}\right]x(t+\rho)\,x(t+\sigma)\,d\rho\,d\delta. \qquad (7)$$

Но тогда из (4), (5) и (6) получим

$$\begin{aligned}&E=B(0),\\&F(\nu)=-\frac{dB(\nu)}{d\nu}+K(0,\ \nu)+K(\nu,\ 0),\\&M(\rho,\ \sigma)=-\frac{\partial K(\rho,\sigma)}{\partial\rho}-\frac{\partial K(\rho,\sigma)}{\partial\sigma}.\end{aligned} \qquad (8)$$

При этом должны выполняться неравенства

$$\begin{aligned}&2aA=B(-\tau),\\&aB(\nu)-K(-\tau,\ \nu)-K(\nu,\ -\tau)=0.\end{aligned} \qquad (9)$$

Укажем схему решения системы (8) в том случае, когда заданный квадратичный функционал имеет вид

$$W=-x^2(t) \qquad (10)$$

Тогда имеют место равенства:

$$B(o) = -1$$

$$\frac{dB(\nu)}{d\nu} - K(0, \nu) - K(\nu, 0) = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial K(\rho, o)}{\partial \rho} + \frac{\partial K(\rho, \sigma)}{\partial \sigma} = 0.$$

Из условий (9) и системы (11) следует, что

$$K(\rho, \sigma) = \begin{cases} \varphi(\rho - \sigma) & \text{при } \rho < \sigma \\ \varphi(\sigma - \rho) & \text{при } \sigma < \rho, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered} \varphi(\zeta) = aB(-\tau - \zeta), \\ [-\tau \leqslant \zeta, \ \rho, \ \sigma \leqslant 0]. \end{gathered} \tag{13}$$

Дифференцируя второе равенство системы (11), получим уравнение

$$\frac{d^2 B(\nu)}{d\nu^2} + a^2 B(\nu) = 0. \tag{14}$$

Интегрируя (14), на основании первых равенств из (9), (11), а также (12), (13) найдем искомый квадратичный функционал V.

2. Некоторые замечания

Во второй главе получено решение задачи (1) — (3) и тем самым решение системы (8) с условиями (1.9). Это решение является в тоже время и единственным. Необходимо отметить, что функция $K(\rho, \sigma)$, $[-\tau \leqslant \rho, \sigma \leqslant 0]$ может быть менее гладкой по отношению к заданной функции $M(\rho, \sigma)$. Вышесказанное утверждение непосредственно следует из результатов второй главы. В связи с этим метод решения задачи (1) — (3), развитый во второй главе, является более работоспособным. В частности, не вызывает затруднений применение его в том случае, когда заданные функции $F(\nu)$, $M(\rho, \sigma)$ имеют разрывы. Далее, можно было бы искать для уравнения (2) квадратичный функционал V в виде

$$\begin{aligned} V = Ax^2(t) + x(t) \int_{-\tau}^{0} B(\nu)\, x(t+\nu)\, d\nu + \\ + \int_{-\tau}^{0} C(\nu)\, x^2(t+\nu)\, d\nu + \\ + \int_{-\tau}^{0} \int_{-\tau}^{0} K(\rho, \sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho\, d\sigma \end{aligned} \tag{15}$$

при следующем заданном квадратичном функционале W:

$$W = Ex^2(t) + Nx(t)\, x(t-\tau) + Qx^2(t-\tau) +$$

$$+ x(t) \int_{-\tau}^{0} F(\nu)\, x(t+\nu)\, d\nu + x(t-\tau) \int_{-\tau}^{0} P(\nu)\, x(t+\nu)\, d\nu +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} \int_{-\tau}^{0} M(\rho, \sigma)\, x(t+\rho)\, x(t+\sigma)\, d\rho\, d\sigma, \qquad (16)$$

то есть так же, как в работе [40].

Однако автор ограничился задачей вида (1)—(3) на основании следующего рассуждения: уравнению с запаздыванием времени эквивалентна счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой при исследовании устойчивости решений необходимо строить квадратичные формы счетного числа переменных. Так как переменные в соответствии с разложением являются линейными функционалами, то, суммируя под знаком интеграла, придем к задаче вида (1)—(3).

