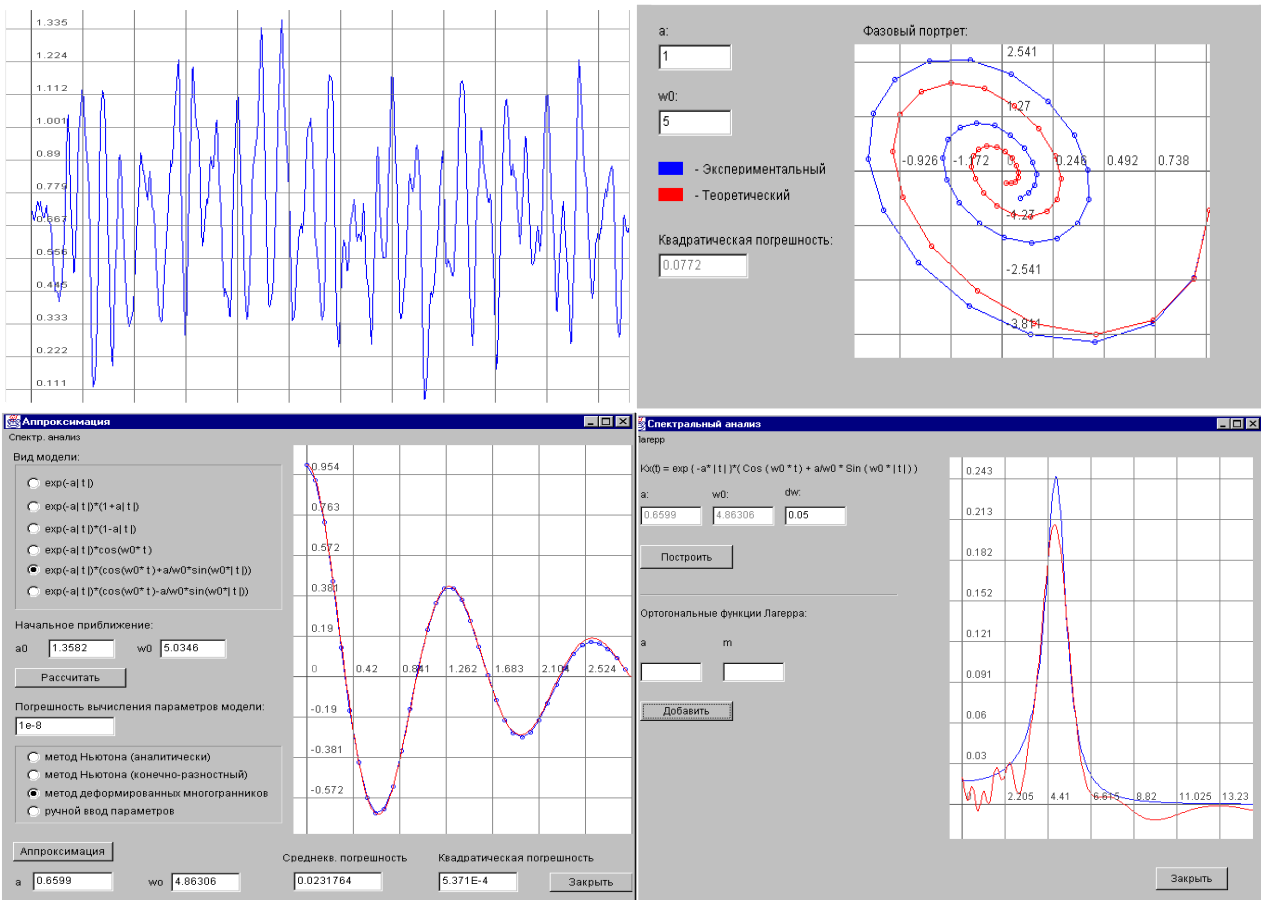


С.А. Прохоров

# АПРОКСИМАТИВНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Издание второе, переработанное и дополненное



Самара 2001 г.

## *Об авторе*



**Прохоров Сергей Антонович** – доктор технических наук, профессор, академик Международной академии информатизации, член-корреспондент Российской академии естественных наук, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, декан факультета информатики, заведующий кафедрой информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета, директор Самарского филиала Российского НИИ информационных систем.

В качестве председателя Головного Совета Минвуза России по автоматизации научных исследований в период 1988-1996 г.г. руководил разработкой и выполнением шести научно-исследовательских программ и подпрограмм АН СССР, Минэлектронпрома СССР, Минвуза России.

Результаты его работы нашли отражение в 183 научных трудах, в том числе, 10 монографиях, 40 авторских свидетельствах, 6 работах опубликованных за рубежом, выступлениях более, чем на 50 международных, всесоюзных и республиканских конференциях и симпозиумах.

УДК 681.518.3, 514:681.323/043.3/

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки РФ, член-корреспондент РАН, д. т. н., профессор

Сойфер В.А.;

д. ф.-м. н., профессор Жданов А.И.

Прохоров С.А.

**Аппроксимативный анализ случайных процессов.** – 2-е изд., перераб. и доп./Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2001. 380 с., ил.

Рассматриваются методы и алгоритмы, представляющие собой развитие идей метода наименьших квадратов при аппроксимации различных функциональных вероятностных характеристик, обладающих рядом специфических свойств.

Анализируются методы, алгоритмы идентификации случайных процессов, аппроксимации законов распределения, корреляционных функций и спектральных плотностей мощности параметрическими моделями, представляющими собой как функции заданного вида, так и ортогональные функции Лагерра.

Рассматриваются вопросы аппаратурной, аппаратно-программной и программной реализации разработанных алгоритмов аппроксимации, даются рекомендации по расчёту параметров разработанных средств и программного обеспечения.

Приводится описание разработанных автоматизированных информационных систем для аппроксимативного анализа случайных процессов.

Предназначена для научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по основам аппроксимативного анализа случайных процессов.

Издание монографии поддержано грантом 4-Г/2001 76/01/Б по программе «Поддержка важнейших разработок научных коллективов и отдельных учёных на основе системы грантов» по разделу «Важнейшие научные и технические разработки, соответствующие концепции социально-экономического развития Самары».

Печатается по решению издательского совета Самарского научного центра Российской академии наук.

**ISBN 5-93424-048-X**

© Самарский научный центр Российской академии наук, 2001

© Самарский государственный аэрокосмический университет

© С.А. Прохоров, 2001

СОДЕРЖАНИЕ	Стр.
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	6
ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ВВЕДЕНИЕ	11
1. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	25
1.1. Основные понятия и определения	25
1.2. Критерии согласия	28
1.3. Идентификация законов распределения	31
1.4. Метод моментов	35
1.5. Аппроксимация плотностей распределения вероятностей параметрическими моделями	39
1.6. Аппроксимация функций распределения вероятностей параметрическими моделями	47
1.7. АИС для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов	53
1.7.1. Описание подсистем	53
1.7.2. Описание интерфейса системы	56
1.7.3. Порядок работы с системой	65
1.8. Сравнительный анализ алгоритмов аппроксимации законов распределения	67
2. АППАРАТУРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИЯМИ ЗАДАННОГО ВИДА	84
2.1. Основные понятия и определения	84
2.2. Метод аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида	92
2.3. Анализ методических погрешностей аппроксимации корреляционных функций	99
2.4. Анализ статистических погрешностей аппроксимации корреляционных функций	102
2.5. Влияние неточности оценки параметров модели на погрешность аппроксимации корреляционных функций	107
2.6. Принципы построения основных блоков коррелометров с аппроксимацией	108
3. АППАРАТУРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА	115
3.1. Основные понятия и определения	115
3.2. Алгоритм оценки параметров функций Лагерра, обеспечивающий минимум квадратической погрешности аппроксимации	119
3.3. Алгоритм оценки параметра функций Лагерра, обеспечивающий минимум погрешности аппроксимации при ограничениях	123
3.4. на модель корреляционной функции	130
3.5. Упрощенный алгоритм оценки параметра функции Лагерра	
Применение экспоненциальной аппроксимации корреляционной функции для определения параметра ортогональных	134
3.6. функций Лагерра	
Минимизация статистической погрешности в коррелометрах с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра	139

3.7.	Анализ погрешности коррелометра с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра	143
3.8.	Аппроксимация взаимных корреляционных функций	148
4.	<b>АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ</b>	151
4.1.	Основные понятия и определения	151
4.2.	Идентификация корреляционных функций	153
4.3.	Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом Ньютона (с аналитическим взятием производных)	160
4.4.	Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом Ньютона (с конечно-разностными производными)	165
4.5.	Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом деформированного многогранника	174
4.6.	Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра	179
4.7.	Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра	182
4.8.	Аппроксимация взаимных корреляционных функций параметрическими моделями	185
4.9.	Анализ сходимости методов аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями	188
5.	<b>АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ</b>	188
5.1.	Основные понятия и определения	188
5.2.	Метод и алгоритмы корреляционного анализа неэвидистантных временных рядов с использованием интервальной корреляционной функции	193
5.3.	Аппроксимативный метод и алгоритмы измерения корреляционных функций неэвидистантных временных рядов	203
5.4.	Анализ методических погрешностей результатов измерений вероятностных характеристик неэвидистантных временных рядов	213
5.5.	Математическое описание неэвидистантных временных рядов	215
5.6.	Процессорные статистические анализаторы	223
5.7.	Аппроксимация корреляционных функций неэвидистантных временных рядов функциями заданного вида	230
5.8.	Аппроксимация корреляционных функций неэвидистантных временных рядов ортогональными функциями Лагерра	238
6.	<b>АППРОКСИМАТИВНЫЙ АНАЛИЗ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК</b>	244
6.1.	Оценка обобщенных корреляционных характеристик	244
6.1.1.	Оценка показателя колебательности	244
6.1.2.	Оценка интервала корреляции	246
6.1.3.	Оценка моментов корреляционных функций	257
6.1.4.	Оценка обобщенных характеристик взаимной корреляционной функции	259

6.2.	Аппроксимация спектральных плотностей мощности	262
6.3.	Оценка обобщенных спектральных характеристик	274
7.	<b>АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ АППРОКСИМАТИВНОГО КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА</b>	278
7.1.	Аппроксимативный анализ авто корреляционно-спектральных характеристик	278
7.2.	Аппроксимативный анализ взаимных корреляционно-спектральных характеристик	297
7.3.	Сравнительный анализ алгоритмов аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями	305
7.4.	Анализ алгоритмов аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра	317
7.5.	Анализ гидрологических параметров в открытой части Балтийского моря	334
	<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	343
	<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b>	344
	<b>ПРИЛОЖЕНИЯ</b>	350
П. 1.	Типовые законы распределения	350
П. 2.	Обратные функции законов распределения	355
П. 3.	Характеристики типовых законов распределения ( $P_d=0,999$ )	356
П. 4.	Таблица $\chi^2$ распределения	359
П. 5.	Таблица значений коэффициента $\lambda$ к критерию Колмогорова	359
П. 4.	Производные для однопараметрических плотностей вероятностей	360
П. 7.	Производные для двухпараметрических плотностей распределения вероятностей	361
П. 8.	Производные для однопараметрических функций распределения вероятностей	363
П. 9.	Производные для двухпараметрических функций распределения вероятностей	364
П.10.	Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом нерекурсивной фильтрации	366
П.11.	Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом рекурсивной фильтрации	367
П.12.	Параметрические модели корреляционных функций	368
П.13.	Ортогональные функции Лагерра	371
П.14.	Параметры моделей корреляционных функций в ортогональном базисе Лагерра	372
П.15.	Обобщенные спектральные характеристики	376
П.16.	Блок-схема автоматизированной информационной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа	378

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АЦП - аналого-цифровой преобразователь;  
БРП - блок регулировки параметров;  
ВУ - вычитающее устройство;  
ИП - измерительный преобразователь (датчик);  
К - коммутатор;  
КВ - квадратор;  
КФ - корреляционная функция;  
НКФ – нормированная корреляционная функция;  
М - количество дифференциальных коридоров;  
МУ - масштабирующее устройство;  
МУ - множительное устройство;  
НКФ - нормированная корреляционная функция;  
ПО - процессор обработки;  
УУ - усредняющее устройство;  
ФНЧ - фильтр нижних частот;  
 $A_{\Theta} \{ \epsilon(t_k) \}$  - алгоритм оценки вероятностной характеристики  $\Theta$ ;  
 $A_s \{ \epsilon(t_k) \}$  - алгоритм оценки сигнала;  
 $C_x(J)$  - интервальная корреляционная функция;  
 $d$  - параметр усреднения (время  $T$ , совокупность реализаций  $N$  или время и совокупность реализаций  $TN$ );  
 $\hat{D}_x$  - оценка дисперсии;  
 $\text{ent}[\ ]$  - операция взятия целой части числа;  
 $F\{ \}$  - функциональное преобразование полученных оценок вероятностных характеристик;  
 $|F''(x)|_{\max}$  - максимум модуля второй производной функции распределения;  
 $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  - аппроксимирующее выражение плотности распределения вероятностей;  
 $F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  - аппроксимирующее выражение функции распределения вероятностей;  
 $F_x(x)$  - функция распределения вероятностей;  
 $f_x(x)$  - плотность распределения вероятностей;  
 $g[\ ]$  - оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики  $\Theta$ ;  
 $h(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  - импульсная характеристика фильтра с регулируемыми параметрами;  
 $K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  - аппроксимирующее выражение корреляционной функции;  
 $k_a$  - коэффициент асимметрии;  
 $k_\epsilon$  - коэффициент эксцесса;  
 $k_\phi$  - коэффициент формы;  
 $K_x(\tau)$  - корреляционная функция стационарного случайного процесса;  
 $K_x(t, t')$  - корреляционная функция случайного процесса;  
 $K_{xy}(\tau)$  - взаимная корреляционная функция;

$k_{xy}$  - корреляционный момент;  
 $L_k(\tau, \alpha)$  - ортогональная функция Лагерра k-го порядка;  
 $M[\ ]$  - оператор математического ожидания;  
 $Me$  - медиана;  
 $Mo$  - мода;  
 $\hat{m}_x$  - оценка математического ожидания;  
 $\beta_j$  - частота попадания анализируемой случайной величины в j-ый дифференциальный коридор;  
 $P_x(\tau)$  - полярная (знаковая) корреляционная функция;  
 $R_x(\tau)$  - релейная корреляционная функция;  
 $S_d$  - оператор усреднения;  
 $Signu$  - знаковая функция.  
 $S_x(\omega)$  - спектральная плотность мощности процесса  $\overset{\circ}{x}(t)$ ;  
 $S_{xn} S_{xn}(\omega)$  - нормированная спектральная плотность мощности процесса  $\overset{\circ}{x}(t)$ ;  
 $S_{xy} S_{xy}(\omega)$  - взаимная спектральная плотность мощности;  
 $T_f T_\phi$  - постоянная времени ФНЧ;  
 $W W(j\omega)$  - частотная характеристика фильтра с регулируемыми параметрами;  
 $W_k W_k(j\omega)$  - частотная характеристика фильтра Лагерра k-го порядка;  
 $X_j x_j(t)$  - j-ая реализация случайного процесса;  
 $X_q \bar{x}(\Theta, t)$  - реализация случайного процесса;  
 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  - параметры аппроксимирующего выражения;  
 $\alpha_k$  - начальный момент k-го порядка;  
 $\beta_k$  - коэффициент разложения ортогонального ряда;  
 $\chi$  - коэффициент вариации;  
 $\Delta$  - погрешность аппроксимации;  
 $\Delta u$  - шаг квантования по уровню;  
 $\delta$  - погрешность аппроксимации;  
 $\delta_{ji}$  - индикатор состояния;  
 $\delta(t)$  -  $\delta$ -функция Дирака;  
 $\Delta t_{ji}$  - интервал дискретизации;  
 $\Delta \omega_\phi$  - полоса пропускания фильтра;  
 $\Delta \omega_c$  - эквивалентная ширина спектра мощности сигнала;  
 $\Delta x$  - ширина дифференциального коридора;  
 $\gamma_{см}$  - погрешность от смещенности оценки;  
 $\gamma_{см доп}, \gamma_{м доп}$  - допустимые значения погрешностей оценки;  
 $\gamma_m$  - методическая статистическая погрешность;  
 $\eta$  - пикфактор;  
 $\mu$  - показатель колебательности;



$\mu_k$  - центральный момент k-го порядка;

$\Theta_j[X(t)]$  - j-текущая оценка вероятностной характеристики;

$\Theta[X(t)]$ ,  $\Theta$  - измеряемая вероятностная характеристика;

$\bar{\Theta}$  - вектор информативных параметров случайного процесса;

$\Theta_{cp}[X(t)]$  - средняя оценка вероятностной характеристики;

$\Theta[X(t)]$  - оценка измеряемой вероятностной характеристики;

$\Theta_t[X(t)]$  - t-текущая оценка вероятностной характеристики;

$\rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  - аппроксимирующее выражение нормированной корреляционной функции;

$\rho_x(\tau)$  - нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса;

$\rho_x(t, t')$  - нормированная корреляционная функция случайного процесса;

$\rho_{xy}(\tau)$  - взаимная нормированная корреляционная функция;

$\rho_{xy}$  - коэффициент корреляции;

$\tau_k$  - интервал корреляции;

$\tau_{kmax}$  - максимальный интервал корреляции;

$\bar{\Omega}$  - вектор информативных параметров объекта исследований.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая Вашему вниманию монография написана для научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по основам аппроксимативного анализа случайных процессов.

Материалы, представленные в монографии, получены в результате выполнения научно-исследовательских работ на кафедрах «Информационно-измерительная техника», «Информационная техника» Самарского государственного технического университета (СамГТУ), «Информационные системы и технологии» Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ), Самарском филиале Российского НИИ информационных систем, математическом факультете Загребского университета и «Центре исследования моря» института «Руджер Бошкович» (г. Загреб, Хорватия), выполненных под руководством и при непосредственном участии автора.

Отдельные разделы монографии использовались при чтении лекций по ряду дисциплин при подготовке студентов по специальностям «Информационно-измерительная техника», «Автоматизированные системы обработки информации и управления» в СамГТУ, СГАУ, а также для научных сотрудников и аспирантов в «Центре исследования моря» института «Руджер Бошкович», на математическом факультете Загребского университета, международном университете подготовки аспирантов (г. Дубровник, Хорватия), Пекинском техническом университете.

Методы и алгоритмы, рассматриваемые в монографии, представляют собой, по сути, развитие идей метода наименьших квадратов при аппроксимации различных функциональных вероятностных характеристик, обладающих рядом специфических свойств и требующих отдельного рассмотрения.

**В первом разделе**, посвященном выравниванию статистических рядов, обсуждаются критерии приближения, методы идентификации по фазовым портретам и способы определения неизвестных параметров аналитических выражений законов распределения, приводится описание разработанной автоматизированной информационной системы.

**Во втором разделе** рассмотрены вопросы аппаратурной аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями, анализа методических и статистических погрешностей.

Аппаратурная аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра, методы повышения точности аппроксимации, основанные на оптимизации параметра ортогональных функций по разным критериям, рассматриваются в **третьем разделе**.

Вопросы аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями с помощью ЭВМ, в том числе идентификации корреляционных функций по фазовым портретам, сходимости методов, рассматриваются в **четвертом разделе**.

**В пятом разделе** анализируются особенности аппроксимации корреляционных функций неэквидистантных временных рядов.

**В шестом разделе** рассматриваются аппроксимативные методы анализа обобщенных корреляционных характеристик, спектральных плотностей мощности и обобщенных спектральных характеристик.

**В седьмом разделе** описываются автоматизированные информационные системы для аппроксимативного анализа случайных процессов, в разработке которых активное участие приняли студенты-дипломники, и примеры их применения.

В разработке и моделировании аппаратно-программных средств на разных этапах работы принимали участие аспиранты и студенты указанных кафедр, выполнявшие под руководством автора кандидатские диссертации, курсовые и дипломные проекты: Батищев В.И., Белолипецкий В.Н., Иванов С.Г., Зеленко Л.С., Дмитриева Е.В., Крупец Н.Г., Кудрин К.Е., Мирзоев Р.К., Снигерева-Давыденко Л.Б., Сухинин В.П., Кудрина М.А., Новиченкова И.Ю., Козлов А.Н., Учеватов С.В., Шевченко Д., Иващенко А.В. и многие другие.

Автор выражает благодарность всем сотрудникам, аспирантам и студентам кафедры информационных систем и технологий СГАУ за обсуждение материалов монографии, критические замечания, которых по мере возможности были учтены, особенно профессору Коварцеву А.Н. и доценту Иоффе В.Г.

Большую благодарность автор выражает своим соавторам, а также академику АН СССР Ильичёву В.И., профессорам Виттиху В.А., Григоровскому Б.К., Куликовскому К.Л., Кловскому Д.Д., Курочкину Е.П., Мартяшину А.И., Иванову В.Н., Рожкову В.А., Трапезникову Ю.А., Хуснутдинову Г.Н., Тельскнису Л.А. (Литва), М. Бранице (Хорватия), И. Ружичу (Хорватия), Л. Ефтичу (Хорватия), Б. Чосович (Хорватия), Д. Р. Кушину (Австралия), Ф Вайде (Венгрия)- за обсуждение работы на различных её этапах.

Особую благодарность автор выражает своим учителям: доценту Волкову И.И., профессорам Карпову Е.М., Куликовскому Л.Ф., Самарину Ю.П., Фремке А.В., Цветкову Э.И., Б. Соучеку (Хорватия), - за постоянное внимание, консультации и особенно за то, что привели в чудесный мир теории вероятностей и случайных процессов.

Автор считает своим долгом выразить глубокую признательность ректору СГАУ член-корреспонденту РАН, профессору Сойферу В.А. за постоянную поддержку, рецензию и неоценимую помощь при издании монографии, а также рецензенту д.ф.м.н., профессору Жданову А.И. за ценные замечания.

Неоценимую помощь в редактировании монографии оказала инженер кафедры «Информационные системы и технологии» СГАУ Муравьева Е.В., которой автор выражает свою благодарность.

Издание монографии поддержано грантом 4 Г/2001 76/01/Б по программе «Поддержка важнейших разработок научных коллективов и отдельных учёных на основе системы грантов» по разделу «Важнейшие научные и технические разработки, соответствующие концепции социально-экономического развития Самары», за что автор выражает глубокую признательность губернатору Самарской области Титову К.А., а также президенту Самарского научного центра РАН академику РАН Шорину В.П.

Большую благодарность автор выражает директору Западно-Казахстанского филиала ОАО «Национальный центр экспертизы и сертификации» (г. Уральск) Графкину В.Н. за дружескую поддержку и издание монографии в Казахстане.

И, наконец, но не в последнюю очередь, я благодарен своей семье за понимание и поддержку в работе.

Замечания и пожелания по книге просьба направлять по адресу:

Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, факультет информатики, кафедра «Информационных систем и технологий», декану факультета информатики, заведующему кафедрой Прохорову С.А.

E-mail: INTERNET: sp @ smr. ru

## ВВЕДЕНИЕ

На пути создания образцов новой техники, технологических процессов научные исследования являются первым шагом, в процессе которого исследователь открывает новые законы, закономерности, совершает научные открытия.

Научные исследования представляют собой сложный, итерационный процесс, представляющий сочетание теоретических, включая методы моделирования, и экспериментальных методов.

Не умаляя достоинств теоретических методов исследования, значение экспериментальных методов трудно переоценить. Только с помощью эксперимента возможно получение достоверной информации об исследуемом объекте в реальном масштабе времени, после обработки которой возможно построение её модели. Открыв новый эффект, новое явление экспериментальным путем, которые невозможно объяснить на базе существующих теорий, экспериментатор стимулирует развитие фундаментальной науки. В то же время, получив новый теоретический научный результат, исследователь, с целью подтверждения основных положений новой теории, нуждается в его экспериментальной проверке.

При проведении экспериментальных научных исследований исследователь:

1. ставит задачу исследований в терминах предметной области;
2. строит модель исследуемого объекта и определяет вектор информативных параметров  $\vec{\Omega}$ , адекватно описывающий ее в рамках поставленной задачи;
3. с помощью технических средств осуществляет измерение, регистрацию и обработку мгновенных значений наблюдаемых процессов  $\vec{X}(\vec{\Theta}, t)$ , с целью определения вектора информативных параметров  $\vec{\Theta}$ , описывающих модель процесса;
4. по результатам обработки информации устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами  $\vec{\Omega}$  и  $\vec{\Theta}$ :

$$\vec{\Omega} = \Phi(\vec{\Theta}),$$

используемое для построения искомой модели объекта;

5. анализирует полученные результаты;
6. если результаты его устраивают - эксперимент окончен, в противном случае необходимо повторить пункты 3, 4 (точность полученных результатов неудовлетворительна), или пункты 2-4 (вектор параметров  $\vec{\Omega}$  не полно описывает поведение объекта), а иногда и пункты 1-4 (ставится другая задача).

Следует отметить, что задачи 1, 2 и 4, 5, как правило, решает специалист данной предметной области, формулируя и интерпретируя ее в терминах предметной области, а 3 задачу - специалисты в области измерения и обработки измерительной информации.

Такое разделение функций между исследователем и специалистом в области измерения и обработки измерительной информации позволяет последнему абстрагироваться от конкретных физических объектов и вектора физических параметров  $\vec{\Omega}$  и непосредственно перейти:

1. к математическому описанию исследуемых процессов и определению вектора параметров  $\vec{\Theta}$ , достаточных для решения поставленной задачи;
2. сбору информации с помощью первичных преобразователей;
3. оценке вектора параметров  $\vec{\Theta}$  с помощью технических средств;
4. анализу точности полученных результатов;

5. аппроксимации полученных функциональных зависимостей с помощью параметрических моделей.

Каждая из перечисленных задач имеет свои специфические особенности, а эффективность решения четвертой и пятой - зависит от применяемых технических средств, построенных, как правило, на базе современных средств информационно-измерительной и вычислительной техники.

Решая разнообразные задачи научных исследований, исследователь на основании физических представлений и задачи исследований определяет составляющие вектора параметров случайного процесса  $\bar{\Theta}$ , дающие его исчерпывающее описание.

Все вероятностные характеристики, определяемые во временной области, можно условно разделить на характеристики положения и формы кривой распределения вероятностей случайного процесса и характеристики взаимосвязи (см. рис. В.1).

При этом наиболее часто определяются (в порядке возрастания материальных и вычислительных затрат):

- числовые характеристики случайного процесса;
- авто и взаимные корреляционные функции;
- спектральные плотности мощности;
- законы распределения.



Рисунок В.1. Классификация вероятностных характеристик случайных процессов

На основании общей теории статистических измерений [106] измеряемая вероятностная характеристика определяется как предел выборочного среднего функционально преобразованного случайного процесса:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{d \rightarrow \infty} S_d g[x_j(t)], \quad (B.1)$$

где  $\Theta$  - измеряемая вероятностная характеристика;

$S_d$  - оператор идеального усреднения;

$d$  - параметр усреднения (время  $T$ , совокупность реализаций  $N$  или время и совокупность реализаций  $TN$ );

$g$  - оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики  $\Theta$ ;

$x_j(t)$  -  $j$ -ая реализация случайного процесса.

В зависимости от вида усреднения получаем следующие вероятностные характеристики:

1. При усреднении по совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]. \quad (B.2)$$

2. При усреднении по времени:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (B.3)$$

3. При усреднении по времени и совокупности

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (B.4)$$

На практике исследователь имеет дело с ограниченной совокупностью выборочных данных (результатов измерения). Результат определения значения вероятностной характеристики по ограниченной совокупности выборочных данных носит название **оценки**:

$$\mathfrak{G}[X(t)] = S_d g[x_j(t)] (j = 1, 2 \dots N). \quad (B.5)$$

К основным свойствам оценок относятся **несмещенность, состоятельность и эффективность**.

Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой характеристики:

$$M[\mathfrak{G}[X(t)]] = \Theta[X(t)]. \quad (B.6)$$

При невыполнении равенства оценка будет смещенной.

Оценка называется **состоятельной**, если при бесконечном увеличении объема выборочных данных она сходится по вероятности к истинному значению оцениваемой характеристики:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P(|\mathfrak{G}[X(t)] - \Theta[X(t)]| < \varepsilon) = 1 \quad (B.7)$$

при любом  $\varepsilon$ .

При невыполнении этого условия оценка будет несостоятельной.

**Эффективными** называются оценки, дисперсия которых минимальна.

Следует подчеркнуть, что свойства оценок, которые описываются несмещенностью, состоятельностью и эффективностью, тесно связаны с характером ошибок, которые определяются методами математической статистики [45,46].

Таким образом, при ограниченном наборе выборочных данных выражения (B.2)-(B.4) при анализе случайных процессов примут вид:

- при усреднении по совокупности

$$\Theta_t[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]; \quad (B.8)$$

- при усреднении по времени

$$\Theta_j[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt; \quad (B.9)$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\Theta_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (B.10)$$

Следует отметить, что этими соотношениями определяются разные вероятностные характеристики. При усреднении только по совокупности реализаций (при фиксированном моменте времени) вероятностная характеристика  $\Theta[X(t)]$  будет зависеть от текущего времени и называется  $t$ -текущей характеристикой  $\Theta_t$  [106]. При усреднении только по времени, когда выборочные значения относятся к одной реализации  $j$ , вероятностная характеристика  $\Theta[X(t)]$  будет зависеть от номера реализации и называется  $j$ -текущей характеристикой  $\Theta_j$ . При усреднении и по времени и совокупности значение  $\Theta[X(t)]$  не зависит ни от текущего времени, ни от номера реализации и называется средней характеристикой -  $\Theta_{cp}$ .

Наличие или отсутствие зависимости значений вероятностных характеристик от времени или номера реализации определяет такие фундаментальные свойства процесса, как **стационарность** и **эргодичность**.

**Стационарным** называются процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. **Эргодическим** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от номера реализации.

В теории случайных процессов различают стационарность в узком и широком смысле. Данное выше определение относится к случайным процессам, стационарным в узком смысле. Для этих процессов равенство  $\Theta_t = \text{const}$  выполняется для любой вероятностной характеристики. Когда от времени не зависят только одно-и двумерные вероятностные характеристики, случайный процесс считается стационарным в широком смысле. Если условие стационарности не выполняется хотя бы для одной вероятностной характеристики, процесс называется **нестационарным** по этой характеристике.

По аналогии, процесс считается эргодическим в узком смысле, если  $\Theta_j = \text{const}$ , где  $j$  - номер реализации, для любой вероятностной характеристики, и в широком смысле, если независимость значений вероятностных характеристик от номера реализации имеет место лишь для характеристик первых двух порядков. Если условие эргодичности не выполняется, процесс называется **неэргодическим**.

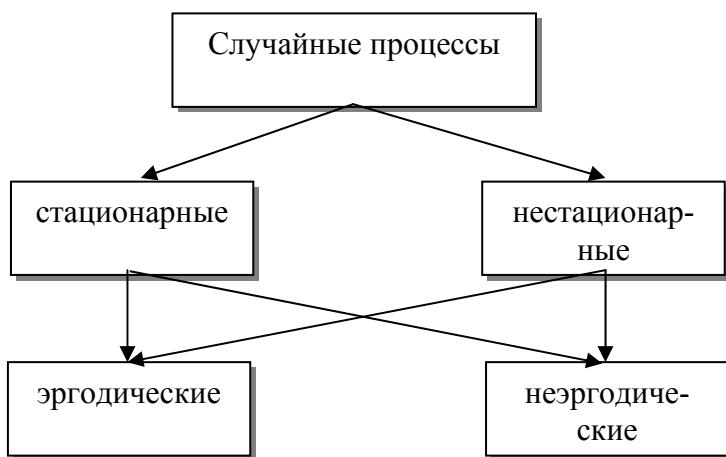


Рисунок В.2. Классификация случайных процессов

Таким образом, случайные процессы на основе свойств стационарности и эргодичности можно представить в виде четырех классов (см. рис.В.2):

- стационарные эргодические;
- стационарные неэргодические;
- нестационарные эргодические;
- нестационарные неэргодические.

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное описание - **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования.

Различные комбинации этих процессов совместно с детерминированными дают возможность построить более сложные модели, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при генерировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

Ответ на вопрос, какие характеристики определять:  $\Theta_t$ ,  $\Theta_j$ ,  $\Theta_{cp}$ , - во многом определяется свойствами исследуемого процесса и способом формирования выборочных данных.

Таким образом, прежде чем выбрать тип вероятностной характеристики (вид оператора усреднения), необходимо решить вопрос о стационарности и эргодичности случайного процесса. Этот вопрос самостоятельный и выходит за рамки монографии. Отметим, что существенные результаты по классификации случайных процессов получены в работах [96, 99, 101]. В [99] разработано программное обеспечение, позволяющее решить вопрос о стационарности и эргодичности практически.

В [106] показано, что для стационарного эргодического случайного процесса  $\Theta_t = \Theta_j = \Theta_{cp}$ , для стационарного неэргодического процесса  $\Theta_t = \Theta_{cp}$ , для нестационарного эргодического -  $\Theta_j = \Theta_{cp}$ , а для нестационарного неэргодического процесса все виды вероятностных характеристик различны.

При фиксированном типе  $S_d$  вопросы организации эксперимента и принципы организации массивов выборочных данных о мгновенных значениях исследуемого случайного процесса подробно рассмотрены в [106]. Результаты измерений могут формироваться с использованием:

- различных временных интервалов одной и той же совокупности реализаций;
- одних и тех же временных интервалов различных совокупностей реализаций;
- различных временных интервалов различных совокупностей реализаций.

Причем, от эксперимента к эксперименту возможно изменение  $N$ ,  $M$  и  $T$ , т.е. объема выборочных данных.



Выделим три метода статистических измерений: прямые, косвенные и совокупные.

**Прямым методом** статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики в соответствии с выражением (В. 1).

**Косвенным методом** статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики с использованием функционального преобразования оценок других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых методов статистических измерений:

$$\mathcal{G}[z(t)] = F\left\{S_{d1}g_x[x_j(t_i^{(x)})], S_{d2}g_y[y_1(t_i^{(y)})], \dots\right\} \quad (\text{В. 11})$$

где  $F\{\}$  представляет собой функциональное преобразование полученных оценок  $\mathcal{G}[x(t)]$  и  $\mathcal{G}[y(t)]$  и т.д. с целью получения оценки  $\mathcal{G}[z(t)]$ .

Под **совокупными статистическими измерениями** будем понимать метод получения оценок в результате решения системы уравнений, содержащей оценки других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых, косвенных методов статистических измерений или их комбинацией:

$$\Xi_i \left\{ S_{d1}g^{(1)}[x_j^{(1)}(t_i^{(1)})], \dots, S_{dm}g^{(m)}[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})] \right\} = 0; \quad (\text{В. 12})$$

$$\Xi_i \left\{ F^{(1)} \left\{ S_{d1}g^{(1)}[x_j^{(1)}(t_i^{(1)})] \right\}, \dots, F^{(m)} \left\{ S_{dm}g[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})] \right\} \right\} = 0. \quad (\text{В. 13})$$

Основной подсистемой любого технического средства, предназначенного для получения и обработки измерительной информации является измерительно-вычислительный канал.

Под **измерительно-вычислительным каналом** понимается совокупность аппаратно-программных средств, предназначенных для измерения мгновенных значений соответствующей физической величины, обработки результатов измерения и представления конечных результатов в форме, удобной для дальнейшего использования.

Рассмотрим структуру отдельного измерительно-вычислительного канала.

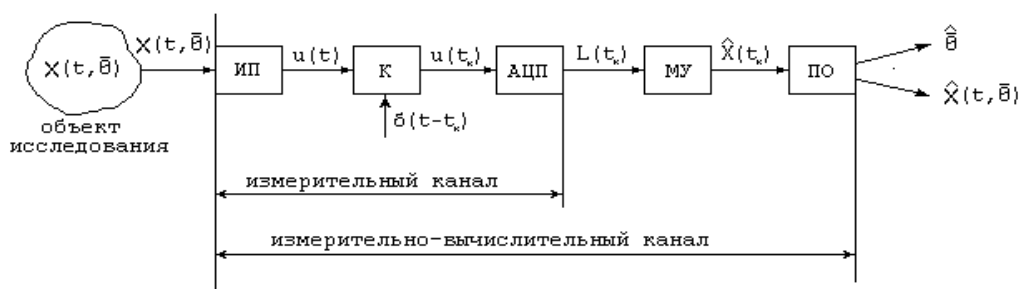


Рисунок В.3. Измерительно-вычислительный канал

На рис. В.3 приняты следующие обозначения.

- **ИП** - измерительный преобразователь (датчик);
- **К** - коммутатор;
- **АЦП** – аналого-цифровой преобразователь;
- **МУ** - масштабирующее устройство;
- **ПО** - процессор обработки.

Рассмотрим преобразования, происходящие с сигналами в измерительно-вычислительном канале.

Независимо от природы измеряемой физической величины на выходе **ИП** получаем электрический сигнал. При этом, каждому значению физической величины ста-

вится в соответствие вполне определенное значение электрической величины:  $x(t, \vec{\Theta}) \rightarrow u(t)$ .

Основным требованием, предъявляемым к **ИП**, является линейность:

$$u(t) = k x(t, \vec{\Theta}), \quad (\text{B.14})$$

где  $k = \text{const}$  - коэффициент преобразования.

Следует отметить, что если связь между  $u(t)$  и  $x(t, \vec{\Theta})$  нелинейная, то производят линеаризацию функции преобразования, воспользовавшись, например, методом наименьших квадратов [44].

После **ИП** исследуемый сигнал поступает на вход коммутатора.

В коммутаторе непрерывный сигнал  $u(t)$  преобразуется в последовательность отсчетов, отстоящих друг от друга на интервале  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ . Т.е. выполняется операция **дискретизации**:

$$u(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \delta(t-t_i) dt, \quad (\text{B.15})$$

$$\text{где } \delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{если } t = t_i \\ 0, & \text{если } t \neq t_i \end{cases} \text{ - } \delta\text{-функция Дирака.} \quad (\text{B.16})$$

Отметим, что при коммутации возможны два варианта:

- $\Delta t_i = \text{const}$  - регулярная дискретизация;
- $\Delta t_i = \text{random}$  - нерегулярная дискретизация.

После коммутации сигнал поступает на аналого-цифровое преобразование, где последовательно подвергается процедурам **квантования** и **кодирования**.

**Квантование** - процедура отнесения непрерывного значения процесса  $u(t_i)$  к ближайшему разрешенному целому уровню.

$$L(t_i) = \text{ent} \left[ \frac{|u(t_i)|}{\Delta u} + \lambda \right] \text{Sign } u(t_i), \quad (\text{B.17})$$

где  $\text{ent}[\ ]$  - операция взятия целой части числа;

$\Delta u$  - шаг квантования по уровню;

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{при усечении} \\ 0,5, & \text{при округлении} \end{cases} .$$

$$\text{Sign } u = \begin{cases} 1, & \text{если } u > 0; \\ 0, & \text{если } u = 0; \\ -1, & \text{если } u < 0; \end{cases} \text{ - знаковая функция.} \quad (\text{B.18})$$

В результате квантования сигнала получим целое число квантов, которое может кодироваться различными способами. При использовании двоичной системы счисления с весами 8-4-2-1 число двоичных разрядов, необходимых для представления  $L(t_i)$  определяется выражением:

$$n = \log_2 \max |L(t_i)|. \quad (\text{B.19})$$

Следует подчеркнуть, что в случае одноканальной системы операции коммутации и аналого-цифрового преобразования совпадают. В многоканальных же системах, как правило, применяется один коммутатор на несколько каналов.

После аналого-цифрового преобразователя сигнал поступает на вход масштабирующего устройства, выходной сигнал которого равен:

$$\mathfrak{K}(t_k) = \frac{L(t_k)\Delta u}{k}. \quad (\text{B.20})$$

Т.е. при этом происходит обратное преобразование: приведение электрического сигнала к измеряемой физической величине.

Далее сигнал поступает в процессор обработки - устройство, реализующее тот или иной алгоритм получения оценки параметров физического процесса  $x(t, \bar{\Theta})$ . При этом возможны два подхода к решению задачи оценки  $\bar{\Theta}$ :

1. в режиме экспресс-анализа с помощью алгоритма  $A_{\Theta}$  оценивают вектор неизвестных параметров  $\bar{\Theta} = A_{\Theta} \{ \mathfrak{K}(t_k) \}$ ;

2. в режиме контроля и регистрации с помощью алгоритма  $A_s$  получают оценку сигнала  $\mathfrak{K}(t, \bar{\Theta}) = A_s \{ \mathfrak{K}(t_k) \}$ , записывают его на какой-либо промежуточный носитель, а затем обрабатывают. При этом происходит задержка в обработке информации и, следовательно, в получении результата.

Первый подход будем называть **статистическими измерениями**, второй - **статистической обработкой**.

Под **статистическими измерениями** будем понимать измерение вероятностных характеристик случайных процессов с помощью специальных технических средств, работающих в реальном масштабе времени.

Под **статистической обработкой** будем понимать оценку вероятностных характеристик случайных процессов на ЭВМ, записанных на промежуточный носитель, с задержкой в обработке информации.

Таким образом, измерительно-вычислительный канал даёт возможность обрабатывать **временные последовательности случайных процессов - временные ряды**.

В этом случае выражения (B.2)-(B.4) при представлении случайного процесса  $X(t)$  ансамблем последовательностей примут вид:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.21})$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.22})$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)], \quad (\text{B.23})$$

где  $t_i$  -  $i$ -ый отсчёт  $j$ -ой реализации случайного процесса.

При ограниченном наборе данных при анализе последовательностей выражение (B.5) примет вид:

$$\mathfrak{G}[X(t)] = S_d g[x_j(t_i)] (j = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, \dots, M). \quad (\text{B.24})$$

Выражения (B.8)-(B.10) для оценки вероятностных характеристик при анализе последовательностей (временных рядов) запишем в виде:

- при усреднении по совокупности

$$\mathfrak{G}_i[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.25})$$

- при усреднении по времени

$$\mathfrak{G}_j[X(t)] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.26})$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\mathfrak{G}_{\text{cp}}[X(t)] = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]. \quad (\text{B.27})$$

Выделяют первичную и вторичную статистическую обработку. Под **первичной** статистической обработкой будем понимать оценку вероятностных характеристик по ограниченному набору данных, под **вторичной** - построение аналитических моделей исследуемых процессов и их характеристик.

Если не принимать во внимание фактор реального времени или задержку в обработке информации, то с точки зрения получения оценки по одному и тому же объему данных два подхода с методической точки зрения не отличаются друг от друга. Существенное отличие заключается в том, что работа в реальном масштабе времени накладывает жесткие ограничения на быстродействие технических средств. Это заставляет, в свою очередь, при статистических измерениях применять упрощенные алгоритмы оценивания интересующих параметров, обладающих значительным быстродействием. Кроме того, работа в реальном масштабе времени не дает возможность получить требуемые оценки, воспользовавшись другими алгоритмами, так как данную реализацию повторить нельзя - она **случайна**. Требуемую оценку необходимо получить за время, отводимое на эксперимент. Реализация же, записанная на промежуточный носитель или в память, становится **детерминированной**, и с ней можно экспериментировать сколь угодно долго. Это важное преимущество статистической обработки позволяет:

- с целью повышения точности оценивания осуществить оценку одного параметра с помощью различных алгоритмов обработки информации;
- выбрать оптимальный алгоритм оценивания, соответствующий выбранному критерию;
- с целью построения новой или уточнённой модели осуществить оценку других параметров, описывающих эту модель.

При исследовании сложных объектов проводят, как правило, большое число испытаний. При этом происходит и накопление большого числа массивов числовых и функциональных характеристик, что в значительной степени затрудняет хранение, анализ и интерпретацию полученных результатов.

Один из возможных способов решения этой проблемы заключается в применении аппроксимативных методов (от латинского слова **approximo** - приближаюсь), суть которых заключается в нахождении подходящего аналитического выражения  $\varphi(x(t), \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  с неизвестными параметрами  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , удовлетворяющими заданному критерию оптимальности, которое бы описывало найденные экспериментальные результаты. Аппроксимативный подход оказывается эффективным и при обработке результатов имитационного моделирования (вычислительного эксперимента).

Предположим, что в результате опыта мы получили ряд экспериментальных точек и построили график зависимости  $\xi_i = f(\xi_i)$ . Желательно обработать экспериментальные данные таким образом, чтобы по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости  $y$  от  $x$  и вместе с тем сгладить случайные отклонения, вызванные погрешностями самого эксперимента.

Наиболее эффективным методом решения этой задачи является метод наименьших квадратов [45].

Пусть задан некоторый класс функций  $\varphi_j(x(t), \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  с одинаковым числом неизвестных параметров. Тогда наилучшей будет та функция, для которой сумма квадратов

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^M [\xi_i - \varphi_j(\xi_i, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 = \min. \quad (\text{B.28})$$

Если в сравнении участвуют функции с различным числом неизвестных параметров, это приводит к увеличению числа связей и к уменьшению числа степеней свободы  $m-1$ , что, в свою очередь, может ухудшить дисперсию [45].

$$D_j = \frac{\Delta_j}{m - r}. \quad (\text{B.29})$$

Под числом связей  $r$  понимают число неопределенных выражений, входящих в аналитическое выражение.

Так как  $\Delta_j$  является функцией  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  то, как известно [62], необходимыми условиями минимума дифференцируемой функции многих переменных является система нормальных уравнений:

$$\frac{\partial \Delta_j(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (\text{B.30})$$

решив которую с помощью того или иного численного метода найдем искомые параметры  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Классификация методов аппроксимации функциональных характеристик случайных процессов и последовательностей представлена на рис. В.4.

Основными преимуществами аппроксимативного подхода являются:

- наглядность и компактность полученного аналитического выражения, легкость визуализации;
- возможность использования аналитического выражения для дальнейших аналитических исследований и преобразований, с целью получения обобщенных вероятностных характеристик;
- сокращения объёма хранимых данных.

К недостаткам метода следует отнести наличие методической погрешности, возникающей при замене полученных экспериментальных данных или другой функции более простым аналитическим выражением.

В общем случае, для реализации аппроксимативного подхода необходимо выполнить следующие этапы:

1. на основании анализа решаемой задачи определить требования к реализации входного процесса (последовательности): длине реализации (объёму выборки), интервалу дискретизации, числу уровней квантования и т.д. с целью получения оце-

нок вероятностных характеристик для последующей аппроксимации с допустимыми погрешностями;

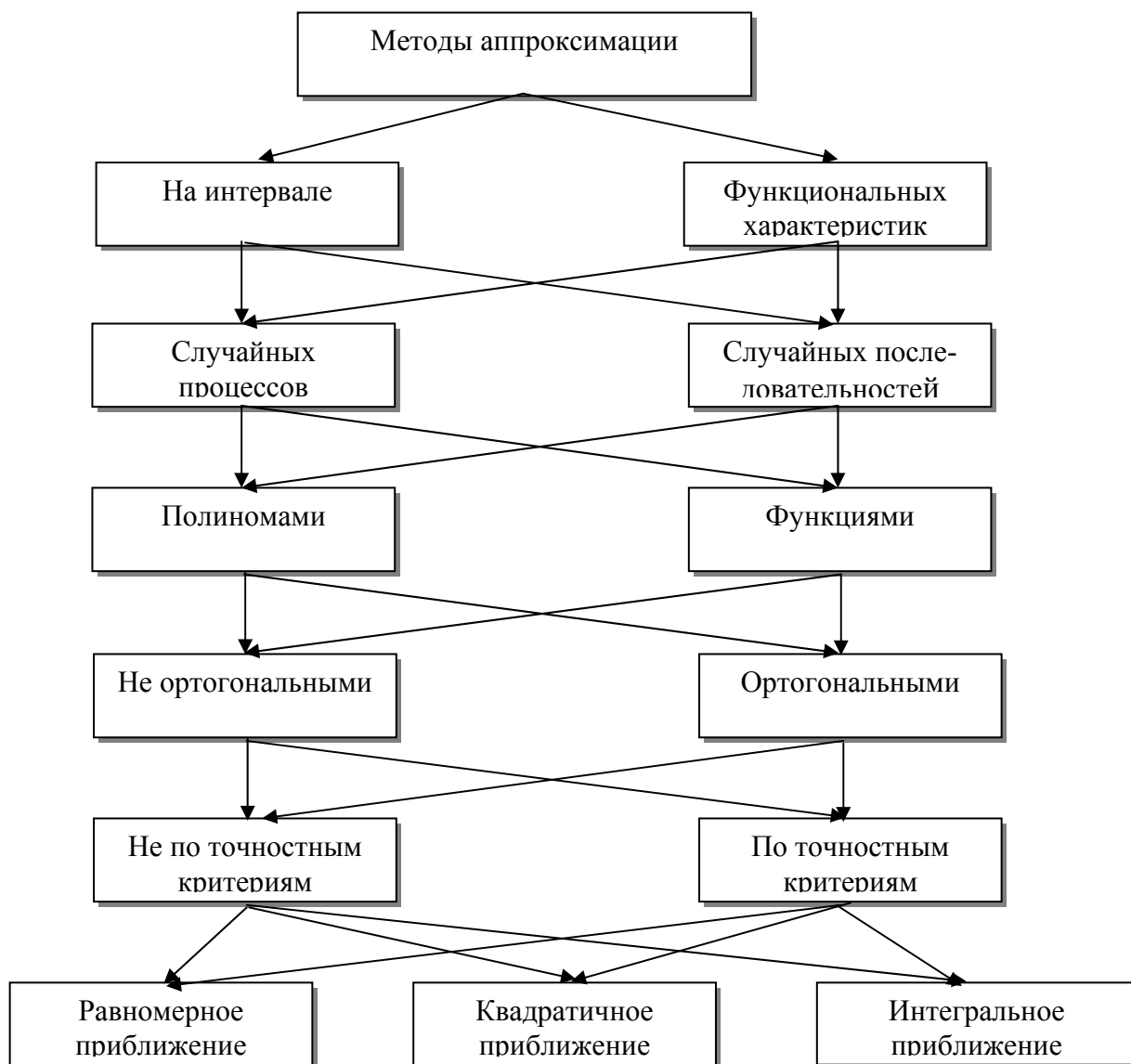


Рисунок В.4. Классификация методов аппроксимации случайных процессов и последовательностей

2. по измеренным значениям входного процесса (последовательности) оценить значения функциональной характеристики в заданных точках;

3. проанализировать полученный результат и выбрать подходящее аналитическое выражение, по возможности, с минимальным количеством неизвестных параметров, подлежащих определению, так как количество параметров в значительной мере определяет сложность аппаратуры или вычислений, его сходимость и устойчивость;

4. выбрать и обосновать критерий приближения;

5. составить и решить систему уравнений относительно неизвестных параметров аналитического выражения и определить погрешность приближения;

6. разработать структурную схему аппаратуры (программы) и рассчитать её параметры;

7. изготовить и отладить аппаратуру (написать и отладить программное обеспечение);
8. провести экспериментальные исследования (обработать полученные экспериментальные данные).
9. аналитически определить все интересующие обобщённые вероятностные характеристики.

Следует отметить, что определять аналитические выражения возможно как при анализе стационарных, так и нестационарных процессов. В первом случае анализируются функциональные характеристики, во втором - и моментные, являющиеся функциями времени.

Определять параметры аналитических выражений возможно как с помощью **статистических измерений**, так и в результате **статистической обработки**.

Под **статистическими измерениями с аппроксимацией** будем понимать измерение (оценку) параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью специальных технических средств, работающих в реальном масштабе времени. Самыми популярными среди таких технических средств являются **коррелометры** и **спектроанализаторы** с аппроксимацией параметрическими моделями. В литературе их часто называют **статистическими анализаторами**. Статистические анализаторы, как правило, специализированные аппаратно-программные средства, определяющие **параметры реального процесса** (см. рис. В.5).

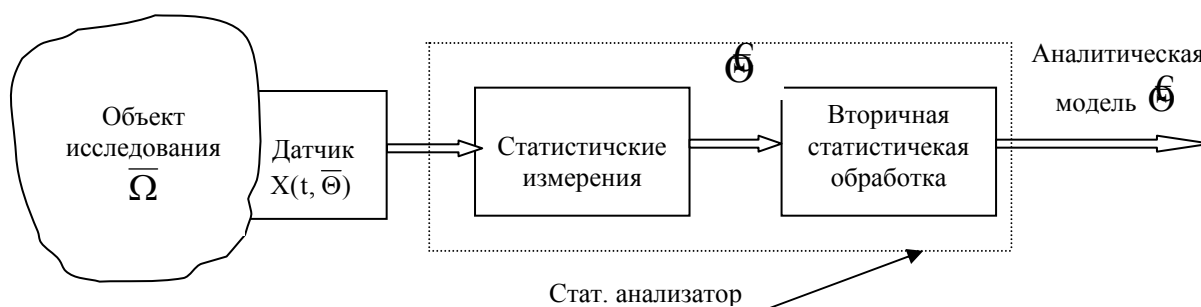


Рисунок В.5. Аппаратно-программные средства статистических измерений и обработки информации

Под **статистической обработкой с аппроксимацией** будем понимать оценку параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью ЭВМ, записанных на промежуточный носитель или память. При этом происходит временная задержка в обработке информации.

Аппроксимативные методы, основанные на применении ЭВМ, можно отнести к методам **вторичной обработки** информации. Однако, воспользовавшись принципом аппаратно-программного дуализма, возможно алгоритмы, положенные в основу работы статистических анализаторов, реализовать и чисто программным способом. Поэтому в работе рассматриваются решения аппроксимативных статистических задач, как с помощью статистических анализаторов, так и ЭВМ.

Классификация средств вычислительной техники, предназначенных для аппроксимации различных функциональных характеристик, представлена на рис. В.6.

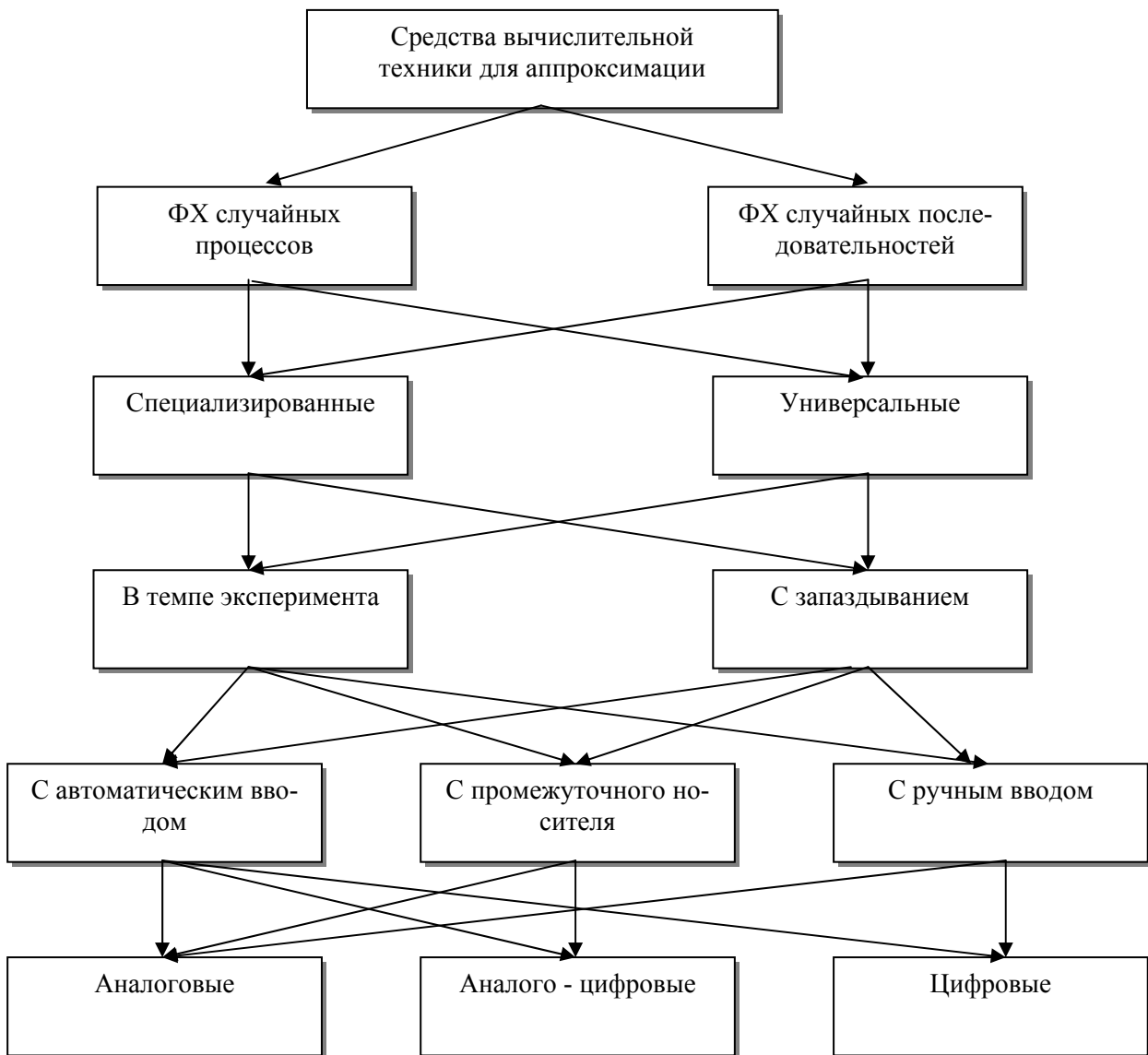


Рисунок В.6. Классификация средств вычислительной техники для аппроксимации функциональных характеристик случайных процессов и последовательностей

При проведении исследований аппроксимативных алгоритмов кроме аналитических методов применялся метод имитационного моделирования, блок-схема которого представлена на рис. В.7.

При этом следует подчеркнуть, что затраты на моделирование, достоверность полученных результатов во многом зависят от принятых решений на этапе планирования эксперимента, особенно при определении необходимого числа испытаний, выборе входных воздействий и т.д.

Согласно методике, изложенной в РТМ 25139-74 [78], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей оценки  $\Delta$ :

$$\Delta = \max \left\{ \left| \Delta_j \right| \right\} j = 1, \dots, N, \quad (\text{В.31})$$



где  $N$  - число испытаний, зависящее от доверительной информации  $P_d$ . Так, если  $P_d = 0,95$ , то число испытаний равно 29 независимо от закона распределения погрешностей.



Рисунок В.7.

Одним из важных этапов имитационного моделирования является выбор, обоснование и моделирование сигналов, используемых в модельном эксперименте. Решение этой задачи определяется целевой функцией моделирования, назначением исследуемой системы и т.д. Так как при моделировании алгоритмов основной задачей является определение его метрологических характеристик, то существенным требованием, предъявляемым к образцовому (испытательному или тестовому) сигналу, является возможность оценки с его помощью погрешности результата измерения данным алгоритмом на заданном классе входных воздействий.

Учитывая большое разнообразие решаемых задач и соответствующих им алгоритмов, однозначного ответа о виде образцового сигнала быть не может. Окончательное решение о выборе вида образцового сигнала для конкретных типов средств измерения должно приниматься по результатам экспериментальных исследований.

В самом общем виде выбор образцового сигнала осуществляется:

- выбором наилучшего сигнала из множества возможных входных сигналов, для обеспечения гарантированной погрешности результата измерения;
- формированием набора типовых сигналов, то есть наиболее часто встречающихся входных сигналов или сигналов, наиболее интересных исследователя;
- формированием набора типовых сигналов, включающих в себя наилучший сигнал.

Основными требованиями, предъявляемыми к

образцовым сигналам, являются следующие:

- заданный вид вероятностных характеристик;
- принадлежность к классу входных сигналов, для которых предназначено данное средство;
- стабильность во времени;
- отклонение текущих характеристик от расчетных не должно быть более допустимого.

Результаты моделирования сравнивались, когда это было возможно, с результатами, полученными с помощью классических алгоритмов.

# 1. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

## 1.1. Основные понятия и определения

При обработке статистического материала часто приходится решать вопрос о том, как подобрать для данного статистического ряда теоретическую кривую распределения, выражающую лишь существенные черты статистического материала. Такая задача, относящаяся к классу аппроксимативных задач, в данном случае называется задачей выравнивания (сглаживания) статистических рядов.

Последовательность этапов решения задачи сглаживания представлена на рис.1.1.

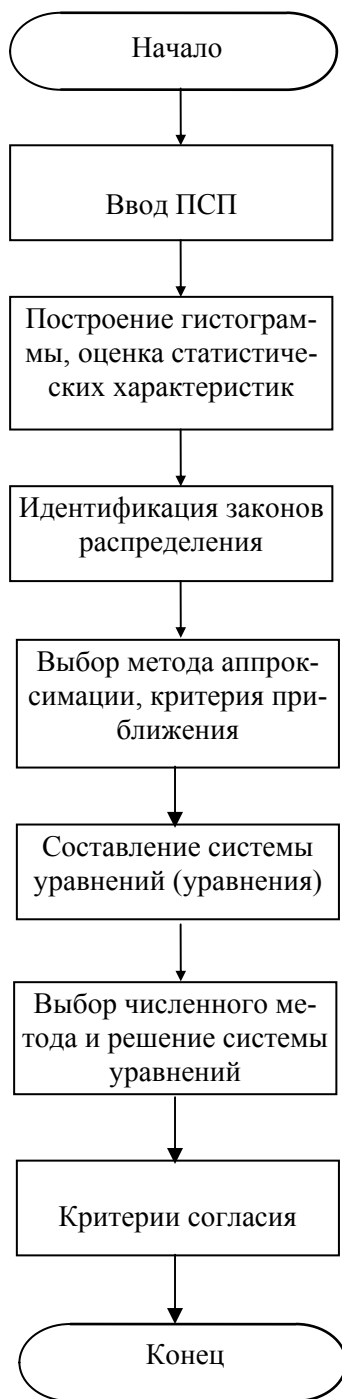


Рисунок 1.1. Блок-схема сглаживания

После ввода исходных данных (ПСП) первым шагом решения этой задачи является построение гистограммы наблюдаемого статистического ряда  $\{x_i\}_{i=1}^N$ . Для этого необходимо выполнить следующие этапы:

1. Определить диапазон изменения статистического ряда  $x_{\min}-x_{\max}$ .

2. При неизвестном законе распределения определить ширину дифференциального коридора:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{M}, \quad (1.1)$$

где  $M$  - количество дифференциальных коридоров [45].

Из выражения (1.1) следует, что значение величины  $M$  не определено и, следовательно, исследователь должен задать её самостоятельно, ориентируясь на рекомендации специалистов. Как следует из литературных источников, значение  $M$  рекомендуется выбирать в диапазоне от 10 до 20 [45].

При известном или предполагаемом законе распределения при линейной интерполяции функции распределения величина  $\Delta x$  определяется выражением:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{8\delta}{|F''(x)|_{\max}}}, \quad (1.2)$$

где  $\delta$  - погрешность аппроксимации функции распределения;

$|F''(x)|_{\max}$  - максимум модуля второй производной функции распределения.

В приложении П.3 для типовых законов приведены результаты определения  $|F''(x)|_{\max}$  и  $dx$ , воспользовавшись которыми необходимо определить:

$$M = \text{ent} \left[ \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\Delta x} \right]. \quad (1.3)$$

3. Определить частоту попадания анализируемой случайной величины в  $j$ -ый дифференциальный коридор:

$$\mathfrak{F}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{ij}, \quad (1.4)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ent} \left[ \frac{x_i - x_{\min}}{\Delta x} \right] + 1 = j \wedge x_i \neq x_{\max}; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x_i = j \Delta x; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.5)$$

- индикатор состояния.

Следует отметить, что  $\delta_{i, j+1} = 1/2$ , если  $x_i = j \Delta x \wedge x_i \neq x_{\max}$ , т.е. в этом случае в  $j$  и  $j+1$  коридоры добавляется по  $1/2$ .

4. Если частота попадания в какой-либо  $k$ -ый дифференциальный коридор мала ( $p_j < 0,01 \div 0,02$ ), для уменьшения влияния случайности его объединяют с  $k+1$  коридором. Эта операция может быть применена неоднократно.

Исходным материалом для построения гистограммы является сгруппированный по дифференциальным коридорам статистический ряд, представленный, как правило, в виде таблицы (см. таблицу 1.1), где  $\mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}_j / \Delta x_j$ .

Статистический ряд

Таблица 1.1

$\mathfrak{F}_j$	0,099	0,1006	0,1003	0,0989	0,099	0,1067	0,0954	0,1008	0,0997	0,0996
$j \Delta x$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\mathfrak{F}_j$	0,99	1,006	1,003	0,989	0,99	1,067	0,954	1,008	0,997	0,996

На рис.1.2 - 1.3 для разного количества дифференциальных коридоров приведены гистограммы случайной величины, распределённой по равномерному закону в диапазоне  $[0,1]$ , называемой «белым шумом», сгенерированной с помощью стандартной программы на ЭВМ ( $N=10000$ ). Гистограмма, представленная на рис.1.2, соответствует таблице 1.1.

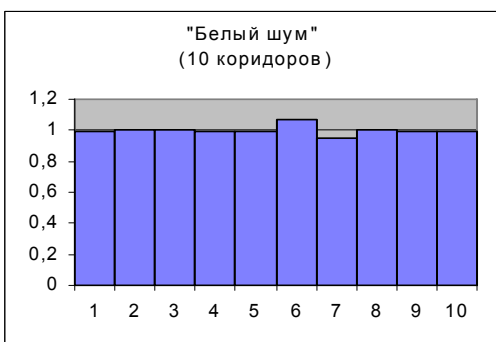


Рисунок 1.2.

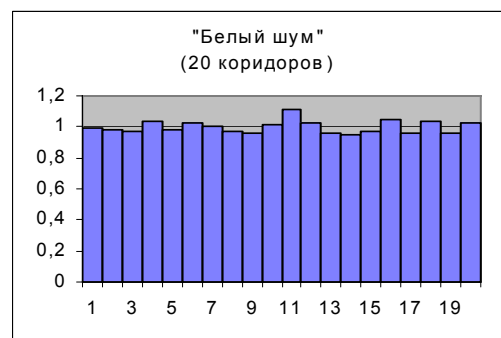


Рисунок 1.3.

Сравнительный анализ рисунков показывает, что при меньшем числе дифференциальных коридоров и большей частоте попадания случайной величины в каждый из них, гистограмма лучше приближается к теоретической плотности распределения вероятностей –  $f_x(x)=1$ .

Отметим, что «белый шум», являясь исходным шумом при решениях самых разных задач, широко применяется при моделировании случайных величин с требуемыми вероятностными характеристиками [112].

Построив гистограмму, можно приступить к задаче идентификации, заключающейся в подборе кривой распределения  $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  с неизвестными параметрами  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , с той или иной точки зрения наилучшим образом описывающей данное статистическое распределение.

Решение этой задачи возможно различными методами, например: по совпадению моментов [45], с использованием фазовых портретов [72, 103] и т. д. (см. подраздел 1.3).

После выбора аналитического выражения с неизвестными параметрами, приступают к решению задачи аппроксимации в соответствии с выбранным критерием приближения.

Классификация методов аппроксимации законов распределения, предложенная на основании общей классификации методов аппроксимации (см. рис. В.3) и анализа литературных источников, представлена на рис. 1.4.



Рисунок 1.4. Классификация методов аппроксимации законов распределения

Следует при этом иметь в виду, что, независимо от метода, аналитические функции  $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  или  $F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , с помощью которых происходит аппроксимация статистического распределения, должна удовлетворять основным свойствам законов распределения:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \geq 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) dx = 1. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \leq 1; \\ F_a'(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) > 0. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Вопросы аппроксимации законов распределения различными методами рассмотрены в разделах 1.4-1.6.

Заключительным шагом решения задачи сглаживания статистических рядов является проверка качества аппроксимации с использованием критериев согласия. Если получено удовлетворительное решение задачи, то процесс сглаживания завершен. Если нет, необходимо повторить все этапы, начиная с идентификации.

Для возможности анализа различных методов сглаживания критерии согласия рассматриваются в разделе 1.2.

## 1.2. Критерии согласия

Предположим, что, исходя из вида гистограммы и теоретических предпосылок, выбрана функция  $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  с неизвестными параметрами  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ . Требуется подобрать эти параметры так, чтобы функция  $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  наилучшим образом описывала данный статистический материал в рамках принятого критерия.

Как бы хорошо ни была подобрана функция  $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , между ней и статистическим распределением неизбежны расхождения. Для ответа на вопрос, связаны ли эти расхождения с ограниченным числом наблюдений, или они связаны с неправильным выбором  $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , служат «критерии согласия».

Идея применения критериев согласия заключается в следующем. На основании данного статистического материала необходимо проверить гипотезу  $H$ , состоящую в том, что случайная величина  $X$  подчиняется некоторому закону распределения. Введем некоторую случайную величину  $U$ , являющуюся некоторой мерой расхождения теоретического и статистического распределений. Закон распределения этой случайной величины  $f_u(u)$  зависит как от закона распределения случайной величины  $X$ , так и от числа опытов  $N$ . Если гипотеза  $H$  верна, то  $f_u(u)$  определяется законом распределения  $f_a(x)$  и числом опытов  $N$ .

Вычислим вероятность события  $P(u \leq U) = P_d$ . Если эта вероятность мала, то гипотезу следует отвергнуть как маловероятную, если значительна - экспериментальные данные не противоречат гипотезе  $H$ .

Выберем в качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями случайную величину

$$U = \sum_{j=1}^M c_j (\hat{p}_j - p_j)^2, \quad (1.7)$$

где  $c_j$  - веса;

$p_j = F_a(x_{j+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_m) - F_a(x_j, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  – теоретические вероятности, соответствующие  $f_j$ .

Коэффициенты  $c_j$  вводятся для учёта веса отклонений, относящихся к разным разрядам. Так отклонения могут быть малозначительными, если вероятность  $p_j$  велика, и наоборот.

К. Пирсон показал, что если положить  $c_j = N/p_j$ , то при большом  $N$   $f_u(u)$  не зависит от  $f_x(x)$  и  $N$ , а зависит только от числа разрядов  $M$ . Этот закон при увеличении  $N$  приближается к закону  $\chi^2$  с  $r$  степенями свободы, плотность распределения вероятностей которого определяется выражением [45]:

$$f_r(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} u^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}, & \text{если } u > 0; \\ 0, & \text{если } u < 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

где  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  - гамма-функция [58]. (1.9)

В этом случае мера расхождения обозначается  $\chi^2$  и определяется выражением:

$$\chi^2 = N \sum_{j=1}^M \frac{(f_j - p_j)^2}{p_j}. \quad (1.10)$$

Иногда для удобства вычислений, чтобы избежать вычислений с промежуточными малыми числами, выражение (1.9) представляют в виде

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^M \frac{(n_j - N p_j)^2}{N p_j}, \quad (1.11)$$

где  $n_j$  - число попаданий  $x$  в  $j$ -ый дифференциальный коридор.

Распределение  $\chi^2$  зависит от параметра  $r$ , называемого числом «степеней свободы». Число степеней свободы равно  $r = M - k$ , где  $k$  – число независимых наложенных условий (связей), например, условие нормировки, совпадение теоретических и статистических моментов и т.д.

Для распределения  $\chi^2$  составлены специальные таблицы (см. приложение П.4) [45]. Пользуясь ими, можно для каждого значения  $\chi^2$  и числа степеней свободы  $r$  найти вероятность того, что величина, распределенная по закону  $\chi^2$ , превзойдет это значение. Если эта вероятность мала, то результат опыта следует признать противоречащим гипотезе о том, что случайная величина распределена по предполагаемому закону. Если на практике она оказывается меньше, чем 0,1, рекомендуется проверить результаты эксперимента и, если это возможно, повторить его. В противном случае, для описания статистических данных следует искать более подходящее аналитическое выражение.

### Схема применения критерия сводится к следующему:

1. определяется мера расхождения  $\chi^2$  по формуле (1.10) или (1.11);
2. определяется число степеней свободы  $r = M - k$ ;

3. по  $r$  и  $\chi^2$  по таблице П.4. определяется вероятность того, что величина, имеющая распределение  $\chi^2$  с  $r$  степенями свободы, превзойдет данное значение  $\chi^2$ ;

4. если вероятность  $P_d$  велика, то гипотеза  $H$  принимается.

Следует отметить, что с помощью критериев согласия можно только в некоторых случаях опровергнуть гипотезу  $H$ . Если вероятность  $P_d$  велика, то это указывает лишь на то, что гипотеза  $H$  не противоречит опытным данным [45].

Кроме критерия Пирсона на практике применяется критерий А.Н. Колмогорова [45].

В качестве меры расхождения между статистическим и теоретическим распределениями рассматривается величина, равная

$$\delta = \max \left| \hat{F}_x(x) - F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right|. \quad (1.12)$$

Обоснованием выбора этой меры расхождения являются следующие обстоятельства:

- простота определения  $\delta$ ;
- при неограниченном числе испытаний  $N$  вероятность неравенства

$\delta \sqrt{N} \geq \lambda$  стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 \lambda^2}. \quad (1.13)$$

Значения  $P(\lambda)$ , подсчитанные по формуле (1.13), приведены в приложении П.5.

#### **Схема применения этого критерия сводится к следующему:**

1. строятся статистическая и теоретическая функции распределения;

2. по графикам определяется  $\delta$ ;

3. вычисляется  $\lambda = \delta \sqrt{N}$ ;

4. по таблице приложения 3 определяется  $P(\lambda)$ ;

5. гипотеза принимается, если для заданного уровня значимости  $P_d$ :

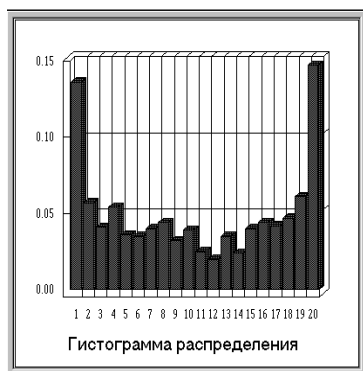
$$\lambda < \lambda_{1-P_d}; \quad (1.14)$$

6. Если вероятность  $P_d$  мала, гипотезу  $H$  следует отвергнуть. При сравнительно больших  $P(\lambda)$  её можно считать совместимой с опытными данными.

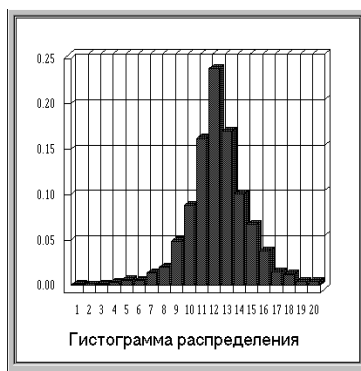
Следует отметить, что критерий Колмогорова можно применять, когда известно теоретическое распределение и численные значения его параметров, например, при проверке качества сгенерированной псевдослучайной последовательности с заданным законом распределения, расчете параметров функций распределения. Если применять этот критерий в случаях, когда параметры теоретического распределения определяются по статистическим данным, критерий даёт завышенное значение  $P(\lambda)$ , и мы рискуем принять неправильную гипотезу.

### 1.3. Идентификация законов распределения

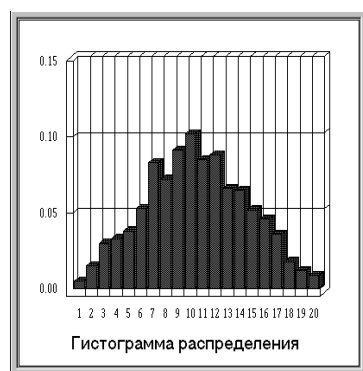
Выбор подходящего аналитического выражения с неизвестными параметрами, подлежащими определению в соответствии с выбранным критерием приближения, является самым сложным этапом процедуры сглаживания. Это объясняется тем, что задача плохо формализована, всегда существует опасность, что рассмотрены не все возможные варианты законов распределения, решение необходимо принимать по ограниченному набору входных данных и. т. д.



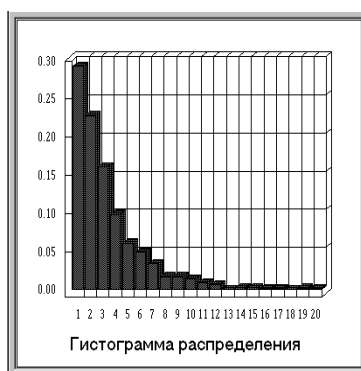
Закон арксинуса



Лапласа



Закон Симпсона



Экспоненциальный

Рисунок 1.5. Гистограммы типовых распределений

На практике задачу идентификации решают на основе анализа:

1. гистограммы и её соответствия кривой теоретического распределения;
2. числовых характеристик и их соответствия значениям теоретических числовых характеристик;
3. фазовых портретов (структурных функций).

При большом числе экспериментальных данных в ряде случаев по виду гистограммы можно высказать предположение о виде закона распределения. На рис. 1.5 в качестве примера приведены гистограммы случайных процессов ( $N=1000$ ), которые с большой долей уверенности можно отнести к тому или иному закону распределения.

При ограниченном наборе данных о законе распределения судят по совпадению значений статистических и теоретических числовых характеристик.

К числовым характеристикам относятся: начальные и центральные моменты  $k$ -го порядка, мода, медиана, коэффициенты вариации и формы, пикфактор.

- Начальным моментом  $k$ -го порядка называется величина, определяемая выражением:

$$\alpha_k = M[x^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_x(x) dx, \quad (1.15)$$

где  $M[ ]$  - операция нахождения математического ожидания.

Из начальных моментов наиболее часто применяются:

- $\alpha_1 = M[x] = m_x$  - математическое ожидание, характеризующие среднее значение оцениваемой случайной величины;
- $\alpha_2 = M[x^2]$  - определяющий мощность случайной величины.



- Центральные моменты  $k$ -го порядка определяются в виде:

$$\mu_k = M[x^k], \quad (1.16)$$

где  $x = x - m_x$  - центрированная случайная величина.

Из них наиболее часто применяются:

- $\mu_2 = M[x^2] = \sigma_x^2$  - дисперсия процесса, характеризующая разброс значений случайной величины относительно математического ожидания;

- $\mu_3 = M[x^3]$  - характеризует симметричность закона распределения. Для устранения зависимости  $\mu_3$  от дисперсии вводят коэффициент асимметрии:

$$K_a = \mu_3 / \sigma_x^3;$$

- $\mu_4 = M[x^4]$  - характеризует острровершинность закона распределения. В качестве базового закона (закона сравнения) был выбран нормальный закон, для которого  $\mu_4 = 3\sigma_x^4$ . Для удобства сравнения ввели понятие коэффициент эксцесса:

$$K_\varepsilon = \mu_4 / \sigma_x^4 - 3.$$

- Мода -  $M_0$  - наиболее вероятное значение случайной величины  $x$ , определяемое в результате решения уравнения:

$$f'_x(x) = 0 \quad (1.17)$$

- Медиана -  $Me$  - определяется из уравнения

$$P\{x < Me\} = 0,5 \quad (1.18)$$

и делит площадь под кривой распределения пополам.

- Коэффициент вариации -  $\chi = \sigma_x / m_x$  - применяется при метрологическом анализе результатов измерения.

- Коэффициент формы -

$K_\phi = M[|x|] / \sigma_x$  - характеризует форму кривой распределения и применяется, например, при оценке релейной корреляционной функции (см. раздел 3).

- Пикфактор -  $\eta = |x_{\max}| / \sigma_x$  - применяется при оценке динамического диапазона случайной величины.

Значения числовых характеристик для типовых законов распределения приведены в приложении 1.

На рис. 1.6 в качестве примера приведены результаты определения числовых характеристик случайного

<b>Выберите закон распределения :</b>	
Арсинуса	
<b>Параметры закона распределения :</b>	
a : 2	
<b>Начальные моменты :</b>	
<b>Статистические :</b>	<b>Теоретические :</b>
$\alpha_1 = 0,07412$	$\alpha_1 = 0,000$
$\alpha_2 = 2,05834$	
$\alpha_3 = 0,16388$	
$\alpha_4 = 6,17581$	
<b>Центральные моменты :</b>	
<b>Статистические :</b>	<b>Теоретические :</b>
$\mu_2 = 2,05284$	$\mu_2 = 2,000$
$\mu_3 = -0,29300$	$\mu_3 = 0,000$
$\mu_4 = 6,19497$	$\mu_4 = 6,000$
<b>Прочие характеристики :</b>	
<b>Статистические :</b>	<b>Теоретические :</b>
$K_a = -0,09962$	$K_a = 0,000$
$K_\varepsilon = -1,52996$	$K_\varepsilon = -1,500$
$K_\phi = 0,90690$	
$\chi = 1,39589$	
$\eta = 19,33030$	
$\sigma = 1,43277$	

Рисунок 1.6. Сравнительный анализ числовых характеристик случайной величины

процесса, сгенерированных на ЭВМ (N=1000).

Сравнение теоретических и статистических числовых характеристик позволяет предположить, что случайный процесс распределен по закону арксинуса.

Однако более наглядным способом идентификации является идентификация, основанная на анализе фазовых портретов законов распределения. Под фазовым портретом будем понимать графическую зависимость, построенную в координатах:  $f_x(x)$  и  $f'_x(x)$ . На рисунке 1.7 приведены фазовые портреты типовых законов распределения.

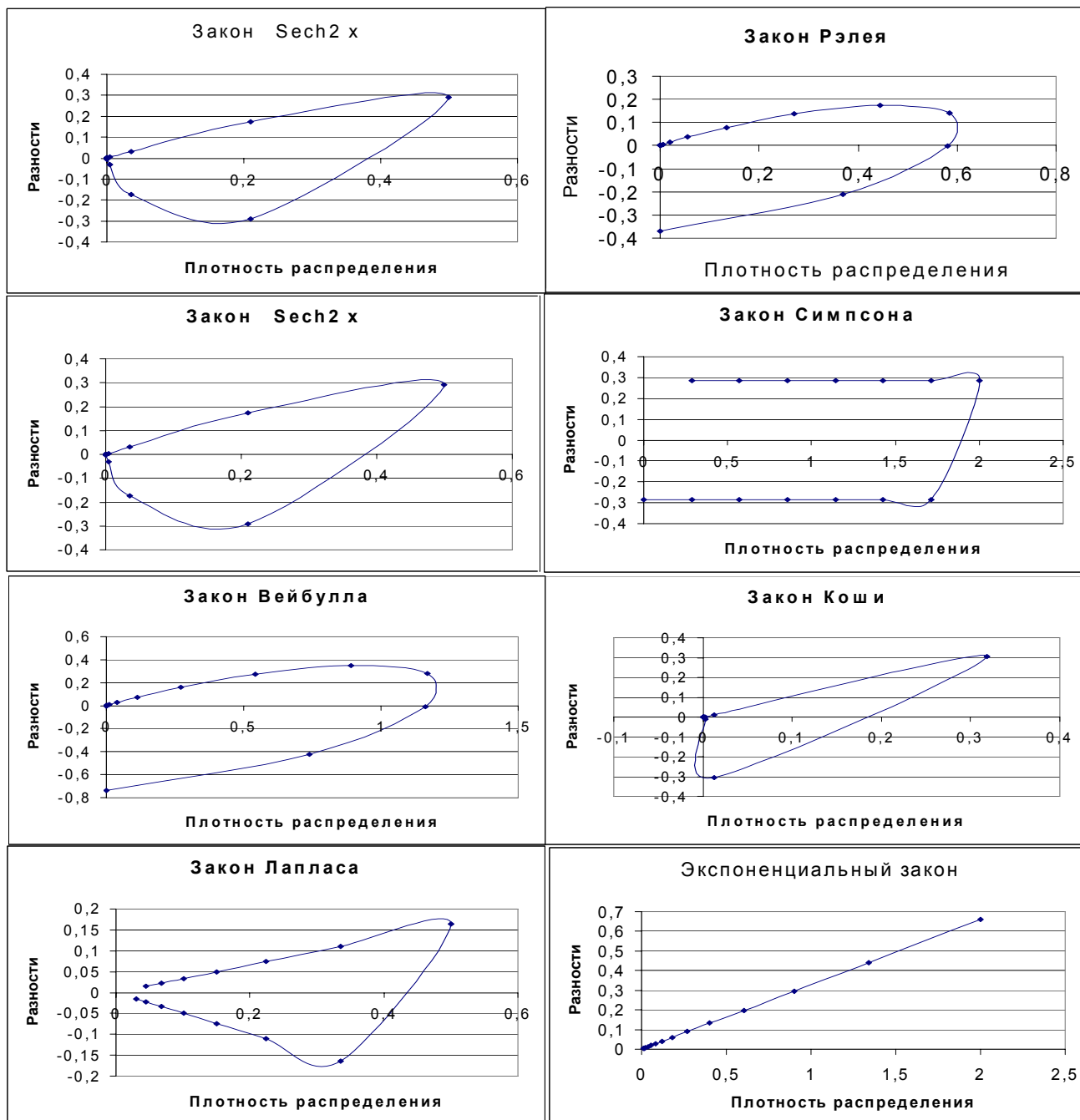
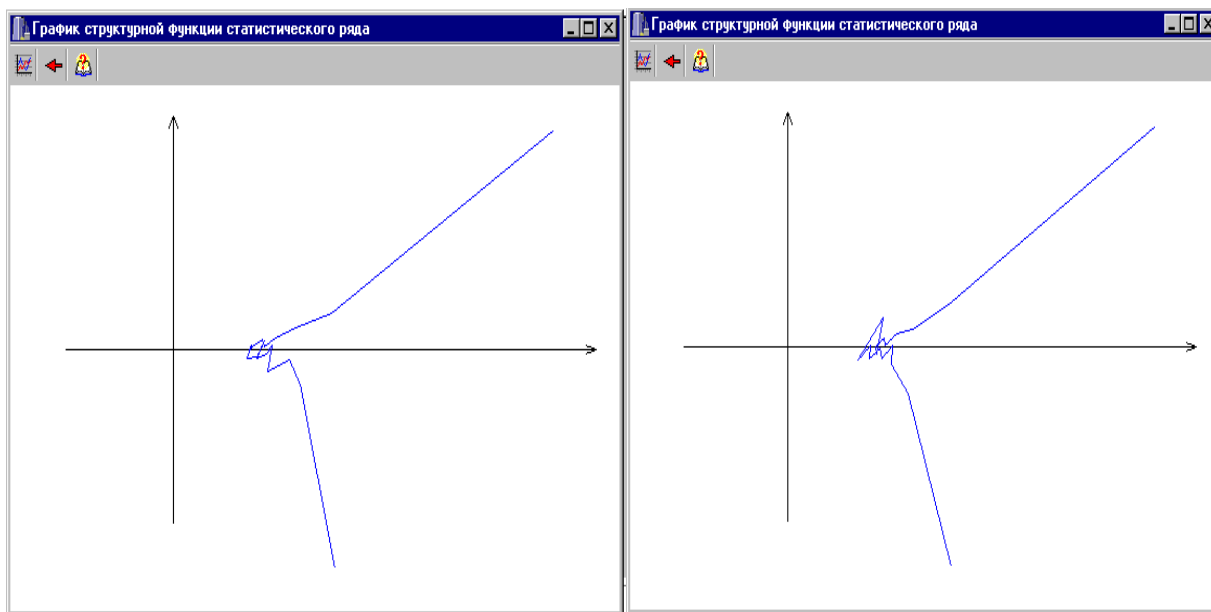


Рисунок 1.7. Фазовые портреты законов распределения

Следует отметить, что каждому закону распределения соответствует свой, уникальный фазовый протрет, не зависящий от значений параметров закона распределения. Заметим, что при расчете координат фазового портрета вместо точного значения

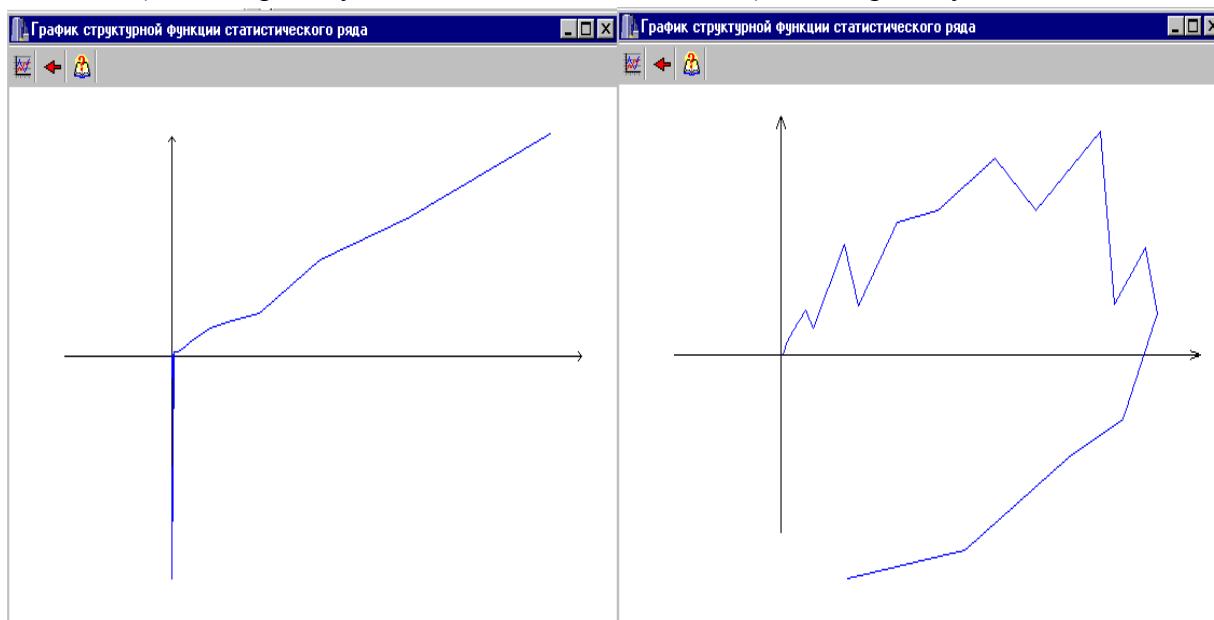
производной плотности распределения вероятностей определялось приращение плотности на заданном интервале.

В силу случайного характера исследуемых случайных величин фазовые портреты, построенные по экспериментальным данным, безусловно, будут отличаться от теоретических. Но эти отличия, тем не менее, позволяют идентифицировать случайные процессы по типу законов распределения. Ниже приведены фазовые портреты для случайного процесса, сгенерированного на ЭВМ по законам распределения арксинуса с разными параметрами, Рэлея и экспоненциальному закону.



а) закон арксинуса –  $a=5$

б) закон арксинуса –  $a=8$



в) экспоненциальное распределение -  $\lambda=1$

г) распределение Рэлея -  $\sigma=1$

Рисунок. 1.8. Фазовые портреты

Построив фазовый портрет по параметрам гистограммы, необходимо сравнить его с теоретическими фазовыми портретами и выбрать подходящий, т.е. выбрать соответствующий закон распределения. После этого необходимо перейти к определению параметров выбранного аналитического выражения.

## 1.4. Метод моментов

Один из методов, применяемый для решения задачи сглаживания статистических рядов, называется методом моментов [45]. Согласно этому методу, параметры  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  выбираются таким образом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик (моментов) теоретического распределения были равны статистическим характеристикам. При составлении уравнений для определения неизвестных параметров, как правило, выбирают моменты низших порядков. Общими рекомендациями являются здравый смысл и простота решения полученной системы уравнений. Рассмотрим несколько примеров.

Определим параметры аналитического выражения плотности распределения вероятностей генератора «белого шума» - стандартной программы ПЭВМ. Теоретически закон распределения должен быть равномерным  $f_x(x) = \frac{1}{b-a}$ ,  $a \leq x \leq b$  с параметрами  $a=0$  и  $b=1$ .

Гистограмма приведена на рис. 1.2, а данные для расчётов - в таблице 1.1. Уравнения для определения двух неизвестных параметров распределения могут быть составлены различными способами. Потребуем, например, чтобы у статистического и теоретического распределений совпадали математическое ожидание и дисперсия:

$$\begin{cases} \bar{m}_x = \frac{a+b}{2}; \\ D_x = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{cases} \quad (1.19)$$

Отметим, что оценка начальных моментов статистического ряда определяется выражением:

$$\bar{m}_k = \sum_{j=1}^M \bar{x}_j^k f_j, \quad (1.20)$$

где  $\bar{x}_j$  - среднее значение  $j$  интервала,  
а центральных -

$$\bar{m}_k = \sum_{s=0}^k C_k^s \bar{m}_{k-s} \bar{m}_x^s. \quad (1.21)$$

Эта система уравнений имеет аналитическое решение:

$$\begin{cases} a = \bar{m}_x - \sqrt{3} \bar{m}_x; \\ b = \bar{m}_x + \sqrt{3} \bar{m}_x. \end{cases} \quad (1.22)$$

Для данного статистического распределения

$$\begin{cases} \bar{m}_x = 0,49994; \\ D_x = 0,082208; \\ \bar{m}_x = 0,286719. \end{cases}$$

Подставив найденные оценки в выражения (1.22), получим:  $a=0,003327$ ,  $b=0,996553$ . Отсюда видно, что рассчитанные параметры закона распределения незначительно, но отличаются от заданного при генерировании. Следовательно, при

проведении статистического моделирования целесообразно проверять качество программных генераторов и оценивать его реальные характеристики.

Применив критерий Пирсона, вычислим по формуле (1.10) значение  $\chi^2 = 7,77$ , что соответствует вероятности  $P_d > 0,3$  (см. приложение 4). Таким образом, можно принять гипотезу о том, что данный статистический ряд соответствует равномерному распределению с найденными параметрами.

Преимуществом метода моментов является простота определения параметров распределения, недостатком - неоднозначность в выборе уравнений, которых может быть большое количество. Так, например, оценив  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ , при определении параметра распределения Релея  $\sigma$  возможно использование следующих уравнений (см. приложение 1):

$$\sigma = \frac{\mu_1}{1,25}; \quad \sigma = \sqrt{\frac{\mu_2}{0,43}}; \quad \sigma = \sqrt[3]{\frac{\mu_3}{0,1775}}; \quad \sigma = \sqrt[4]{\frac{\mu_4}{0,5978}}. \quad (1.23)$$

Результаты расчетов при определении параметра закона распределения Релея при различном числе дифференциальных коридоров  $M$  и различном объеме выборки приведены в таблице 1.2. При этом, с помощью ЭВМ генерировалась псевдослучайная последовательность, распределенная по закону Релея с параметром распределения  $\sigma = 1$ , а параметр распределения определялся в результате решения одного из уравнений (1.23) через соответствующие моменты.

Результаты экспериментальных исследований при определении параметра закона распределения Рэлея

Таблица 1.2

M	N	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$
10	300	0,9944	1,0585	1,0626	1,0502
	1000	1,0051	1,0320	1,0565	1,040
	5000	0,9947	0,9848	1,0040	0,9931
	10000	1,0086	1,0039	1,0000	1,0074
20	300	1,0209	1,0162	1,0692	1,0378
	1000	0,9989	1,0068	1,0130	0,9975
	5000	1,0086	1,0079	1,0201	1,0141
	10000	1,0072	1,0065	1,0220	1,0165

Анализ результатов показывает, что при составлении уравнений для определения параметров теоретического распределения по методу моментов необходимо выбирать моменты более низких параметров.

Приведем аналитические решения систем уравнений для типовых законов распределений (см. таблицу 1.3)

Системы уравнений для типовых законов распределений

Таблица 1.3

№	Название	Функции распределения	Системы уравнений
1	Арксинуса	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < -a) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}, (-a < x < a) \\ 1, (a < x < \infty) \end{cases}$	$a = \sqrt{2} \sigma_x$
2	Лапласа	$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda(x-\mu)}, (-\infty < x < \mu) \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda(x-\mu)}, (\mu < x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_x} \\ \mu = m_x \end{cases}$
3	Симпсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < a) \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, \left(a < x < \frac{a+b}{2}\right) \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, \left(\frac{a+b}{2} < x < b\right) \\ 1, (b < x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} a = m_x - \sqrt{6} \sigma_x \\ b = m_x + \sqrt{6} \sigma_x \end{cases}$
4	Sech <sup>2</sup>	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} ax$	$a = \frac{\pi}{2\sqrt{3} \sigma_x}$
5	Рэля	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0) \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\sigma = \frac{m_x}{1,25}$
6	Экспоненциальный	$\begin{cases} 0 < (-\infty < x < 0) \\ 1 - e^{-\alpha x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\alpha = \frac{1}{m_x}$

На рис. 1.8-1.9 представлены результаты эксперимента - гистограмма, полигон частот и плотность распределения вероятностей для закона Рэля при N=300, M=10,  $\sigma=1,00084$ .