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Акилов, Л. В. Канторович. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
2. Э. Г. Альбрехт. Об оптимальной стабилизации нелинейных систем. ПММ, т. XXV, вып. 5, 1961.
3. Е. А. Барбашин. Функции Ляпунова, «Наука», 1970.
4. Р. Беллман, К. Кук. Дифференциально-разностные уравнения, «Мир», 1967.
5. Б. З. Вулих. Введение в функциональный анализ. «Наука», 1967.
6. Н. П. Еругин. Задачи А. М. Летова, ДАН БССР, т. 7, № 11, 1963.
7. Н. Н. Красовский. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системах с запаздыванием времени. ПММ, 26, вып. 1, 1962.
8. Н. Н. Красовский. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
9. Н. Н. Красовский. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием. Труды конгресса ИФАК, М., 1963.
10. Н. Н. Красовский. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием, ПММ, 28, вып. 4. 1964.
11. Н. Н. Красовский, Ю. С. Осипов. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования. Техническая кибернетика, вып. 6, 1963.
12. Я. К. Курцвейль. К аналитическому конструированию регуляторов. Автоматика и телемеханика, 22, № 6, 1961.
13. З. Х. Леник. О втором методе Ляпунова с квадратичными формами, зависящими от параметров, в применении к нелинейной системе автономных дифференциальных уравнений с линейной частью. АН СССР, 1960.
14. С. Лефшец. Устойчивость нелинейных систем автоматического управления. «Мир», 1967.
15. А. М. Летов. Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования. Гостехиздат, 1955.
16. А. М. Летов. Аналитическое конструирование регуляторов, Автоматика и телемеханика, № 4, 5, 6, 1960, № 4, 1961.
17. А. М. Летов. Проблематика научных исследований в области автоматического управления. Автоматика и телемеханика, № 8, 1966.
18. А. И. Лурье, В. Н. Постников. К теории устойчивости регулируемых систем. ПММ, № 8, вып. 3, 1944.
19. А. И. Лурье. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951,

20. А. И. Лурье. Прямой метод Ляпунова и его применение в теории автоматического регулирования. АН СССР, 1955.
21. Л. А Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа, Гостехиздат, 1951.
22. А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения, Физматгиз, 1959.
23. И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. «Наука», 1956.
24. Е. М. Маркушин, С. Н. Шиманов. Приближенное решение задачи конструирования регулятора для систем с запаздыванием «Автоматика и телемеханика», № 3, 1968.
25. Е. М. Маркушин, С. Н. Шиманов. О сходимости оптимального управления счетной системой дифференциальных уравнений. ДУ, № 3, 1966.
26. Е. М. Маркушин, С. Н. Шиманов. Приближенное решение задачи аналитического конструирования регулятора для систем с запаздыванием ДУ, № 8, 1966.
27. Е. М. Маркушин. Вычисление асимптотических коэффициентов оптимального управления задачи аналитического конструирования регулятора для уравнения с запаздыванием. УрГУ, Матем. записки, т. VI, стр. 4, 1968.
28. Е. М. Маркушин. О вычислении квадратичных функционалов в одном частном случае, ДУ, № 2, 1971.
29. Е. М. Маркушин. О вычислении квадратичных функционалов для систем с запаздыванием времени. ДУ, № 2, 1971.
30. Н. Н. Мейман, Н. Г. Чеботарев. Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. Труды института им. Стеклова, т. 26, 1949.
31. А. Д. Мышкис. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Гостехиздат, 1951.
32. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1949.
33. Ю. С. Осипов. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием. ДУ, № 5, 1965.
34. Ю. С. Осипов. О стабилизации нелинейных управляемых систем с запаздыванием в критическом случае одного нулевого корня. ДУ, № 7, 1965.
35. Э. Пинни. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. ИЛ, 1961.
36. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
37. Л. С. Понтрягин. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций. Изв. АН СССР, № 3, 1942.
38. Л. С. Понтрягин. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций (добавление). ДАН СССР, № 66, 1953.
39. В. М. Попов, А. Халанай. Об одной задаче в теории оптимальных систем с запаздыванием. Автоматика и телемеханика, № 2, 1962.
40. Ю. М. Репин. Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием. ПММ, 26, вып. 1, 1962.
41. Ю. М. Репин, В. Е. Третьяков. Решение задачи об аналитическом конструировании регулятора на моделирующих устройствах. Автоматика и телемеханика, № 6, 1963.
42. В. В. Румянцев. Об устойчивости движения относительно части переменных. Вестник МГУ, № 4, 1957.
43. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 1—5. Физматгиз, 1959.
44. С. Стоилов. Теория функций комплексного переменного. ИЛ., 1962.
45. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Гостехиздат, 1949.
46. Я. З. Цыпкин. Устойчивость систем автоматического регулирования. Гостехиздат, 1949.
47. Н. Г. Четаев. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1956.
48. С. Н. Шиманов. К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени. ПММ, 27, вып. 3, 1963.

49. С. Н. Шиманов. О неустойчивости движения систем с запаздыванием времени. ПММ. 24, вып. 1, 1960.

50. Л. В. Эльсгольц. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. «Наука», 1964.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Алимов. К вопросу о построении функций Ляпунова для систем линейных дифференциальных уравнении с постоянными коэффициентами. Сибирский матем. ж. № 1, 1961.

2. А. А. Андронов, А. Г. Маер. Простейшие линейные системы с запаздыванием. Автоматика и телемеханика, № 2—3, 1946.

3. Е. А. Барбашин. О построении функций Ляпунова. «Диф. уравнения», № 12, 1968.