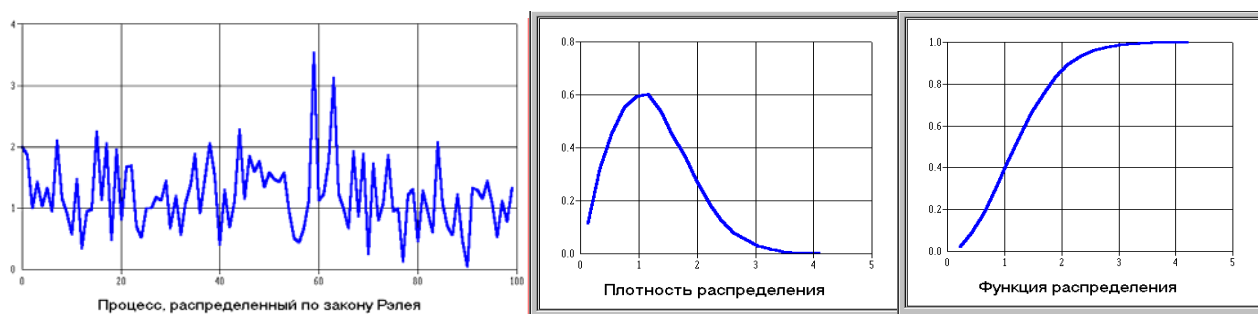


Рисунок 1.8. Результаты экспериментальных исследований

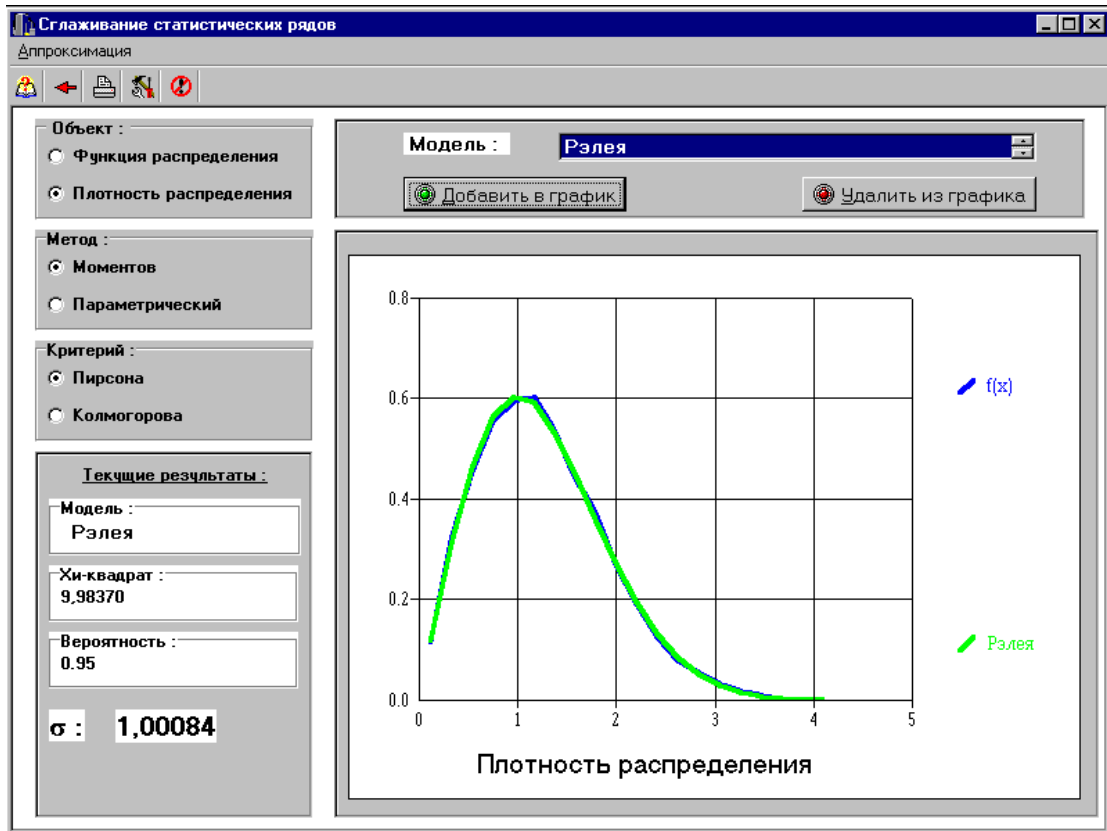
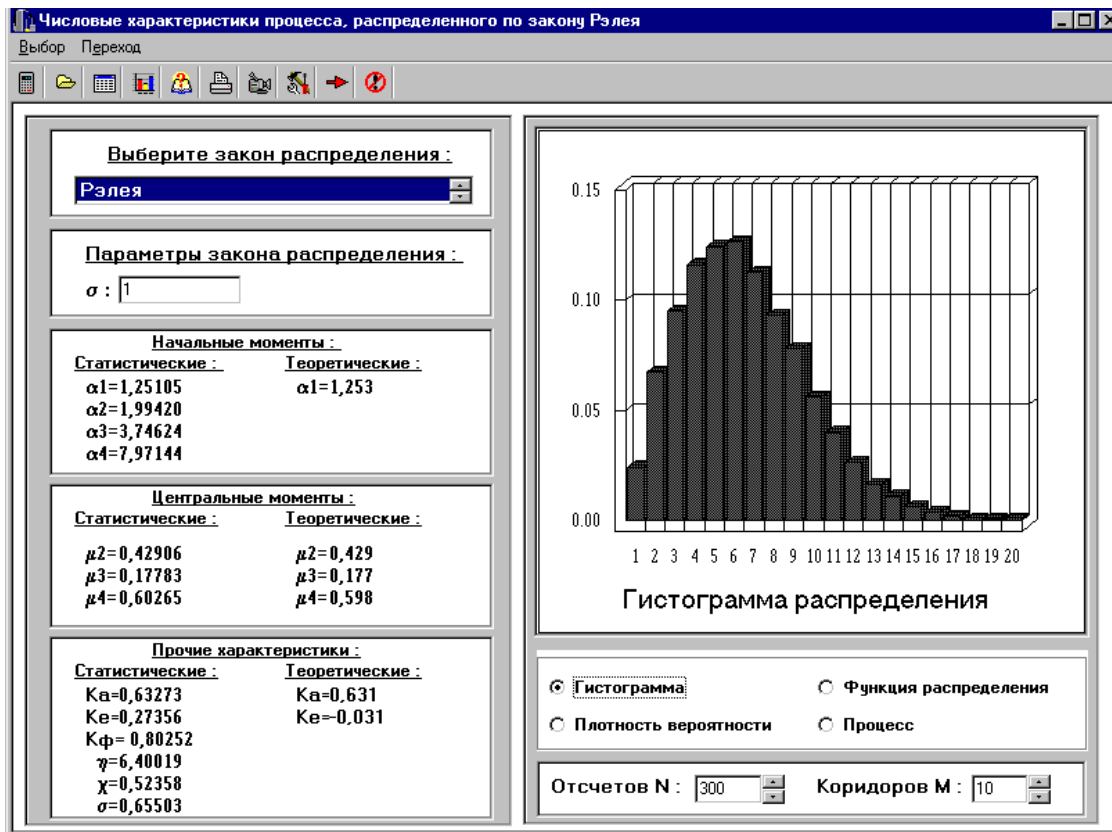


Рисунок 1.9. Определения параметров Рэлея методом моментов

## 1.5. Аппроксимация плотностей распределения вероятностей параметрическими моделями

Другим способом решения задачи сглаживания статистических рядов является определение параметров аналитического выражения, удовлетворяющих минимуму квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \sum_{j=1}^M [\hat{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)]^2 = \min, \quad (1.24)$$

где  $M$  - число дифференциальных коридоров;

$\hat{f}_x(\bar{x}_j) = \hat{f}_j / \Delta_j$  - значение плотности распределения вероятностей в середине  $j$ -го дифференциального коридора  $\bar{x}_j$ ;

$f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)$  - аналитическое выражение с неизвестными параметрами.

Условиями минимума погрешности  $\Delta$  является следующая система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M [\hat{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_1} = 0 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M [\hat{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_2} = 0. \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Сложность этой системы зависит от вида аналитического выражения и числа неизвестных параметров, подлежащих определению. Как правило, решение этой системы возможно лишь приближенными методами.

Так, например, при однопараметрической аппроксимации с использованием метода Ньютона [62], неизвестный параметр определяется в результате решения следующего уравнения:

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{\sum_{j=1}^M [\hat{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_n)] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta)}{\partial \beta}}{\sum_{j=1}^M \left\{ [\hat{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_n)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta)}{\partial \beta^2} - \left[ \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta)}{\partial \beta} \right]^2 \right\}_{\beta=\beta_n}}. \quad (1.26)$$

В качестве начального приближения можно выбрать значение параметра, определенное по методу моментов.

Алгоритм завершает свою работу, когда выполняется следующее условие:

$$|\beta_{n+1} - \beta_n| \leq \varepsilon, \quad (1.27)$$

где  $\varepsilon$  - погрешность вычисления параметра, задаваемая исследователем.

Приведем пример расчета по методу Ньютона параметра аппроксимации плотности распределения вероятностей экспоненциального закона распределения.

Плотностью вероятности экспоненциального закона распределения является функция следующего вида:

$$f_a(\bar{x}_j, \alpha) = \alpha e^{-\alpha \bar{x}_j}, \quad \bar{x}_j > 0,$$

где  $\alpha$  - параметр, значение которого необходимо найти, решив уравнение:



$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^M \left[ \mathbb{E}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \alpha) \right] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

Для решения этого уравнения применим метод Ньютона (1.26). В этом уравнении присутствуют первая и вторая производные аппроксимирующей функции по неизвестному параметру. Вид этих производных приведен ниже.

$$\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \alpha)}{\partial \alpha} = e^{-\alpha \bar{x}_j} - \alpha \bar{x}_j e^{-\alpha \bar{x}_j} = e^{-\alpha \bar{x}_j} [1 - \alpha \bar{x}_j],$$

$$\frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \alpha)}{\partial \alpha^2} = -\bar{x}_j e^{-\alpha \bar{x}_j} [1 - \alpha \bar{x}_j] - \bar{x}_j e^{-\alpha \bar{x}_j} = -\bar{x}_j e^{-\alpha \bar{x}_j} [2 - \alpha \bar{x}_j].$$

Подставив выражения производных аппроксимирующей модели в уравнение (1.26), получим:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{j=1}^M \left[ \mathbb{E}_x(\bar{x}_j) - \alpha_n e^{-\alpha_n \bar{x}_j} \right] e^{-\alpha_n \bar{x}_j} (1 - \alpha_n \bar{x}_j)}{\sum_{j=1}^M \left\{ \left[ \mathbb{E}_x(\bar{x}_j) - \alpha_n e^{-\alpha_n \bar{x}_j} \right] [-\bar{x}_j e^{-\alpha_n \bar{x}_j} (2 - \alpha_n \bar{x}_j)] - e^{-2\alpha_n \bar{x}_j} (1 - \alpha_n \bar{x}_j) \right\}}.$$

Аналогично рассчитываются параметры аналитических моделей и для других типовых законов распределения, выражения для производных которых приведены в таблице 1.4 и приложениях 6-7.

#### Производные законов распределения

Таблица 1.4

N	Название закона	$\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta)}{\partial \beta}$	$\frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta)}{\partial \beta^2}$
1	Арксинуса	$-\frac{\alpha}{\pi} (\alpha^2 - \bar{x}_j^2)^{-3/2}$	$3 \frac{\alpha^2}{\pi} (\alpha^2 - \bar{x}_j^2)^{-5/2} - \frac{1}{\pi} (\alpha^2 - \bar{x}_j^2)^{-3/2}$
2	Релея	$e^{-\frac{\bar{x}_j^2}{2\sigma^2}} \left( \frac{\bar{x}_j^3}{\sigma^5} - \frac{2\bar{x}_j}{\sigma^3} \right)$	$e^{-\frac{\bar{x}_j^2}{2\sigma^2}} \left( \frac{\bar{x}_j^5}{\sigma^8} - \frac{7\bar{x}_j^3}{\sigma^6} + \frac{6\bar{x}_j}{\sigma^4} \right)$
3	Sech <sup>2</sup>	$\frac{1}{2} \text{ch}^{-2}(a\bar{x}_j) - a\bar{x}_j \times$ $\times \text{ch}^{-3}(a\bar{x}_j) \text{sh}(a\bar{x}_j)$	$\text{ch}^{-3}(a\bar{x}_j) \text{sh}(a\bar{x}_j) (1 + \bar{x}_j) +$ $a\bar{x}_j^2 \text{ch}^{-2}(a\bar{x}_j) (3\text{ch}^{-2}(a\bar{x}_j) \text{sh}^2(a\bar{x}_j) - 1)$
4	Экспоненциальный	$e^{-\alpha \bar{x}_j} (1 - \alpha \bar{x}_j)$	$-\bar{x}_j e^{-\alpha \bar{x}_j} (2 - \alpha \bar{x}_j)$

На рис. 1.10 последовательно приведены результаты определения параметра экспоненциального распределения рассматриваемым способом.

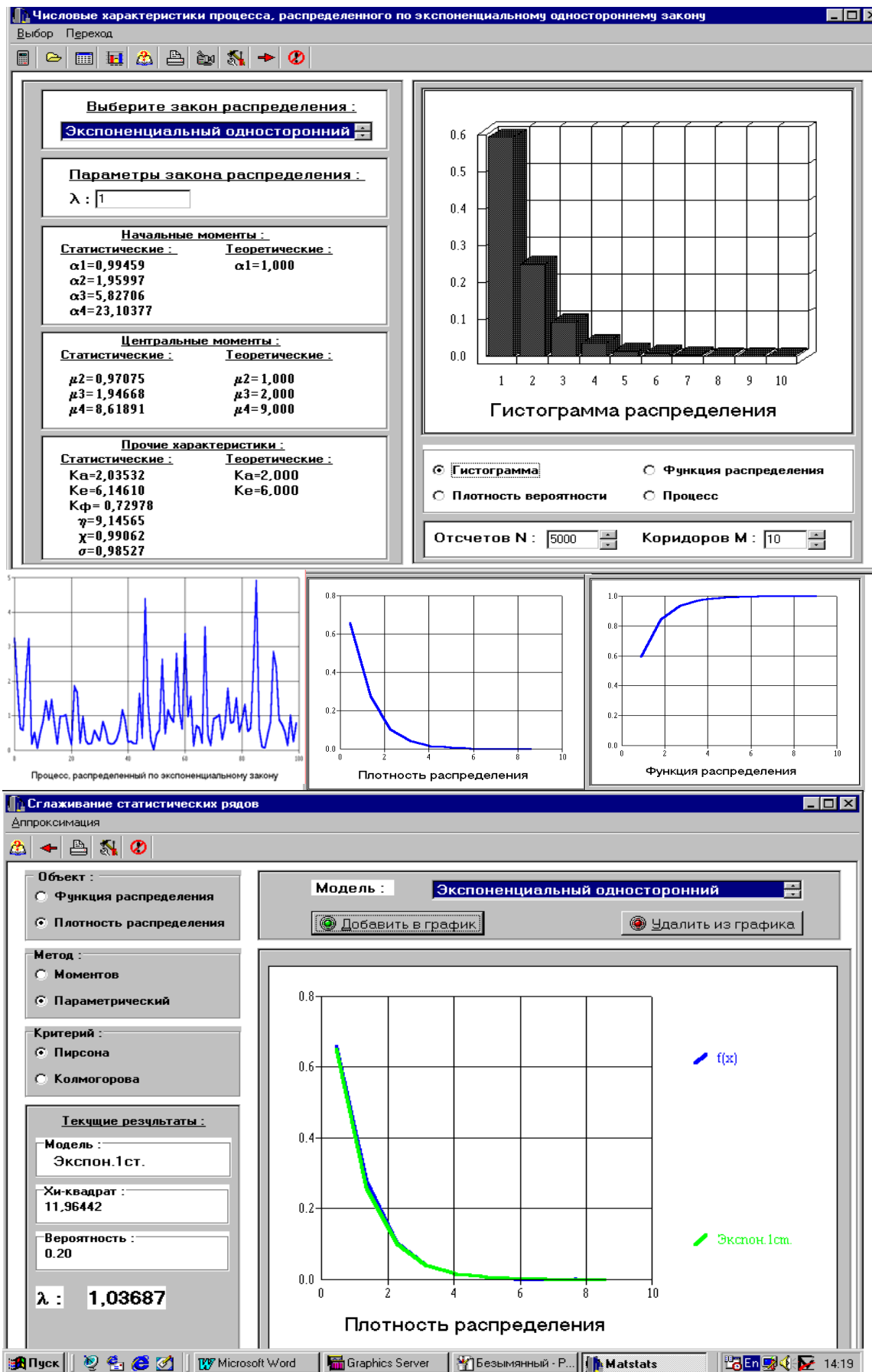


Рисунок 1.10. Определение параметра модели экспоненциального распределения

Несмотря на положительные качества метода Ньютона, позволяющие решать уравнения с достаточной скоростью и точностью, применение его не всегда оправдано, поскольку этот метод очень критичен к начальным условиям. Подобрать же удовлетворяющие сходимости метода Ньютона значения удается не для всех законов распределения, поэтому в некоторых случаях задачу нахождения неизвестных параметров приходится решать более простым методом хорд.

Известно, что если функция  $f_x(x)$  имеет разные знаки на концах интервала  $[a, b]$ , и производная этой функции сохраняет на данном интервале неизменный знак, то внутри промежутка находится один-единственный корень уравнения  $f_x(x)=0$  (если производная не сохраняет знака, то корень тоже есть, но он может быть не единственным).

Суть метода хорд заключается в последовательном сужении интервала, на котором находится корень [62]. Для этого следует определить интервал, на концах которого исследуемая функция  $f_x(x)$  имеет противоположные знаки.

В качестве первого приближения корня уравнения  $f_x(x)=0$  принимаем точку  $x_1$  пересечения оси ОХ и отрезка, соединяющего значение функции на концах интервала (этот отрезок является хордой). Значение  $x_1$  вычисляется по формулам:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f_x(a)}{f_x(b) - f_x(a)}, \quad (1.28)$$

или

$$x_1 = b - \frac{(b-a)f_x(b)}{f_x(b) - f_x(a)}. \quad (1.29)$$

Затем вычисляется значение функции  $f_x(x)$  в точке  $x_1$ , и выбирается тот интервал  $(a, x_1)$  или  $(x_1, b)$ , на концах которого  $f_x(x)$  имеет противоположные знаки. Искомый корень лежит в этом интервале и т.д.

Приведем, применительно к рассматриваемому случаю нахождения параметра аппроксимирующей модели, формулы, необходимые для работы метода хорд.

В качестве начального приближения значений  $a$  и  $b$  можно взять значения параметра, рассчитанные по методу моментов для данного закона распределения. В противном случае необходимо подбирать значения начальных границ рабочего интервала, исходя из здравого смысла и вида закона распределения.

Определим

$$f(a) = \sum_{j=1}^M \left( f_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, a) \right) \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, a)}{\partial a}, \quad (1.30)$$

$$f(b) = \sum_{j=1}^M \left( f_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, b) \right) \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, b)}{\partial b}. \quad (1.31)$$

Полученные значения  $f(a)$  и  $f(b)$  подставляем в формулу (1.28) или (1.29) для вычисления первой точки  $x_1$  пересечения хорды и оси ОХ.

Найденное значение  $x_1$  используем в формуле (1.32) для установления значения функции  $f(x_1)$ .

$$f(x_1) = \sum_{j=1}^M \left( f_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, x_1) \right) \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, x_1)}{\partial x_1}. \quad (1.32)$$

Приведем пример расчетов параметра аппроксимирующей модели методом хорд для закона распределения арксинуса (см. рис. 1.11)

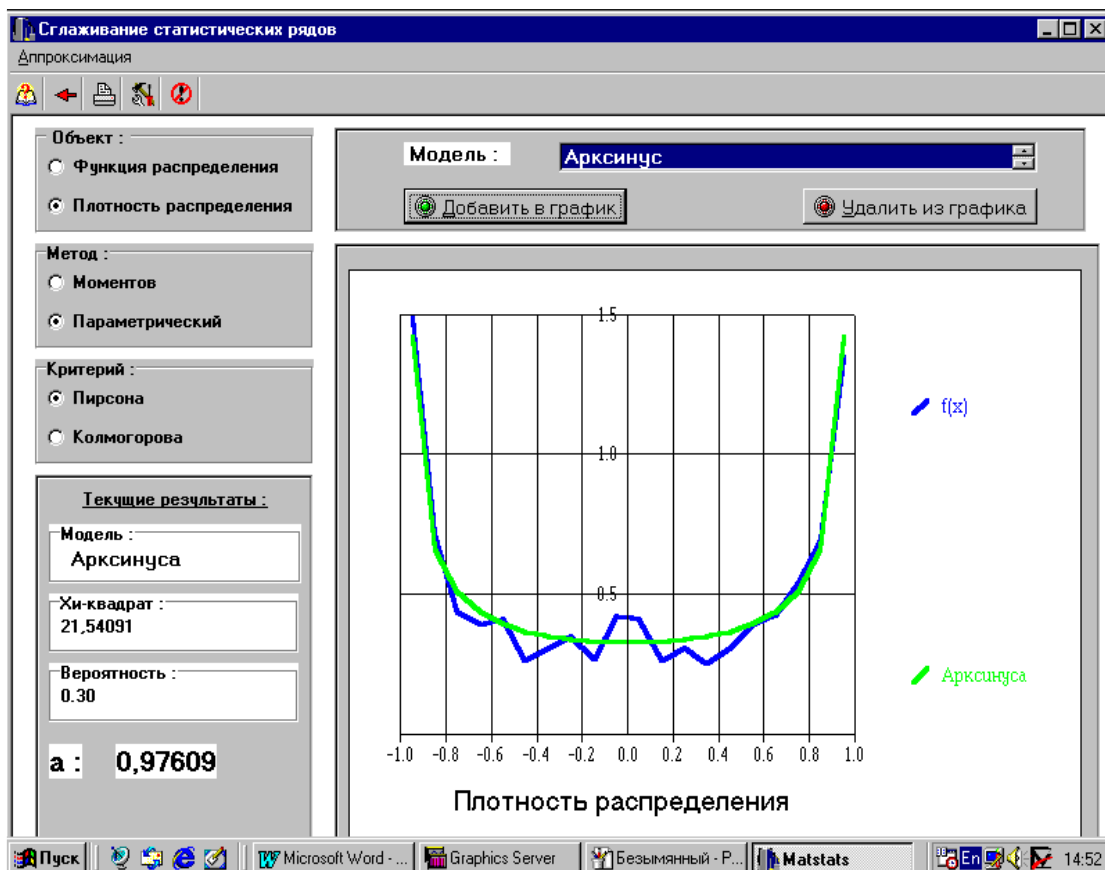
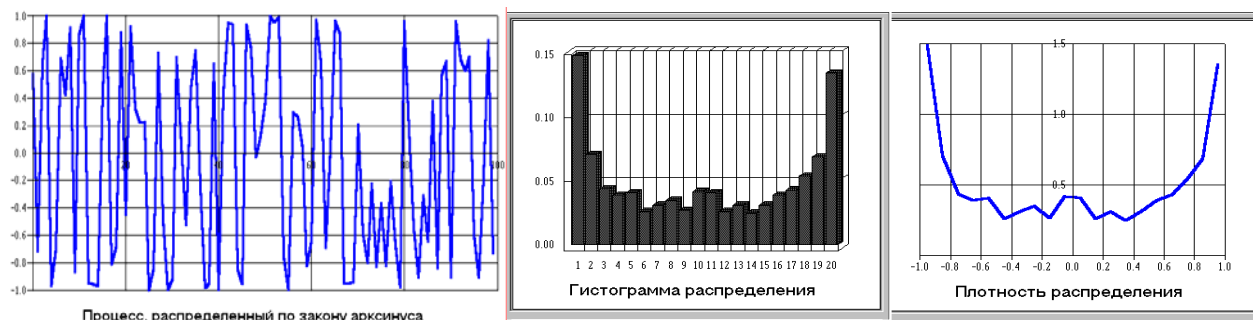


Рисунок 1.11. Результаты определения параметров закона распределения арксинуса

В качестве начальных значений  $a$  и  $b$  возьмем значения, рассчитанные по методу моментов:

$$a = \sqrt{2\widehat{D}_X} - 0.5,$$

$$b = \sqrt{2\widehat{D}_X} + 0.5.$$

Определим значения  $f(a)$  и  $f(b)$  в точках  $a$  и  $b$ :

$$f(a) = \sum_{j=1}^M \left( \epsilon_x(\bar{x}_j) - \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - \bar{x}_j^2}} \right) \frac{-a}{\pi\sqrt{(a^2 - \bar{x}_j^2)^3}},$$

$$f(b) = \sum_{j=1}^M \left( \mathbb{E}_x(\bar{x}_j) - \frac{1}{\pi\sqrt{b^2 - \bar{x}_j^2}} \right) \frac{-b}{\pi\sqrt{(b^2 - \bar{x}_j^2)^3}}.$$

Находим значение  $x_1$  и вычисляем функцию в этой точке:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b) - f(a)},$$

$$f(x_1) = \sum_{j=1}^M \left( \mathbb{E}_x(\bar{x}_j) - \frac{1}{\pi\sqrt{x_1^2 - \bar{x}_j^2}} \right) \frac{-x_1}{\pi\sqrt{(x_1^2 - \bar{x}_j^2)^3}}.$$

Проверяем знаки у функций и итерационно добиваемся требуемой точности.

Для нахождения параметров двухпараметрического закона распределения необходимо решить систему уравнений (1.25) для двумерного случая:

$$\begin{cases} f_1 = \sum_{j=1}^M \left[ \mathbb{E}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2) \right] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} = 0 \\ f_2 = \sum_{j=1}^M \left[ \mathbb{E}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2) \right] \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} = 0 \end{cases}. \quad (1.33)$$

Решить эту систему можно только приближенными методами, например, методом Ньютона. Воспользовавшись формулой для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными по методу Ньютона, получим:

$$\beta_1^{n+1} = \beta_1^n - \frac{1}{\Delta'} \left( \frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} f_1(\beta_1^n, \beta_2^n) - \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} f_2(\beta_1^n, \beta_2^n) \right), \quad (1.34)$$

$$\beta_2^{n+1} = \beta_2^n - \frac{1}{\Delta'} \left( \frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} f_2(\beta_1^n, \beta_2^n) - \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} f_1(\beta_1^n, \beta_2^n) \right), \quad (1.35)$$

где,

$$\Delta' = \frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} - \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1}.$$

Для вычислений необходимо знать значения частных производных по неизвестным параметрам функций  $f_1$  и  $f_2$ . Их выражения приведены в формулах (1.36) - (1.39).

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M \left[ \mathbb{E}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2) \right] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1^2} - \left[ \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \right]^2, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M \left[ \mathbb{E}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2) \right] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2^2} - \left[ \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \right]^2, \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} = \frac{\sum_{j=1}^M [\bar{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2}}{\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2}}, \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} = \frac{\sum_{j=1}^M [\bar{f}_x(\bar{x}_j) - f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2 \partial \beta_1}}{\frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \frac{\partial f_a(\bar{x}_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1}}. \quad (1.39)$$

Приведем пример расчета параметров аппроксимативной модели для закона распределения Симпсона.

Плотность распределения закона Симпсона:

$$f_a(\bar{x}_j, a, b) = \begin{cases} 0, & (-\infty < \bar{x}_j < a) \\ \frac{4(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^2}, & \left( a < \bar{x}_j < \frac{a+b}{2} \right) \\ \frac{4(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^2}, & \left( \frac{a+b}{2} < \bar{x}_j < b \right) \\ 0, & (b < \bar{x}_j < \infty) \end{cases}.$$

Приведем необходимые для расчетов частные первые, вторые и смешанные производные функций  $f(x)$ .

а)  $(a < x < (a+b)/2)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{-4}{(b-a)^2} + 8 \frac{(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^3}, & \frac{\partial f}{\partial b} &= 8 \frac{(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^3}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} &= \frac{-16(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^3} + \frac{24(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^4}, & \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} &= \frac{24(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^4}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} &= \frac{8}{(b-a)^3} - \frac{24(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^4}, & \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} &= \frac{8}{(b-a)^3} - \frac{24(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^4}. \end{aligned}$$

б)  $((a+b)/2 < x < b)$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{8(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^3}, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{4}{(b-a)^2} - \frac{8(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = \frac{24(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^4},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{-16}{(b-a)^3} + \frac{24(b-\bar{x}_j)}{(b-a)^4}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{8}{(b-a)^3} - \frac{24(b-\bar{x}_j)}{(b-a)^4},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} = \frac{8}{(b-a)^3} - \frac{24(b-\bar{x}_j)}{(b-a)^4}.$$

Полученные выражения необходимо подставить в выражения (1.36)-(1.39) и рассчитать частные производные функций  $f_1$  и  $f_2$ , которые используются в вычислениях неизвестных параметров путем последовательного приближения итерационных формул (1.34) и (1.35).

В качестве примера на рис. 1.12 приведены результаты определения параметров распределения Симпсона.

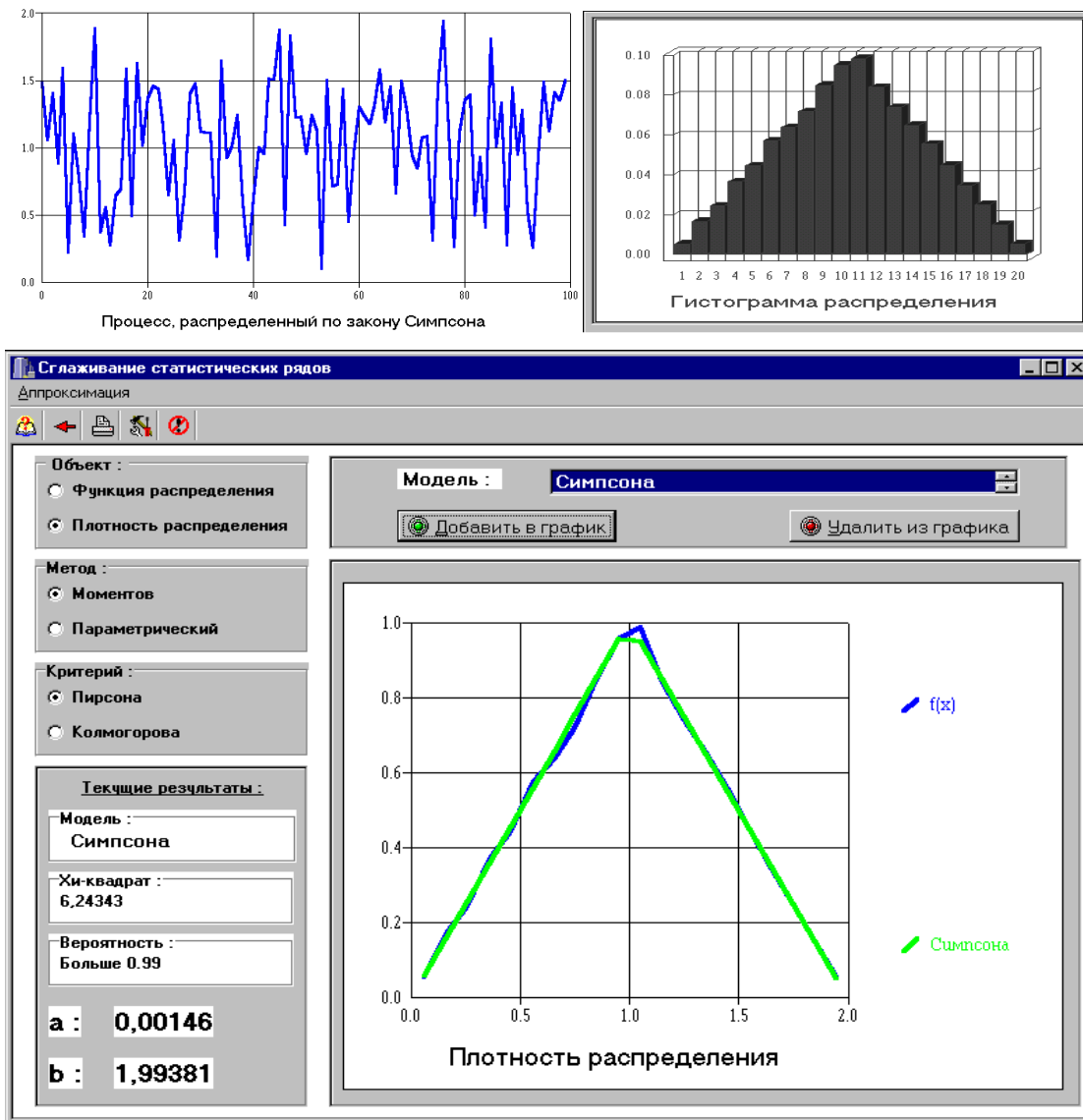


Рисунок 1.12. Результаты определения параметров закона распределения Симпсона (N=500)

Из результатов раздела видно, что метод аппроксимации плотностей распределения вероятностей параметрическими моделями значительно сложнее метода моментов. Применение его оправдано при небольших объемах выборки.

## 1.6. Аппроксимация функций распределения вероятностей параметрическими моделями

При аппроксимации плотностей распределения вероятностей в качестве аргумента используется середина дифференциального коридора, что, в свою очередь, вносит дополнительные погрешности при анализе асимметричных законов распределения. От этого недостатка свободна аппроксимация функций распределения вероятностей.

Задача аппроксимации статистического ряда функциями распределения вероятностей ставится аналогично задаче аппроксимации плотностей распределения вероятностей:

$$\Delta = \sum_{j=1}^M \left[ \bar{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right]^2 = \min, \quad (1.40)$$

где  $M$  - число дифференциальных коридоров;

$$\bar{F}_x(x_j) = \sum_{s=1}^j \bar{F}_s - \text{значение функции распределения вероятностей в конце } j\text{-го}$$

дифференциального коридора  $x_j$ ;

$F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)$  - аналитическое выражение с неизвестными параметрами  $\beta_1, \beta_2, \dots$

Условиями минимума погрешности  $\Delta$  является следующая система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M \left[ \bar{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_1} = 0 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M \left[ \bar{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots) \right] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2, \dots)}{\partial \beta_2} = 0. \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (1.41)$$

При однопараметрической аппроксимации с использованием метода Ньютона, неизвестный параметр определяется в результате решения следующего уравнения:

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{\sum_{j=1}^M \left[ \bar{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_n) \right] \frac{\partial F_a(x_j, \beta)}{\partial \beta}}{\sum_{j=1}^M \left\{ \left[ \bar{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_n) \right] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta)}{\partial \beta^2} - \left[ \frac{\partial F_a(x_j, \beta)}{\partial \beta} \right]^2 \right\}_{\beta=\beta_n}}, \quad (1.42)$$

и дальше все расчеты производятся аналогично случаю с плотностями вероятностей (см. раздел 2.4).

Рассмотрим метод хорд применительно к задаче аппроксимации функций распределения вероятностей.

Приведем все формулы, необходимые для работы метода.



$$F(a) = \sum_{j=1}^M \left( \hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, a) \right) \frac{\partial F_a(x_j, a)}{\partial a}, \quad (1.43)$$

$$F(b) = \sum_{j=1}^M \left( \hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, b) \right) \frac{\partial F_a(x_j, b)}{\partial b}. \quad (1.44)$$

Далее вычисляется первая точка  $x_1$  пересечения хорды и оси ОХ.

$$x_1 = a - \frac{(b-a)F(a)}{F(b) - F(a)}, \quad (1.45)$$

или

$$x_1 = b - \frac{(b-a)F(b)}{F(b) - F(a)}. \quad (1.46)$$

Найденное значение  $x_1$  используется для нахождения значения функции  $F(x_1)$ .

$$F(x_1) = \sum_{j=1}^M \left( \hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, x_1) \right) \frac{\partial F_a(x_j, x_1)}{\partial x_1}. \quad (1.47)$$

Проверяем знаки получившихся функций. Если  $F(a) \cdot F(x_1) \geq 0$ , то левая граница интервала  $a$  переходит в  $x_1$ . В противном случае, в  $x_1$  переходит правая граница  $b$ .

Новые значения  $a$  и  $b$  вновь подставляются в формулы (1.43) и (1.44), и итерационный процесс повторяется до достижения необходимой точности.

Приведем пример расчетов параметра аппроксимирующей модели для закона распределения арксинуса.

В качестве начальных значений  $a$  и  $b$  выберем значения, рассчитанные по методу моментов.

$$a = \sqrt{2\hat{D}_x} - 0.5,$$

$$b = \sqrt{2\hat{D}_x} + 0.5.$$

Рассчитываем значения  $F(a)$  и  $F(b)$  в точках  $a$  и  $b$ :

$$F(a) = \sum_{j=1}^M \left( F_a(x_j) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x_j}{a} \right) \right) \frac{-x_j}{\pi \sqrt{(a^4 - x_j^2 a^2)}},$$

$$F(b) = \sum_{j=1}^M \left( F_a(x_j) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x_j}{b} \right) \right) \frac{-x_j}{\pi \sqrt{(b^4 - x_j^2 b^2)}}.$$

Находим значение  $x_1$  и вычисляем функцию в этой точке:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)F(a)}{F(b) - F(a)},$$

$$F(x_1) = \sum_{j=1}^M \left( F_a(x_j) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x_j}{x_1} \right) \right) \frac{-x_j}{\pi \sqrt{(x_1^4 - x_j^2 x_1^2)}}.$$

Результаты определения параметра случайного процесса, распределенного по закону арксинуса, представлены на рис. 1.13.

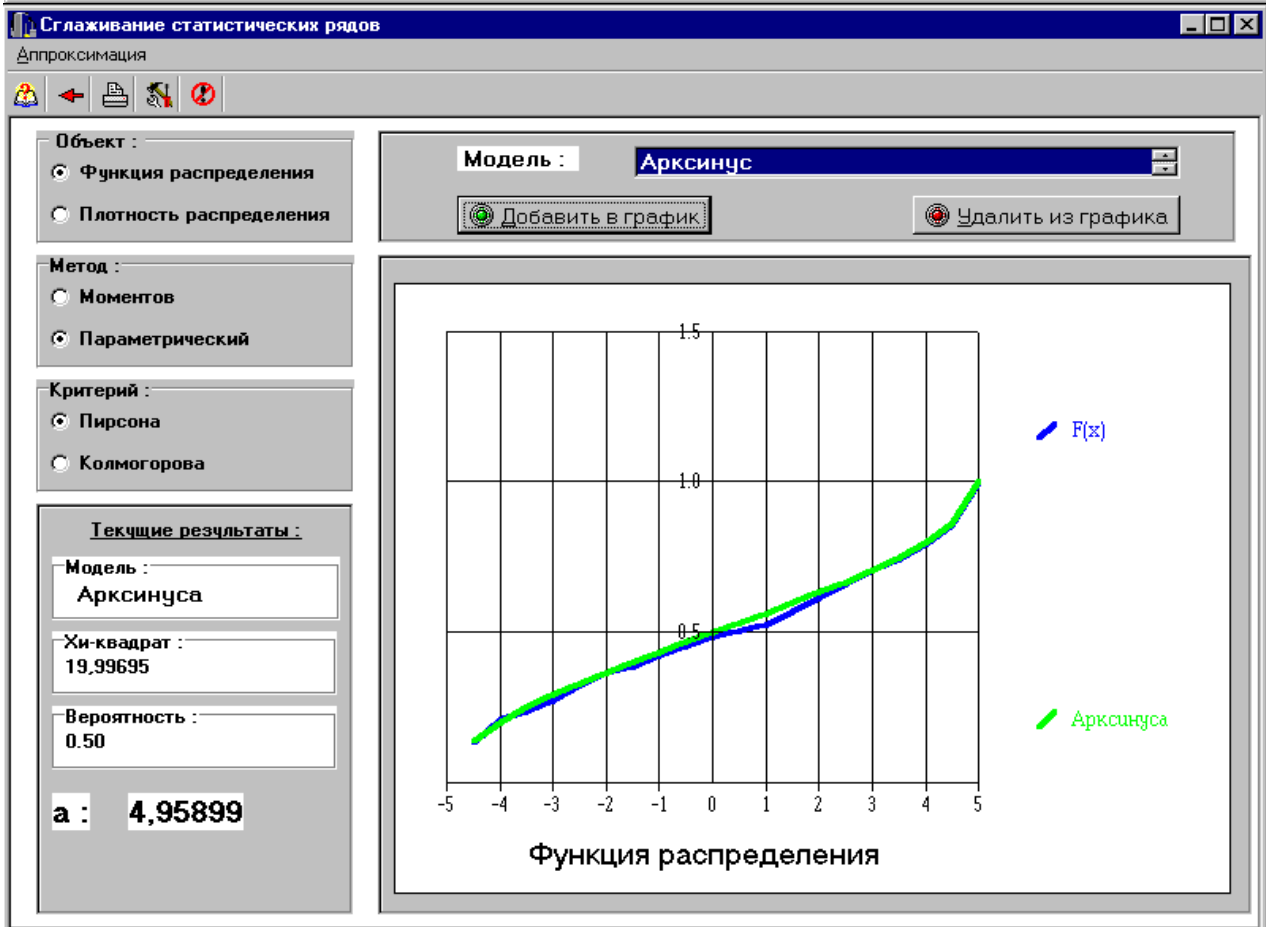
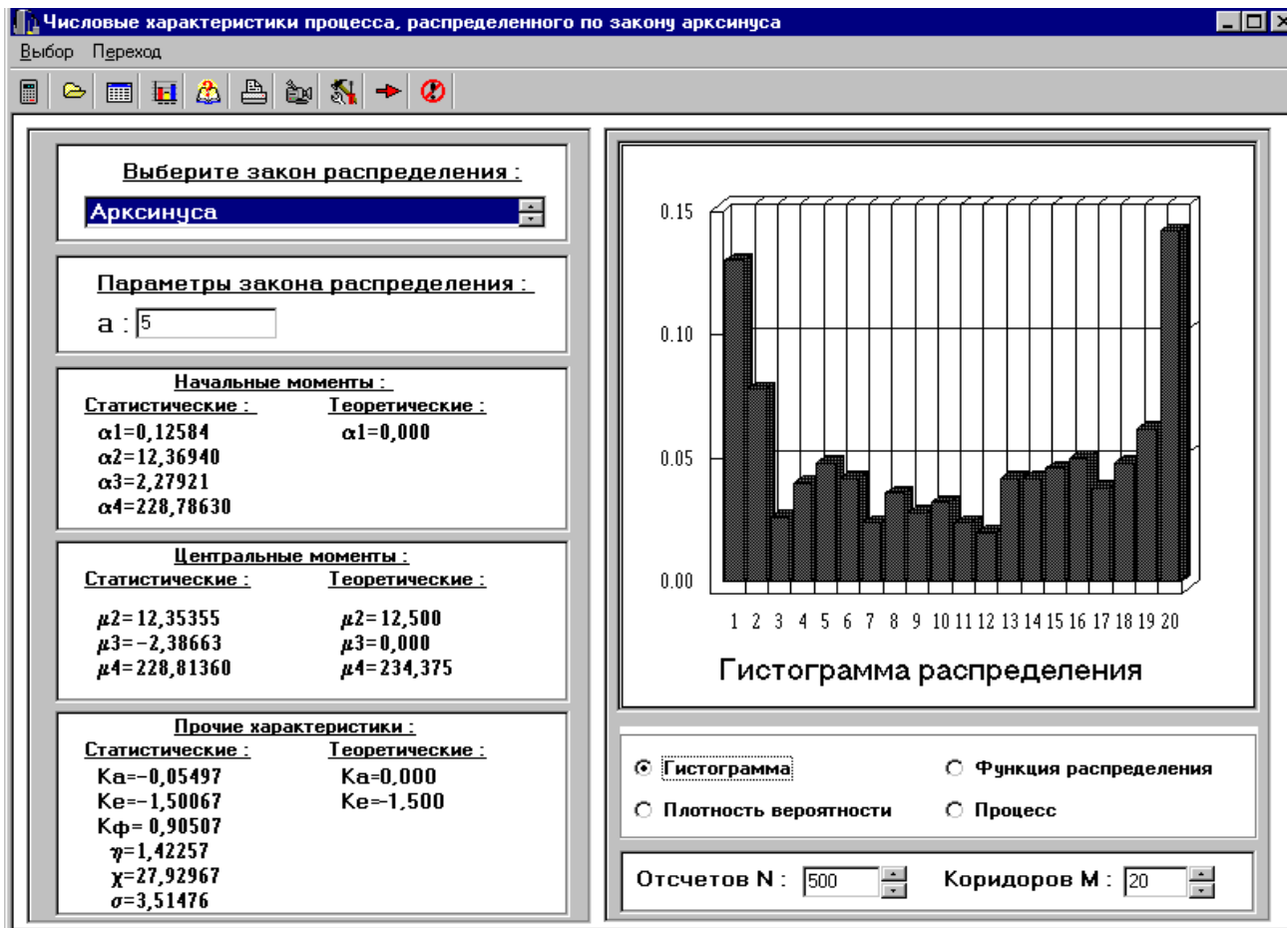


Рисунок 1.13. Результаты определения параметра закона арксинуса

Для нахождения параметров двухпараметрического закона распределения необходимо решить уравнение (1.40) для двумерного случая.

Составим систему из двух уравнений для нахождения неизвестных параметров аппроксимации. Эту систему можно получить, продифференцировав выражение (1.40) по неизвестным параметрам.

$$\begin{cases} F_1 = \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} = 0 \\ F_2 = \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} = 0 \end{cases} \quad (1.48)$$

Для решения системы (1.48) воспользуемся приближенным методом Ньютона. Способ нахождения неизвестных параметров аналогичен случаю с плотностями распределения вероятностей (смотрите раздел 1.5) – по формулам (1.34) и (1.35).

Для вычислений необходимо определить частные производные по неизвестным параметрам  $\beta_1, \beta_2$  функций  $F_1$  и  $F_2$ :

$$\frac{\partial F_1}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1^2} - \left[ \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \right]^2, \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2^2} - \left[ \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \right]^2, \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \beta_2} = \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} - \frac{\frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1} \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2}}{\partial \beta_1 \partial \beta_2}, \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \beta_1} = \sum_{j=1}^M [\hat{F}_x(x_j) - F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)] \frac{\partial^2 F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} - \frac{\frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2} \frac{\partial F_a(x_j, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1}}{\partial \beta_2 \partial \beta_1}. \quad (1.52)$$

Значения неизвестных параметров вычисляются итерационно до достижения заданной точности.

Приведем пример расчета параметров аппроксимационной модели для закона распределения Симпсона:

$$F_x(x_j, a, b) = \begin{cases} 0, & (-\infty < x_j < a) \\ \frac{2(x_j - a)^2}{(b - a)^2}, & \left(a < x_j < \frac{a + b}{2}\right) \\ 1 - \frac{2(b - x_j)^2}{(b - a)^2}, & \left(\frac{a + b}{2} < x_j < b\right) \\ 1, & (b < x_j < \infty) \end{cases}.$$

Найдем все необходимые для расчетов частные первые, вторые и смешанные производные функции  $F_x(x)$ .

а)  $(a < x < (a+b)/2)$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{4(x_j - a)^2}{(b - a)^3} - \frac{4(x_j - a)}{(b - a)^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = -\frac{4(x_j - a)^2}{(b - a)^3},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4} - \frac{16(x_j - a)}{(b - a)^3} + \frac{4}{(b - a)^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} = \frac{8(x_j - a)}{(b - a)^3} - \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial b \partial a} = \frac{8(x_j - a)}{(b - a)^3} - \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4}.$$

б)  $((a+b)/2 < x < b)$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -\frac{4(b - x_j)^2}{(b - a)^3}, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{4(b - x_j)^2}{(b - a)^3} - \frac{4(b - x_j)}{(b - a)^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = -\frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = \frac{16(b - x_j)}{(b - a)^3} - \frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4} - \frac{4}{(b - a)^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} = \frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4} - \frac{8(b - x_j)}{(b - a)^3}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial a} = \frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4} - \frac{8(b - x_j)}{(b - a)^3}.$$

Полученные выражения необходимо подставить в выражения (1.49)-(1.52) и рассчитать частные производные дифференциальных функций  $F_1$  и  $F_2$ , которые используются в вычислениях неизвестных параметров путем последовательного приближения итерационных формул (1.34) и (1.35).

Аналогично рассчитываются параметры аналитических моделей и для других типовых законов распределения (см. приложения 8-9).

Ниже приведены результаты определения параметров функции распределения Симпсона.

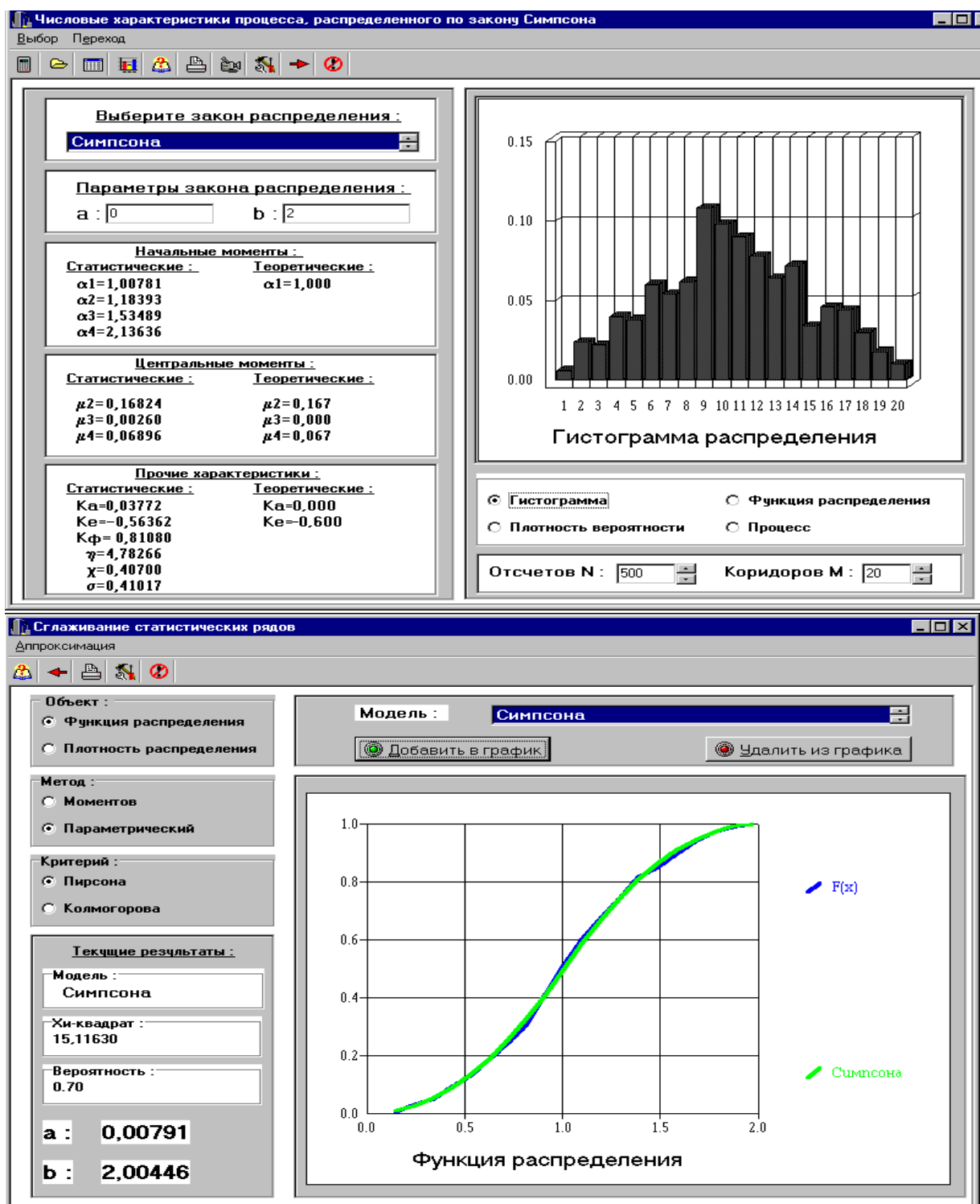


Рисунок 1.14. Результаты аппроксимации

Сравнительный анализ методов аппроксимации законов распределения отдает предпочтение методу аппроксимации функций распределения, особенно при малой выборке.

## 1.7. АИС для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов

Методы, рассмотренные в разделах 1.4-1.6, легли в основу АИС, предназначенной для определения аналитического выражения закона распределения исследуемого случайного процесса.

АИС состоит из комплекса технических средств, пакета прикладных программ, интерфейса пользователя, математического и методического обеспечения [72, 103]. Для удобства использования в учебном процессе в систему включен блок генерирования случайных процессов с заданными законами распределения вероятностей.

Технические требования, предъявляемые к системе состоят в следующем:

- программные требования - Microsoft Windows 95-98;
- аппаратные требования - процессор Pentium 100 МГц, ОЗУ 16 Мб, на жестком диске 15 Мб.

### 1.7.1. Описание подсистем

Разработка структуры пакета программ велась в соответствии с приведенной схемой, представленной на рис. 1.15. Учитывая большое разнообразие законов распределения, основным требованием, предъявляемым к структуре пакета программ, является открытость, то есть возможность добавления в программу новых методов аппроксимации и законов распределения без изменения структуры программы. В соответствии с этим требованием пакет программ системы разбит на четыре блока, обмен между которыми осуществляется в виде передачи данных (см. рис. 1.16):

- получения статистических данных;
- оценки статистических данных;
- аппроксимации;
- оценки качества аппроксимации.

**Блок получения статистических данных** делится, в свою очередь, на три части:

- генерация случайного процесса с заданным видом закона распределения;
- ввод выборки из  $N$  отсчетов случайного процесса из выбранного файла;
- ввод частот попадания в дифференциальные коридоры отсчетов случайного процесса из выбранного файла.

В первом случае данные генерируются в самой программе, во втором - возникают как результат эксперимента или генерируются в другой программе и передаются в систему. Данные, получаемые в первом блоке, передаются в блок оценки статистических характеристик вместе со способом получения информации. В первом и втором случае передается массив отсчетов случайного процесса, в третьем - частоты попадания в дифференциальные коридоры. В первом случае вводится также число дифференциальных коридоров и передается номер закона распределения, по которому сгенерирован случайный процесс.

**Блок оценки статистических характеристик** состоит из шести частей: оценки числовых характеристик случайного процесса; расчета и построения плотности распределения вероятностей; функции распределения, гистограммы; фазового портрета и графика случайного процесса.

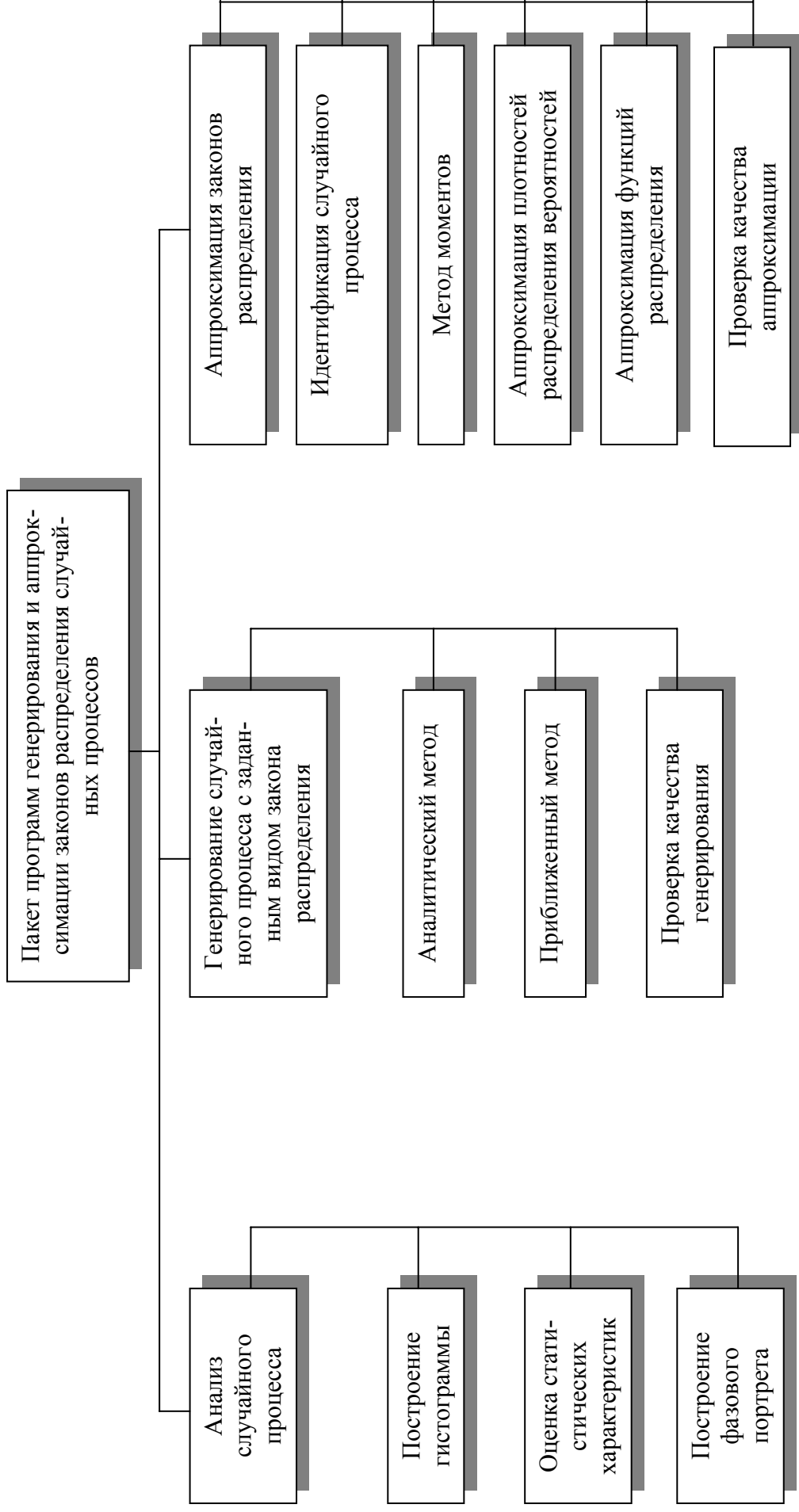


Рисунок 1.15. Пакет программ генерирования и аппроксимации законов распределения случайных процессов

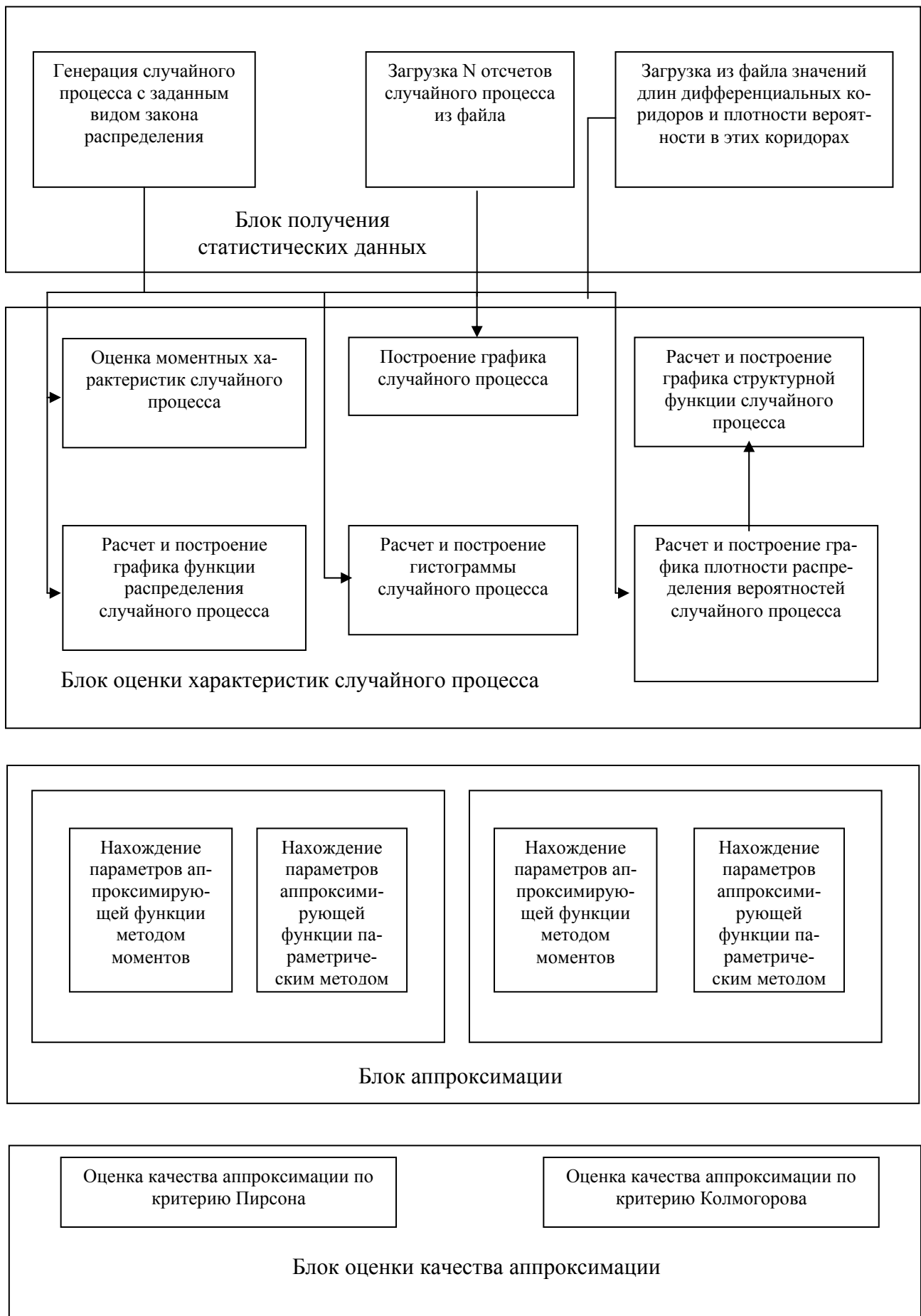


Рисунок 1.16. Блоки пакета прикладных программ и их взаимодействие



Данные в этот блок попадают из блока получения статистических данных. В первом и втором случае на основе отсчетов случайного процесса рисуется график процесса, определяются частоты попадания в дифференциальные коридоры, и формируется гистограмма, оцениваются числовые характеристики случайного процесса. Данные о частотах попадания в дифференциальные коридоры передаются в блоки формирования функции распределения и плотности распределения вероятности. Значения плотности распределения вероятности передаются в блок формирования фазового портрета случайного процесса.

**Блок аппроксимации** состоит из четырех частей: аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения по методу моментов, аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения параметрическим методом.

В блок аппроксимации передаются из блока получения статистических данных число дифференциальных коридоров и номер закона распределения, а из блока оценки статистических характеристик - значения плотности распределения вероятностей и значения функции распределения, значения математического ожидания и дисперсии. Математическое ожидание и дисперсия используется в методе моментов, значение плотности вероятности и функции распределения используется в параметрическом методе.

Используя переданные значения и выбранный для аппроксимации закон распределения, в данном блоке вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующего закона.

**Блок оценки качества аппроксимации** состоит из двух частей:

- оценки по критерию Пирсона;
- оценки по критерию Колмогорова.

В блок оценки качества аппроксимации передаются:

- из блока получения статистических данных - значения частот попадания в дифференциальные коридоры, число отсчетов случайного процесса, число дифференциальных коридоров;
- из блока оценки статистических характеристик - значения функции распределения;
- из блока аппроксимации - значения неизвестных параметров аппроксимирующего закона распределения.

Благодаря такому блочному построению структуры программы можно добавлять новые возможности, не видоизменяя ее принципиально. Например, можно изменить способы задания статистических данных, с которыми работает система, добавить новые законы распределения, по которым будет генерироваться случайный процесс, задать другие статистические характеристики случайного процесса, которые оцениваются в программе, изменить методы их расчетов, добавлять новые или изменять старые методы аппроксимации и т.д. Трудоемкость таких изменений будет определяться только сложностью программной реализации самих изменений, а не перестройкой структуры системы.

## 1.7.2. Описание интерфейса системы

Основу интерфейса системы составляют две основные экранные формы, с которыми работает пользователь:

- экранная форма задания случайного процесса и оценивания его характеристик;
- экранная форма аппроксимации случайных процессов и оценки качества аппроксимации.

Первая форма, показанная на рис. 1.17, представляет из себя панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также «горячие» клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы:

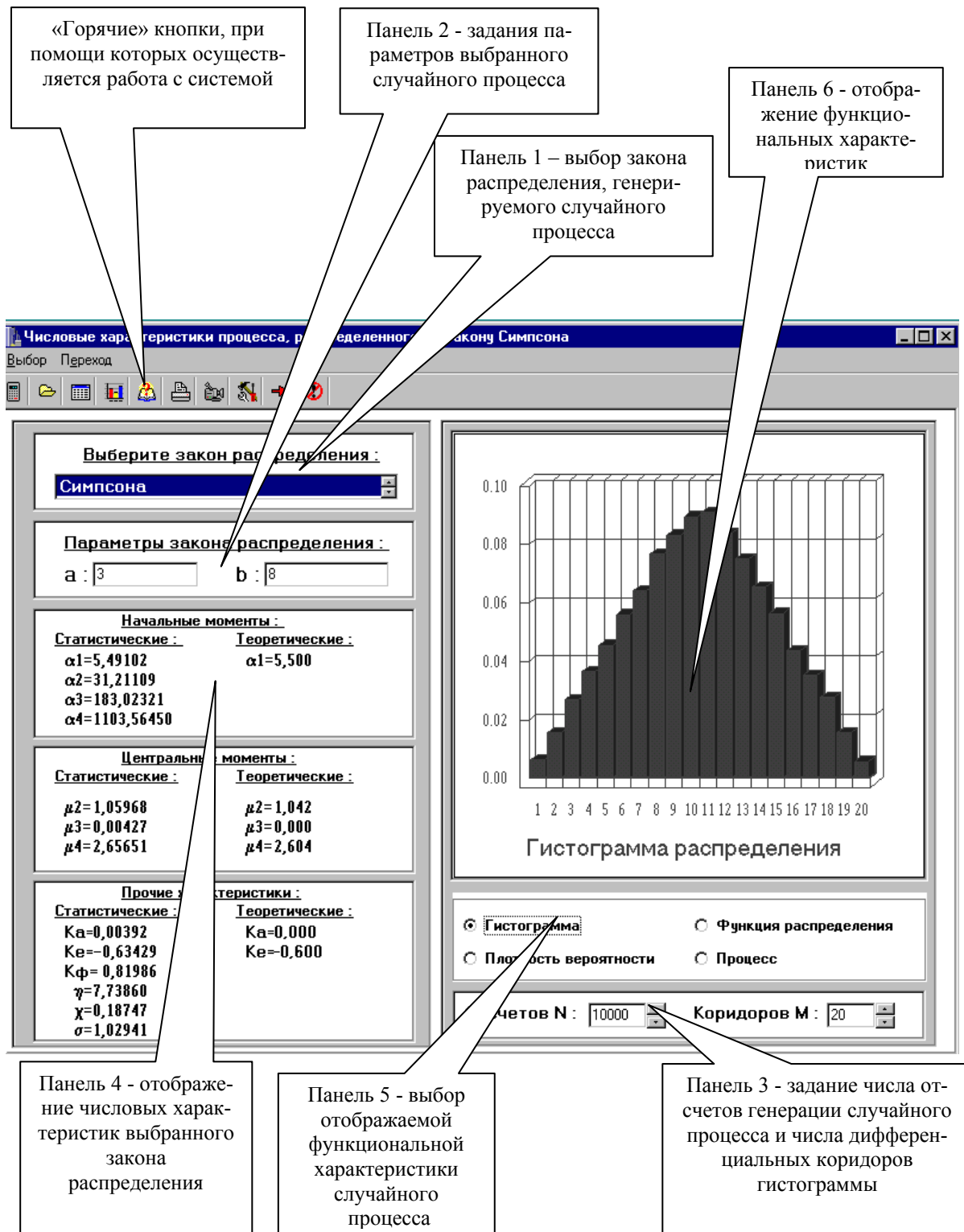


Рисунок 1.17. Интерфейс экранной формы генерирования и оценки статистических характеристик случайного процесса

- панель «горячих» клавиш, с помощью которой осуществляется управление работой системы;
- панель 1 – выбор закона распределения для генерации процесса, в случае его программного задания;
- панель 2 появляется после выбора закона распределения и позволяет задать значение одного или (в зависимости от закона) двух параметров данного закона распределения;
- панель 3 позволяет указать число отсчетов программно-генерируемого случайного процесса, а также число дифференциальных коридоров для расчета гистограммы;
- панель 4 служит для отображения вычисленных числовых характеристик сгенерированного с заданным видом закона распределения случайного процесса;
- панель 5 позволяет выбрать вид отображаемой функциональной характеристики случайного процесса или сам график процесса;
- панель 6 отображает одну из трех функциональных характеристик случайного процесса: гистограмму, плотность распределения вероятностей или функцию распределения.

На рис. 1.18 более подробно показана панель «горячих» кнопок. Она состоит из следующих кнопок:

- расчетов – генерирует случайный процесс с заданным видом закона распределения и параметром;
- загрузки из файла – требует указать файл и вызывает для работы экранную форму приема статистических данных, эта экранная форма показана на рис. 3.3;
- отображения расчетов – считает и отображает числовые характеристики случайного процесса;
- отображения функциональных характеристик – рассчитывает и показывает на панели 6 выбранную на панели 5 функциональную характеристику случайного процесса;
- справки – вызывает справочную систему, содержащую основные сведения об основных видах законов распределения;
- печати – позволяет вызвать стандартный диалог печати под Windows;
- настройки принтера – вызывается стандартное окно настройки параметров принтера;
- перехода к экранной форме структурной функции – при нажатии вызывается экранная форма, отображающая структурную функцию случайного процесса, экранная форма структурной функции показана на рис. 1.22;
- перехода к экранной форме аппроксимации случайного процесса;
- выхода из программы.

На рис. 1.19 показана экранная форма загрузки данных из файла.

На панели 1 выбирается вид данных: отсчеты случайного процесса или частоты попадания в дифференциальные коридоры. В том случае, если выбраны отсчеты на панели 2, задается их число. В случае выбора частот на панели 3 следует указать число дифференциальных коридоров, а также минимальную и максимальную границу диапазона.

После этого, по нажатию кнопки 1, происходит чтение данных из указанного перед этим файла.

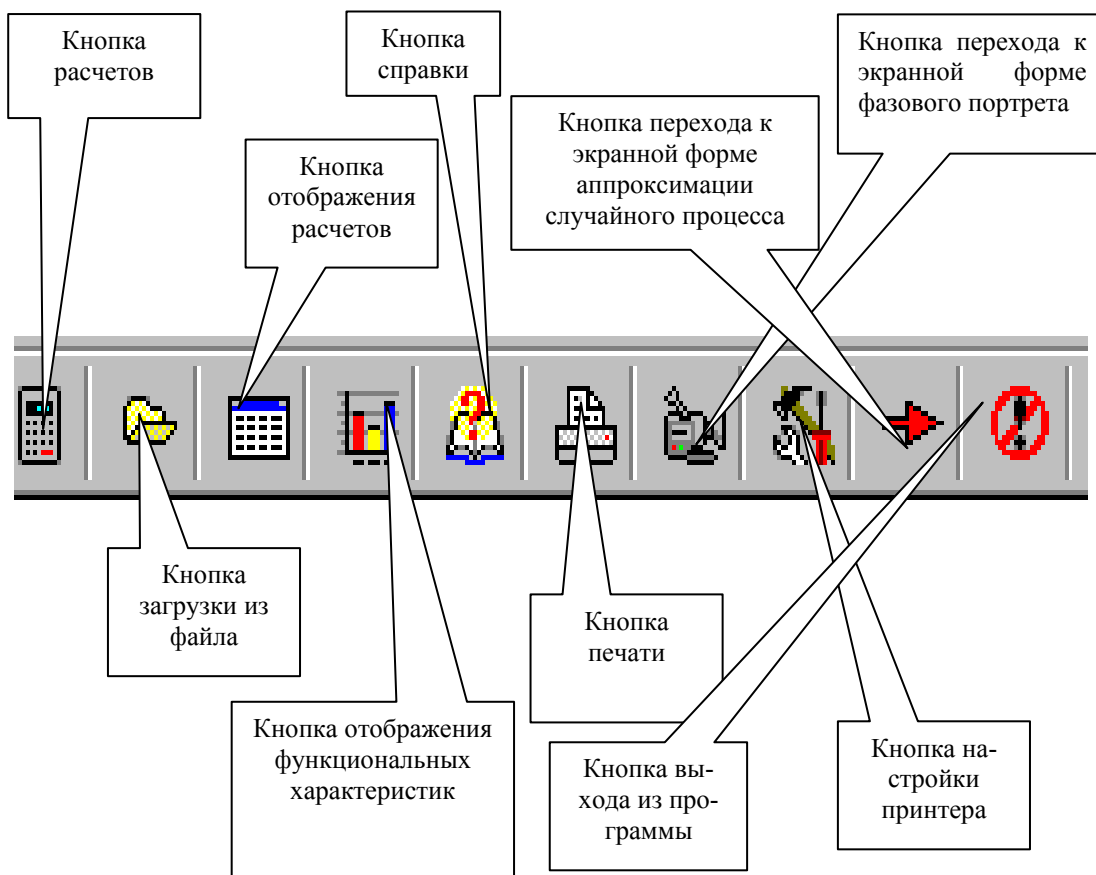


Рисунок 1.18. Панель «горячих» кнопок

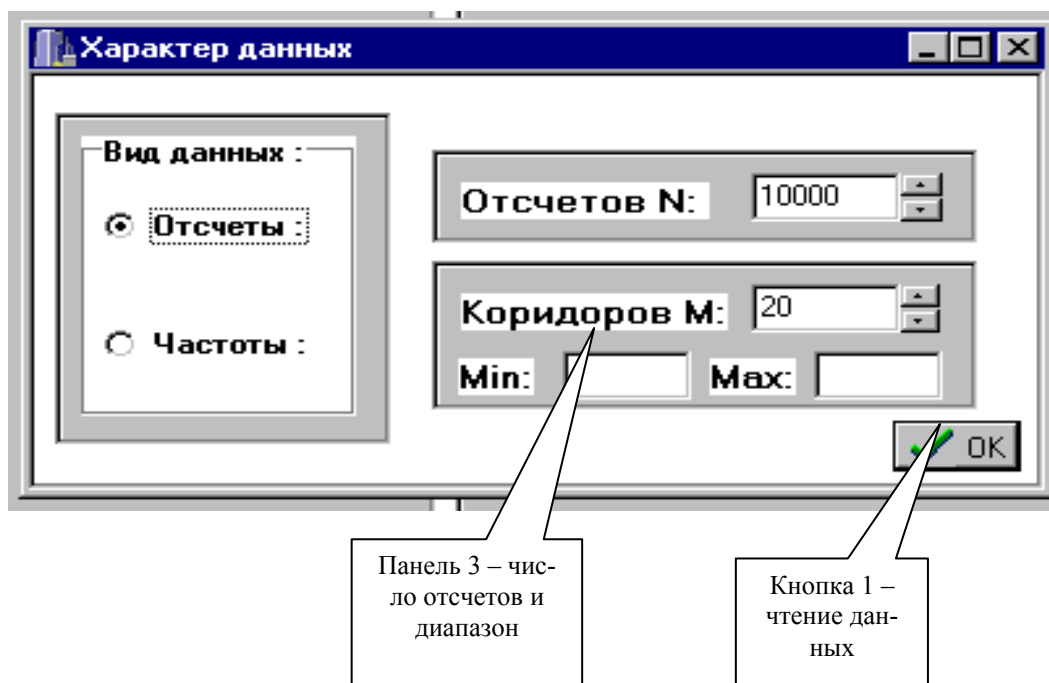


Рисунок 1.19. Экранная форма загрузки данных из файла

На рис. 1.21 показана экранная форма отображения графика случайного процесса. Она появляется на экране после выбора кнопки с названием «Процесс» на панели 5 основной экранной формы. На экранной форме отображения графика присут-

ствуют панель «горячих» кнопок, панель отображения графика и панель задания числа отсчетов. На панели «горячих» кнопок (рис. 1.20) четыре кнопки: настройки принтера, печати формы, возвращения на основную экранную форму и отображения графика, которая перерисовывает график после изменения числа отображаемых отсчетов случайного процесса. Число отсчетов задается на панели 2. На панели 3 отображается график случайного процесса.

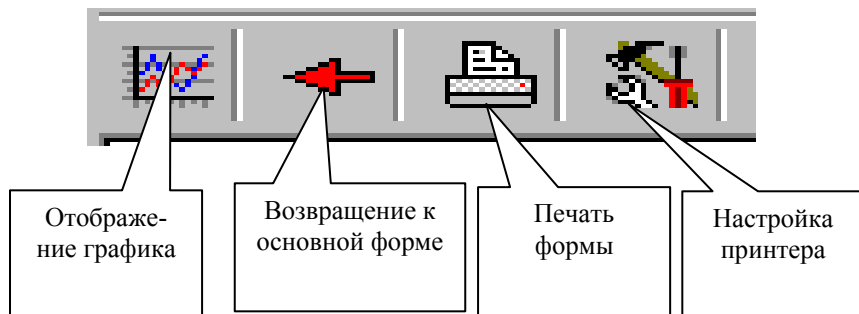


Рисунок 1.20. Панель «горячих» кнопок экранной формы отображения случайного процесса

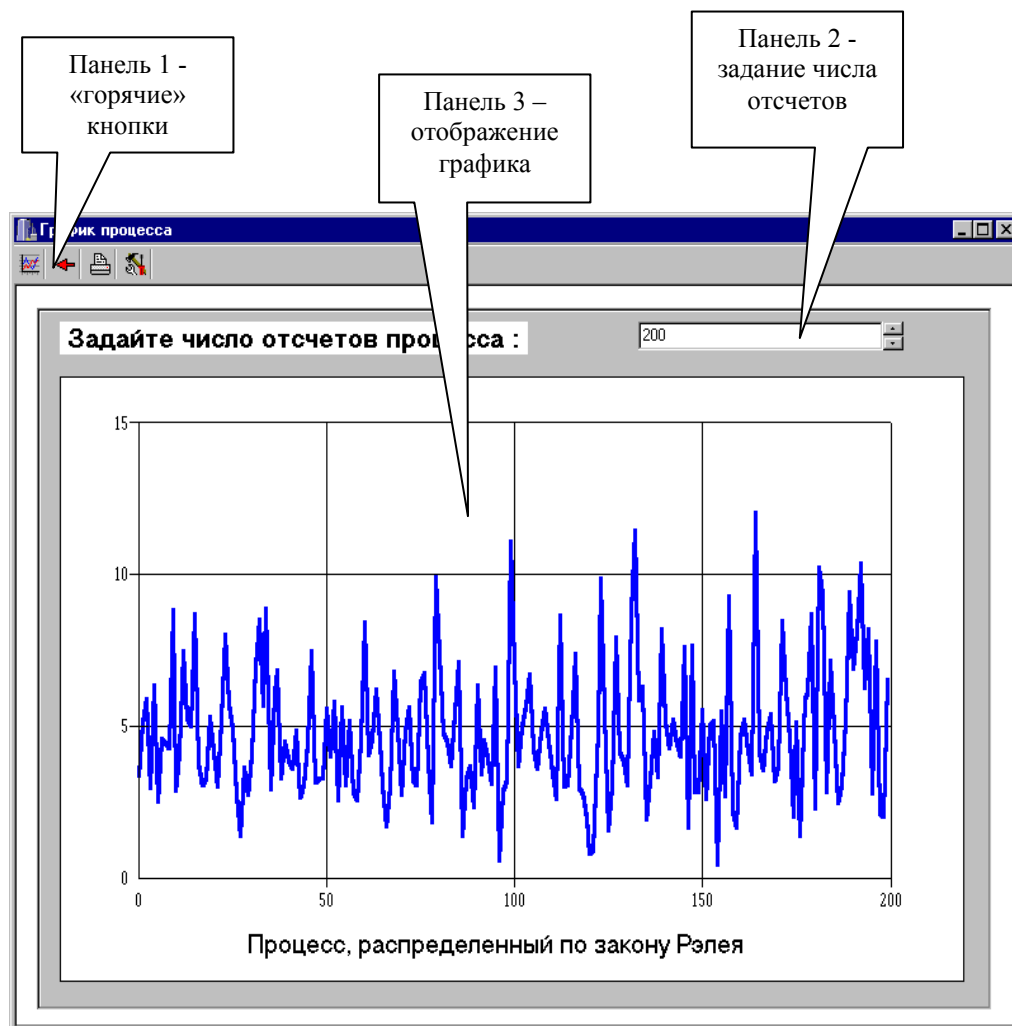


Рисунок 1.21. Экранная форма отображения случайного процесса

На рис. 1.22 показана экранная форма расчета и отображения структурной функции. На этой форме присутствуют панель «горячих» кнопок и панель отображения графика структурной функции. На панели «горячих» кнопок есть три кнопки: по-

строения структурной функции, возвращения на основную экранную форму и вызова справки.

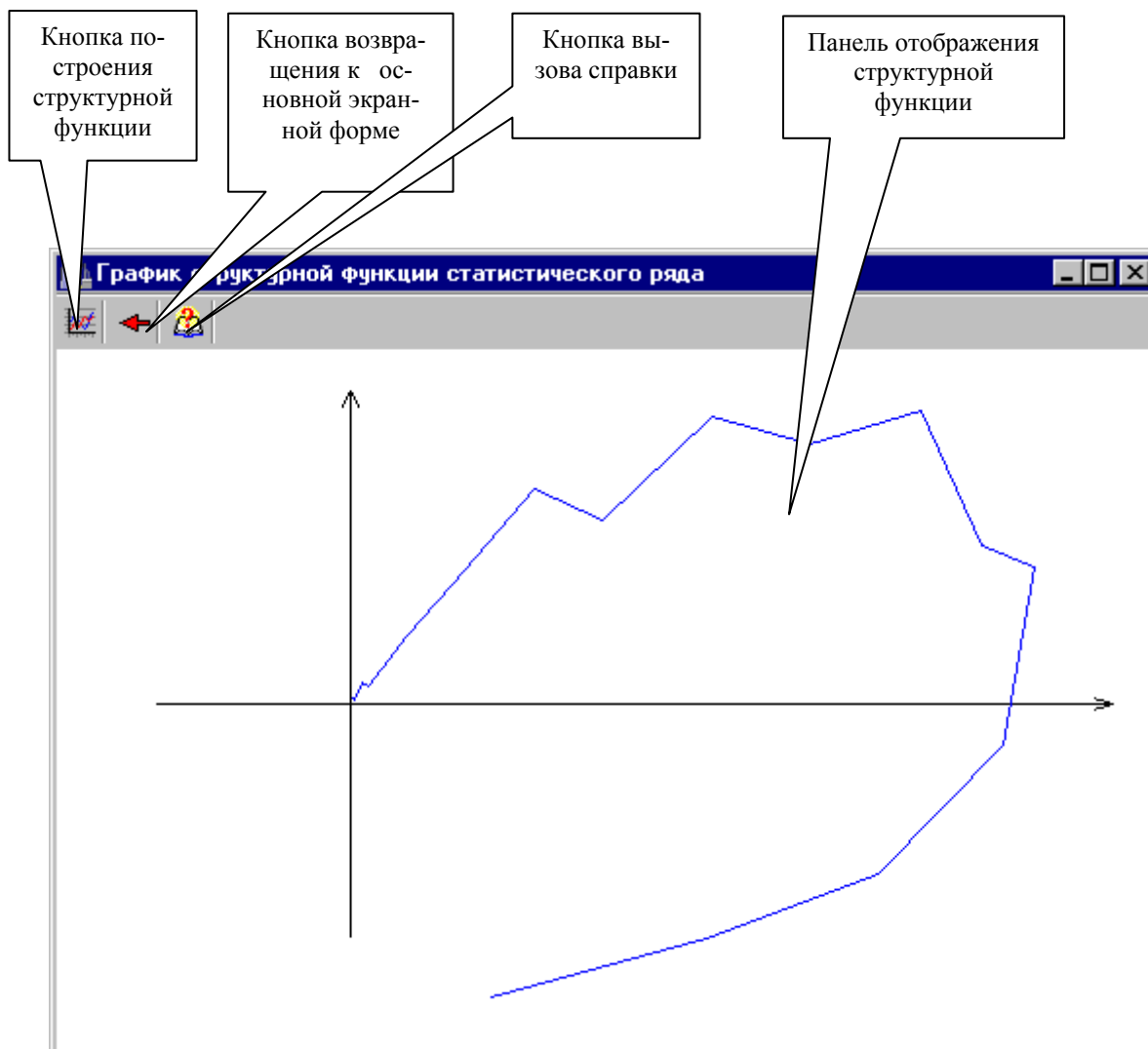


Рисунок 1.22. Экранная форма расчета и отображения структурной функции случайного процесса

Вторая экранная форма предназначена для реализации блока аппроксимации. Сама форма, показанная на рис. 1.23, представляет собой панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также «горячие» клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы. На рис. 1.24-1.26 представлены укрупненные изображения используемых инструментов.

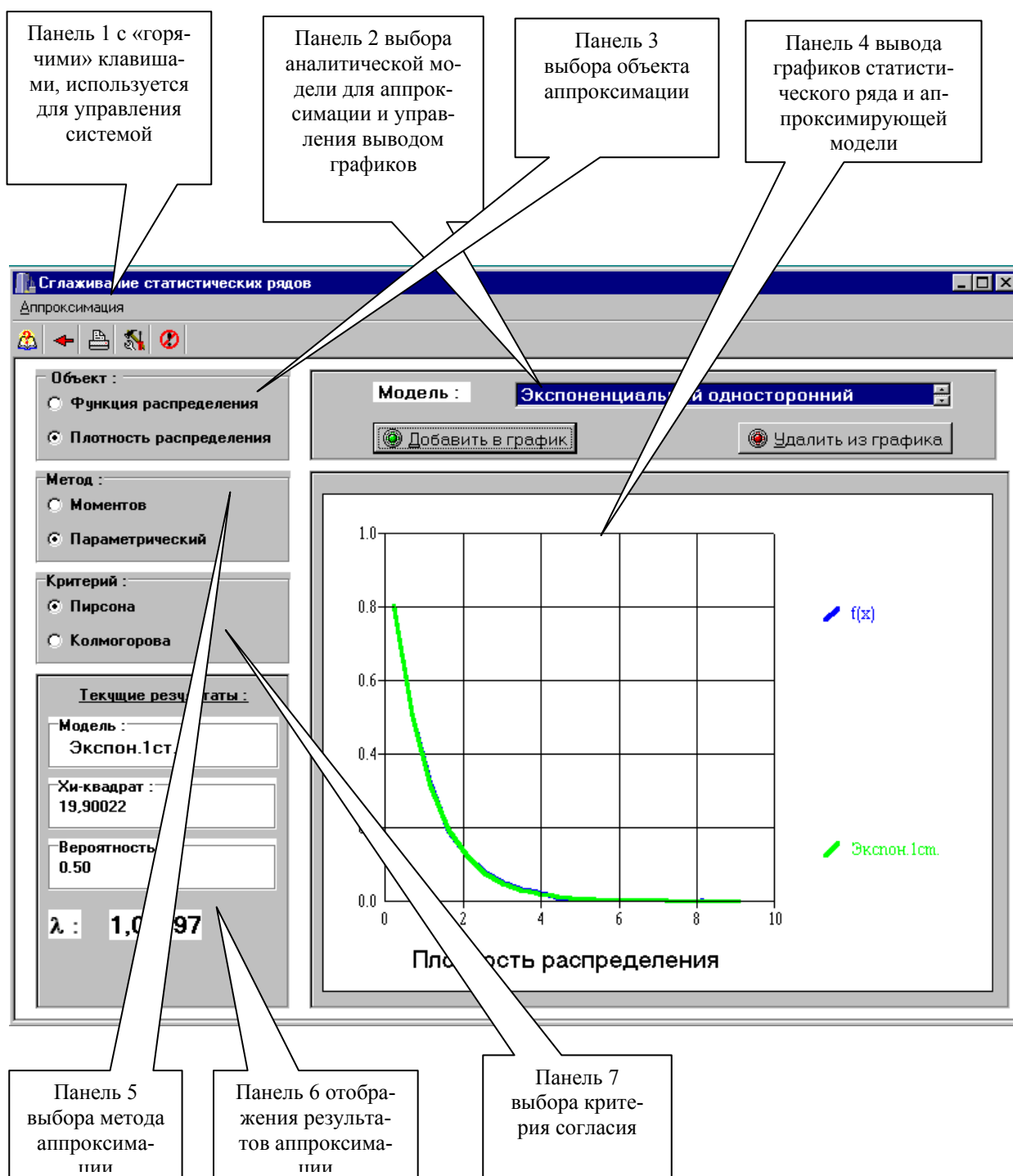


Рисунок 1.23. Общий вид формы блока аппроксимации

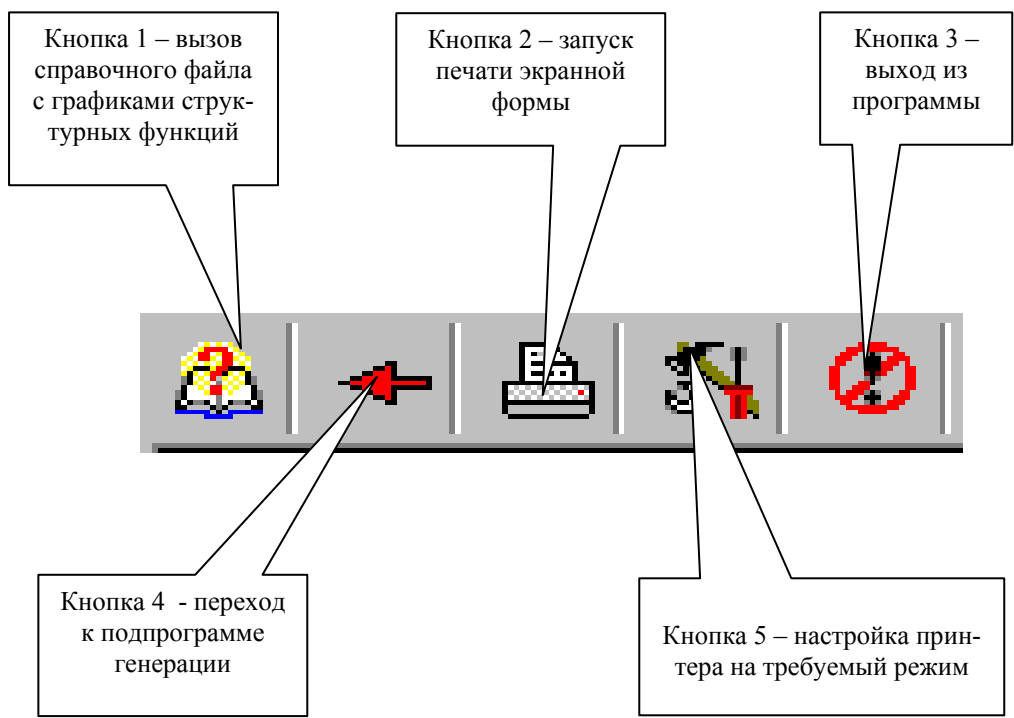


Рисунок 1.24. Панель инструментов

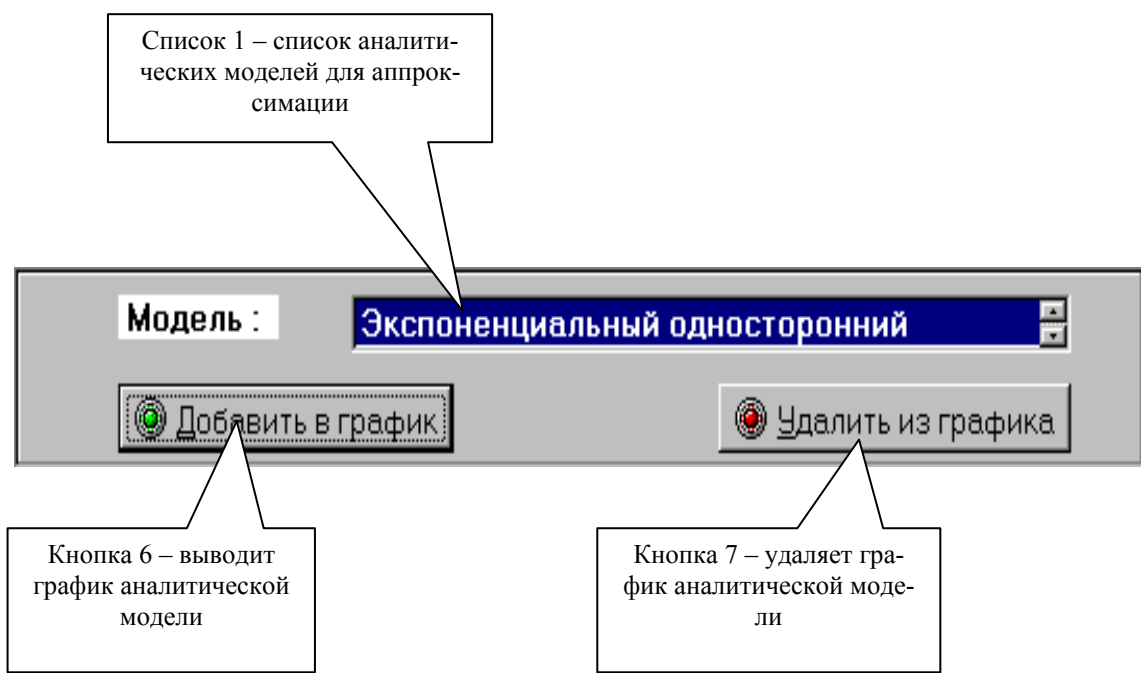


Рисунок 1.25. Панель выбора аналитической модели



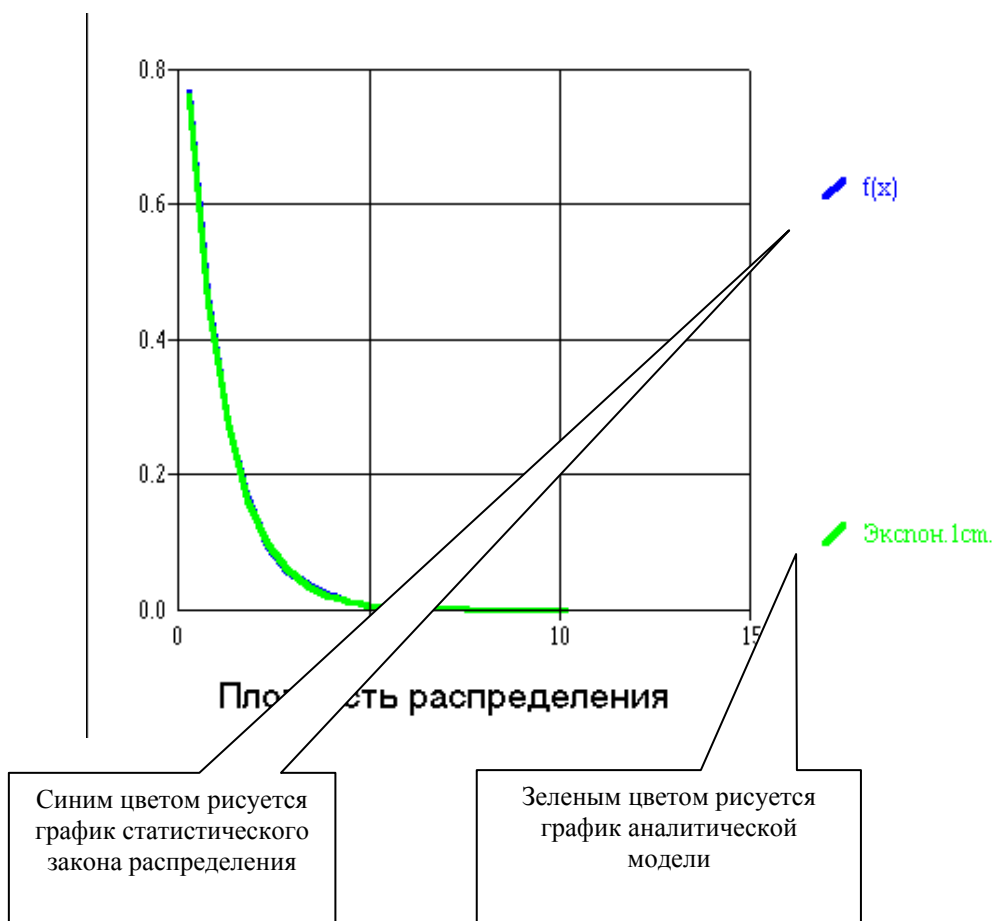
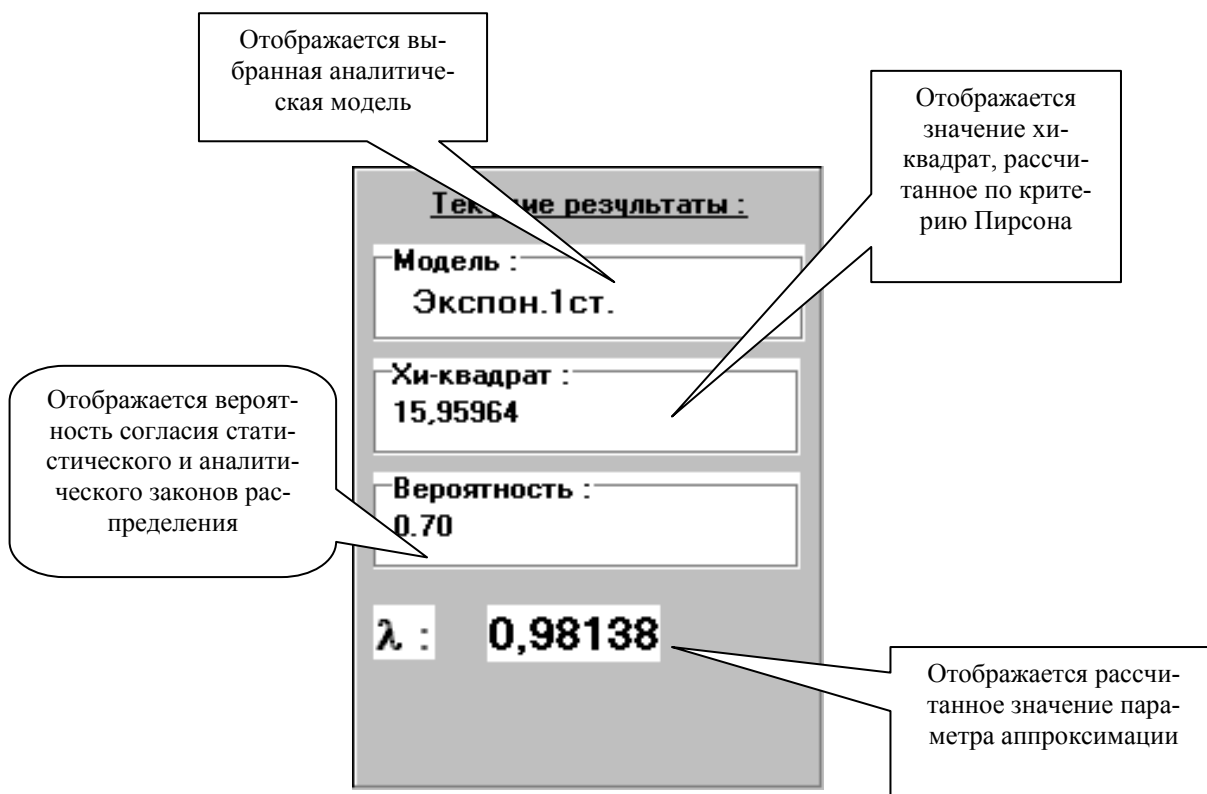


Рисунок 1.26. Панели вывода результатов

### 1.7.3. Порядок работы с системой

После загрузки основной экранной формы следует решить, будет ли проведена генерация процесса в самой системе, или будут загружены данные извне. В первом случае на панели 1 основной экранной формы следует выбрать закон распределения из списка законов, с которым будет сгенерирован данный процесс (см. рис. 1.17). На экранной форме появится панель 2, на которой, в зависимости от закона, следует задать значения одного или двух параметров. На панели 3 нужно задать значения числа отсчетов генерируемого процесса и числа дифференциальных коридоров. После нажатия на кнопку расчетов панели «горячих» кнопок основной экранной формы будет произведен расчет  $N$  отсчетов процесса.

Для экспорта данных в программу следует нажать кнопку загрузки из файла на основной экранной форме. Пользователю будет предложено указать загружаемый файл в стандартном диалоговом окне Windows. После указания файла появится экранная форма загрузки данных из файла, в которой следует указать тип передаваемых данных.

На первом этапе задаются данные процесса. На втором этапе оцениваются различные характеристики этого процесса. При нажатии на кнопку отображения расчетов на экране появляются числовые характеристики случайного процесса. На панели 5 нажатием кнопки можно выбрать график одной из трех функциональных характеристик или график самого процесса.

При нажатии на кнопку отображения фазового портрета, загружается экранная форма, позволяющая рассчитать и построить график (см. рис. 1.22).

В начале работы с экранной формой аппроксимации случайного процесса пользователь уже должен иметь гипотезу о виде закона распределения исследуемого процесса. Этот гипотетический закон распределения выбирается из общего списка законов распределения на панели 2 (см. рис. 1.23).

После чего, на панели 3 следует выбрать ту функциональную характеристику случайного процесса, по которой будет проводиться аппроксимация: функцию распределения или плотность распределения вероятностей. Выбранная функциональная характеристика графически отображается на панели 4.

На панели 5 выбирается метод нахождения неизвестных параметров теоретического закона распределения:

- метод моментов;
- параметрический метод.

Указав на панели 7 метод оценки качества аппроксимации, следует нажать кнопку 6 на панели 2. По нажатию этой кнопки происходит нахождение неизвестных параметров теоретического закона распределения, и результаты отображаются на панелях 4 и 6.

На панели 4 рисуется выбранная функциональная характеристика теоретического закона распределения, а на панели 6 показывается рассчитанное значение  $\chi^2$  (критерий Пирсона) или  $\lambda$  (критерий Колмогорова) и значение вероятности того, что расхождение между статистическим и теоретическим законами распределения можно объяснить случайными причинами.

Если вычисленное значение вероятности не удовлетворяет пользователя, то, нажав кнопку 7, он может убрать график функциональной характеристики теоретического закона распределения с панели 4 и повторить результаты расчёта.

Для примера, на рис. 1.27 приведены результаты определения параметров распределения закона Вейбулла.