4. Е. А. Барбашин. Введение в теорию устойчивости, «Наука», 1967.

5. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1963.

6. Д. А. Виккер. Эффект запаздывания в процессах автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, № 6, 1937.

7. В. Е. Германдзе. Об асимптотической устойчивости систем с запаздывающим аргументом. УМН, № 4, 1959.

8. Г. С. Горелик. К теории запаздывающей обратной связи. Журн. техн. физики, № 5, 1939.

9. Г. Н. Дубошин. Основы теории устойчивости движения. Издательство МГУ, 1952.

10. Н. П. Еругин. Качественное исследование интегральных кривых системы дифференциальных уравнений. ПММ, № 6, 1950.

11. Н. П. Еругин. Качественные методы в теории устойчивости. ПММ, № 5, 1955.

12. А. М. Зверкин. К теории линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, 1959.

13. В. И. Зубов. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Судпромгаз, Л., 1959.

14. Г. А. Каменский. К общей теории уравнений с отклоняющимся аргументом. ДАН СССР, № 4, 1958.

15. К. Н. Козловский., С. П. Пешехонов. Автогенераторы с запаздыванием. Известия ВУЗ СССР, Радиотехника, № 4, 1960.

16. П. А. Кузьмин. Теорема Гурвица в прямом методе Ляпунова. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1962.

17. В. Г. Лабазин. Некоторые приемы исследования корней трансцендентных уравнений. Вестник ЛГУ, № 2, 1953.

18. Ж. Ла-салль., С. Лефшец. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. «Мир», 1964.

19. А. И. Лурье, Е. Н. Розенвассер. О методах построения функций Ляпунова в теории нелинейных регулируемых систем. Изд-во АН СССР, 1960.

20. А. Д. Мышкис, Л. Э. Эльсгольц. Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. УМН, № 2, 1967.

21. Ю. И. Неймарк. Д-разбиение пространства квазиполиномов. ПММ, № 4, 1949.

22. С. Б. Норкин. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. «Наука», 1965.

23. П. А. Перепелятник. Автоколебания в генераторе с запаздыванием. Радиотехника и электроника, № 10, 1961.

24. Ю. М. Плишкин. К вопросу об оценке интегральных критериев качества регулирования нелинейных систем. Автоматика и телемеханика, № 2, 1955.

25. Г. К. Пожарицкий. О построении функций Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. ПММ, № 2, 1958.

26. Б. С. Разумихин. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием. Автоматика и телемеханика, № 6, 1960.

27. Б. С. Разумихин. Об устойчивости тривиального решения систем второго порядка. ПММ, № 3, 1955.

28. Ю. М. Репин. Об устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом. ПММ, 1957.

29. Ю. М. Репин. Об условиях устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений при любых запаздываниях. Ученые записки, УрГУ, № 2, 1960.

30. В. В. Румянцев. К теории устойчивости регулируемых систем. ПММ, № 6, 1956.

31. И. М. Соболев. Положительные решения линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Ученые записки, МГУ, 1956.

32. М. А. Тагиров. О функции Ляпунова для уравнений электрической системы в консервативной изоляции. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, № 1, 1966.

33. Н. Г. Четаев. О выборе параметров устойчивости механической системы. ПММ, № 2, 1951.

34. Н. И. Чистяков. Об учете влияния фазового запаздывания в усилителе на автоматическую подстройку. Электросвязь, № 7, 1940.

35. С. Н. Шиманов. Об устойчивости в целом одной нелинейной системы уравнений. УМН, № 6, 1953.

36. С. Н. Шиманов. О почти периодических решениях в нелинейных системах с запаздыванием. ДАН СССР, 1959.

37. С. Н. Шиманов. К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием. ПММ, № 5, 1959.

38. Я. З. Цыпкин. Системы с запаздывающей обратной связью. Изд. оборон. техн., 1947.

39. Л. Э. Эльсгольц. Качественные методы в математическом анализе. Физматгиз, 1955.

40. В. П. Яковлев. Применение метода медленно меняющихся параметров для исследования нелинейных автоколебательных систем с запаздыванием. Радиотехника и электроника, № 6, 1961.

41. В. Яроминек. Об эквивалентности критерия устойчивости по Раусу-Гурвицу и по Маркову. ДАН СССР, № 6, 1960.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Евгений Михайлович Маркушин

ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

Редактор И. С. Колышева
Технический редактор Н. М. Каленюк
Корректор Е. П. Михайлова

ИГ30461. Подписано к печати 16/XII 1971 г.
Формат бумаги $60 \times 90^1/_{16}$. Объем 5,75 печ. л.
Тираж 1000 экз. Цена 90 коп.

Куйбышевский авиационный институт им. С. П. Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Тип. им. Мяги, г. Куйбышев, ул. Венцека, 60.
Заказ № 6777.