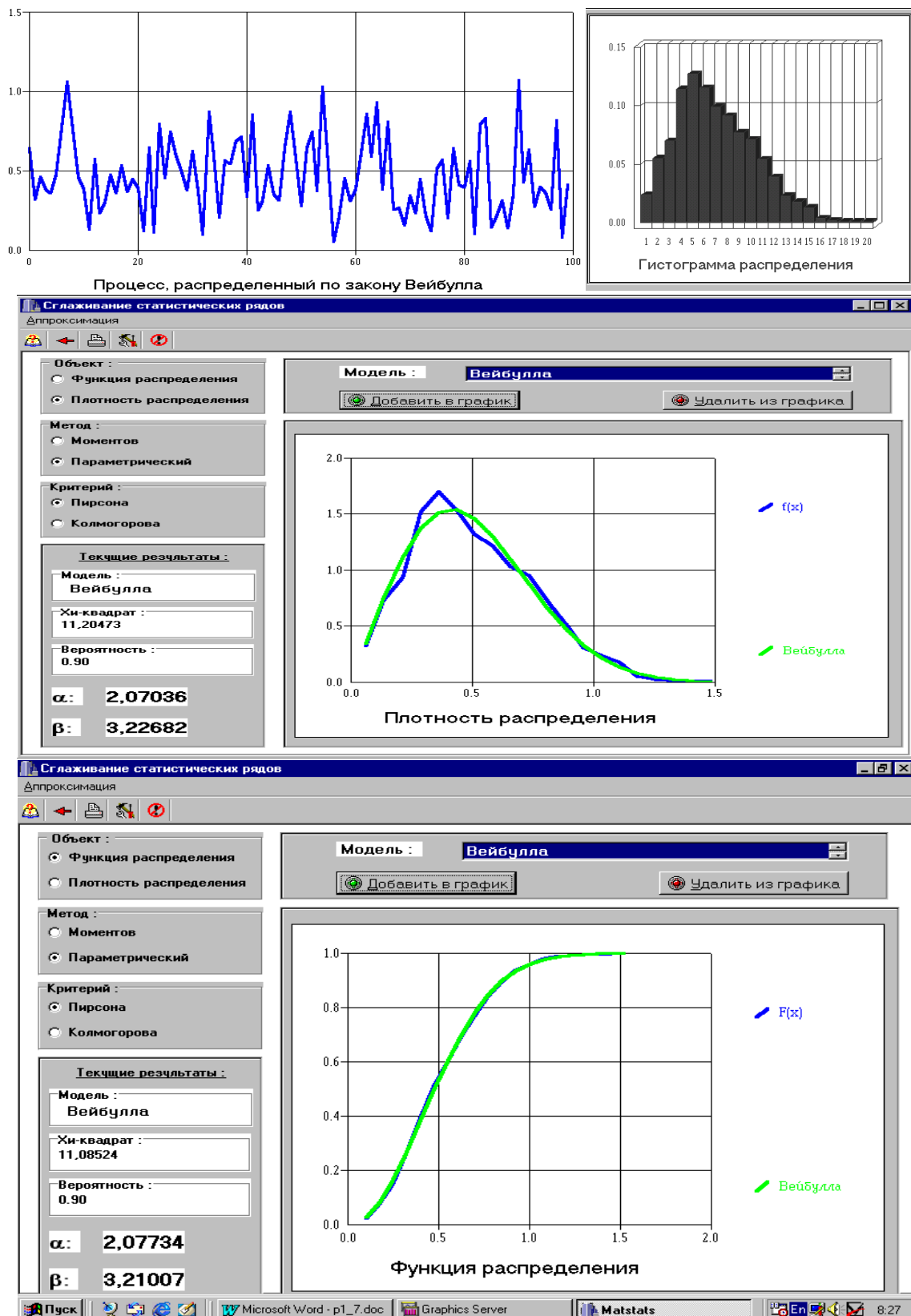


Рисунок 1.27. Результаты определения параметров закона распределения Вейбулла

## 1.8. Сравнительный анализ алгоритмов аппроксимации законов распределения

С целью повышения эффективности научных исследований, особенно при исследовании новых объектов, возникает необходимость в разработке и исследовании **алгоритмов** оценки вектора неизвестных параметров -  $\vec{\Theta} = A_{\Theta} \{ \epsilon(t_k) \}$ , а также в исследовании случайных процессов и временных рядов.

Следует отметить, что исследование алгоритмов возможно как аналитическими методами, так и методом имитационного моделирования на ЭВМ, суть которого заключается в анализе их метрологических характеристик с использованием псевдослучайных последовательностей, сгенерированных с помощью ЭВМ.

Как правило, реализация этого метода включает следующие основные блоки:

- имитации входных процессов и внешних воздействий;
- реальных и идеальных моделей, а также их разности;
- формирования изменения параметров модели:
  - под воздействием внешних факторов;
  - в случае технологического разброса на множестве экземпляров;
  - в случае временной нестабильности;
- первичной статистической обработки для определения статистических характеристик наблюдаемых процессов при данных испытаниях;
- вторичной статистической обработки и управления машинным экспериментом:
  - совокупной обработки множества результатов экспериментов;
  - определения необходимого числа прогонов модели и принятия решений при последовательном планировании о продолжении или окончании эксперимента;
  - управления параметрами модели и значениями внешних факторов;
  - управления системным временем;
- датчик системного времени;
- управляющую программу, синхронизирующую процесс моделирования.

Функциональная схема системного моделирования, поясняющая взаимодействие отдельных блоков представлена на рис. 1.28.

Затраты на моделирование, достоверность полученных результатов во многом зависят от принятых решений на этапе планирования эксперимента, особенно при определении необходимого числа испытаний, выборе входных воздействий и т.д.

Согласно методике, изложенной в РТМ 25139-74 [78], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей оценки  $\hat{\Theta}$  :

$$\Delta = \max \left\{ \left| \Delta_j \right| \right\} j = 1, \dots, N, \quad (1.53)$$

где N - число испытаний, зависящее от доверительной информации  $P_d$ . Так, если  $P_d = 0,95$ , то число испытаний равно 29 независимо от закона распределения погрешностей.

Одним из важных этапов имитационного моделирования является выбор, обоснование и моделирование сигналов, используемых в модельном эксперименте. Решение этой задачи определяется целевой функцией моделирования, назначением исследуемой системы и т.д. Так как при моделировании АСНИ, ИИС, ПРИС основной задачей является определение метрологических характеристик при определенных огра-

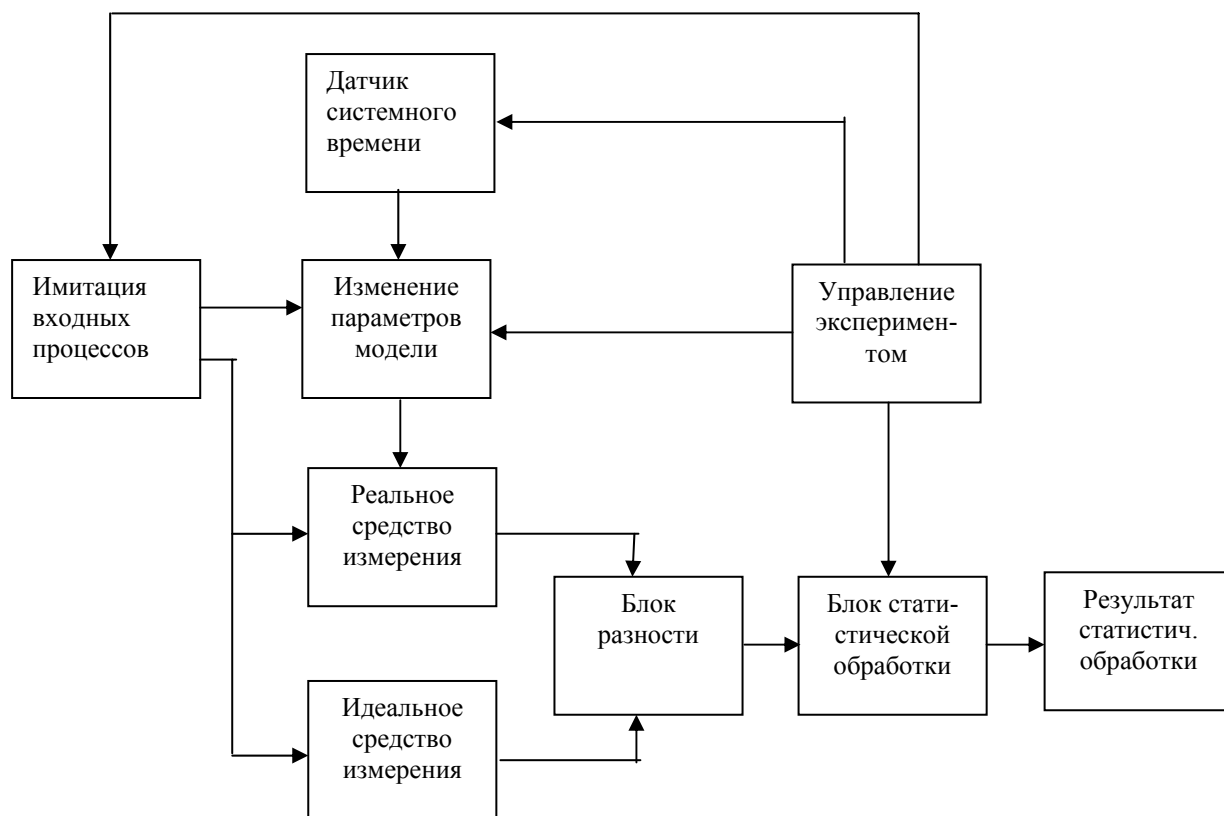


Рисунок 1.28. Функциональная схема имитационного моделирования

ничениях на технико-экономические показатели, то существенным требованием, предъявляемым к образцовому (испытательному или тестовому) сигналу, является возможность оценки с его помощью погрешности результата измерения данным средством на заданном классе входных воздействий.

Учитывая большое разнообразие решаемых задач и соответствующих им средств измерения, однозначного ответа о виде образцового сигнала быть не может. Окончательное решение о выборе вида образцового сигнала для конкретных типов средств измерения должно приниматься по результатам лабораторных исследований.

В самом общем виде выбор образцового сигнала осуществляется:

- выбором наихудшего сигнала из множества возможных входных сигналов, для обеспечения гарантированной погрешности результата измерения;
- формированием набора типовых сигналов, то есть наиболее часто встречающихся входных сигналов или сигналов, наиболее интересующих исследователя;
- формированием набора типовых сигналов, включающих в себя наихудший сигнал.

Основными требованиями, предъявляемыми к образцовым сигналам, являются следующие:

- заданный вид вероятностных характеристик;
- принадлежность к классу входных сигналов, для которых предназначено данное средство;
- стабильность во времени;
- отклонение текущих характеристик от расчетных не должно быть более допустимого.

Воспользовавшись разработанной системой, приведем результаты сравнительного анализа алгоритмов аппроксимации законов распределения для временного ряда, распределенного по экспоненциальному закону  $f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $\lambda = 1$ , широко применяемого на практике при расчёте параметров АСНИ, исследовании вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов. Параметры алгоритмов выбраны в соответствии с рекомендациями подразделов 1.1, 1.4-1.6.

Значения параметра экспоненциального закона распределения  $\lambda$  и  $\chi^2$  при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для  $N=500$ ,  $M=10$  приведены в таблице 1.5.

Таблица 1.5

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	$\lambda$	$\chi^2$	$\lambda$	$\chi^2$	$\lambda$	$\chi^2$
1	<b>0,9603</b>	<b>5,5439</b>	1,00579	8,51	0,9674	5,798
2	0,98	6,1867	0,9307	6,4984	<b>0,9582</b>	<b>6,0585</b>
3	<b>0,9446</b>	<b>16,2528</b>	1,0176	22,636	0,9602	17,0424
4	0,9804	1,7875	0,9737	1,8577	<b>0,984</b>	<b>1,7663</b>
5	<b>1,0165</b>	<b>5,2636</b>	1,0799	7,6052	1,0283	5,4085
6	0,9473	13,545	<b>0,9101</b>	<b>12,5885</b>	0,9189	12,6992
7	0,9549	5,7752	<b>0,9339</b>	<b>5,6472</b>	0,9522	5,7334
8	1,0333	10,256	1,0605	11,4268	<b>1,0195</b>	<b>9,9176</b>
9	0,9788	6,7865	1,0062	7,5619	<b>0,9664</b>	<b>6,6783</b>
10	0,9699	8,646	0,9677	8,5363	<b>0,9574</b>	<b>8,1046</b>
11	<b>1,0022</b>	<b>13,856</b>	1,1132	24,6434	1,0091	14,1086
12	1,0516	5,3593	<b>1,0153</b>	<b>4,5777</b>	1,0273	4,7372
13	1,0274	6,314	<b>1,0169</b>	<b>6,1396</b>	1,0183	6,1564
14	1,0496	3,8448	1,0182	3,8185	<b>1,0314</b>	<b>3,735</b>
15	0,9409	7,1225	0,9537	7,3787	<b>0,9345</b>	<b>7,0582</b>
16	<b>1,0549</b>	<b>11,7544</b>	1,1391	18,9582	1,0871	13,4777
17	0,9992	1,7917	1,0515	2,6638	<b>1,0717</b>	<b>1,7661</b>
18	0,9645	7,985	<b>0,9191</b>	<b>7,3457</b>	0,9452	7,4891
19	1,0815	11,7833	1,1122	13,5319	<b>1,0499</b>	<b>10,7825</b>
20	1,0486	9,4825	<b>1,0185</b>	<b>8,8276</b>	1,0401	9,2218
21	<b>0,9689</b>	<b>9,773</b>	1,0246	13,3076	0,9892	10,614
22	0,9844	5,1709	<b>0,9752</b>	<b>5,1367</b>	0,9816	5,1523
23	0,9728	7,0216	0,9655	6,9621	<b>0,965</b>	<b>6,9599</b>
24	1,068	12,3235	<b>1,0462</b>	<b>12,1296</b>	1,0634	12,2956
25	0,9822	6,0582	0,9514	6,1036	<b>0,9728</b>	<b>5,9853</b>
26	<b>0,9432</b>	<b>4,9787</b>	0,8908	5,9352	0,9258	5,0102
27	<b>0,9859</b>	<b>5,7124</b>	1,0979	11,5524	1,0068	5,8126
28	0,9841	12,5944	<b>0,9567</b>	<b>11,6159</b>	0,9798	12,3894
29	0,9461	9,4224	0,9359	9,112	<b>0,9265</b>	<b>8,9192</b>
$m_\lambda$	<b>0,9939</b>		1,0030		0,9910	
$\sigma_\lambda^2$	<b>0,0017</b>		0,0043		0,0021	
$\sigma_\lambda$	<b>0,0414</b>		0,0657		0,0460	
		<b>8</b>		<b>9</b>		<b>12</b>

Выделенные значения параметров соответствуют минимальному значению  $\chi^2$  в строке, т. е. лучшему методу аппроксимации из рассмотренных. В последней строке указано количество случаев, когда данный метод аппроксимации даёт лучший результат.

Значения параметра экспоненциального закона распределения  $\lambda$  и  $\chi^2$  при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для  $N=500$ ,  $M=18$  приведены в таблице 1.6.

Таблица 1.6

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	$\lambda$	$\chi^2$	$\lambda$	$\chi^2$	$\lambda$	$\chi^2$
1	1,0127	30,0388	<b>0,9946</b>	<b>28,9604</b>	0,9965	29,0616
2	<b>1,008</b>	<b>24,8421</b>	1,0957	37,7176	1,0217	26,0049
3	0,9825	16,2121	<b>0,9689</b>	<b>15,8397</b>	0,9782	16,0742
4	<b>1,0008</b>	<b>18,543</b>	1,1115	28,725	1,0131	18,9419
5	<b>0,95667</b>	<b>16,8424</b>	0,9215	16,8512	0,9659	17,0691
6	1,0214	17,9857	1,0695	21,1378	<b>1,0015</b>	<b>17,3084</b>
7	<b>0,9768</b>	<b>18,3176</b>	1,0779	30,7334	0,9876	18,9646
8	<b>1,0187</b>	<b>11,0238</b>	1,023	11,174	1,0287	11,3927
9	1,0286	7,9664	<b>1,0243</b>	<b>7,8573</b>	1,0273	7,9298
10	<b>1,0343</b>	<b>19,6174</b>	1,1143	29,8176	1,0478	20,6982
11	1,0048	16,1095	<b>0,9738</b>	<b>15,4993</b>	0,9887	15,6505
12	0,9954	30,0012	<b>0,9396</b>	<b>28,1424</b>	0,9644	28,6237
13	<b>0,9777</b>	<b>15,3788</b>	1,0287	18,6061	0,994	16,0764
14	0,971	25,3711	0,923	25,1372	<b>0,9535</b>	<b>25,0218</b>
15	<b>0,9796</b>	<b>7,0792</b>	0,9939	7,2193	0,9823	7,0892
16	<b>0,9894</b>	<b>14,4784</b>	1,0094	15,642	0,9979	14,9114
17	1,0449	16,6996	<b>1,0234</b>	<b>16,0457</b>	1,0443	16,6733
18	1,042	14,364	0,96	16,1122	<b>1,028</b>	<b>14,2795</b>
19	<b>0,9905</b>	<b>16,3258</b>	1,1159	36,4491	1,0199	18,6467
20	0,9762	19,8329	0,9686	19,3503	<b>0,9666</b>	<b>19,2287</b>
21	<b>1,0006</b>	<b>12,3535</b>	1,0302	13,6947	1,0037	12,447
22	0,942	24,4423	0,9593	25,5634	<b>0,9294</b>	<b>23,8492</b>
23	1,0995	19,2909	<b>1,0972</b>	<b>19,2077</b>	1,1072	19,5999
24	<b>1,0498</b>	<b>10,4912</b>	1,0771	11,503	1,0515	10,533
25	0,9901	16,0817	1,0174	17,5145	<b>0,9881</b>	<b>16,0096</b>
26	<b>1,0066</b>	<b>15,7954</b>	1,0605	19,7859	1,0267	16,8713
27	1,0285	16,8928	1,0533	17,9404	<b>1,018</b>	<b>16,6184</b>
28	<b>0,9446</b>	<b>10,2616</b>	0,9222	10,2748	0,9457	10,2748
29	<b>0,9622</b>	<b>24,9265</b>	1,0032	30,1757	0,9708	25,8216
$m_\lambda$	<b>1,0012</b>		1,0192		1,0017	
$\sigma_\lambda^2$	<b>0,0012</b>		0,0036		0,0014	
$\sigma_\lambda$	<b>0,0345</b>		0,0603		0,0371	
		<b>15</b>		<b>7</b>		<b>7</b>

Значения параметра экспоненциального закона распределения  $\lambda$  и  $\chi^2$  при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для  $N=1000$ ,  $M=10$  приведены в таблице 1.7.

Таблица 1.7

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	$\lambda$	$\chi^2$	$\lambda$	$\chi^2$	$\lambda$	$\chi^2$
1	<b>1,0260</b>	<b>6,0544</b>	1,0845	10,129	1,0365	6,2926
2	0,9942	3,9715	0,9692	3,776	<b>0,9844</b>	<b>3,7655</b>
3	1,0367	5,3788	1,0187	5,4418	<b>1,0311</b>	<b>5,3409</b>
4	0,9783	5,9228	<b>0,9466</b>	<b>5,1975</b>	0,9571	5,2322
5	<b>1,0328</b>	<b>14,8583</b>	1,1192	25,5762	1,0367	15,0252
6	1,0324	8,3546	1,0342	8,3928	<b>1,0259</b>	<b>8,2676</b>
7	<b>0,9865</b>	<b>6,7539</b>	1,0404	11,4175	0,9866	6,7591
8	0,9723	12,4803	<b>0,9668</b>	<b>12,3669</b>	0,9704	12,4348
9	1,0168	3,6844	1,0006	3,7336	<b>1,0008</b>	<b>3,6526</b>
10	<b>0,9555</b>	<b>6,8015</b>	1,0026	9,3827	0,9556	6,8021
11	0,928	10,0032	0,9349	10,3591	<b>0,9138</b>	<b>9,5959</b>
12	1,0033	10,0002	1,0329	11,5942	<b>1,0021</b>	<b>9,9728</b>
13	<b>0,9937</b>	<b>3,7253</b>	1,0375	6,7555	0,9941	3,7368
14	<b>1,0044</b>	<b>9,4678</b>	1,137	30,0153	1,0364	10,7445
15	<b>0,9926</b>	<b>12,7283</b>	1,0691	26,9167	1,011	14,6097
16	0,9812	7,1325	0,9952	7,7588	<b>0,9795</b>	<b>7,081</b>
17	<b>1,0454</b>	<b>7,0005</b>	1,0698	7,5939	1,0536	7,0834
18	0,9895	2,1392	1,0056	2,7801	<b>0,9805</b>	<b>2,0029</b>
19	<b>1,0513</b>	<b>5,9046</b>	1,1117	10,1679	1,0573	6,0339
20	0,976	4,7991	0,9948	5,5362	<b>0,9736</b>	<b>4,7546</b>
21	0,9892	6,0324	<b>0,9816</b>	<b>5,9528</b>	0,9845	5,9701
22	<b>1,0587</b>	<b>9,3571</b>	1,1132	14,0838	1,0673	9,7502
23	0,9696	10,4077	0,9781	10,8449	<b>0,9634</b>	<b>10,1879</b>
24	0,9606	10,1536	1,0355	21,1182	<b>0,9556</b>	<b>9,9012</b>
25	<b>0,9456</b>	<b>23,499</b>	0,9836	30,2088	0,9521	24,348
26	1,0007	11,7813	0,9924	11,4433	<b>0,9776</b>	<b>11,1553</b>
27	<b>1,0145</b>	<b>11,3965</b>	1,0666	15,7728	1,0225	11,7088
28	<b>0,9434</b>	<b>6,9877</b>	0,9841	8,824	0,9506	7,0624
29	0,9986	8,5507	1,0588	14,8627	<b>0,9982</b>	<b>8,5313</b>
$m_\lambda$	<b>0,9959</b>		1,0264		0,9951	
$\sigma_\lambda^2$	<b>0,0011</b>		0,0029		0,0014	
$\sigma_\lambda$	<b>0,0332</b>		0,0536		0,0374	
		<b>13</b>		<b>3</b>		<b>13</b>



Значения параметра экспоненциального закона распределения  $\lambda$  и  $\chi^2$  при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для  $N=1000$ ,  $M=18$  приведены в таблице 1.8.

Таблица 1.8

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	$\lambda$	$\chi^2$	$\lambda$	$\chi^2$	$\lambda$	$\chi^2$
1	<b>1,0271</b>	<b>10,2578</b>	1,0525	11,4528	1,0295	10,3173
2	<b>0,9992</b>	<b>13,6004</b>	1,0149	14,408	1,004	13,7934
3	1,0452	30,2983	<b>0,9855</b>	<b>28,8668</b>	1,0355	29,554
4	<b>0,9948</b>	<b>14,2192</b>	1,0151	15,2224	0,9978	14,3165
5	1,0082	10,4226	1,0096	10,4646	<b>1,0065</b>	<b>10,3773</b>
6	0,9304	21,0138	0,8746	20,721	<b>0,9231</b>	<b>20,5856</b>
7	0,9757	17,8272	1,0027	20,2347	<b>0,9723</b>	<b>17,6399</b>
8	0,994	14,6985	1,0198	16,283	<b>0,9871</b>	<b>14,5126</b>
9	0,9998	23,7479	<b>0,9932</b>	<b>23,4965</b>	1,0017	23,8402
10	<b>0,9775</b>	<b>10,2187</b>	1,0284	14,7148	0,9937	10,9811
11	0,9844	36,8398	1,0324	41,9356	<b>0,9836</b>	<b>36,7996</b>
12	1,0239	15,1359	<b>1,0063</b>	<b>14,7952</b>	1,0184	14,9682
13	<b>1,0139</b>	<b>5,5332</b>	0,9886	6,3762	1,0101	5,5898
14	0,9793	14,6157	<b>0,9525</b>	<b>13,8815</b>	0,9711	14,2418
15	1,0213	13,5708	<b>1,0507</b>	<b>15,5194</b>	1,0211	13,5624
16	0,9907	13,4329	1,0056	14,2469	<b>0,9878</b>	<b>13,3272</b>
17	<b>1,0061</b>	<b>24,0603</b>	1,0331	26,7577	1,0286	26,1765
18	<b>0,9965</b>	<b>26,835</b>	1,0379	31,5281	1,0048	27,454
19	0,9363	11,6612	0,921	11,7442	<b>0,9322</b>	<b>11,6481</b>
20	0,9869	18,0129	<b>0,9773</b>	<b>17,6869</b>	0,9778	17,6994
21	0,9658	15,2997	0,9232	15,0138	<b>0,9541</b>	<b>14,8432</b>
22	1,0158	10,6789	1,018	10,7887	<b>1,014</b>	<b>10,6015</b>
23	<b>1,0234</b>	<b>12,6209</b>	1,0229	12,5996	1,0242	12,6504
24	<b>0,9881</b>	<b>12,1475</b>	1,0259	15,0593	0,9898	12,2102
25	<b>0,9814</b>	<b>22,5003</b>	1,0172	25,4466	0,9851	22,6775
26	<b>0,9787</b>	<b>14,3113</b>	1,0485	21,3315	0,9823	14,4102
27	0,969	19,929	<b>0,9594</b>	<b>19,7503</b>	0,9633	19,8002
28	<b>1,0005</b>	<b>19,4525</b>	1,0674	27,9585	1,023	21,1067
29	<b>1,0198</b>	<b>20,3337</b>	0,9708	20,7165	1,0204	20,3559
$m_\lambda$	0,9943		<b>1,0019</b>		0,9946	
$\sigma_\lambda^2$	<b>0,0007</b>		0,0019		0,0008	
$\sigma_\lambda$	<b>0,0256</b>		0,0434		0,0281	
		<b>13</b>		<b>7</b>		<b>9</b>

Значения параметра экспоненциального закона распределения  $\lambda$  и  $\chi^2$  при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для  $N=2000$ ,  $M=10$  приведены в таблице 1.9.

Таблица 1.9

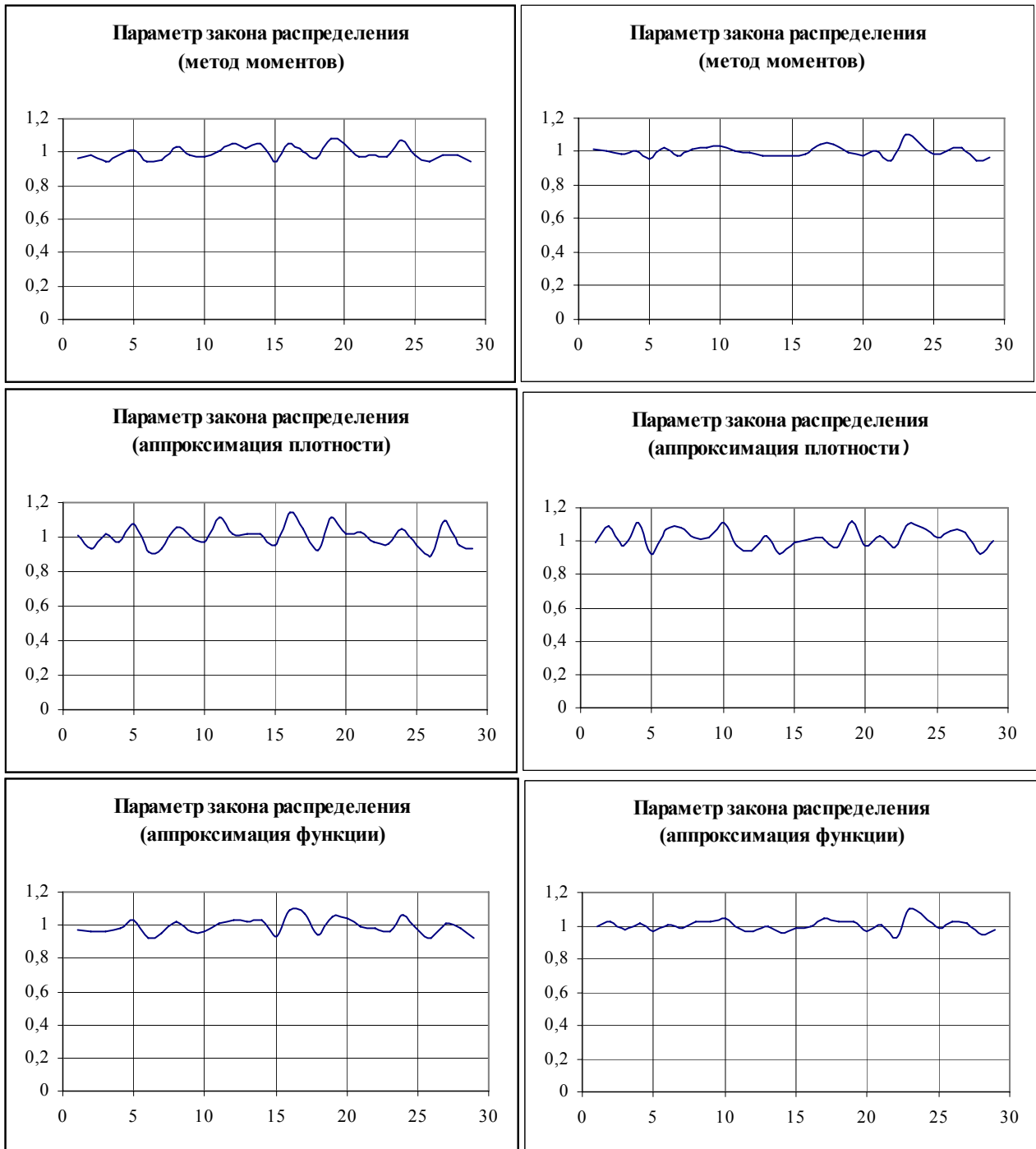
№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	$\lambda$	$\chi^2$	$\lambda$	$\chi^2$	$\lambda$	$\chi^2$
1	<b>1,0241</b>	<b>1,393</b>	1,0496	2,953	1,0269	1,4516
2	<b>1,0114</b>	<b>9,1015</b>	1,0837	21,5671	1,02	9,5001
3	<b>0,9978</b>	<b>16,6905</b>	1,0618	24,962	1,007	16,8917
4	<b>0,9983</b>	<b>8,7529</b>	1,0392	12,8481	1,0069	9,063
5	1,0216	6,4273	1,0343	6,9874	<b>1,0085</b>	<b>6,4185</b>
6	<b>0,9731</b>	<b>12,924</b>	0,9815	13,2814	0,9809	13,2449
7	1,0064	5,7745	0,9885	5,8251	<b>0,9964</b>	<b>5,6658</b>
8	<b>1,0177</b>	<b>4,2412</b>	1,0687	11,0302	1,0243	4,5387
9	1,0258	7,3038	0,9981	7,8743	<b>1,0144</b>	<b>7,2287</b>
10	1,025	5,693	1,024	5,6821	<b>1,0231</b>	<b>5,6756</b>
11	0,9979	8,8985	1,0264	12,0568	<b>0,9958</b>	<b>8,8</b>
12	<b>0,983</b>	<b>3,6603</b>	1,0416	10,7836	0,9913	3,8256
13	<b>1,0176</b>	<b>4,6825</b>	1,09	15,7227	1,0286	5,0301
14	<b>1,007</b>	<b>3,0428</b>	1,0595	9,5598	1,0128	3,2295
15	<b>1,0066</b>	<b>14,0535</b>	1,049	19,1753	1,0067	14,0597
16	1,0097	2,616	1,0366	3,3768	<b>1,0159</b>	<b>2,5643</b>
17	<b>1,0419</b>	<b>5,9817</b>	1,0875	11,9207	1,0459	6,188
18	1,0274	1,9272	1,0406	2,868	<b>1,0168</b>	<b>1,6241</b>
19	1,001	2,4243	1,0094	2,6398	<b>0,9989</b>	<b>2,411</b>
20	<b>0,9788</b>	<b>17,6288</b>	1,0026	19,4305	0,9938	18,4818
21	0,9549	3,5462	0,9652	3,928	<b>0,9507</b>	<b>3,5138</b>
22	0,9945	9,0164	1,0197	11,9292	<b>0,9864</b>	<b>8,6016</b>
23	1,0144	11,6974	1,0428	13,7616	<b>1,0114</b>	<b>11,6442</b>
24	<b>1,0052</b>	<b>6,6572</b>	1,0201	6,9979	1,0048	6,659
25	<b>0,9862</b>	<b>3,0045</b>	1,017	4,7845	0,9905	3,0373
26	<b>1,0454</b>	<b>6,4855</b>	1,1108	18,3649	1,0479	6,6313
27	<b>0,9975</b>	<b>3,7936</b>	1,0214	4,5041	1,0052	3,7949
28	<b>0,9529</b>	<b>8,303</b>	0,9843	10,1554	0,9593	8,3522
29	0,9865	8,4269	1,0115	10,7165	<b>0,9825</b>	<b>8,2882</b>
$m_\lambda$	<b>1</b>		1,0294		1,0015	
$\sigma_\lambda^2$	0,0005		0,0012		0,0005	
$\sigma_\lambda$	0,0226		0,0351		<b>0,0220</b>	
		<b>17</b>				<b>12</b>

Значения параметра экспоненциального закона распределения  $\lambda$  и  $\chi^2$  при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для  $N=2000$ ,  $M=18$  приведены в таблице 1.10.

Таблица 1.10

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	$\lambda$	$\chi^2$	$\lambda$	$\chi^2$	$\lambda$	$\chi^2$
1	0,9794	10,1617	0,9584	10,059	<b>0,9697</b>	<b>9,895</b>
2	1,0224	16,1958	<b>0,9949</b>	<b>15,4425</b>	1,012	15,5854
3	0,9867	9,8839	<b>0,9703</b>	<b>9,7776</b>	0,9839	9,7889
4	0,9974	9,9698	<b>0,9833</b>	<b>9,5732</b>	0,9913	9,702
5	<b>1,0016</b>	<b>23,7769</b>	1,0104	24,5205	1,0073	24,2202
6	0,9658	10,4377	0,9582	10,4654	<b>0,964</b>	<b>10,4228</b>
7	<b>0,9809</b>	<b>12,9358</b>	1,0037	14,4621	0,9916	13,3732
8	<b>1,0423</b>	<b>10,5038</b>	1,0477	10,5962	1,0447	10,5321
9	<b>0,9802</b>	<b>12,8098</b>	1,0086	15,0988	0,9809	12,8247
10	0,9689	20,0785	<b>0,9483</b>	<b>19,4067</b>	0,9666	19,9074
11	0,9804	16,3282	0,9521	16,7887	<b>0,9719</b>	<b>16,1237</b>
12	1,0359	15,4342	1,0082	15,921	<b>1,0283</b>	<b>15,3043</b>
13	1,0075	18,4143	1,0049	18,202	<b>0,9982</b>	<b>17,7708</b>
14	<b>1,0018</b>	<b>9,4575</b>	1,0353	12,4702	1,0099	9,7615
15	0,9906	15,2913	0,9598	16,6502	<b>0,9876</b>	<b>15,2649</b>
16	<b>0,9922</b>	<b>22,2428</b>	1,0052	23,5444	0,9989	22,8196
17	1,0023	14,7416	0,9855	14,6823	<b>1</b>	<b>14,6692</b>
18	1,0277	19,8268	1,0112	19,6488	<b>1,0165</b>	<b>19,6016</b>
19	<b>1,0066</b>	<b>21,2489</b>	1,0549	29,6743	1,0117	21,6469
20	<b>1,0123</b>	<b>19,1325</b>	1,0371	21,5315	1,0153	19,2957
21	<b>0,9998</b>	<b>6,5006</b>	1,021	7,9402	1,0025	6,5794
22	1,0004	27,9311	<b>0,9996</b>	<b>27,8663</b>	1,0067	28,5342
23	1,0004	16,2423	<b>0,9909</b>	<b>15,8569</b>	1,0036	16,4662
24	<b>1,0085</b>	<b>8,6399</b>	1,0418	10,652	1,0233	8,9865
25	<b>1,0124</b>	<b>14,2762</b>	1,0361	16,6317	1,016	14,4854
26	<b>0,9946</b>	<b>7,1896</b>	1,0139	8,1032	1,003	7,3987
27	<b>1,0497</b>	<b>19,7668</b>	1,0538	20,1408	1,0548	20,2429
28	0,9862	12,6762	0,9846	12,6356	<b>0,9799</b>	<b>12,578</b>
29	0,9923	18,904	0,9928	18,9307	<b>0,9911</b>	<b>18,8445</b>
$m_\lambda$	<b>1,0009</b>		1,0025		1,0011	
$\sigma_\lambda^2$	<b>0,0004</b>		0,0009		0,0009	
$\sigma_\lambda$	<b>0,0203</b>		0,0308		0,0308	
	<b>13</b>			<b>6</b>		<b>10</b>

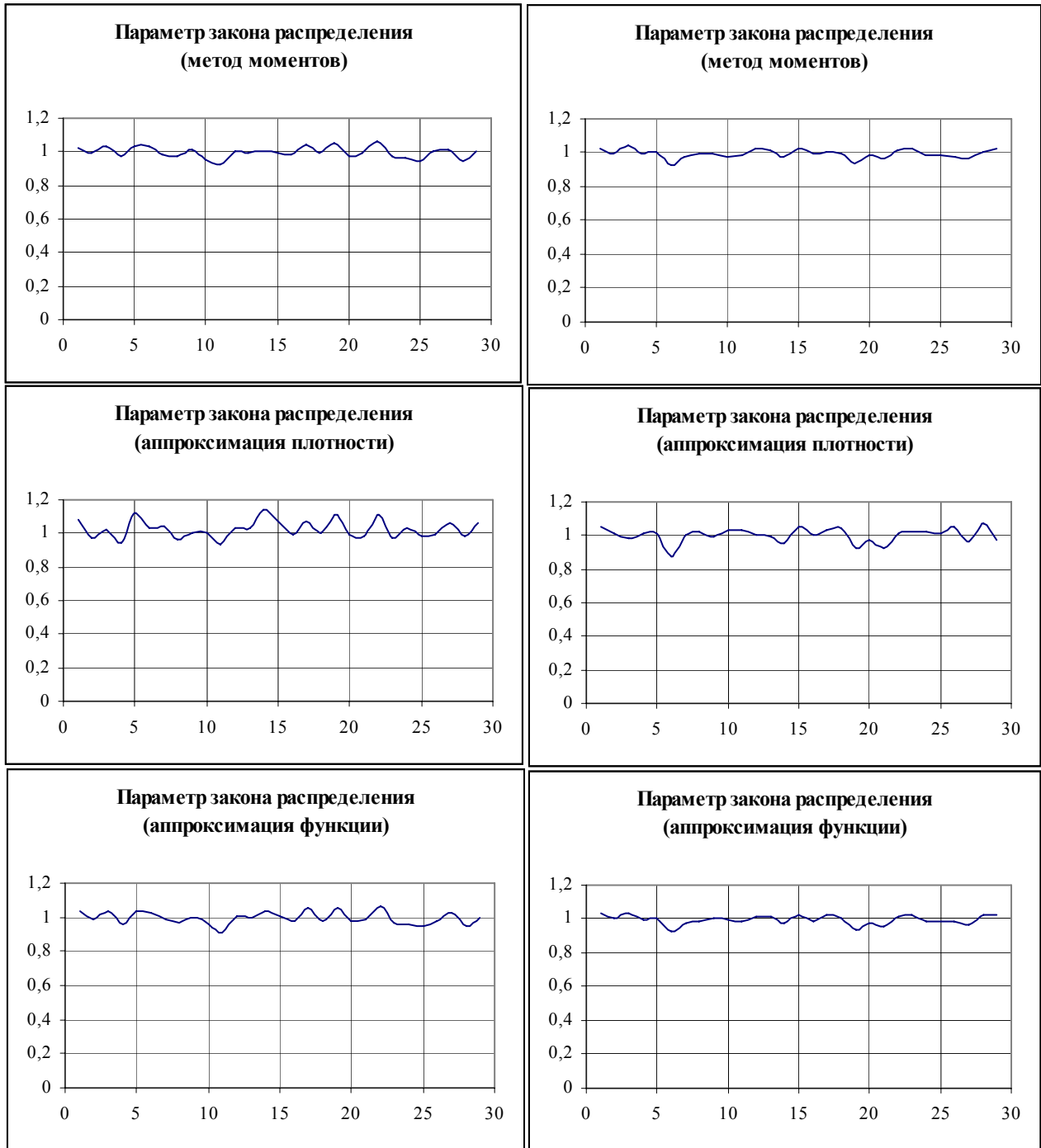
Ниже приведены результаты оценки параметра экспоненциального закона распределения различными аппроксимативными методами.



$N=500, M=10$

$N=500, M=18$

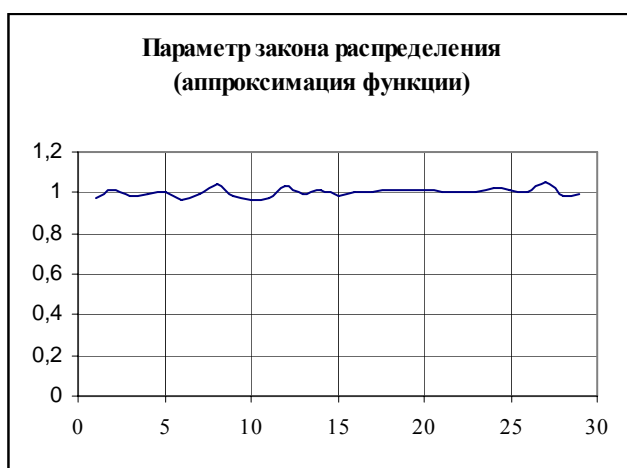
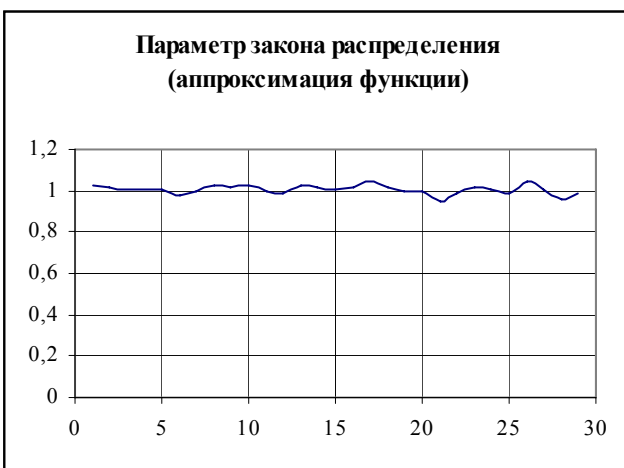
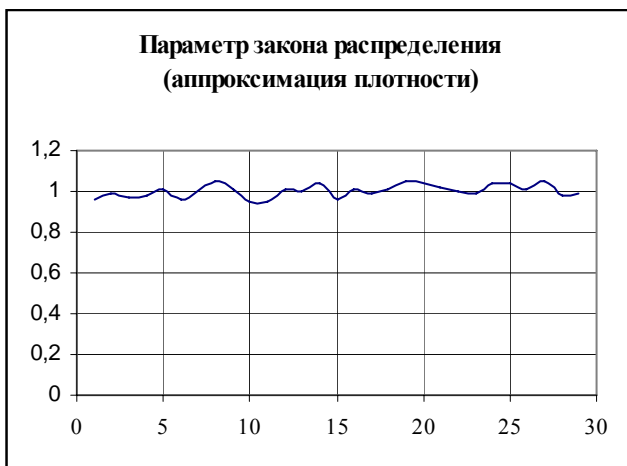
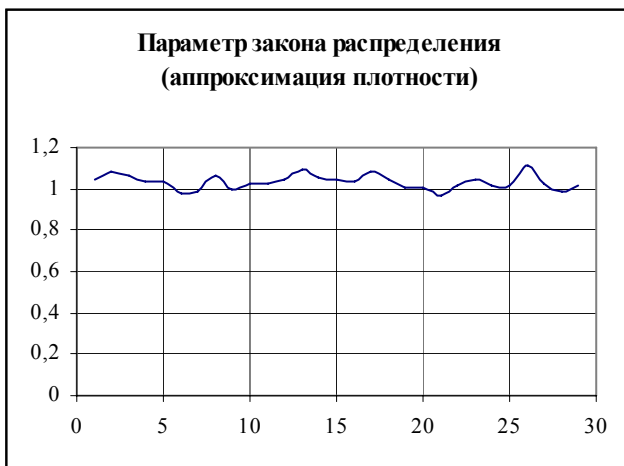
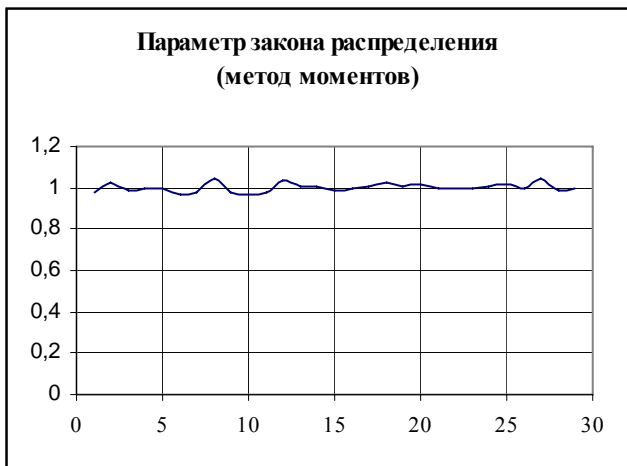
Рисунок 1.29. Результаты моделирования



N=1000, M=10

N=1000, M=18

Рисунок 1.30. Результаты моделирования



$N=2000, M=10$

$N=2000, M=18$

Рисунок 1.31. Результаты моделирования

Анализ результатов моделирования не позволяет однозначно определить лучший метод аппроксимации законов распределения. Поэтому наиболее целесообразно применять все три метода и, воспользовавшись критерием Пирсона, выбрать лучший результат.

Приведем результаты определения параметров закона распределения Лапласа  $f_x(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\mu|}$  (см. таблицы 1.11-1.13 и рисунки 1.32-1.34).

Значения параметров закона распределения Лапласа  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\chi^2$  при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для  $N=500$ ,  $M=20$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  приведены в таблице 1.11.

Таблица 1.11

№	Метод моментов			$f_a(x, \lambda)$			$F_a(x, \lambda)$		
	$\lambda$	$\mu$	$\chi^2$	$\lambda$	$\mu$	$\chi^2$	$\lambda$	$\mu$	$\chi^2$
1	1,0179	1,0136	12,9326	0,9305	1,0287	14,5135	<b>1,0183</b>	<b>1,0014</b>	<b>12,818</b>
2	1,0119	1,026	44,1078	<b>0,952</b>	<b>0,9797</b>	<b>31,8058</b>	0,98	1,0299	36,7747
3	0,975	0,9846	11,3897	0,9828	0,9498	11,3474	<b>0,9814</b>	<b>0,9624</b>	<b>11,301</b>
4	<b>0,9613</b>	<b>1,0464</b>	<b>18,8828</b>	1,0364	1,0262	26,0046	0,973	1,027	19,4855
5	1,0245	1,0346	8,1155	0,9456	0,991	7,6714	<b>1,0036</b>	<b>1,001</b>	<b>6,8969</b>
6	1,0084	1,0195	14,9323	<b>1,0304</b>	<b>0,9502</b>	<b>13,3196</b>	1,0283	0,9739	13,4562
7	0,9804	0,9639	36,4091	<b>0,9075</b>	<b>1,061</b>	<b>31,3616</b>	0,956	1,0005	33,2644
8	0,9831	0,9004	19,341	<b>0,9114</b>	<b>1,0126</b>	<b>17,1324</b>	0,9698	0,9274	17,7809
9	1,0538	1,0168	15,9261	<b>0,9797</b>	<b>1,0636</b>	<b>13,948</b>	1,0277	1,0278	14,424
10	1,1018	0,965	16,1997	<b>1,008</b>	<b>0,9981</b>	<b>12,6598</b>	1,0441	0,9853	13,1095
11	0,9938	0,9959	13,2639	1,005	0,9746	13,6505	<b>0,9713</b>	<b>0,9793</b>	<b>12,6357</b>
12	1,0676	1,0889	36,0318	<b>1,0617</b>	<b>0,9738</b>	<b>32,2165</b>	1,0925	1,0435	34,7533
13	<b>1,033</b>	<b>0,9958</b>	<b>16,6106</b>	1,1048	1,0412	21,9184	1,0666	1,0271	18,1493
14	0,9976	0,9705	16,0569	<b>0,9071</b>	<b>0,9534</b>	<b>14,0773</b>	0,9665	0,9568	14,425
15	1,0618	1,0702	22,4914	<b>1,0483</b>	<b>1,0098</b>	<b>21,6046</b>	1,0656	1,0725	22,7489
16	1,0042	1,0714	32,7119	<b>0,917</b>	<b>1,0496</b>	<b>29,19</b>	0,9758	1,0459	30,6862
17	<b>0,9554</b>	<b>0,9993</b>	<b>48,385</b>	0,9926	1,0735	66,7168	0,9893	1,0229	62,0146
18	<b>0,8657</b>	<b>0,8986</b>	<b>34,8237</b>	0,8819	0,9569	35,4142	0,9998	0,9602	39,67
19	1,0066	0,9676	24,2468	<b>0,9516</b>	<b>1,0778</b>	<b>21,2604</b>	0,9905	1,0264	21,6917
20	<b>0,9441</b>	<b>0,9922</b>	<b>26,9386</b>	1,0313	0,971	40,5035	0,9943	0,9902	33,0698
21	<b>1,017</b>	<b>0,9675</b>	<b>10,5336</b>	1,0618	1,0128	12,7816	1,019	0,9675	10,5837
22	1,0644	0,9456	32,0431	<b>0,9458</b>	<b>0,9621</b>	<b>25,8512</b>	1,026	0,965	28,6137
23	1,1088	1,008	12,1998	1,0063	0,9568	9,593	<b>1,0462</b>	<b>0,9998</b>	<b>9,3113</b>
24	1,0155	1,0219	21,0467	<b>0,895</b>	<b>1,0121</b>	<b>15,5374</b>	0,9415	1,0174	16,0781
25	0,9978	1,0789	8,9706	0,916	1,0145	8,4177	<b>0,9749</b>	<b>1,0484</b>	<b>7,7737</b>
26	<b>0,9087</b>	<b>1,0396</b>	<b>15,7384</b>	0,8332	1,0674	16,98	0,9231	1,0392	16,4251
27	1,0673	0,9589	17,4717	1,0654	0,9654	17,4429	<b>1,066</b>	<b>0,9556</b>	<b>17,4046</b>
28	1,0348	1,0924	22,3178	1,0135	1,0615	22,441	<b>1,0192</b>	<b>1,089</b>	<b>21,1523</b>
29	0,9805	1,0946	16,1374	0,9071	1,0283	17,1125	<b>0,9713</b>	<b>1,0918</b>	<b>15,7979</b>
$m_x$	1,0084	<b>1,0079</b>		0,9734	1,0077		<b>1,0028</b>	1,0081	
$\sigma_x^2$	0,0028	0,0028		0,0045	0,0018		<b>0,0017</b>	<b>0,0017</b>	
$\sigma_x$	0,0531	0,0526		0,0668	0,0419		<b>0,0408</b>	<b>0,0414</b>	
			<b>7</b>			<b>13</b>			<b>9</b>

Значения параметров закона распределения Лапласа  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\chi^2$  при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для  $N=1000$ ,  $M=20$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  приведены в таблице 1.12.

Таблица 1.12

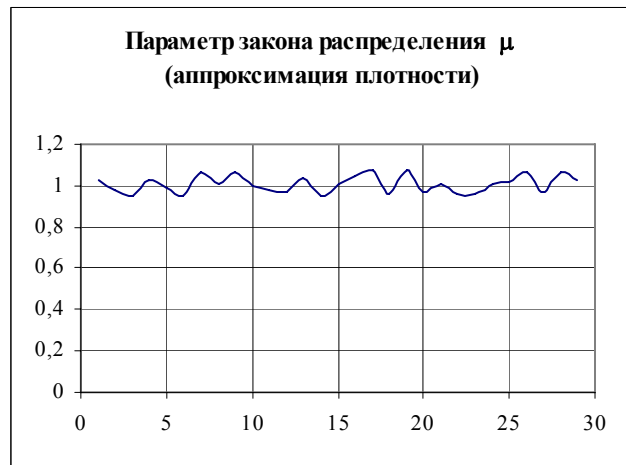
№	Метод моментов			$f_a(x, \lambda)$			$F_a(x, \lambda)$		
	$\lambda$	$\mu$	$\chi^2$	$\lambda$	$\mu$	$\chi^2$	$\lambda$	$\mu$	$\chi^2$
1	0,9988	0,928	65,131	<b>0,9338</b>	<b>0,9742</b>	<b>46,561</b>	0,9939	0,9573	63,4227
2	0,9944	0,9618	24,4175	1,0016	0,9327	25,4525	<b>0,9845</b>	<b>0,9703</b>	<b>23,8409</b>
3	0,9796	0,9827	13,549	0,9913	1,012	14,8125	<b>0,9659</b>	<b>0,989</b>	<b>12,3941</b>
4	1,0222	1,0386	12,3868	0,9553	1,0964	13,7612	<b>1,0076</b>	<b>1,0507</b>	<b>11,5491</b>
5	1,008	0,9916	17,5857	<b>0,9807</b>	<b>0,9896</b>	<b>15,8648</b>	0,9954	0,9859	16,5724
6	1,0297	1,0082	16,5055	1,0293	0,9747	15,5615	<b>1,0266</b>	<b>0,9866</b>	<b>15,5049</b>
7	0,9697	0,9699	23,939	0,9938	1,0247	25,2401	<b>0,9637</b>	<b>0,9959</b>	<b>22,2571</b>
8	0,9833	0,9139	22,1949	0,8889	0,9888	20,7867	<b>0,946</b>	<b>0,9378</b>	<b>18,7916</b>
9	1,0002	0,958	59,7864	<b>0,9546</b>	<b>1,015</b>	<b>48,7866</b>	0,9903	0,9894	56,7673
10	1,0429	0,9356	12,6514	1,0043	0,9779	13,1625	<b>1,0368</b>	<b>0,9407</b>	<b>12,3748</b>
11	<b>0,9847</b>	<b>0,9506</b>	<b>21,0223</b>	0,9507	0,911	21,2669	1,0051	0,9566	22,9291
12	1,0316	0,9658	22,581	0,9017	0,9714	18,2349	<b>0,9752</b>	<b>0,981</b>	<b>16,7811</b>
13	0,9773	0,9778	13,0769	<b>0,9208</b>	<b>0,9382</b>	<b>9,8581</b>	0,9916	0,9659	9,9516
14	<b>1,0162</b>	<b>0,9561</b>	<b>28,1574</b>	1,0478	0,9909	32,2639	1,0425	0,969	31,1108
15	0,9888	0,9788	40,513	<b>0,9198</b>	<b>0,956</b>	<b>35,5703</b>	1,0274	0,9803	50,4561
16	1,033	1,0901	16,002	1,0275	1,0283	15,3962	<b>1,0171</b>	<b>1,0721</b>	<b>13,9585</b>
17	<b>0,9709</b>	<b>0,9608</b>	<b>22,0434</b>	0,9964	0,9828	23,785	0,9842	0,9825	22,6568
18	<b>1,0621</b>	<b>1,057</b>	<b>37,1984</b>	1,0923	1,0159	43,4504	1,0918	1,0468	41,7692
19	<b>1,0116</b>	<b>1,0206</b>	<b>11,5929</b>	1,0872	0,9919	15,1478	1,0507	0,9976	11,7603
20	1,0086	1,024	6,6395	0,8802	0,9739	15,1958	<b>0,976</b>	<b>1,029</b>	<b>5,5435</b>
21	0,9773	0,9893	14,692	<b>1,0035</b>	<b>0,935</b>	<b>16,6562</b>	0,9853	0,9735	14,669
22	<b>1,0029</b>	<b>1,0409</b>	<b>16,8565</b>	1,047	1,0605	20,8638	1,0113	1,0357	17,3595
23	0,9826	1,0552	17,1639	0,8937	1,0296	18,4228	<b>0,975</b>	<b>1,0283</b>	<b>15,8358</b>
24	0,9886	1,0227	10,2612	<b>0,9843</b>	<b>1,0543</b>	<b>10,2316</b>	0,9936	1,0508	10,348
25	<b>0,9519</b>	<b>1,0225</b>	<b>29,0898</b>	0,9484	1,0844	29,3521	0,9583	1,0463	30,0735
26	<b>0,9881</b>	<b>0,986</b>	<b>30,3051</b>	1,031	1,0706	37,197	1,0037	1,0052	30,9946
27	<b>0,9956</b>	<b>0,9428</b>	<b>29,3156</b>	1,0426	0,956	37,4214	1,0129	0,9444	31,6612
28	1,093	0,9807	17,3819	0,9557	0,9541	18,9961	<b>1,0443</b>	<b>0,9818</b>	<b>14,0926</b>
29	0,988	1,0706	17,4652	<b>0,9335</b>	<b>0,9865</b>	<b>12,5903</b>	0,9612	1,0329	13,1974
$m_x$	1,0028	0,9924		0,9792	0,9958		<b>1,0006</b>	<b>0,9960</b>	
$\sigma_x^2$	<b>0,0009</b>	0,0020		0,0033	0,0022		0,0011	<b>0,0014</b>	
$\sigma_x$	<b>0,0299</b>	0,0448		0,0578	0,0467		0,0326	<b>0,0369</b>	
			<b>9</b>			<b>8</b>			<b>11</b>



Значения параметров закона распределения Лапласа  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\chi^2$  при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для  $N=2000$ ,  $M=20$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  приведены в таблице 1.13.

Таблица 1.13

№	Метод моментов			$f_a(x, \lambda)$			$F_a(x, \lambda)$		
	$\lambda$	$\mu$	$\chi^2$	$\lambda$	$\mu$	$\chi^2$	$\lambda$	$\mu$	$\chi^2$
1	1,0035	0,954	18,3181	0,9354	0,9627	21,1939	<b>0,9933</b>	<b>0,9679</b>	<b>17,1265</b>
2	0,9526	0,9901	23,9196	<b>0,9589</b>	<b>0,9579</b>	<b>22,7506</b>	0,9703	0,9711	24,4018
3	1,0414	1,0087	12,1182	1,0293	0,9897	10,9312	<b>1,0192</b>	<b>0,9987</b>	<b>10,3592</b>
4	1,0037	0,985	16,3162	0,9753	1,0094	16,4258	<b>0,9924</b>	<b>0,9985</b>	<b>15,1883</b>
5	0,9823	0,9942	18,976	0,9816	0,9555	18,611	<b>0,9706</b>	<b>0,9886</b>	<b>17,6714</b>
6	1,0287	1,0324	15,5928	1,0356	1,0072	15,6684	<b>1,0247</b>	<b>1,0162</b>	<b>14,3696</b>
7	1,02	0,9366	26,2669	1,0621	1	31,2517	<b>1,0313</b>	<b>0,9606</b>	<b>24,8301</b>
8	0,9939	1,0116	9,0151	1,0472	0,9929	14,7895	<b>1,0066</b>	<b>0,9969</b>	<b>8,9097</b>
9	0,9951	0,9963	16,4525	1,0329	1,0233	21,4902	<b>0,9997</b>	<b>1,0049</b>	<b>16,4004</b>
10	1,0328	0,9857	17,5749	0,9716	0,9987	16,0183	<b>1,0046</b>	<b>0,9963</b>	<b>15,0382</b>
11	0,9962	1,0358	14,755	0,9807	1,0123	13,337	<b>0,9805</b>	<b>1,0252</b>	<b>13,267</b>
12	1,009	1,0262	14,1774	0,9739	1,052	14,6954	<b>1,0069</b>	<b>1,0353</b>	<b>13,9515</b>
13	<b>0,9955</b>	<b>0,9947</b>	<b>12,6575</b>	1,039	1,0009	18,6853	1,0062	0,9993	13,3651
14	<b>0,9932</b>	<b>1,0376</b>	<b>33,4976</b>	1,0686	0,9508	49,0293	1,0312	1,012	35,5674
15	<b>1,0057</b>	<b>1,0268</b>	<b>28,0542</b>	0,9572	0,9487	34,276	1,0408	1,022	32,9378
16	1,0072	1,0099	11,5106	<b>0,9836</b>	<b>1,0134</b>	<b>9,9577</b>	0,987	1,014	10,054
17	0,9762	1,0204	10,0031	<b>0,9696</b>	<b>0,9915</b>	<b>8,5943</b>	0,9716	1,0012	8,7458
18	0,9935	1,0141	25,6818	1,0005	0,96	25,4978	<b>0,9856</b>	<b>0,996</b>	<b>23,4797</b>
19	<b>1,0036</b>	<b>1,0063</b>	<b>12,7575</b>	0,9984	0,9901	13,0342	1,0143	1,0068	13,2958
20	0,994	1,0129	16,6464	<b>0,9832</b>	<b>1,0321</b>	<b>16,4062</b>	1,0145	1,0257	16,9398
21	1,0282	1,0028	29,0172	0,9579	0,9569	31,9704	<b>1,0157</b>	<b>0,9982</b>	<b>27,8138</b>
22	0,9609	1,0156	23,1503	0,8551	1,0133	33,8199	<b>0,9496</b>	<b>1,0045</b>	<b>21,3061</b>
23	1,0069	1,0032	10,859	0,9556	0,9787	14,5239	<b>1,0008</b>	<b>1,0129</b>	<b>10,6128</b>
24	0,9876	1,0506	16,2526	0,9442	0,9952	17,697	<b>0,9783</b>	<b>1,0354</b>	<b>15,166</b>
25	1,0344	0,9726	8,179	0,9818	1,0288	12,8263	<b>1,0229</b>	<b>0,9813</b>	<b>7,6053</b>
26	0,9907	1,0304	23,2731	0,9774	0,9921	21,4689	<b>0,9752</b>	<b>1,0143</b>	<b>21,2952</b>
27	1,0175	1,0045	27,4362	0,9255	1,0051	38,0156	<b>1,0167</b>	<b>1,006</b>	<b>27,4033</b>
28	<b>0,9708</b>	<b>1,0066</b>	<b>7,1989</b>	0,9327	0,9717	11,3213	0,9847	0,9978	7,3869
29	<b>1,036</b>	<b>1,0571</b>	<b>28,1256</b>	1,0718	1,0355	32,1392	1,0436	1,0436	28,2522
$m_x$	1,0021	1,0080		0,9857	0,9940		<b>1,0013</b>	<b>1,0045</b>	
$\sigma_x^2$	<b>0,0005</b>	0,0007		0,0023	0,0007		0,0005	<b>0,0004</b>	
$\sigma_x$	<b>0,0217</b>	0,0257		0,0475	0,0271		0,0230	<b>0,0192</b>	
			<b>6</b>			<b>4</b>			<b>19</b>



$N=500, M=20, \lambda = 1$

$N=500, M=20, \mu = 1$

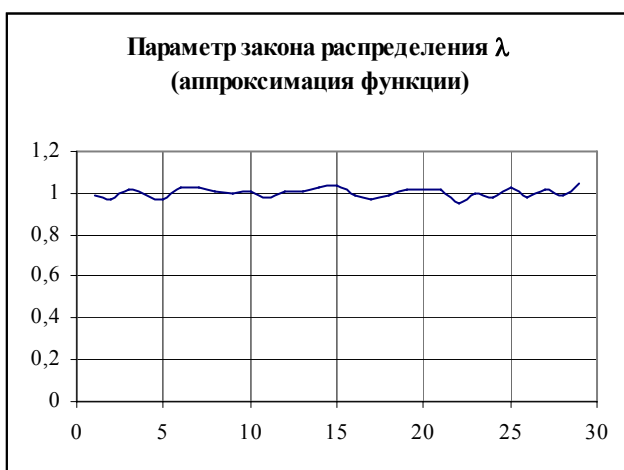
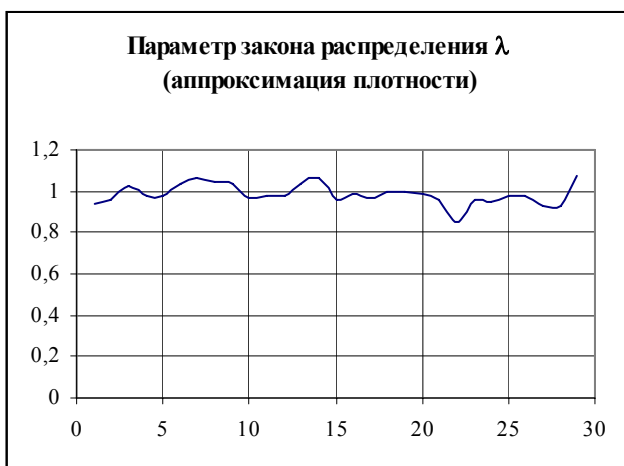
Рисунок 1.32. Результаты моделирования



$N=1000, M=20, \lambda = 1$

$N=1000, M=20, \mu = 1$

Рисунок 1.33. Результаты моделирования



$N=2000, M=20, \lambda = 1$

$N=2000, M=20, \mu = 1$

Рисунок 1.34. Результаты моделирования

Анализ результатов показывает некоторое преимущество метода аппроксимации функций распределения. Однако для получения более надежного результата, как и в предыдущем примере, для решения одной задачи целесообразно применить все разработанные методы и выбрать в соответствии с критерием лучший результат.

## 2. АППАРАТУРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИЯМИ ЗАДАННОГО ВИДА

### 2.1. Основные понятия и определения

Важной частью статистического анализа является корреляционный анализ. Знание корреляционных функций позволяет решать задачи идентификации динамических систем [92], выбирать оптимальный интервал дискретизации исследуемого процесса [86], оценивать погрешности средств измерений [104], определять скорость проката, строить корреляционные приёмники и т.д.[70]. Для экспериментального определения корреляционных функций применяются как специализированные вычислительные средства - коррелометры, так и универсальные вычислительные машины.

Корреляционная функция представляет собой корреляционный момент её значений при двух значениях аргумента  $t, t'$ , рассматриваемый как функция  $t, t'$  [45]:

$$K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}(t')], \quad (2.1)$$

где  $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$ , а  $m_x(t)$  - математическое ожидание случайного процесса в сечении  $t$ .

Корреляционная функция характеризует степень **линейной связи** между сечениями процесса.

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)}\sqrt{D_x(t')}}. \quad (2.2)$$

Для стационарных случайных процессов корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов и является четной функцией  $\tau = t - t'$  [44]:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau). \quad (2.3)$$

Это свойство позволяет определять корреляционную функцию только во временном интервале  $[0, \infty)$ .

Нормированная корреляционная функция, в соответствии с выражением (2.2), равна:

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}. \quad (2.4)$$

Отсюда видно, что

$$|\rho_x(\tau)| \leq 1. \quad (2.5)$$

Типовые модели нормированных корреляционных функций, широко применяемых в приложениях, приведены в таблице 2.1, а их классификация – на рис. 2.1.

Следует отметить, что 8-ая модель может быть корреляционной функцией только в том случае, если  $|C| \leq \alpha/\omega_0$ . В противном случае спектральная плотность  $S_x(\omega) < 0$  (см. таблицу 6.8).

Из анализа моделей видно, что все корреляционные функции можно разбить на два класса: монотонные и колебательные. В приложении П.12 приведены графики экс

## Типовые модели корреляционных функций

Таблица 2.1.

№	$\rho_x(\tau)$
1	$e^{-\alpha \tau }$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau )$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau )$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)$
5	$e^{-\alpha \tau }\text{Cos}\omega_0\tau$
6	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$
7	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$
8	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau+C\text{Sin}\omega_0\tau)$

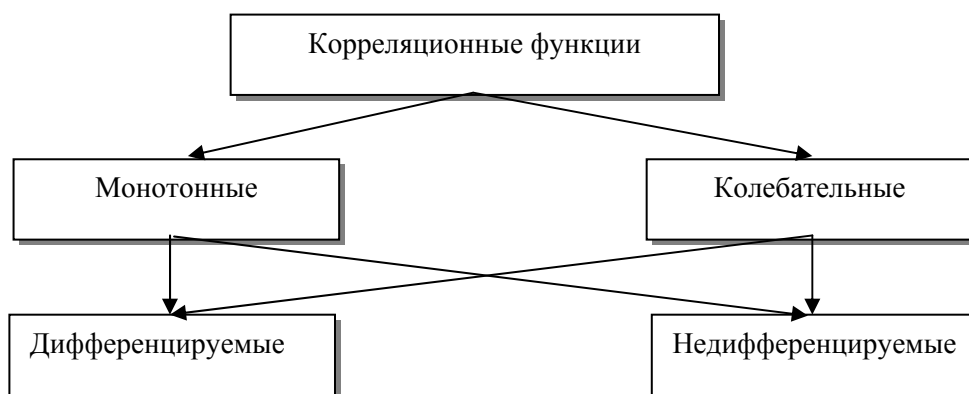


Рисунок 2.1. Классификация корреляционных функций

пониженной (модель 1) и экспоненциально-косинусной (модель 5) корреляционных функций.

Из графиков видно, что в «нуле» производная корреляционных функций имеет разрыв первого рода. То есть случайный процесс относится к классу недифференцируемых процессов. Случайный процесс называется дифференцируемым, если производная корреляционной функции в «нуле» непрерывна (см. модели 2, 4, 6, 8 таблицы 2.1).

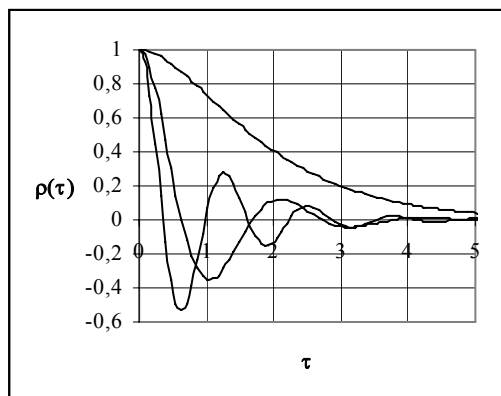


Рисунок 2.2.

Пример корреляционной функции дифференцируемого случайного процесса (модель 6), при различных сочетаниях параметров:  $\omega_0 / \alpha = 0, 3, 5$ , - представлен на рис. 2.2.

Отметим, что корреляционная функция  $n$ -ой производной стационарного случайного процесса определяется выражением:

$$K_{x^{(n)}}(\tau) = (-1)^n K_x^{(2n)}(\tau). \quad (2.6)$$

Отсюда видно, что все производные дифференцируемых стационарных случайных процессов являются стационарными случайными процессами.

Таким образом, корреляционные функции стационарных случайных процессов можно разделить на четыре класса:

1. монотонные недифференцируемые (модели 1);
2. монотонные дифференцируемые (модели 2, 4);
3. колебательные недифференцируемые (модели 3, 5, 7, 8);
4. колебательные дифференцируемые (модели 6, 8).

Такое разделение стационарных случайных процессов по виду корреляционной функции оказывается полезным при аппроксимации корреляционных функций, полученных экспериментально, параметрическими моделями [87].

В практических приложениях часто для описания временной зависимости нормальных стационарных процессов применяют [80]:

- релейную корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t - \tau) \right] = k_\phi \sigma_x \rho_x(\tau); \quad (2.7)$$

- полярную (знаковую) корреляционную функцию

$$P_x(\tau) = M \left[ \text{sign} \overset{\circ}{x}(t) \text{sign} \overset{\circ}{x}(t - \tau) \right] = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_x(\tau). \quad (2.8)$$

По найденной релейной корреляционной функции можно найти нормированную корреляционную функцию:

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \right]}. \quad (2.9)$$

Отметим, что  $R_x(0) = M[\overset{\circ}{x}(t)] = k_\phi \sigma_x$ . Отсюда видно, что для оценки релейной корреляционной функции процессов, отличных от нормального, необходима априорная информация о законе распределения, т.е. необходимо знание  $k_\phi$ .

Зная полярную корреляционную функцию, из выражения (2.7) можно найти нормированную корреляционную функцию:

$$\rho_x(\tau) = \sin \frac{\pi}{2} P_x(\tau). \quad (2.10)$$

Из выражения (2.8) следует, что при оценке полярной корреляционной функции теряется информация о мощности процесса.

Несмотря на ограничения на закон распределения, релейные и полярные корреляционные функции находят широкое применение при решении различных практических задач. Это объясняется простотой технической реализации алгоритмов.

Корреляционные функции, представленные в виде последовательности ординат и предназначенные для дальнейших расчетов, как правило, аппроксимируются теми или иными аналитическими выражениями в соответствии с выбранным критерием приближения. Независимо от метода аппроксимации, как правило, определяют параметры модели, удовлетворяющие выбранному критерию приближения. Знание модели корреляционной функции и численных значений её параметров позволяет легко, используя известные определения, вычислить интервалы корреляции, моменты корреляционных функций, спектральную плотность мощности и т.д. Кроме того, следует отметить, что при проведении большого числа корреляционных измерений аппроксимативный подход позволяет существенно сократить объём хранимой инфор-

мации, так как вместо большого числа отсчётов корреляционных функций в заданных точках необходимо хранить только вид модели и численные значения её параметров.

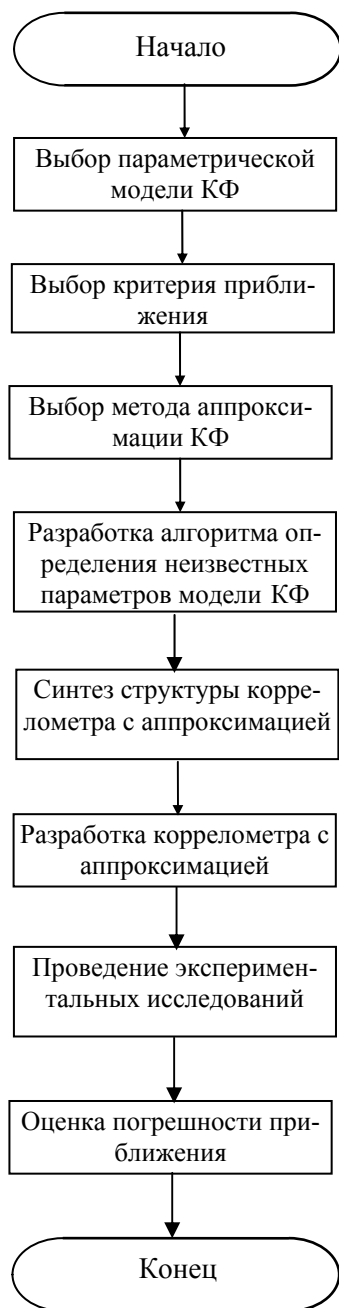


Рисунок 2.3. Блок-схема аппроксимации

В общем виде задача аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями включает этапы, представленные на рис. 2.3.

Одной из самых сложных и плохо формализуемых задач, от правильного решения которой во многом будет определяться точность, достоверность полученных результатов, простота технической реализации, является выбор модели корреляционной функции.

В качестве моделей корреляционных функций, основываясь на априорной информации о свойствах процесса, наиболее часто принимают:

- линейную комбинацию конечного числа функций (возможна аппроксимация одной функцией) [87, 96];
- бесконечный (конечный) ряд некоторой определенной системы функций (в частности, возможна аппроксимация степенными рядами, рядами по дисперсиям производных, ортогональными полиномами и функциями, асимптотическими рядами) [6, 87, 96, 111].

Выбор той или иной модели корреляционной функции основывается на наличии априорной информации о свойствах процесса. Если кроме эквивалентной ширины спектра мощности процесса ничего не известно, то в качестве модели следует применять разложение корреляционной функции в ряд по какой-либо системе ортогональных функций или полиномов. Если ориентировочно известен вид корреляционной функции исследуемого процесса, то наиболее целесообразно выбирать конкретный вид модели, желатель-

но с меньшим числом параметров. От числа неизвестных параметров в значительной степени зависит сложность аппаратуры, удобство полученной модели для исследователя.

Многочисленные исследования [42, 79, 80, 82, 87, 91, 92, 96] показали, что при анализе случайных процессов часто встречаются затухающие экспоненциальные и экспоненциально-косинусные корреляционные функции (см. рис. 2.4).

Например, экспоненциальная модель корреляционной функции оказывается весьма полезной при определении скорости затухания корреляционной функции, оценки интервала корреляции и т.д. Подобные задачи возникают при создании ин-



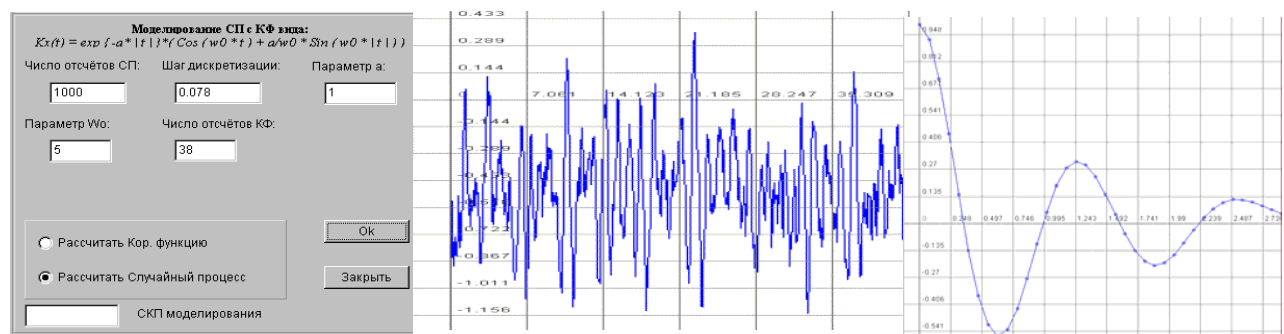
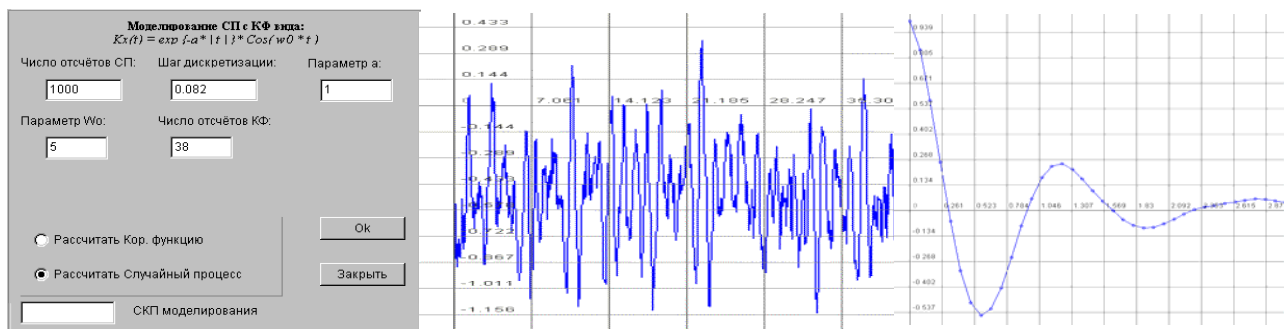
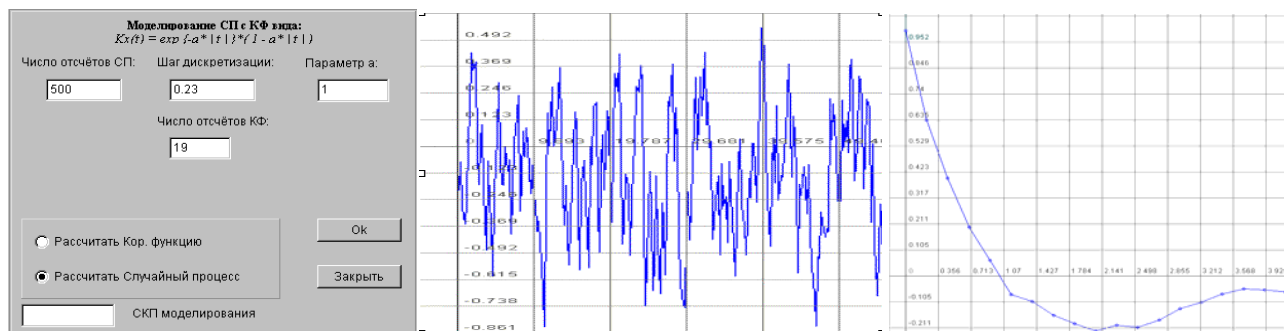
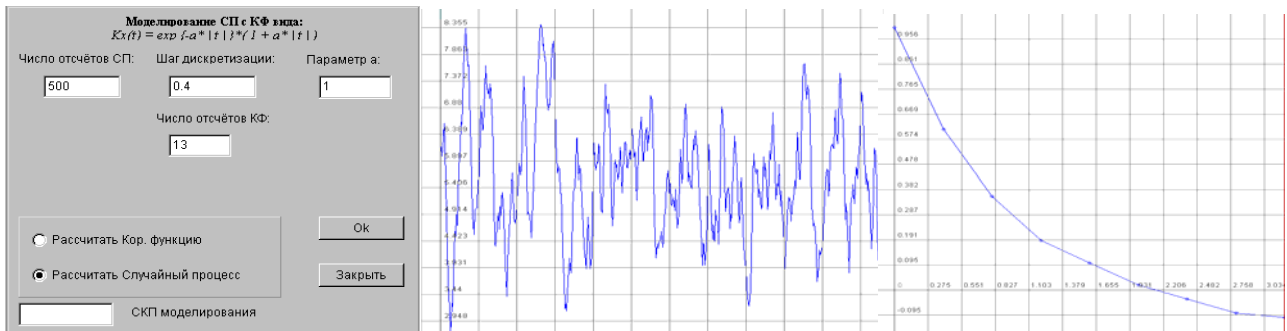
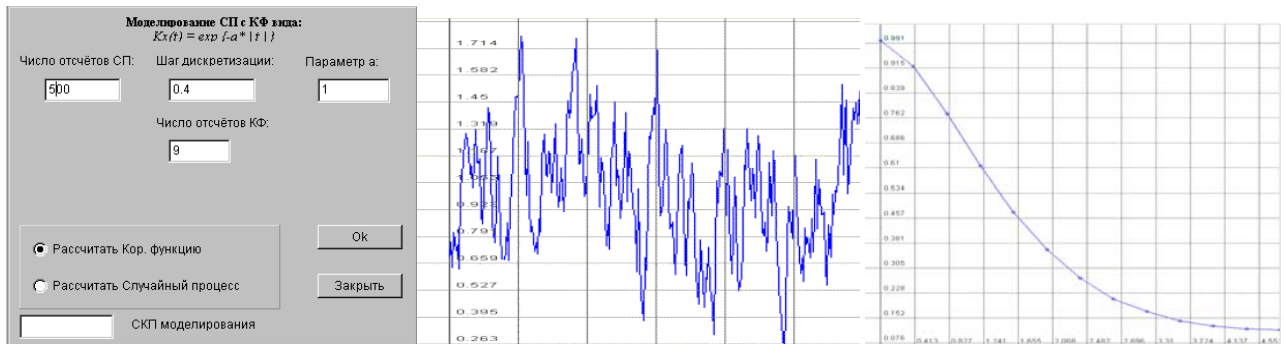


Рисунок 2.4. Случайные сигналы и их корреляционные функции

мационно-измерительных систем, систем автоматического управления и регулирования, систем передачи данных, когда приходится выбирать шаг дискретизации во времени, постоянные времени сглаживающих устройств при получении оценок сигнала. Часто данная модель выбирается в качестве базовой при оценке точностных характеристик реальных объектов, так как существует большой класс динамических систем, для которых процессы с экспоненциальной корреляционной функцией являются наилучшими с точки зрения помехозащищенности. Кроме того, при теоретических исследованиях часто делается допущение о том, что анализируемый процесс является марковским. В [79] доказывается теорема, согласно которой стационарный гауссов случайный процесс является марковским тогда и только тогда, когда его нормированная корреляционная функция имеет вид  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ .

При прохождении сигналов через узкополосные системы, их нормированные корреляционные функции имеют вид:  $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$  [79].

Знание параметров таких функций позволяет определить интервал корреляции процесса, резонансную частоту системы и т.д.

Всё это свидетельствует о фундаментальной роли экспоненциальных и экспоненциально-косинусных корреляционных функций и приводит к необходимости выбирать в качестве моделей функции именно этого вида.

Обычно в качестве критерия приближения применяют точностные критерии [56]:

- минимум квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 d\tau = \min; \quad (2.11)$$

- минимум экспоненциально-взвешенной аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 e^{-\frac{\tau}{\tau_k}} d\tau = \min, \quad (2.12)$$

где  $\tau_k$  - максимальный интервал корреляции [96];

- критерий равномерного приближения:

$$|K_x(\tau) - K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)| < \varepsilon, \quad (2.13)$$

где  $\varepsilon$  - некоторая сколь угодно малая величина.

Реже применяются неточностные критерии. Так, например, в [56] выбран критерий соответствия вида модели виду корреляционной функции исследуемого процесса. В общем случае этот критерий не обеспечивает ни минимума квадратической, ни минимума экспоненциально-взвешенной погрешности аппроксимации. Так как корреляционная функция определяется в результате эксперимента, имеют место случайные погрешности. Поэтому, для получения модели нецелесообразно прибегать к интерполированию. Кроме того, во многих случаях нет необходимости требовать близости модели к корреляционной функции исследуемого процесса в равномерном смысле, а достаточно лишь интегральной близости функций.

Практика показывает [54, 56, 87, 94, 95, 111], что в этом случае наиболее целесообразно применять квадратическое приближение.

Обсудив основные требования, предъявляемые к моделям корреляционных функций, критериям оптимальности, перейдем к методам аппроксимации корреляционных функций.

Классификация методов аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями представлена на рис. 2.5.

Наиболее общими свойствами обладает аппроксимация корреляционных функций с использованием ряда по ортогональным функциям или полиномам Лагерра, Лежандра, Чебышева, Эрмита и т.д. Однако, при анализе узкополосных процессов, когда корреляционная функция имеет слабозатухающий колебательный характер (см. приложение П.12), аппроксимация ортогональным рядом потребует большого числа членов разложения, что неудобно как при использовании аналитического выражения, так и при построении аппаратуры. Другим недостатком метода и известных ортогональных коррелометров является то, что предложенные эмпирические способы численных значений параметров ортогональных функций (постоянных времени ортогональных фильтров), основанные на знании корреляционных функций исследуемых процессов, не позволяют получить наилучшую аппроксимацию корреляционных функций. В реальных же условиях, когда не имеется достаточной априорной информации о свойствах процесса, и постоянная времени фильтров выбирается произвольно, это обстоятельство приводит к существенным отличиям получаемой оценки корреляционной функции от действительной [53, 87, 96]. Определение же оптимального значения постоянной времени фильтров требует многократного воспроизведения исследуемого процесса, что значительно увеличивает время анализа. Метод нашел широкое применение при анализе широкополосных процессов.

Коррелометры с аппроксимацией степенными рядами обеспечивают удовлетворительные результаты лишь при малых значениях аргумента. Увеличение значения аргумента приводит к увеличению числа членов разложения ряда и усложнению коррелометра. Полученную таким образом модель корреляционной функции очень трудно использовать в дальнейших расчётах. Кроме того, затруднено вычисление таких характеристик, как интервал корреляции, показатель колебательности и т.д. Метод наиболее целесообразно применять при анализе высокочастотных процессов.

Метод разложения в ряд по ортогональным полиномам реализации исследуемых процессов с последующим вычислением корреляционных функций позволяет строить коррелометры без запаздывания [111]. Однако, техническая реализация этого метода затруднена. Кроме этого, он не свободен от указанного недостатка: неудобство модели для дальнейших исследований.

Все рассмотренные методы и реализующие их технические устройства основаны на аналоговой форме представления исследуемых процессов. Присутствующие в их составе линейные множительные устройства во многом определяют точность вычисления параметров модели, частотный диапазон, сложность аппаратной реализации и т.д. Применение кусочно-постоянных ортогональных функций Уолша, Хаара, реализуемых на базе элементов импульсной техники, позволит освободиться от указанных недостатков: упростить аппаратуру, заменить линейные множительные устройства знаковыми и т.д.

Основной недостаток этого метода заключается в сложности интерпретации полученных результатов. Так, например, при аппроксимации в базисе функций Уолша

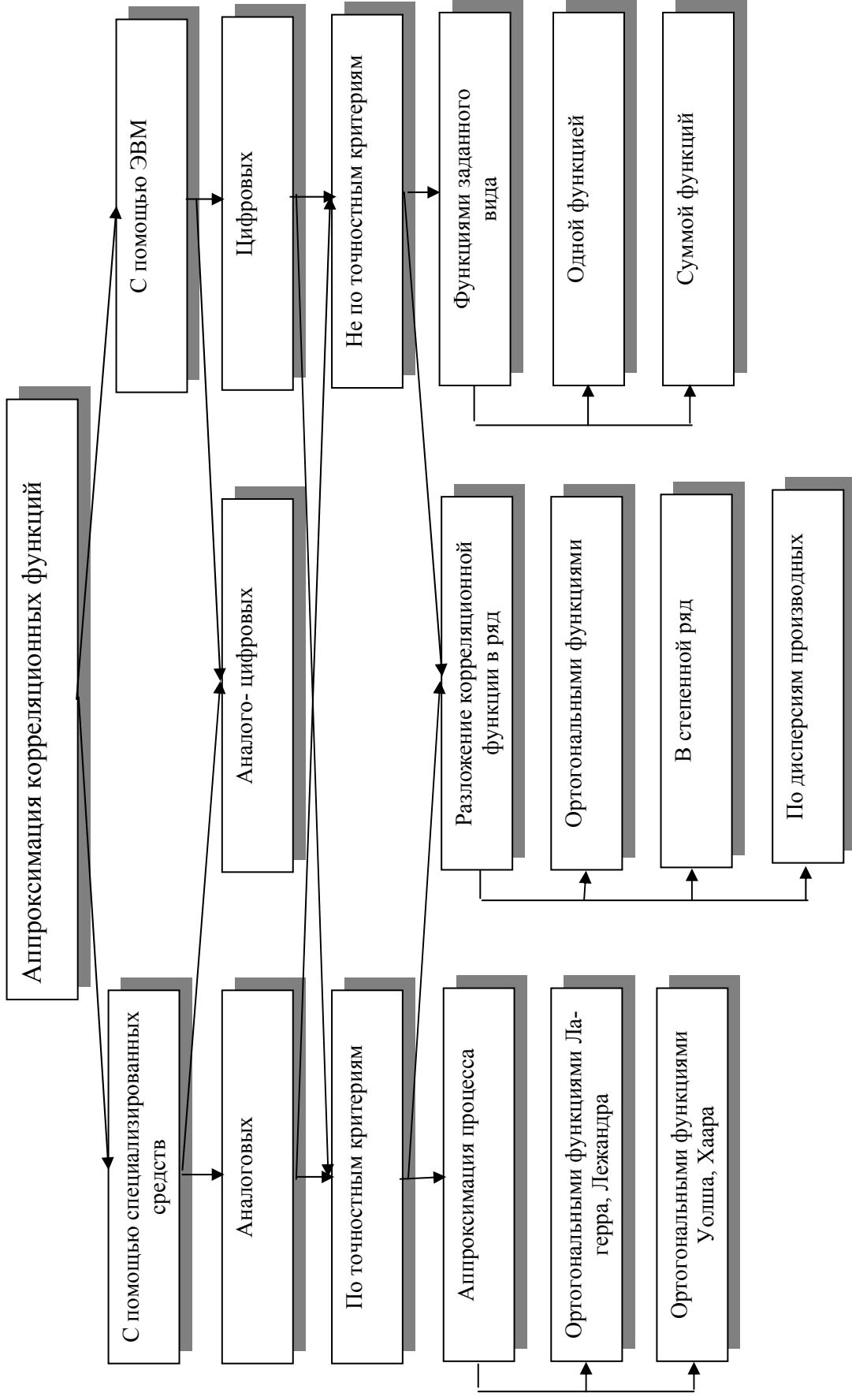


Рисунок 2.4. Классификация методов аппроксимации корреляционных функций

корреляционной функции вида  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$  с погрешностью 3-5 % требуемое число членов разложения равно 16-32. Все это, в конечном счёте, затрудняет использование полученной модели в дальнейших исследованиях.

Рассмотрим 4, 5 и 8 этапы применительно к решению наиболее часто встречающихся задач аппроксимации корреляционных функций:

- функциями заданного вида, параметры которой удовлетворяют минимуму квадратической погрешности аппроксимации;
- ортогональными функциями Лагерра.

## 2.2. Метод аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида

При выбранной аналитической модели корреляционной функции задача сводится к определению неизвестных параметров, удовлетворяющих минимуму квадратической погрешности аппроксимации [50]:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [\rho_x(\tau) - \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 d\tau = \min. \quad (2.14)$$

Условием минимума погрешности  $\Delta$  является следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i} = 2 \int_0^{\infty} [\rho_x(\tau) - \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)] \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} d\tau = 0. \quad (2.15)$$

(i = 1, ... n)

Или

$$\int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} d\tau - \varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \quad (2.16)$$

(i = 1, ... n)

где

$$\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} d\tau. \quad (2.17)$$

Разделив левые и правые части уравнений системы (2.16) на  $\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$ , получим:

$$\frac{1}{\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial \rho_a(\tau, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_n} d\tau - 1 = 0. \quad (2.18)$$

Введем обозначение

$$h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} \quad (2.19)$$

и умножим левые и правые части уравнений системы на  $D_x$ .

Тогда

$$\int_0^{\infty} K_x(\tau) h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) d\tau - D_x = 0. \quad (2.20)$$

(i = 1, ... n)

Учитывая, что  $K_x(\tau) = M \left[ \overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}(t-\tau) \right]$ , а  $D_x = M \left[ \overset{\circ}{x}^2(t) \right]$ , систему уравнений

приведем к виду:

$$M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{\circ}{x}(t-\tau) d\tau \right] - M \left[ \overset{\circ}{x}^2(t) \right] = 0 \quad (2.21)$$

(i = 1, ... n)

Таким образом, задача аппроксимации корреляционных функций сводится к решению системы уравнений (2.21). Эта система может быть решена как с помощью специализированной аппаратуры, так и с помощью ЭВМ.

Аппаратура для решения этой системы будет состоять из  $n$  эквивалентных по структуре каналов. Блок-схема каждого канала имеет вид, представленный на рис 2.6 [1].

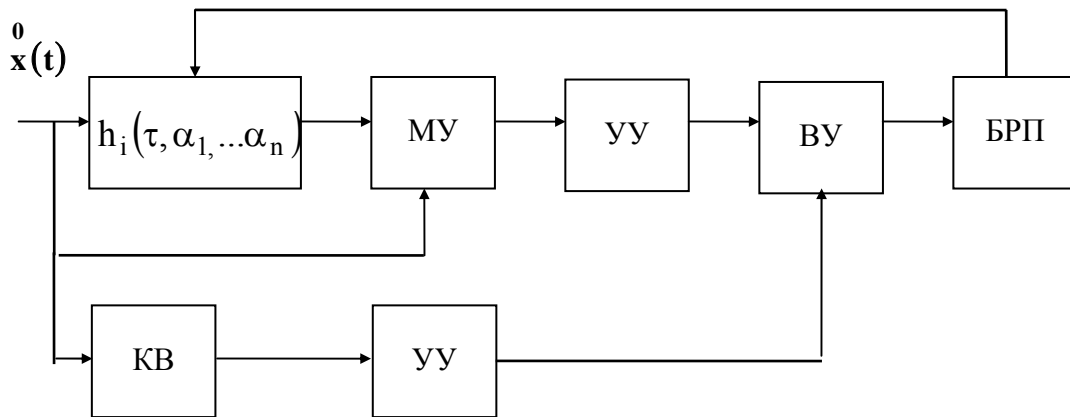


Рисунок 2.6. I-й канал коррелометра с аппроксимацией параметрическими моделями

Проведя преобразования, систему уравнений (2.21) можно привести к виду:

$$M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{\circ}{x}(t-\tau) d\tau - \overset{\circ}{x}^2(t) \right] = 0 \quad (2.22)$$

(i = 1, ... n)

Структурная схема  $i$ -ого канала этого коррелометра, представленная на рис.2.7, отличается от предыдущей перестановкой блоков и отсутствием одного усредняющего устройства [87].

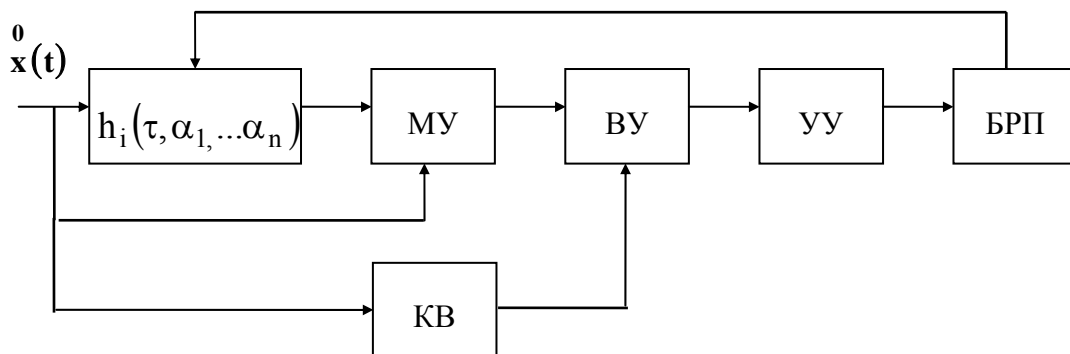


Рисунок 2.7. I-ый канал коррелометра с аппроксимацией параметрическими моделями

Если привести систему уравнений (2.21) к виду

$$M \left\{ \overset{\circ}{x}(t) \left[ \int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{\circ}{x}(t - \tau) d\tau - \overset{\circ}{x}(t) \right] \right\} = 0, \quad (2.23)$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

возможна ещё одна аппаратная реализация каждого канала (см. рис 2.8). Заметим, что в структуре канала отсутствует квадратор, что, в свою очередь, упрощает его техническую реализацию [87].

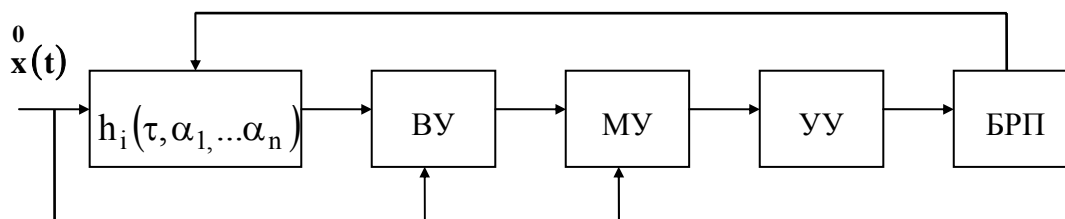


Рисунок 2.8. I-ый канал коррелометра с аппроксимацией параметрическими моделями

На рис. 2.9 приведена одна из разработанных структурных схем двухканального коррелометра с аппроксимацией [7].

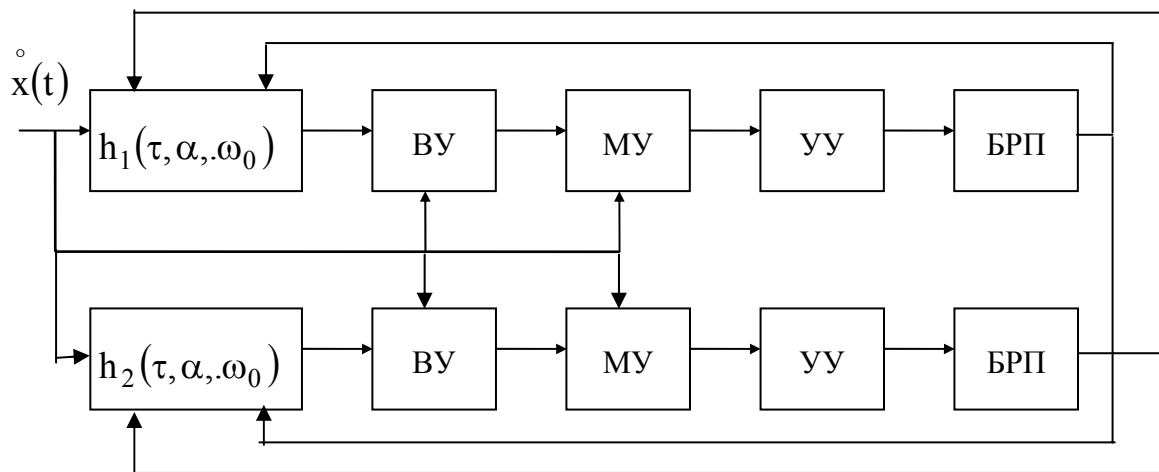


Рисунок 2.9. Двухканальный коррелометр

В [12] разработана еще одна структурная схема для аппроксимации корреляционных функций двухпараметрическими моделями, представленная на рис. 2.10.

На рис. 2.10 приняты следующие обозначения:

1 – блок нормирования; 2 – фильтр с регулируемым параметрами; 3, 8, 13 – блоки вычитания; 4, 9 – блок умножения; 5, 10 – блок усреднения; 6, 7 – блоки регулировки параметров; 11 – регулируемый функциональный преобразователь; 12- блок оценки интервала корреляции; 14 – блок деления.

Блок 12 формирует оценку интервала корреляции в виде несобственного интеграла от квадрата нормированной корреляционной функции [96].

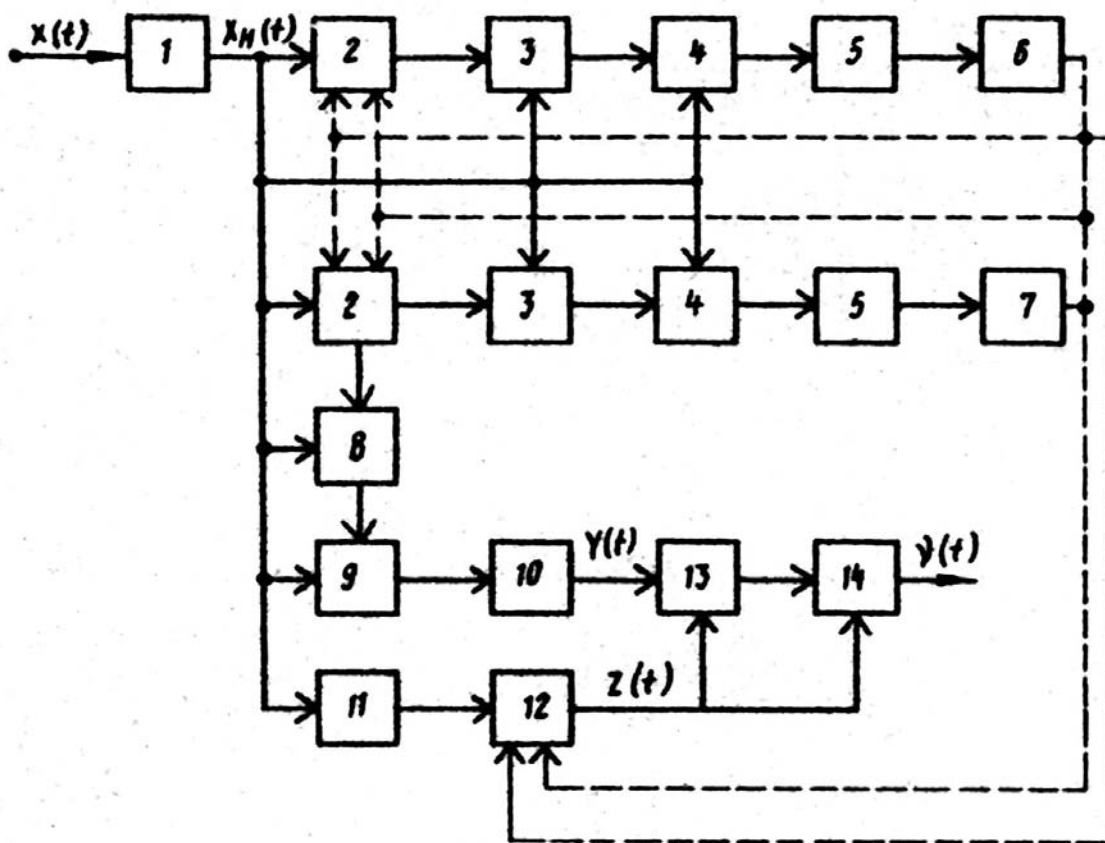


Рисунок 2.10. Коррелометр с аппроксимацией двухпараметрическими моделями

Коррелометр работает следующим образом. При подаче на вход стационарного центрированного случайного процесса блоки регулировки параметров 6, 7 изменяют параметры фильтров 2 до обнуления сигналов на выходах блоков усреднения 5. Установившиеся значения параметров фильтров принимаются в качестве параметров одной из заданных моделей корреляционных функций. При этом обеспечивается минимум относительной погрешности аппроксимации корреляционной функции исследуемого случайного процесса выбранной моделью.

В [10] была разработана структурная схема коррелометра с аппроксимацией экспоненциально-косинусной моделью, представленная на рис. 2.11.

На рис. 2.11 приняты следующие обозначения:

1 – блок нормировки; 2 – источник эталонного напряжения; 3, 14 – блоки вычитания; 4, 8, 9 – блоки умножения; 5 – регулируемый фильтр; 6, 7 – ключи; 10, 11 – сумматоры; 12, 13 – блоки усреднения; 15 – блок регулировки параметра; 16 – блок регулировки частоты; 17 – генератор ортогональных сигналов.

Устройство работает следующим образом. При поступлении на вход блока нормировки, являющийся входом устройства, центрированной реализации случайного процесса  $x(t)$  блок 15 изменяет параметр  $\alpha$  регулируемого фильтра с передаточ-



ной функцией  $W(p, \alpha) = \frac{\pi}{2(1 + p/\alpha)^2}$ . В свою очередь, блок 16 изменяет частоту генератора 17 до обнуления выходных сигналов блоков 12 и 13. Установившиеся значения параметра  $\alpha$  и частоты  $\omega_0$  принимаются в качестве оценки параметров нормированной корреляционной функции  $\rho_a(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ .

Предлагаемый коррелометр позволяет оценить параметры аппроксимирующего выражения, удовлетворяющие минимуму квадратической погрешности аппроксимации.

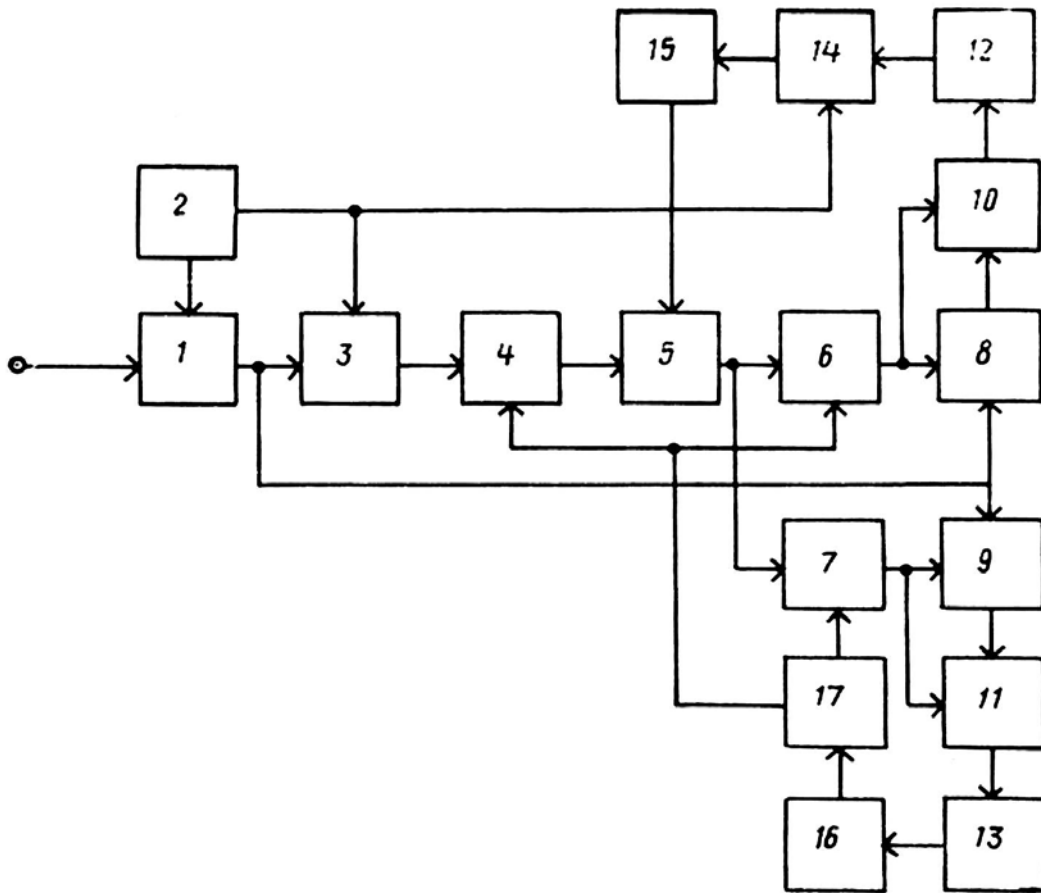


Рисунок 2.11. Коррелометр с аппроксимацией экспоненциально-косинусной моделью

Как следует из рисунков 2.9-2.11, каналы регулирования взаимосвязаны, процесс уравнивания затруднен, в схеме имеется значительное число регулируемых элементов.

От ряда недостатков можно избавиться, если параметр затухания модели определять по минимуму квадратической погрешности также, как и для аппроксимирующей функции  $e^{-\alpha|\tau|}$ , а частоту колебания корреляционной функции  $\omega_0$  - как для функций  $\rho_{a5}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ ,  $\rho_{a6,7}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \pm \sin \omega_0 |\tau|)$ .

Алгоритм определения параметров модели заключается в следующем [87]. При поступлении на вход коррелометра реализации стационарного случайного процесса значение первого параметра  $\alpha^*$ , определяемое в первом канале, устанавливается во втором фильтре. Затем определяется частота колебаний  $\omega_0^*$  во втором канале.

Из рис. 2.6-2.11 видно, что одним из основных элементов схемы являются фильтры с регулируемыми параметрами, импульсные характеристики  $h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  которых полностью определяются выбранными аналитическими выражениями корреляционных функций [50, 87]. Таким образом, задача создания устройств для аппроксимации корреляционных функций сводится, в основном, к синтезу этих фильтров. В таблице 2.2 приведены, для примера, импульсные характеристики фильтров с регулируемыми параметрами для типовых аппроксимирующих моделей нормированных корреляционных функций, а в таблице 2.3 – их передаточные функции.

### Импульсные характеристики для типовых аппроксимирующих выражений КФ

Таблица 2.2

№	$\rho_x(\tau, \alpha, \omega_0)$	$h_i(\tau, \alpha, \omega_0)$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$4\alpha^2 \tau e^{-\alpha\tau}$
2	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$1,6\alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha\tau}$
3	$e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau )$	$16\alpha^2 \tau e^{-\alpha\tau} - 8\alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha\tau}$
4	$e^{-\alpha \tau } \left(1 + \alpha \tau  + \frac{\alpha^2 \tau^2}{3}\right)$	$\frac{8}{21}\alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha\tau} + \frac{8}{21}\alpha^4 \tau^3 e^{-\alpha\tau}$
5	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0  \tau $	$\frac{8\alpha^2(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{2\alpha^4 + \alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4} \tau e^{-\alpha\tau} \cos \omega_0 \tau$
		$\frac{4(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{\alpha\omega_0} \tau \sin \omega_0 \tau$
6	$e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$\frac{8\alpha^2(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{5\alpha^4 - 2\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4} \left[ \tau e^{-\alpha\tau} (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau) - \frac{1}{\omega_0} e^{-\alpha\tau} \sin \omega_0 \tau \right]$
		$\frac{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{\alpha\omega_0} e^{-\alpha\tau} \left[ \frac{\alpha\tau}{\omega_0} \cos \omega_0 \tau - \left( \tau + \frac{\alpha}{\omega_0^2} \right) \sin \omega_0 \tau \right]$

Передаточные функции фильтров с регулируемыми параметрами

Таблица 2.3

№	$\rho_x(\tau, \alpha, \omega_0)$	$W(p, T, k)$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{4}{(1+Tp)^2}$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau )$	$\frac{3,2}{(1+Tp)^3}$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau )$	$\frac{16Tp}{(1+Tp)^3}$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$\frac{16(4+Tp)}{21(1+Tp)^4}$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{8(k+1)}{k} \left[ \frac{1}{1+k \frac{1}{(1+Tp)^2}} \right]^2 \times$ $\times \left[ \left( \frac{Tp}{1+Tp} \right)^2 - (1+k) \frac{1}{(1+Tp)^2} \right];$ $8(k+1) \left[ \frac{1}{1+k \frac{1}{(1+Tp)^2}} \right]^2 \frac{1}{1+Tp};$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$8(k+1) \frac{1}{(1+Tp)^3} \frac{Tp}{1+Tp};$ $\frac{1}{\left[ 1+k \frac{1}{(1+Tp)^2} \right]^2}$ $4(k+1)^2 \frac{1}{(1+Tp)^3} \frac{1+Tp/2}{1+Tp};$ $\frac{1}{\left[ 1+k \frac{1}{(1+Tp)^2} \right]^2}$

### 2.3. Анализ методических погрешностей аппроксимации корреляционных функций

При аппроксимации корреляционных функций тем или иным аналитическим выражением возникает задача оценки точности приближения. Решить её для самого общего случая при произвольном виде корреляционной функции не представляется возможным. Поэтому наиболее целесообразно определять относительные методические погрешности аппроксимации для конкретных видов корреляционной функции, выбранных моделей [87, 96]:

$$\delta = \frac{\int_0^{\infty} [\rho_x(\tau) - \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 d\tau}{\int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau}. \quad (2.24)$$

Задача имеет простое решение в случае аппроксимации однопараметрических нормированных корреляционных функций исследуемых процессов вида  $\rho_{x1}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$ ,  $\rho_{x2}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau|)$ ,  $\rho_{x3}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 - \lambda|\tau|)$ ,  $\rho_{x4}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau| + \lambda^2\tau^2/3)$ ,  $\rho_{x5}(\tau) = \frac{\sin \Delta\omega_3\tau}{\Delta\omega_3\tau}$  и т.д. [77].

Для этого необходимо: решить систему уравнений (2.15), определить оптимальное значение параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , затем, подставив их в формулу (2.24), найти численное значение  $\delta$ .

Определим оптимальное значение параметра модели  $\rho_{a1}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$   $\alpha$  и погрешность аппроксимации полосового шума с нормированной корреляционной функцией  $\rho_{x5}(\tau) = \frac{\sin \Delta\omega_3\tau}{\Delta\omega_3\tau}$ . Подставив  $\rho_{x5}(\tau)$  и  $h(\tau, \alpha) = 4\alpha^2\tau e^{-\alpha\tau}$  в (2.20), получим:

$$4\alpha^2 \int_0^{\infty} \tau e^{-\alpha\tau} \frac{\sin \Delta\omega_3\tau}{\Delta\omega_3\tau} d\tau - 1 = 0. \quad (2.25)$$

Произведя все необходимые преобразования, определим:

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Delta\omega_3. \quad (2.26)$$

Определим методическую погрешность аппроксимации. Для этого необходимо подставить  $\rho_{x5}(\tau)$  и  $\rho_{a1}(\tau)$  в (2.24) и произвести все необходимые преобразования. Окончательно получим:

$$\delta = 1 - \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Delta\omega_3}{\alpha} + \frac{\Delta\omega_3}{\alpha\pi}. \quad (2.27)$$

С учётом (2.26)  $\delta=0,22$ .

Аналогично определяются оптимальные значения параметров и погрешности аппроксимации в других случаях, результаты расчётов которых представлены в таблице 2.4.

Оптимальные значения параметров и погрешности аппроксимации  
корреляционных функций параметрическими моделями

Таблица 2.4

Вид модели	$\rho_x(\tau)$	Параметр	$\delta$
$e^{-\alpha \tau }$	$e^{-\lambda \tau }$	$\alpha = \lambda$	0
	$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$	$\alpha = 0,467 \lambda$	0,06
	$e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau )$	$\alpha = 2,75 \lambda$	0,16
	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Delta\omega_3$	0,22
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau )$	$e^{-\lambda \tau }$	$\alpha = 2,14 \lambda$	0,06
	$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$	$\alpha = \lambda$	0
	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\alpha = 1,22 \Delta\omega_3$	0,21
$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau )$	$e^{-\lambda \tau }$	$\alpha = 0,365 \lambda$	0,16
	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\alpha = 0,3 \Delta\omega_3$	0,17
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau  + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\alpha = 1,45 \Delta\omega_3$	0,14
$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\alpha = \Delta\omega_3 / 3$ $\omega_0 = \sqrt{2} \Delta\omega_3 / 3$	0,136

При аппроксимации корреляционных функций многопараметрическими моделями задача усложняется, так как приходится решать системы алгебраических уравнений высокого порядка. Для определения оптимальных параметров и методических погрешностей аппроксимации корреляционных функций  $\rho_{x6}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ ,

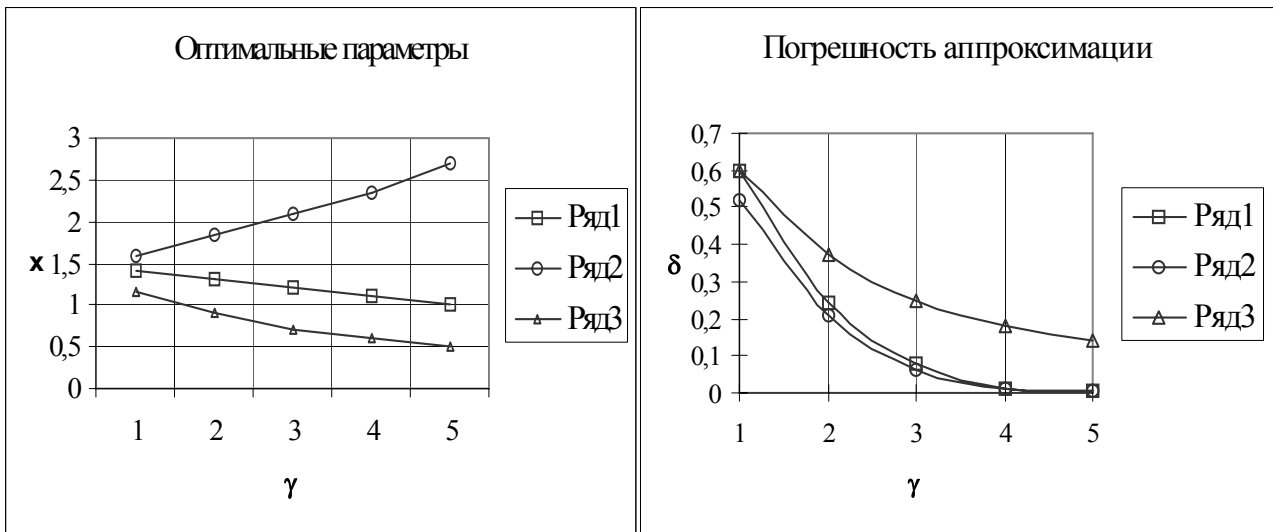
$$\rho_{x7}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right), \quad \rho_{x8}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$$

функцией  $e^{-\alpha|\tau|}$  при различных  $\gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}$  были составлены программы для ЭВМ, и проведен счёт, результаты которого представлены на рис. 2.12 а) - зависи-

мость относительного параметра модели  $x = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} = \varphi(\gamma)$ , рис. 2.12 б)- методи-

ческая погрешность аппроксимации  $\delta = \psi(\gamma)$ . На рис. 2.13 приведены аналогичные результаты для модели  $e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$ . На рис. 2.12 ряд1 отражает результаты расчёта

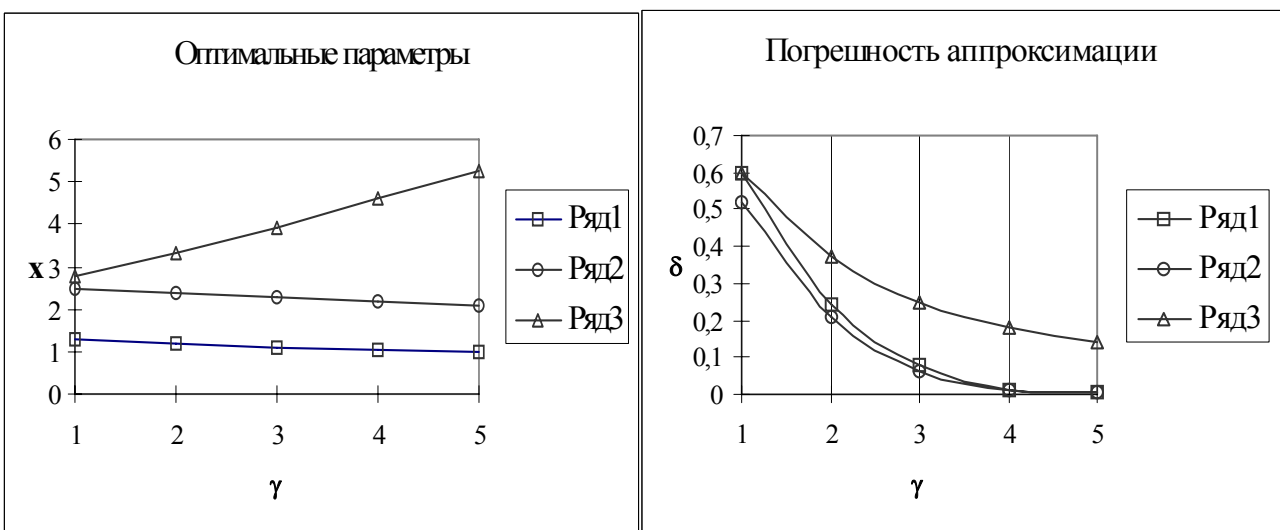
для  $\rho_{x6}(\tau)$ , ряд 2 -  $\rho_{x8}(\tau)$ , ряд 3 -  $\rho_{x7}(\tau)$ . На рис. 2.13 ряд1 -  $\rho_{x7}(\tau)$ , ряд 2 -  $\rho_{x6}(\tau)$ , ряд 3-  $\rho_{x8}(\tau)$ .



а)

б)

Рисунок 2.12.



а)

б)

Рисунок 2.13.

Из анализа графических зависимостей и результатов табл. 2.4 видно, что погрешности аппроксимации существенно зависят от вида модели корреляционной функции исследуемого процесса и соотношения её параметров. При этом, во многих практических случаях возможно с достаточной степенью точности аппроксимировать корреляционную функцию широкополосных случайных процессов функциями вида  $e^{-\alpha|\tau|}$ ,  $e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$ . При аппроксимации корреляционных функций узкополосных процессов необходимо применять более сложные аналитические выражения, например:  $e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ .

## 2.4. Анализ статистических погрешностей аппроксимации корреляционных функций

При построении аппаратуры для аппроксимации корреляционных функций стационарных случайных процессов функциями заданного вида одной из важнейших задач является выбор параметров сглаживающих устройств, обеспечивающих допустимые статистические погрешности.

Выберем в качестве модели однопараметрическую функцию  $\rho_a(\tau, \alpha)$  [51, 87]. Для определения ее параметра необходимо решить уравнение:

$$M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \int_0^{\infty} h(\tau, \alpha) \overset{\circ}{x}(t - \tau) d\tau - \overset{\circ}{x}^2(t) \right] = 0. \quad (2.28)$$

Введем обозначение:

$$y(t) = \overset{\circ}{x}(t) \int_0^{\infty} h(\tau, \alpha) \overset{\circ}{x}(t - \tau) d\tau - \overset{\circ}{x}^2(t). \quad (2.29)$$

В качестве оценки математического ожидания сигнала  $y(t)$  примем сигнал на выходе ФНЧ (см. рис. 2.7) с импульсной характеристикой  $h_1(\tau) = \frac{1}{T_\phi} e^{-\frac{\tau}{T_\phi}}$ , где  $T_\phi$  - постоянная времени фильтра.

Тогда

$$M^*[y(t)] = \int_0^{\infty} h_1(\tau_1) y(t - \tau_1) d\tau_1 = \varphi(\alpha). \quad (2.30)$$

Выражение (2.30) зависит от оцениваемого параметра  $\alpha$ . Учитывая, что полоса пропускания ФНЧ  $\Delta\omega_\phi$  значительно уже эквивалентной ширины спектра мощности сигнала  $\overset{\circ}{x}(t)$   $\Delta\omega_c$  и полосы пропускания фильтра с регулируемыми параметрами  $\Delta\omega_1$ , разложим (2.30) в ряд Тейлора в окрестности оптимального параметра  $\alpha_0$ , ограничившись при этом линейными членами:

$$\varphi(\alpha_0) + \frac{\partial \varphi(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} (\alpha^* - \alpha_0) = 0, \quad (2.31)$$

где  $\alpha^*$  - оценка параметра.

Отсюда

$$\alpha^* = \alpha_0 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \Big|_{\alpha=\alpha_0}. \quad (2.32)$$

Из выражений (2.30), (2.32) видно, что  $\alpha^*$  является случайной величиной. Требования, предъявляемые к оценке  $\alpha^*$ , сводятся к выполнению следующих условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{см} = \frac{M[\alpha^*] - \alpha_0}{\alpha_0} \leq \gamma_{см доп} \\ \gamma_M = \sqrt{\frac{D[\alpha^*]}{\alpha_0^2}} \leq \gamma_{M доп} \end{array} \right., \quad (2.33)$$

где  $\gamma_{\text{см}}$  - погрешность от смещенности оценки;

$\gamma_{\text{м}}$  - методическая статистическая погрешность;

$\gamma_{\text{см доп}}, \gamma_{\text{м доп}}$  - допустимые значения погрешностей.

Разложим (2.32) в ряд Тейлора по  $\varphi(\alpha_0)$  и  $\varphi'(\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}$  в окрестностях  $M[\varphi(\alpha_0)]$  и  $M[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}$ , ограничившись линейными членами. С учётом (2.28) и (2.30), получим;

$$\alpha^* = \alpha_0 - \frac{\varphi(\alpha)}{M[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}}. \quad (2.34)$$

Для определения методических статистических погрешностей  $\gamma_{\text{м}}$  необходимо найти дисперсию оценки  $\alpha^*$ :

$$D[\alpha^*] = \frac{M[\varphi^2(\alpha)]}{M^2[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}}. \quad (2.35)$$

С учётом (2.29) и (2.30) числитель в выражении (2.35) равен:

$$\begin{aligned} M[\varphi^2(\alpha_0)] = & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau, \alpha) h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) h(\tau_3, \alpha) M \left[ \begin{array}{c} \dot{x}(t - \tau_1) \dot{x}(t - \tau - \tau_1) \times \\ \dot{x}(t - \tau_2) \dot{x}(t - \tau_3 - \tau_2) \end{array} \right] dt d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 - 2\sigma_x^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_1(\tau_1) h(\tau, \alpha) \times \\ & \times M \left[ \begin{array}{c} \dot{x}(t - \tau_1) \dot{x}(t - \tau - \tau_1) \end{array} \right] d\tau d\tau_1 + \sigma_x^4. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Для определения  $M[\varphi^2(\alpha_0)]$  необходимо найти центральный момент четвертого порядка  $M \left[ \begin{array}{c} \dot{x}(t - \tau_1) \dot{x}(t - \tau - \tau_1) \dot{x}(t - \tau_2) \dot{x}(t - \tau_3 - \tau_2) \end{array} \right]$ . Решим эту задачу для нормальных случайных процессов. В этом случае следующая связь центрального момента четвертого порядка с моментами второго порядка [82]:

$$\begin{aligned} M \left[ \begin{array}{c} \dot{x}(t - \tau_1) \dot{x}(t - \tau - \tau_1) \dot{x}(t - \tau_2) \dot{x}(t - \tau_3 - \tau_2) \end{array} \right] = & \sigma_x^4 [\rho_x(\tau_2 - \tau_1) \rho_x(\tau_3 + \tau_2 - \tau - \tau_1) + \\ & \rho_x(\tau_3 + \tau_2 - \tau_1) \rho_x(\tau_2 - \tau - \tau_1) + \rho_x(\tau) \rho_x(\tau_3)] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Подставив (2.37) в (2.36) и произведя ряд преобразований, получим:

$$\begin{aligned} M[\varphi^2(\alpha_0)] = & \sigma_x^4 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{хн}}(\omega_1) S_{\text{хн}}(\omega) |W_1[j(\omega + \omega_1)]|^2 |W(j\omega)|^2 d\omega d\omega_1 + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{хн}}(\omega_1) S_{\text{хн}}(\omega) |W_1[j(\omega + \omega_1)]|^2 W(-j\omega_1) W(j\omega) d\omega d\omega_1 \right\} \quad (2.38) \end{aligned}$$



где  $S_{xH}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$  - нормированная спектральная плотность мощности

процесса  $\overset{\circ}{x}(t)$ ;

$W(j\omega)$  - частотная характеристика фильтра с регулируемыми параметрами;

$W_1(j\omega)$  - частотная характеристика ФНЧ.

Приняв во внимание, что  $\Delta\omega_c \gg \Delta\omega_\phi$ , выражение (2.38) преобразуем к виду:

$$M[\varphi^2(\alpha_0)] \leq 4\sigma_x^4 \Delta\omega_\phi \int_{-\infty}^{\infty} S_{xH}^2(\omega) |W(j\omega)|^2 d\omega. \quad (2.39)$$

Для упрощения расчетов возможно указать несколько оценок сверху выражения (2.39).

1 оценка сверху:

$$M[\varphi^2(\alpha_0)] \leq 26\sigma_x^4 \frac{\Delta\omega_\phi \Delta\omega_1}{\Delta\omega_{c2}^2} |W(j\omega)|_{\max}^2, \quad (2.40)$$

где  $\Delta\omega_{c2} = \frac{\int_0^\infty S_{xH}(\omega) d\omega}{S_{xH}(\omega)_{\max}}$  - эквивалентная ширина спектра мощности сигнала  $\overset{\circ}{x}(t)$ .

2 оценка сверху:

$$M[\varphi^2(\alpha_0)] \leq 2\sigma_x^4 \frac{\Delta\omega_\phi \Delta\omega_{c4}}{\Delta\omega_{c2}^2} |W(j\omega)|_{\max}^2, \quad (2.41)$$

где  $\Delta\omega_{c4} = \frac{\int_0^\infty S_{xH}^2(\omega) d\omega}{S_{xH}^2(\omega)_{\max}}$  - эквивалентная ширина спектра мощности сигнала  $\overset{\circ}{x}(t)$ .

Знаменатель в (2.35) равен:

$$M^2[\varphi'(\alpha)]_{|\alpha=\alpha_0} = \left[ \sigma_x^2 \int_0^\infty \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \rho_x(\tau) d\tau \right]_{|\alpha=\alpha_0}^2. \quad (2.42)$$

Таким образом, первая оценка сверху выражения (2.35) меньше или равна:

$$D_1[\alpha^*] \leq \frac{2\Delta\omega_\phi \Delta\omega_1 |W(j\omega)|_{\max}^2}{\Delta\omega_{c2}^2 \left[ \int_0^\infty \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \rho_x(\tau) d\tau \right]_{|\alpha=\alpha_0}^2}. \quad (2.43)$$

Вторая оценка сверху:

$$D_2[\alpha^*] \leq \frac{2\Delta\omega_\phi \Delta\omega_{c4} |W(j\omega)|_{\max}^2}{\Delta\omega_{c2}^2 \left[ \int_0^\infty \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \rho_x(\tau) d\tau \right]_{|\alpha=\alpha_0}^2}. \quad (2.44)$$

Учитывая соотношения неопределенности [96]:

$$\tau_k^{(4)} \frac{\Delta\omega_{c2}^2}{\Delta\omega_{c4}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \text{ и } \Delta\omega_1 T_\Phi = \frac{\pi}{2}, \quad (2.45)$$

можно показать, что 1 оценка сверху  $D_1[\alpha^*]$  является более завышенной  $D_1[\alpha^*] = \frac{\pi}{2} D_2[\alpha^*]$ . Поэтому, для определения  $\gamma_m$  целесообразнее воспользоваться второй оценкой сверху  $D_2[\alpha^*]$ .

Тогда

$$\gamma_{m2} = \sqrt{\frac{D_2[\alpha^*]}{\alpha_0^2}} \leq C_1 \sqrt{\frac{\tau_k^{(4)}}{T_\Phi}}, \quad (2.46)$$

где

$$C_1 = \frac{2|W(j\omega)|_{\max}}{\sqrt[4]{\frac{\pi}{4} \alpha_0 \int_0^\infty \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \rho_x(\tau) d\tau}} \Big|_{\alpha=\alpha_0}. \quad (2.47)$$

Величина  $C_1$ , для разных видов  $\rho_x(\tau)$  и соотношений их параметров  $\gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}}$ , представлена в таблице 2.5. Из формулы (2.46) и результатов таблицы 2.5 видно, что методические статистические погрешности зависят как от вида  $\rho_x(\tau)$  и  $\gamma$ , так и от отношения  $\frac{\tau_{k4}}{T_\Phi}$ .

При определении погрешности от смещенности по формуле (2.34) оценка получается несмещенной. Разложив (2.34) в ряд Тейлора по  $\varphi(\alpha_0)$  и  $\varphi'(\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}$  в окрестностях  $M[\varphi(\alpha_0)]$  и  $M[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}$ , ограничившись квадратичными членами, получим:

$$\alpha^* = \alpha_0 - \frac{\varphi(\alpha_0)}{M[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}} + \frac{\varphi(\alpha_0) \varphi'(\alpha)}{M^2[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}}. \quad (2.48)$$

Погрешность от смещенности, в соответствии с (2.33), будет равна:

$$\gamma_{см} \approx \frac{M[\varphi(\alpha_0) \varphi'(\alpha)]}{M^2[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0} \alpha_0}. \quad (2.49)$$

С учётом допущений, принятых при выводе формул (2.43)-(2.45) и выражения (2.42), погрешность от смещенности приведем к виду:

$$\gamma_{см} \leq C_2 \frac{\tau_{k4}}{\tau_k^{(4)}}, \quad (2.50)$$

где

$$C_2 = \frac{\operatorname{Re}[W(j\omega)]_{\max} \operatorname{Re}[W_2(j\omega)]_{\max}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha_0 \left[ \int_0^{\infty} \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \rho_x(\tau) d\tau \right]^2}_{|\alpha=\alpha_0}, \quad (2.51)$$

а

$$W_2(j\omega) = \int_0^{\infty} \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.52)$$

В таблице 2.5 приведены численные значения  $C_2$  для различных  $\rho_x(\tau)$  и  $\gamma$ . Из анализа выражений (2.50), (2.51) и результатов представленных в таблице 2.5, видно, что погрешность от смещенности, как и методическая, зависит от вида  $\rho_x(\tau)$ ,  $\gamma$  и отношения  $\frac{\tau_{k4}}{T_\phi}$ , но выбором постоянной времени ФНЧ всегда возможно обеспечить допустимые статистические погрешности.

#### К анализу статистических погрешностей

Таблица 2.5

$\rho_a(\tau, \alpha)$	$\rho_x(\tau)$	$\gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}$	$C_1$	$C_2$
$e^{-\alpha \tau }$	$e^{-\lambda \tau }$		7,2	2,45
	$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	0	2,4	0,28
		0,25	3,2	0,5
		0,5	4,2	0,8
		0,75	6,2	1,8
		1	7,2	2,45
	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$		4,8	1,1
$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$e^{-\lambda \tau }$		6	2,8
	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$		1,2	0,11

## 2.5 Влияние неточности оценки параметров модели на погрешность аппроксимации корреляционных функций

Минимальное значение погрешности аппроксимации, определяемое по формуле (2.14), будет достигнуто тогда, когда все элементы аппаратуры идеальны, а параметры модели определены оптимально [87]. В реальных же условиях оценка параметров модели сопровождается аппаратурными погрешностями, которые, в конечном счете, приводят к увеличению методических погрешностей аппроксимации. В связи с этим необходимо оценить влияние неточности определения параметров аппроксимирующей функции на погрешность аппроксимации.

Для этого разложим (2.14) в ряд Тейлора в окрестностях оптимальных параметров  $\alpha_{i0}$ . Так как при аппроксимации нормированной корреляционной функции требуется, в основном, определять два параметра:  $\alpha$  - показатель затухания и  $\omega_0$  - частоту колебания корреляционной функции, то, не снижая общности рассуждения, разложим (2.14) в ряд Тейлора по двум параметрам, ограничившись квадратичными членами:

$$\begin{aligned} \Delta = \Delta(\alpha_0 + \omega_0) + \frac{\partial \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \alpha} (\alpha - \alpha_0) + \frac{\partial \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \omega} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \alpha^2} (\alpha - \alpha_0)^2 + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \omega^2} (\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} (\alpha - \alpha_0)(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (2.53)$$

После нахождения производных в выражении (2.53), необходимо в них подставить  $\alpha = \alpha_0$  и  $\omega = \omega_0$ . Учитывая выражения (2.15),

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \omega} = 0 \end{cases},$$

а  $\Delta(\alpha_0, \omega_0) = \Delta_{\min}$ .

Подставив в (2.53) выражение (2.14) и произведя ряд промежуточных преобразований, получим:

$$\begin{aligned} \Delta - \Delta_{\min} = (\alpha - \alpha_0)^2 \left\{ \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha} \right]^2 d\tau + \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha^2} d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha^2} d\tau \right\} + (\omega - \omega_0)^2 \left\{ \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha} \right]^2 d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \omega^2} d\tau - \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \omega^2} d\tau \right\} + \\ + (\alpha - \alpha_0)(\omega - \omega_0) \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau + \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau \right\} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Найдем относительное изменение погрешности аппроксимации от неточности оценки параметров:

$$\gamma^* = \frac{\Delta - \Delta_{\min}}{\Delta_{\min}} = \frac{\Delta - \Delta_{\min}}{\tau_k^{(4)} \delta}. \quad (2.55)$$

где  $\delta$  - относительная методическая погрешность аппроксимации.

С учётом (2.55) выражение (2.54) примет вид:

$$\begin{aligned} \gamma^* = \frac{1}{\tau_k^{(4)}} \left\{ \alpha_0^2 \left( \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)^2 \left\{ \int_0^\infty \left[ \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha} \right]^2 d\tau + \int_0^\infty \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha^2} d\tau - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^\infty \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha^2} d\tau \right\} + \omega_0^2 \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2 \left\{ \int_0^\infty \left[ \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha} \right]^2 d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^\infty \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \omega^2} d\tau - \int_0^\infty \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \omega^2} d\tau \right\} + \right. \\ \left. + \alpha_0 \omega_0 \left( \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right) \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right) \left\{ \int_0^\infty \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau + \int_0^\infty \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^\infty \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Методическая погрешность аппроксимации в этом случае равна:

$$\delta^* = \delta(1 + \gamma^*). \quad (2.57)$$

Исследования, проведенные в [87], показали, что неточность определения параметров аппроксимирующего выражения в 10 - 20 % незначительно увеличивает погрешность аппроксимации. Причём, чем больше погрешность аппроксимации, тем менее чувствительна она к неточности оценки параметров и наоборот. Это обстоятельство, в свою очередь, снижает требования к аппаратуре.

Так, например, при аппроксимации нормированной корреляционной функции  $\rho_x(\tau) \frac{\sin \Delta \omega_3 \tau}{\Delta \omega_3 \tau}$  моделью  $\rho_a(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

$$\gamma^* = 1,07 \left( \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)^2 + 4,80 \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2 + 0,52 \left( \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right) \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right). \quad (2.58)$$

Из полученного выражения видно, что неточность оценки частоты колебания корреляционной функции больше влияет на увеличение методической погрешности аппроксимации и, следовательно, её необходимо точнее оценивать.

## 2.6. Принципы построения основных блоков коррелометров с аппроксимацией

Выбор основных блоков коррелятора с аппроксимацией зависит от предъявляемых к нему требований. Требования простоты аппаратурной реализации и работы в реальном масштабе времени приводят к разработке специализированных аналоговых или аналого-цифровых вычислительных устройств [87], решающих систему уравнений (2.20).

Основными блоками коррелятора с аппроксимацией являются фильтры с регулируемыми параметрами, множительные, вычитающие устройства, центрирующий и усредняющий фильтры.

Как показано в [50], задача создания устройств для аппроксимации корреляционных функций заданного вида сводится, в основном, к синтезу фильтров с регулируемыми параметрами с импульсными характеристиками  $h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  (2.19), полностью определяемыми выбранным аналитическим выражением. Предъявляемые к ним требования заключаются в минимуме регулируемых элементов, простоте технической реализации, использовании типовых элементов и блоков. Из таблицы 2.3 видно, что фильтры с регулируемыми параметрами состоят из более простых фильтров с передаточными функциями:

$$W_1(p) = \frac{1}{1 + Tp}; \quad W_2(p) = \frac{Tp}{1 + Tp}; \quad W_3(p) = \frac{Tp/2}{1 + Tp}, \quad (2.59)$$

где  $\alpha = 1/T$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k}/T$ ,

и усилителей с постоянными и переменными коэффициентами усиления.

Фильтры легко могут быть реализованы базе RC-цепей в сочетании с операционными усилителями в интегральном исполнении, охваченными отрицательной обратной связью.

При построении коррелометров с аппроксимацией двухпараметрическими моделями  $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ ,  $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$  требуется синтезировать фильтры

с импульсными характеристиками вида:

$$\begin{cases} h_1(\tau) = h(\tau) \cos \omega_0 \tau \\ h_2(\tau) = h(\tau) \sin \omega_0 \tau \end{cases}, \quad (2.60)$$

где  $h(\tau)$ - импульсная характеристика физически реализуемого фильтра.

Исследования показали, что фильтры с импульсными характеристиками (2.60) могут быть синтезированы следующим образом (см. рис. 2.14).

Рассмотрим подробнее схему, представленную на рис. 2.14 а). Выходные сигналы с выходов фильтров с импульсной характеристикой  $h(\tau)$  в установившемся режиме будут равны:

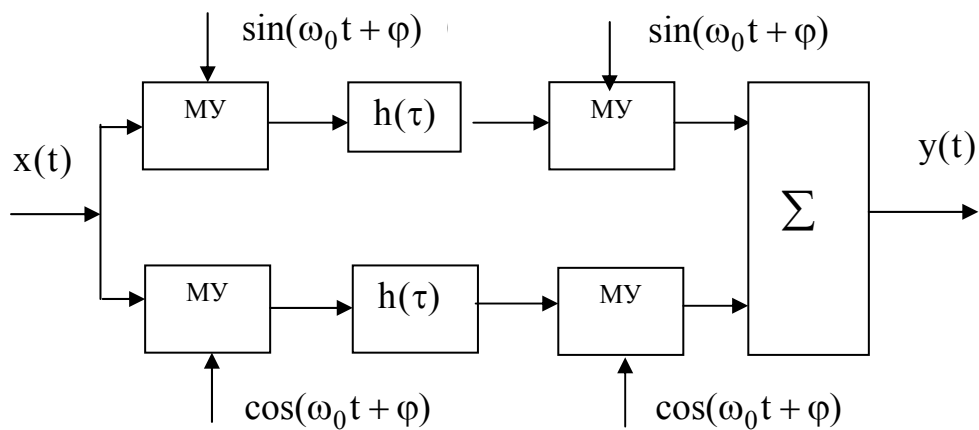
$$\begin{cases} y_1(t) = \int_0^{\infty} x(t-\tau) \sin[\omega_0(t-\tau) + \varphi] \sin(\omega_0 t + \varphi) h(\tau) d\tau; \\ y_2(t) = \int_0^{\infty} x(t-\tau) \cos[\omega_0(t-\tau) + \varphi] \cos(\omega_0 t + \varphi) h(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (2.61)$$

Сигнал на выходе сумматора

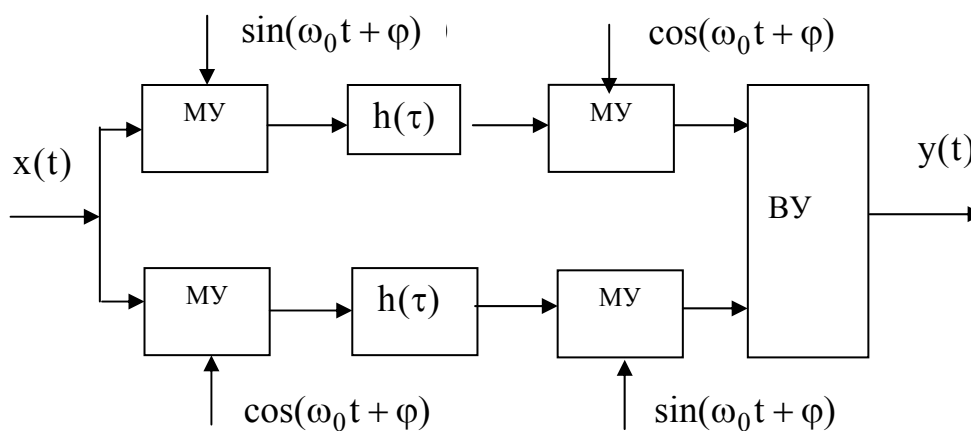
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cos \omega_0 \tau x(t-\tau) d\tau$$

в установившемся режиме описывает процесс на выходе линейного звена с импульсной характеристикой  $h_1(\tau) = h(\tau) \cos \omega_0 \tau$ .

Аналогично можно показать, что импульсная характеристика фильтра (см. рис. 2.14 б)) равна выражению  $h_2(\tau) = h(\tau) \sin \omega_0 \tau$ .



a)



б)

Рисунок 2.14. Фильтры с регулируемыми параметрами

Определив требования, предъявляемые к фильтрам с регулируемыми параметрами, рассмотрим остальные элементы.

Для центрирования процесса и получения интересующих оценок необходимы центрирующий фильтр, например, с передаточной функцией  $W_{\text{ц}}(p) = \frac{T_{\text{ц}} p}{1 + T_{\text{ц}} p}$  и

сглаживающий фильтр, например, фильтр нижних частот с  $W_{\text{ф}}(p) = \frac{T_{\text{ф}} p}{1 + T_{\text{ф}} p}$ . Вопро-

сы построения этих фильтров, расчёт их параметров для обеспечения допустимых аппаратных и статистических погрешностей рассматриваются в [87]. Блок-схемы центрирующего фильтра и фильтра нижних частот аналогичны блок-схемам фильтров с регулируемыми параметрами. Единственное отличие заключается в том, что постоянные времени  $T_{\text{ц}} \gg \tau_k$ ,  $T_{\text{ф}} \gg \tau_k$  [87].

В качестве вычитающих устройств, усилителей с постоянными и переменными коэффициентами усиления также возможно применение операционных усилителей в интегральном исполнении [87].

Таким образом, все блоки коррелометра, кроме множительного устройства, могут быть выполнены на одной элементной базе - операционных усилителях в инте-

гральном исполнении. От выбора множительного устройства существенным образом зависит частотный диапазон исследуемых сигналов, точность и простота технической реализации аппаратуры. Вопросам теории, расчёта множительных устройств и их применения для корреляционных измерений посвящен целый ряд работ. При этом, как правило, предпочтение отдается косвенным методам умножения, наиболее распространенным из которых является четырехкватратный метод [102]. Это объясняется тем, что, во-первых, получаемая точность умножения удовлетворяет требованиям корреляционных измерений, а во-вторых, множительные устройства такого типа выпускаются промышленностью и входят в состав аналоговых моделирующих установок.

Заметим, что при решении системы уравнений (2.21) при помощи аппаратуры необходимо индексировать равенство нулю корреляционных моментов [48]:

$$M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}_i(t) \right] = 0, \quad (2.63)$$

где

$$y_i(t) = \int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{\circ}{x}(t - \tau) - \overset{\circ}{x}(t). \quad (2.64)$$

Т. е. необходимо такое устройство, выходной сигнал которого был бы отличен от нуля при  $M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}_i(t) \right] \neq 0$  и равнялся бы нулю при  $M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}_i(t) \right] = 0$ .

В общем виде блок-схема такого устройства должна включать в себя функциональный преобразователь с функцией преобразования  $\psi \left( \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}_i \right)$  и фильтр нижних частот. Выходной сигнал фильтра нижних частот является оценкой математического ожидания сигнала  $z(t)$ :

$$\overset{\circ}{m}_z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x - m_x, y_i - m_{y_i}) f(x, y_i) dx dy_i = \gamma(K_{xy}). \quad (2.65)$$

Как видно из (2.65), вид функции  $\gamma(K_{xy})$  зависит от типа функционального преобразователя и от вида совместной плотности распределения вероятностей  $f(x, y_i)$ .

Таким образом, для выполнения условия (2.63) необходимо, чтобы

$$\gamma(K_{xy}) = \begin{cases} 0, & \text{если } K_{xy} = 0; \\ c, & \text{если } K_{xy} \neq 0, \end{cases} \quad (2.66)$$

где  $c$  - произвольная отличная от нуля величина.

Самый простой вид функции  $\psi \left( \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}_i \right)$  может быть реализован множительным устройством. В этом случае условие (2.63) выполняется автоматически, независимо от вида  $f(x, y_i)$ . Но так как построение точного множительного устройства, особенно для достаточно широкого диапазона частот, представляет весьма сложную задачу, основное внимание сосредоточим на сравнительном анализе таких функциональных преобразователей, которые применяются для косвенных методов оценки корреляци-



онной функции. При этом необходимо иметь в виду, что в рассматриваемом случае абсолютно не важен вид  $\gamma(K_{xy})$ , как в корреляционном анализе [80], а важно лишь выполнение условия (2.63). Последняя оговорка существенна, т.к. расширяет класс функций  $\psi\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}_i\right)$  и устройств, которые могут быть применены для этих целей.

Рассмотрим функцию  $\psi\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right) = \text{sign } \overset{\circ}{x} \text{ sign } \overset{\circ}{y}$ , широко используемую при полярном методе анализа корреляционной функции [80]. В этом случае

$$\gamma(K_{xy}) = M\left[\text{sign } \overset{\circ}{x} \text{ sign } \overset{\circ}{y}\right]. \quad (2.67)$$

Подставляя в (2.67) значения

$$\text{sign } \overset{\circ}{x} = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ju_1 \overset{\circ}{x}) \frac{du_1}{u_1} \text{ и } \text{sign } \overset{\circ}{y} = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ju_2 \overset{\circ}{x}) \frac{du_2}{u_2}$$

и разлагая функции  $\exp(ju_1 \overset{\circ}{x})$  по  $u_1$ , а  $\exp(ju_2 \overset{\circ}{x})$  по  $u_2$  в ряд Маклорена, получим:

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j^{k+m}}{k! m!} M\left[\overset{\circ}{x}^k \overset{\circ}{y}^m\right] \beta_{k-1} \beta_{m-1}, \quad (2.68)$$

где

$$\begin{cases} \beta_{k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} u_1^{k-1} du_1 \\ \beta_{m-1} = \int_{-\infty}^{\infty} u_2^{m-1} du_2 \end{cases}. \quad (2.69)$$

Учитывая, что для чётных  $k$  и  $m$ ,  $\beta_{k-1} = \beta_{m-1} = 0$ , выражение (2.68) можно переписать следующим образом:

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{(2k+1)! (2m+1)!} \beta_{2k} \beta_{2m} M\left[\overset{\circ}{x}^{2k+1} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right]. \quad (2.70)$$

Из формулы (2.70) видно, что условие (2.63) будет выполнено, если  $M\left[\overset{\circ}{x}^{2k+1} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right] = 0$  при  $M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}\right] = 0$ . Это требование выполняется, например, если совместная плотность распределения вероятностей симметрична [48]. При этом,

$M\left[\text{sign } \overset{\circ}{x} \text{ sign } \overset{\circ}{y}\right] = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{xy}$  не зависит от дисперсии входных сигналов  $\sigma_x^2$  и  $\sigma_y^2$ .

Это обстоятельство особенно важно при построении автоматических коррелометров с аппроксимацией, так как в этом случае отпадает необходимость нормирования исследуемого процесса по среднеквадратическому отклонению.

Определим, при каких ограничениях, накладываемых на исследуемый процесс, будет выполняться условие (2.63), если в качестве функционального преобразователя применить преобразователь с

$$\psi\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right) = \left| \overset{\circ}{x+y} \right| - \left| \overset{\circ}{x-y} \right| = \left(\overset{\circ}{x+y}\right) \text{sign}\left(\overset{\circ}{x+y}\right) - \left(\overset{\circ}{x-y}\right) \text{sign}\left(\overset{\circ}{x-y}\right), \quad (2.71)$$

используемый при анализе корреляционной функций нормальных случайных процессов [70]. Для рассматриваемого функционального преобразователя

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} M\left[\left(\overset{\circ}{x+y}\right) \exp\left[ju\left(\overset{\circ}{x+y}\right)\right]\right] \frac{du}{u} - \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} M\left[\left(\overset{\circ}{x+y}\right) \exp\left[ju\left(\overset{\circ}{x+y}\right)\right]\right] \frac{du}{u}. \quad (2.72)$$

Поступим, как в первом случае и введем прежние обозначения. Тогда выражение (2.72) примет вид:

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \beta_{2k} C_{2(k+1)}^{2m+1} M\left[\overset{\circ}{x}^{2(k-m)} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right], \text{ а условие (2.63) бу-}$$

дет выполнено, как и в предыдущем случае, если

$$M\left[\overset{\circ}{x}^{2(k-m)} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right] = 0 \text{ при } M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}\right] = 0. \quad (2.73)$$

Для другой важной функции  $\psi\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right) = \overset{\circ}{x} \text{sign} \overset{\circ}{y}$ , применяемой при релейном методе оценки корреляционной функции [70], можно показать, что

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \beta_{2m} M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right], \quad (2.74)$$

а условие (2.63) будет выполнено, если

$$M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right] = 0 \text{ при } M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}\right] = 0. \quad (2.75)$$

Сопоставляя критерий (2.75) с критериями (2.63) и (2.70), можно отметить, что условие (2.75) менее жесткое. Т.е. возможности применения функционального преоб-

разователя с  $\psi\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right) = \overset{\circ}{x} \text{sign} \overset{\circ}{y}$  для индикации равенства нулю корреляционного момента более реальны.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть  $\overset{\circ}{x}(t) = A \sin \omega t$ , а  $\overset{\circ}{y}(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

В этом случае  $\gamma(K_{xy}) = \frac{2}{\pi} \cos \varphi$ , т.е. пропорциональна корреляционному моменту.

2. Если совместный закон распределения  $\overset{\circ}{x}$  и  $\overset{\circ}{y}$  нормальный, то

$$\gamma(K_{xy}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_x \rho_{xy}, \quad (2.76)$$

где  $\rho_{xy} = \frac{M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}\right]}{\sigma_x \sigma_y}$  – коэффициент корреляции.

3. Совместное распределение случайных процессов  $\overset{\circ}{x}$  и  $\overset{\circ}{y}$  описывается характеристической функцией:

$$\varphi(u_1, u_2) = \frac{\exp(-iu_1\sigma_x/\sqrt{2})\exp(-iu_2\sigma_y/\sqrt{2})}{\sqrt{(1-i\sqrt{2}\sigma_x u_1)(1-i\sqrt{2}\sigma_y u_2) + 2\sigma_x\sigma_y\rho_{xy}u_1u_2}}. \quad (2.77)$$

Такой закон распределения имеет квадрат нормального случайного процесса. В этом случае

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{\sigma_x}{\pi\sqrt{2}}\rho_{xy} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jx/2}}{(1-jx)^{3/2}} dx, \quad (2.78)$$

т.е. прямопропорциональна  $\rho_{xy}$ .

4. совместная характеристическая функция случайных процессов  $\overset{\circ}{x}$  и  $\overset{\circ}{y}$  равна:

$$\varphi(u_1, u_2) = \exp \left[ -\frac{1}{2}\sigma_x^2(u_1^2 + 2\rho_{xy}u_1u_2 + u_2^2) - \frac{1}{6}i\sigma_x^3K_a(u_1^3 + 3\rho_{xy}u_1^2u_2 + 3\rho_{xy}u_1u_2^2 + u_2^3) + \frac{1}{24}K_\varepsilon(u_1^4 + 4\rho_{xy}u_1^3u_2 + 6\rho_{xy}u_1^2u_2^2 + 4\rho_{xy}u_1u_2^3 + u_2^4) \right], \quad (2.79)$$

где  $K_a$  - коэффициент асимметрии,  $K_\varepsilon$  - коэффициент эксцесса.

Представим  $\gamma(K_{xy})$  в виде:

$$\gamma(K_{xy}) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\varphi(u_1, u_2)}{\partial u_1} \Big|_{u_1=0} du_2. \quad (2.80)$$

Подставляя в (2.80) выражения для характеристической функции, получим:

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{\sigma_x}{\pi}\rho_{xy} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + iK_a x/2 - K_\varepsilon x^2/6) \exp(-x^2/2 - iK_a x^3/6 + K_\varepsilon x^4/24) dx. \quad (2.81)$$

И снова наблюдается прямопропорциональность от  $\rho_{xy}$ .

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод о том, что применение любого из рассмотренных функциональных преобразователей для построения коррелометров с аппроксимацией функциями заданного вида при определенных ограничениях, накладываемых на исследуемый процесс, позволит упростить схему коррелометра, расширить его частотный диапазон. При этом наиболее предпочтителен функциональный преобразователь последнего типа.

### 3. АППАРАТУРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА

#### 3.1. Основные понятия и определения

Одной из сложных задач, которую приходится решать при аппроксимации корреляционных функций, является выбор модели корреляционной функции. Решение этой задачи осуществляется на основе априорной информации о свойствах исследуемого процесса. В тех случаях, когда этих данных недостаточно, как подсказывает практика, наиболее целесообразно применять разложение корреляционной функции в ряд по той или иной системе ортогональных функций. Впервые этот метод предложил Д. Лампард [111]. Математическим обоснованием этого метода является теорема Мерсера [79], согласно которой симметричная и положительно определенная функция, которой и является функция корреляции, может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд вида:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_k(\tau), \quad (3.1)$$

где  $\beta_k$  - коэффициенты Фурье;

$\psi_k(\tau)$  - семейство базисных функций, ортонормированных в интервале  $(0, \infty)$  с весом  $\mu(\tau)$ .

Это семейство характеризуется интегралом:

$$\int_0^{\infty} \mu(\tau) \psi_m(\tau) \psi_n(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq n; \\ 1, & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (3.2)$$

Так как ряд сходится в интервале  $(0, \infty)$ , то коэффициенты разложения  $\beta_k$  в соответствии с [111] определяются выражением:

$$\beta_k = \int_0^{\infty} K_x(\tau) \psi_k(\tau) \mu(\tau) d\tau. \quad (3.3)$$

В качестве системы базисных функций применяются ортогональные функции Лагерра, Дирихле, Лежандра, Хаара, Уолша и т. д. Выбор системы базисных функций зависит, в основном, от возможности представления корреляционной функции минимальным числом членов разложения для типовых моделей, удобством в работе.

Одной из распространенных систем ортогональных функций, широко применяемых в аппроксимативном корреляционном анализе, являются ортогональные функции Лагерра, определяемые выражением (см. приложение П.13):

$$L_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\alpha\tau/2}. \quad (3.4)$$

Ортогональные функции Лагерра удовлетворяют следующему свойству:

$$\int_0^{\infty} L_k(\tau, \alpha) L_n(\tau, \alpha) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{если } k = n. \end{cases} \quad (3.5)$$

Следует подчеркнуть, что на практике приходится ограничиваться конечным числом ряда (3.1). Это приводит к появлению методической погрешности, значение которой зависит как от свойств процесса, так и способа оценки параметров модели.

Тогда для модели корреляционной функции

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha), \quad (3.6)$$

имеющей ограниченное число параметров, коэффициенты разложения, обеспечивающие минимум квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[ K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \min, \quad (3.7)$$

определяются формулой:

$$\beta_k = \alpha \int_0^{\infty} K_x(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (3.8)$$

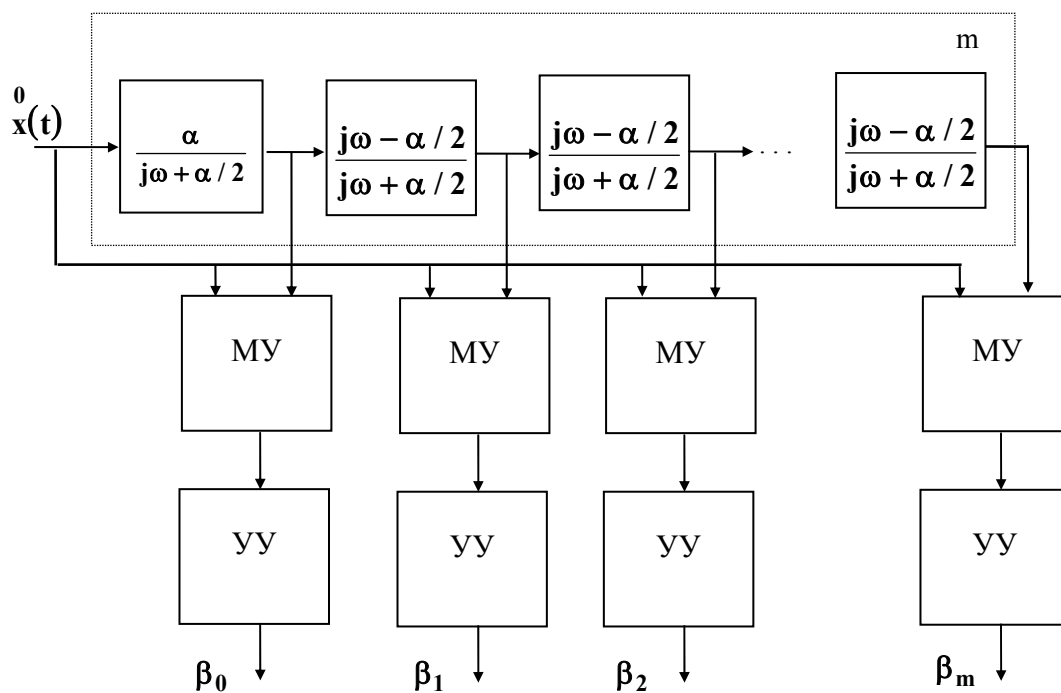


Рисунок 3.1. Коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра

Выражения для оценки коэффициентов разложения  $\beta_k$  для типовых моделей нормированных функций приведены в таблице 3.1.

При таком способе определения коэффициентов разложения погрешность аппроксимации, с учетом свойств ортогональных функций Лагерра, равна:

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (3.9)$$

Из результатов, представленных в таблице 3.1, и выражений (3.8) и (3.9) видно, что значения погрешности аппроксимации  $\Delta$  и коэффициентов разложения  $\beta_k$  зависят от численного значения параметра  $\alpha$ .

Как показали исследования, относительная погрешность аппроксимации

Коэффициенты разложения  $\beta_k$  для типовых моделей

Таблица 3.1

№	$\rho_x(\tau)$	$\beta_k$
1	$e^{-\lambda \tau }$	$\frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^k$
2	$e^{-\alpha \tau } (1 + \lambda \tau )$	$\frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^{k-1} \left\{ \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \times \frac{2\lambda + \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} - \frac{k\alpha\lambda}{(\lambda + \alpha/2)^2} \right\}$
3	$e^{-\lambda \tau } (1 - \lambda \tau )$	$\frac{\alpha^2 / 2}{(\lambda + \alpha/2)^2} \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^{k-1} \left[ \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right) + \frac{2k\lambda}{(\lambda + \alpha/2)} \right]$
4	$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \right)^k + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \right)^k$
5	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$\frac{\alpha}{2j\omega_0} \left\{ \frac{\lambda + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \right)^k + \frac{\lambda - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \right)^k \right\}$
6	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$\frac{\alpha}{2j\omega_0} \left\{ \frac{\lambda + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \right)^k + \frac{\lambda - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \right)^k \right\}$

$$\delta = \frac{\Delta}{\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau} \quad (3.10)$$

зависит от величины этого параметра, вида корреляционной функции и её показателя колебательности  $\mu$ , числа членов разложения ряда  $m$ . На рис. 3.2 приведены результаты определения погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции вида  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  моделью (3.6) при  $m=2$  в зависимости от отношения параметра функций Лагерра к показателю затухания исследуемых корреляционных функций -  $\chi = \alpha/\lambda$ . На рисунке 3.2 ряду 1 соответствуют значения погрешности при  $\omega_0/\lambda = 5$ , ряду 2 - 4, ряду 3 - 3.

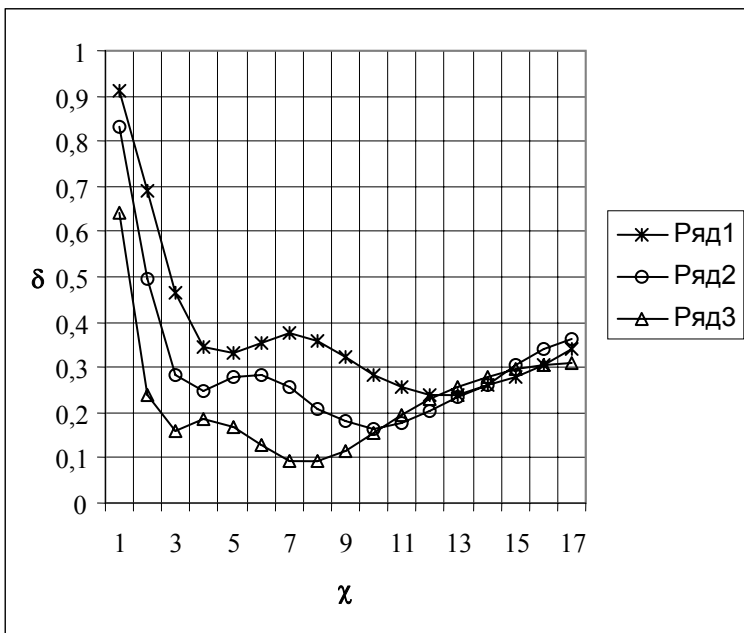


Рисунок 3.2. Методическая погрешность

Отсюда видно, что при выбранной модели корреляционной функции,  $\mu = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ , погрешность существенно образом зависит от  $\chi$ , т.е.  $\alpha$ . Кроме того, наблюдаются локальные экстремумы погрешности, количество которых зависит от  $m$  [87]. Следует отметить, что исследователя интересует значение параметра  $\alpha$ , обеспечивающего минимальную погрешность аппроксимации, т.е. определение глобального минимума.

Для решения этой задачи требуется априорная информация о корреляционных (спектральных) свойствах исследуемого процесса. Это либо сведения о

его граничной частоте  $\omega_b$ , либо о его корреляционной функции.

В первом случае величина параметра  $\alpha$  определяется из соотношения [56]:

$$\alpha = 1 - 4 \omega_b. \quad (3.11)$$

Этот способ, не требуя дополнительных затрат, существенно увеличивает время анализа, так как при этом необходимо многократно определять корреляционную функцию. Кроме того, он не позволяет минимизировать погрешность аппроксимации.

Следующей попыткой явилось решение частной задачи определения величины  $\alpha$ , минимизирующей погрешность равномерного приближения [96]

$$\delta = \left| K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha) \right| = \min. \quad (3.12)$$

Для корреляционной функции вида  $\sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  величина  $\alpha$  определяется выражением:

$$\alpha = 2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}. \quad (3.13)$$

Как следует из этого выражения, для определения искомого параметра необходимо знание  $\lambda$  и  $\omega_0$ , что, на наш взгляд, является избыточным. Знание параметров  $\lambda$  и  $\omega_0$  позволяет непосредственно представить искомую модель в виде  $\sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ .

Таким образом, необходимо разработать алгоритм поиска параметра  $\alpha$ , обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации.

### 3.2. Алгоритм оценки параметра функции Лагерра, обеспечивающий минимум квадратической погрешности аппроксимации

Предложенный в работах [50, 87] метод аппаратной аппроксимации корреляционных функций позволил свести задачу разработки алгоритма оценки параметра ортогональных функций Лагерра к задаче параметрической аппроксимации корреляционных функций [53].

Сделав в формуле (3.8) замену  $K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$ , получим:

$$\beta_k = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_k(j\omega) d\omega, \quad (3.14)$$

где

$$W_k(j\omega) = \int_0^{\infty} L_k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{j\omega + \alpha/2} \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k = \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right) W_{k-1}(j\omega). \quad (3.15)$$

Подставив в формулу (3.7) выражение (3.14), найдем:

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) \left[ \sum_{k=0}^m W_k(j\omega_1) W_k(j\omega_2) \right] d\omega_1 d\omega_2. \quad (3.16)$$

С учетом (3.15) выражение для погрешности  $\Delta$  примет вид:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) \frac{1 - \left[ \frac{j\omega_1 - \alpha/2}{j\omega_1 + \alpha/2} \frac{j\omega_2 - \alpha/2}{j\omega_2 + \alpha/2} \right]^{m+1}}{j\omega_1 + j\omega_2} d\omega_1 d\omega_2. \quad (3.17)$$

Из полученной формулы видно, что при  $\alpha = 0$  и при  $\alpha \rightarrow \infty$

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau, \quad (3.18)$$

т.е. имеет наибольшее значение. Отсюда следует вывод, что существует значение  $\alpha$  (хотя бы одно), при котором погрешность минимальна.

Условием минимума этой погрешности является следующее уравнение:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.19)$$

при  $\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha^2} > 0$ .



Из формулы (3.17), получим:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = -(m+1) \left\{ \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{j\omega}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega \right]^2 - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{\alpha/2}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega \right]^2 \right\} \quad (3.20)$$

Представляя разность квадратов как произведение суммы оснований на разность, выражение (3.20) с учетом (3.15) приведем к виду:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = -(m+1) \frac{1}{\alpha^2} \beta_m \beta_{m+1} \quad (3.21)$$

В результате условие минимума запишется так:

$$(m+1) \frac{1}{\alpha^2} \beta_m \beta_{m+1} = 0. \quad (3.22)$$

Проанализируем это уравнение. Коэффициенты  $(m+1)$  и  $\alpha$  отличны от нуля. Коэффициент  $\beta_m$  - последний коэффициент разложения в (3.6), также отличен от нуля. Следовательно, предлагаемый способ оценки оптимального значения параметра  $\alpha$ , обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации, сводится к решению уравнения (см. рис. 3.3) [2]:

$$\beta_{m+1} = 0. \quad (3.23)$$

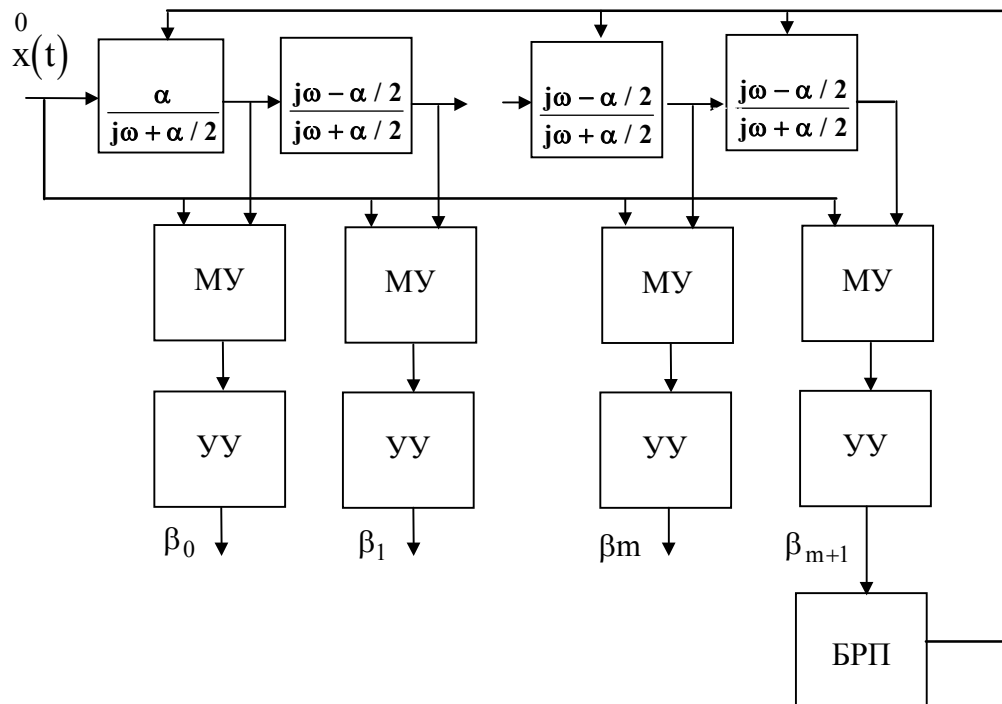
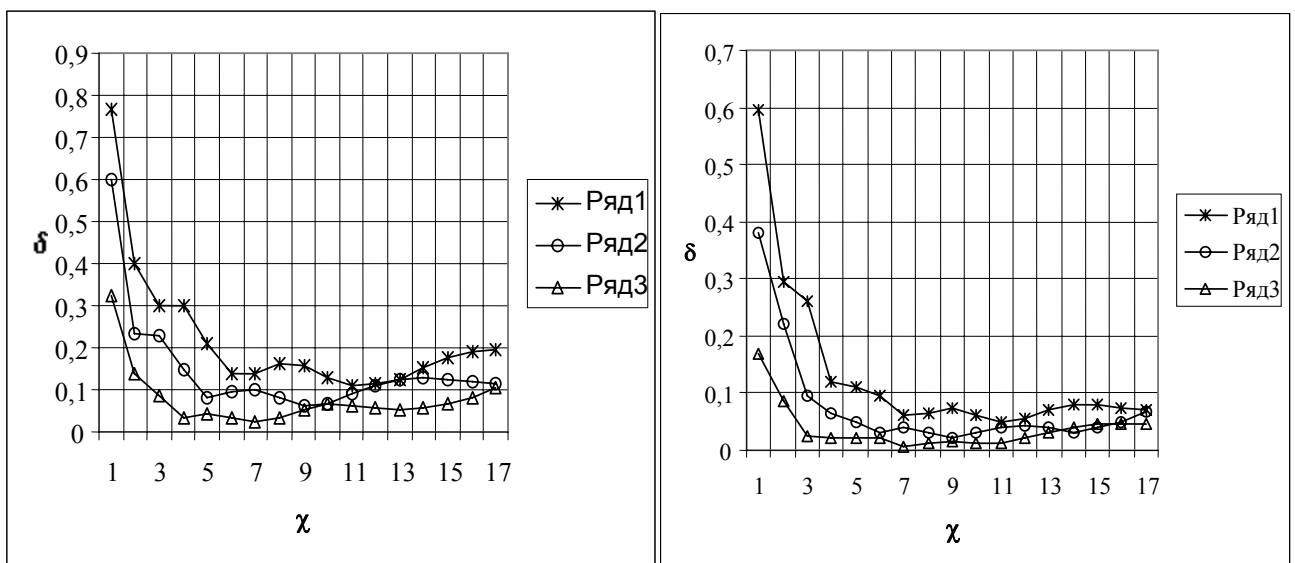


Рисунок 3.3. Коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра с оптимальной подстройкой параметра фильтра

Результаты численного определения корней уравнения (3.23) и соответствующие им погрешности для  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  при показателе колебательности  $\mu = 1, 2, \dots, 5$  и числе членов разложения ряда (3.6)  $m=2, 4, 6$  приведены в приложении П.14. Для сравнения там же приведены результаты определения нормированного параметра  $\chi = \alpha/\lambda$  по формуле (3.13) и соответствующие ему погрешности при аппроксимации той же модели.

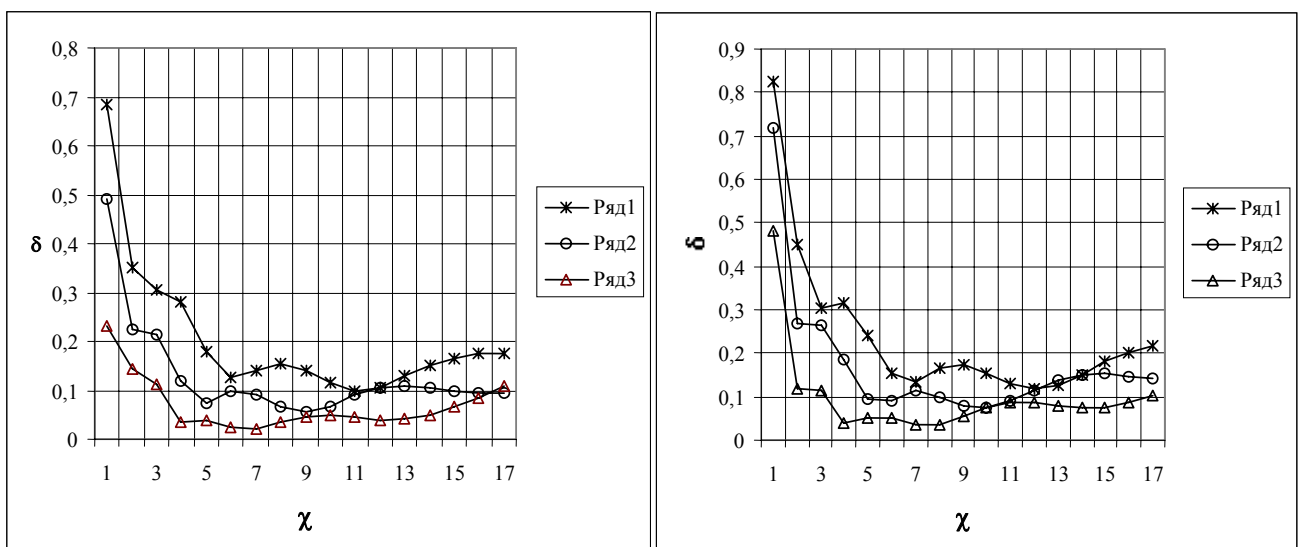
На рис.3.4 а) и б) приведены результаты анализа погрешности аппроксимации корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  с  $\mu = 5$  при  $m=4, 6$  для различных  $\chi$ , на рис. 3.4 в)- для  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$ ,  $\mu = 5$ ,  $m=4$ , на рис. 3.4 г)-

$\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$ ,  $\mu = 5$ ,  $m=4$ .



а)

б)



в)

г)

Рисунок 3.4. Методические погрешности аппроксимации

Ниже, на рис. 3.5 приведен пример аппроксимации  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  с  $\mu=5$

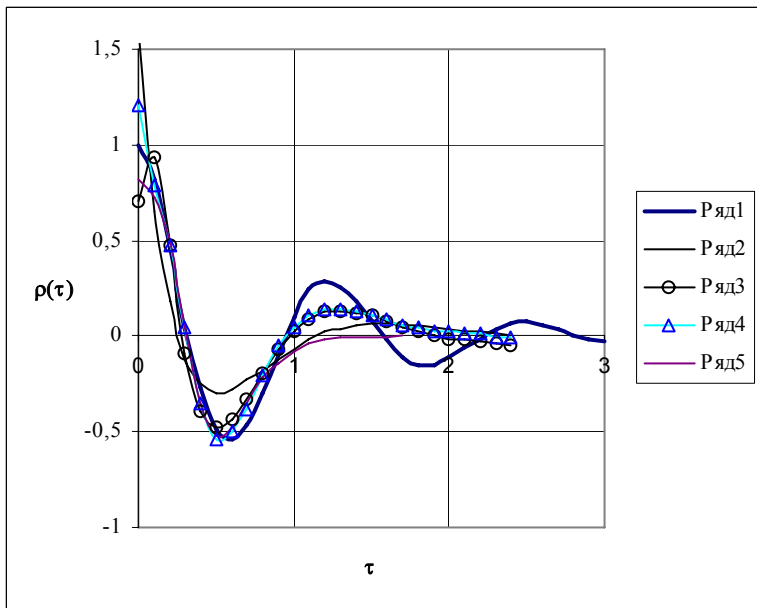


Рисунок 3.5. Результаты аппроксимации

(ряд 1) моделью (3.6) для  $m=4$  при различных значениях  $\chi = \alpha / \lambda$ , определенных в результате решения уравнения (3.23):

- ряд 2 -  $\chi = 2,860$ ;
- ряд 3 -  $\chi = 6,425$
- ряд 4 -  $\chi = 11,556$ ;
- ряд 5 -  $\chi = 21,868$ .

Из анализа результатов видно, что практически не выполняется основное свойство корреляционных функций -  $K_x(\tau) > \sigma_x^2$ , только один корень уравнения обеспечивает минимальную погрешность аппроксимации. Справедливо

возникает идея нормировки - разделить полученные ординаты модели на  $\sum_{k=0}^m \beta_k$ .

На рис. 3.6 приведены результаты аппроксимации после нормировки.

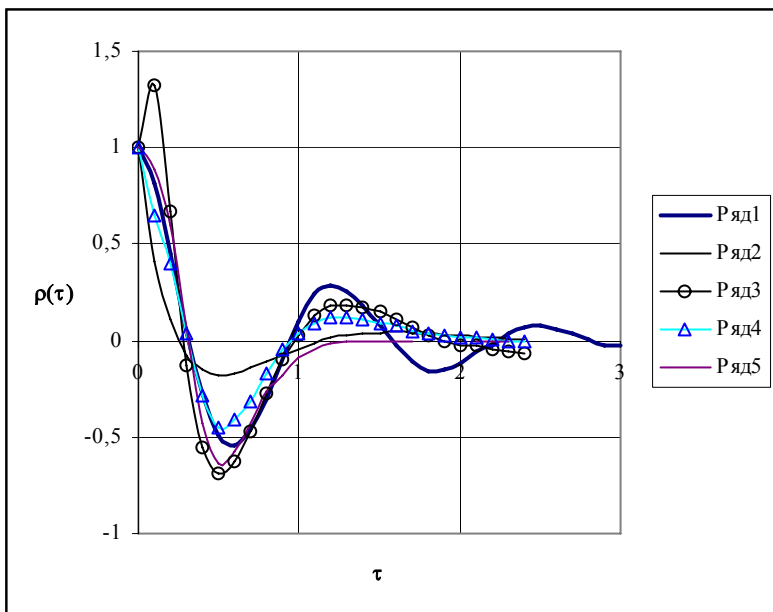


Рисунок 3.6. Результаты аппроксимации после нормировки

Из анализа рисунка 3.6 видно, что существуют такие значения параметра  $\alpha$ , при которых нарушается основное свойство корреляционной функции, даже после нормировки.

Величина параметра  $\alpha$  зависит от вида корреляционной функции, показателя её колебательности, а также числа членов разложения ряда. Число корней уравнения (3.23) зависит от тех же факторов и, в общем случае, равно  $m+1$ , и только один из них обеспечивает наименьшую погрешность аппроксимации. При

приближенном решении уравнения (3.23), например, методом Ньютона, значение  $\alpha$  и соответствующее ему значение погрешности аппроксимации будет зависеть от начального приближения  $\alpha_0$ .

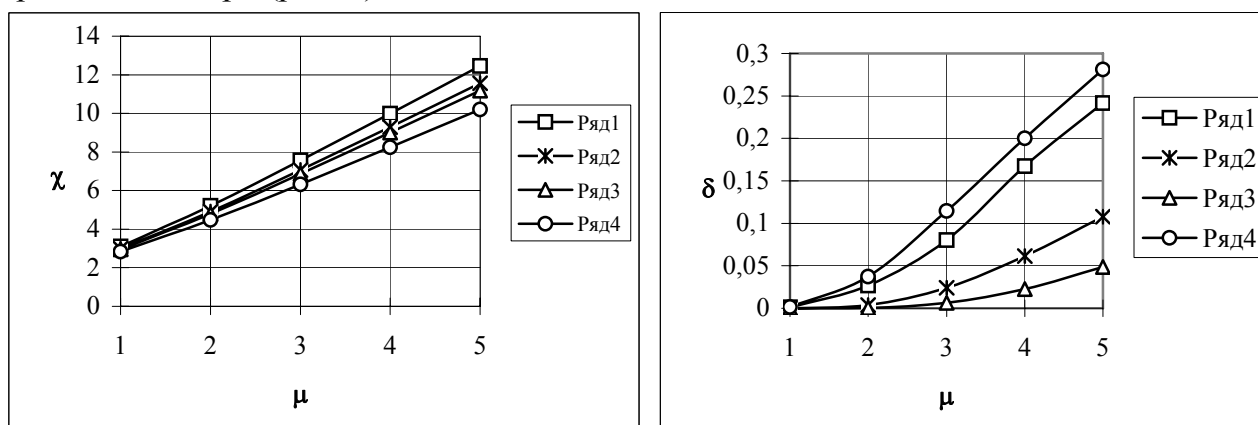
Таким образом, для нахождения корня уравнения, обеспечивающего минимум-минимум погрешности аппроксимации, необходимо либо правильно выбрать диапазон изменения указанного параметра, либо решать задачу методом перебора. Для решения первой задачи требуется априорная информация о свойствах процесса. Решение задачи методом перебора увеличивает время анализа. Это обстоятельство несколько сужает область применения разработанного алгоритма.

Результаты определения оптимальных значений  $\chi$  и  $\delta$  представлены на рис. 3.7 (ряд 1 -  $m=2$ , ряд 2 -  $m=4$ , ряд 3 -  $m=6$ ). Для сравнения приведены значения параметра

$$\chi = \frac{2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{\lambda}$$

для различных  $\mu$  и соответствующие ему значения погрешности ап-

проксимации при (ряд. 4).



а)

б)

Рисунок 3.7. Оптимальные значения параметров функций Лагерра и погрешности аппроксимации

Как видно из рис. 3.7, методическая погрешность аппроксимации для  $\chi$ , определенного по предложенной методике меньше, чем по методике [96]. Таким образом, разработанный алгоритм позволяет найти действительно оптимальное значение параметра ортогональных функций Лагерра.

### 3.3. Алгоритм оценки параметра функции Лагерра, обеспечивающий минимум погрешности аппроксимации при ограничениях на модель корреляционной функции

Одной из отрицательных черт аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра является то, что её основное свойство

$$K_x(0) = D_x = \sum_{k=0}^m \beta_k, \tag{3.24}$$

как видно из выражения

$$\sum_{k=0}^m \beta_k = D_x - \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^{m+1} d\omega, \tag{3.25}$$

при произвольной величине  $\alpha$  не выполняется при конечном  $m$  (см. рис. 3.5). Условие (3.24) при произвольной величине  $\alpha$  выполняется лишь при  $m \rightarrow \infty$ .

Для обеспечения условия (3.24) аналитическое выражение  $K_x(\tau)$  можно искать в виде:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m c_k L_k(\tau, \alpha), \quad (3.26)$$

где 
$$c_k = \frac{\beta_k}{\sum_{k=0}^m \beta_k} D_x. \quad (3.27)$$

Легко проверить, что в этом случае  $K_x(0) = \sum_{k=0}^m \beta_k = D_x$ . Однако, коэффициенты разложения  $c_k$ , определенные по формуле (3.27), не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Таким образом, общим недостатком известных способов определения коэффициентов разложения является то, что они либо нарушают основное свойство корреляционных функций, либо не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Поставим задачу определить коэффициенты разложения корреляционной функции  $b_k$

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m b_k L_k(\tau, \alpha) \quad (3.28)$$

так, чтобы квадратическая погрешность аппроксимации была минимальной при дополнительном условии

$$K_x(0) = \sum_{k=0}^m b_k = D_x. \quad (3.29)$$

Т.е. для этого необходимо минимизировать  $\Delta_1$  по  $b_k$  [87]:

$$\Delta_1 = \int_0^{\infty} \left[ K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k L_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau + \lambda \sum_{k=0}^m b_k = \min. \quad (3.30)$$

Найдём частные производные  $\frac{\partial \Delta_1}{\partial b_n}$  и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial b_n} = -2 \int_0^{\infty} \left[ K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k L_k(\tau, \alpha) \right] L_n(\tau, \alpha) + \lambda = 0. \quad (3.31)$$

С учетом свойств ортогональных функций Лагерра, получим:

$$b_k = \beta_k + \frac{D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1}. \quad (3.32)$$

Перейдем к оценке погрешности аппроксимации. Для этого подставим  $b_k$  из (3.32) в выражение для оценки  $\Delta_1$ . В результате получим:

$$\Delta_1 = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{\left( D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k \right)^2}{\alpha(m+1)}. \quad (3.33)$$

Погрешность  $\Delta_1$  представим следующим образом:

$$\Delta_1 = \Delta + \Delta_2, \quad (3.34)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2; \\ \Delta_2 = \frac{\left( D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k \right)^2}{\alpha(m+1)}. \end{array} \right. \quad (3.35)$$

В предыдущем случае было показано, что  $\Delta$  является функцией параметра  $\alpha$ . Можно показать, что и погрешность  $\Delta_2$ , которую с учетом (3.14) приведем к виду:

$$\Delta_2 = \frac{1}{\alpha(m+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) \frac{[j\omega_1 - \alpha/2][j\omega_2 - \alpha/2]}{[j\omega_1 + \alpha/2][j\omega_2 + \alpha/2]} d\omega_1 d\omega_2, \quad (3.36)$$

также является функцией параметра  $\alpha$ .

Найдём условие определения оптимального значения параметра  $\alpha$ , при котором  $\Delta_1 = \min$ .

Это условие, как следует из (3.30), найдем из уравнения:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha} = 0. \quad (3.37)$$

Значение  $\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}$  определяется выражением (3.20). А  $\frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha}$  с учётом (3.36) примет

вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha} = & -\frac{1}{\alpha^2(m+1)} \left\{ 2\alpha(m+1) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_m(j\omega) \frac{j\omega}{j\omega + \alpha/2} d\omega \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega + \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right]^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Подставив в (3.37) выражения (3.20) и (3.38), после промежуточных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_1}{\partial \alpha} = & -\frac{1}{\alpha^2(m+1)} \left\{ \left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{j\omega}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right]^2 - \left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{\alpha/2}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Представляя в выражении (3.39) разность квадратов как произведение суммы оснований на их разность, получим:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha^2(m+1)} \left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_m(j\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right] \times$$

$$\left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_{m+1}(j\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right] \quad (3.40)$$

Выражение (3.40) с учётом (3.8), (3.25) равно:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \alpha} = -\frac{m+1}{\alpha^2} b_m b_{m+1} \quad (3.41)$$

Так как коэффициент  $b_m \neq 0$  и параметр  $\alpha \neq 0$ , условие минимума погрешности  $\Delta_1$  примет вид:

$$b_{m+1} = \beta_{m+1} + \frac{D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1} = 0. \quad (3.42)$$

Таким образом, при аппроксимации корреляционной функции для обеспечения минимума квадратической погрешности требуется изменением параметра  $\alpha$  добиться равенства нулю  $\beta_{m+1}$  коэффициента. Значения  $b_0, \dots, b_m$  в этом случае будут оптимальными.

На рис. 3.8 представлена структура коррелометра с аппроксимацией, соответствующая алгоритмам (3.32), (3.42) [87].

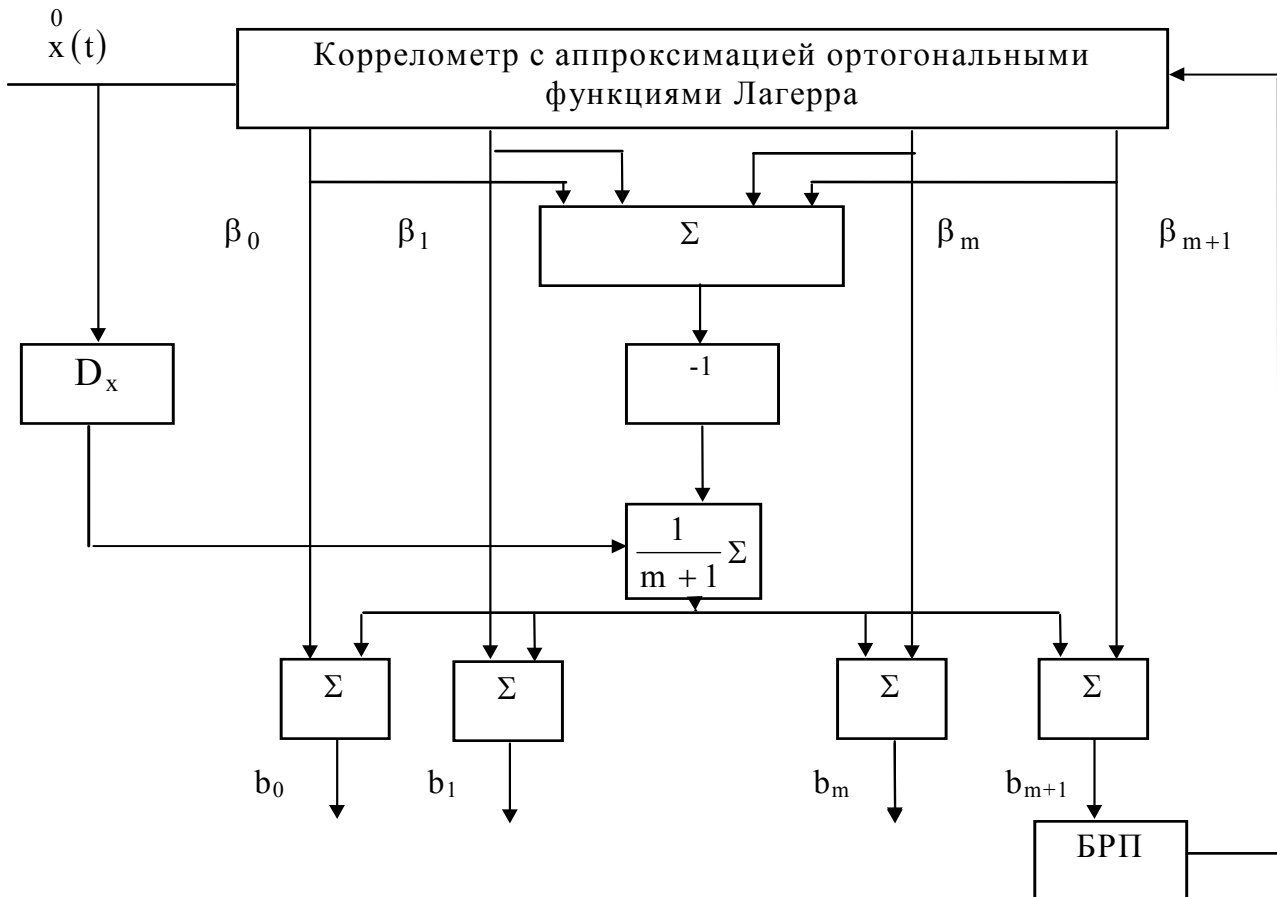


Рисунок 3.8. Коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра

В соответствии с выражением (3.32) можно предложить ещё один алгоритм для определения  $b_0, \dots, b_m$  и решения уравнения (3.42) (см. рис. 3.9) [3].

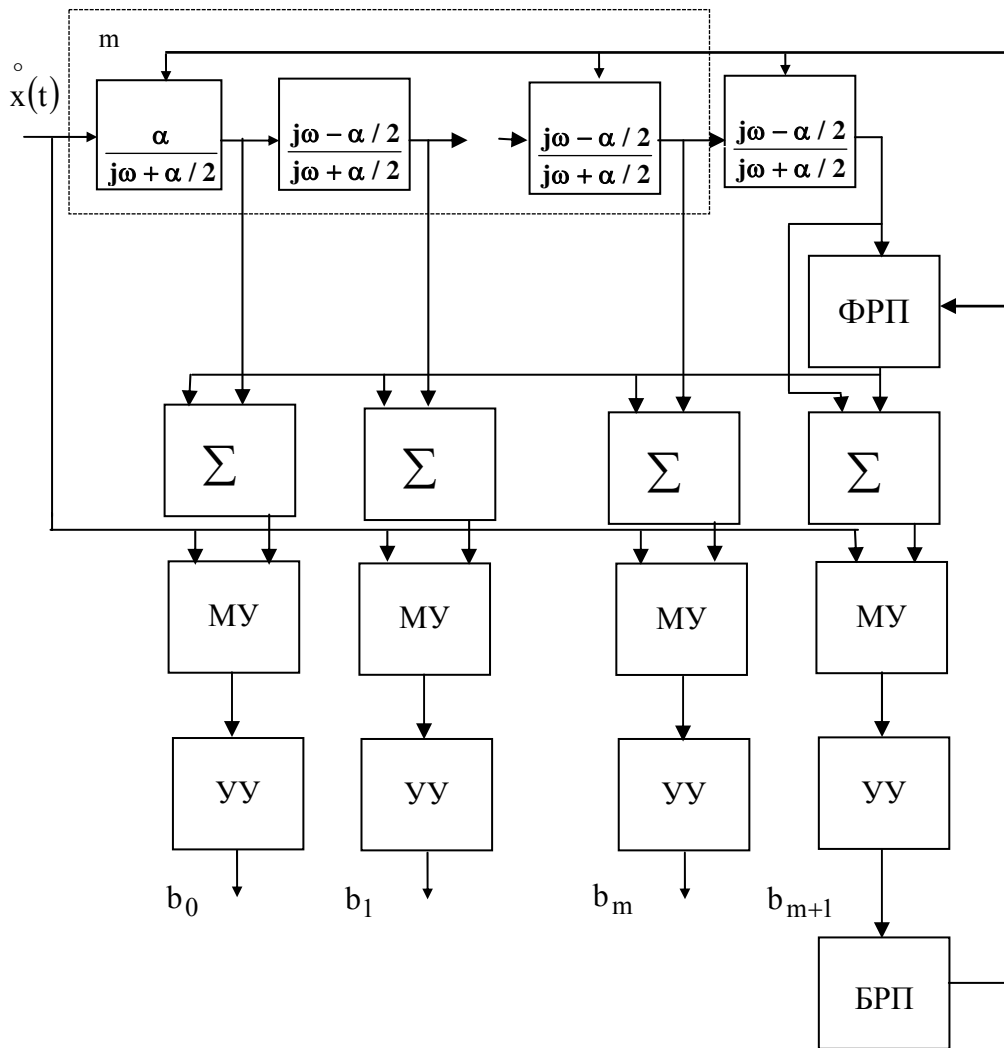


Рисунок 3.9. Коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра с оптимальной подстройкой параметра

Для этого, подставив в (3.32) <sup>фильтра</sup> выражения (3.8) и (3.25), получим:

$$b_k = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \left[ \frac{\alpha}{j\omega + \alpha/2} \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k + \frac{1}{m+1} \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^{m+1} \right] d\omega. \quad (3.43)$$

Или

$$b_k = \int_0^{\infty} K_x(\tau) [h_k(\tau) + H(\tau)] d\tau, \quad (3.44)$$

где

$$\begin{cases} h_k(\tau) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} W_k(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega; \\ H(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+1)} \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^{m+1} e^{j\omega\tau} d\omega. \end{cases} \quad (3.45)$$



При определении коэффициентов  $b_k$  и решения уравнения (3.42) на ЭВМ его удобнее привести к виду [87]:

$$\frac{D_x}{m+1} + \sum_{s=1}^{m+1} \left[ (-1)^s \frac{m!(m+2)\alpha^{s+1}}{(s-1)!(s+1)!(m-s+1)!} \int_0^\infty K_x(\tau) \tau^s e^{-\alpha\tau/2} d\tau \right] = 0. \quad (3.46)$$

Определив из уравнения (3.46)  $\alpha$ , можно приступить к определению коэффициентов разложения  $b_0, \dots, b_m$ . Для этого, воспользовавшись рекуррентной формулой [87]

$$b_k - b_{k+1} = \sum_{s=0}^k \left[ (-1)^s \frac{k! \alpha^{s+2}}{s!(s+1)!(k-s)!} \int_0^\infty K_x(\tau) \tau^{s+1} e^{-\alpha\tau/2} d\tau \right], \quad (3.47)$$

последовательно определим  $b_0, \dots, b_m$ .

Предложенные алгоритмы определения параметра  $\alpha$  (3.42), (3.46) и коэффициентов разложения  $b_k$  (3.32), (3.47) были промоделированы на ЭВМ.

На первом этапе моделирования, как и в подразделе 3.2, определялась зависимость методической погрешности аппроксимации корреляционной функции вида

$$\rho_{x5}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \rho_{x6}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right), \rho_{x7}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$$

от нормированного параметра весовой функции Лагерра  $\chi = \frac{\alpha}{\lambda}$  (см. рис. 3.10-3.12).

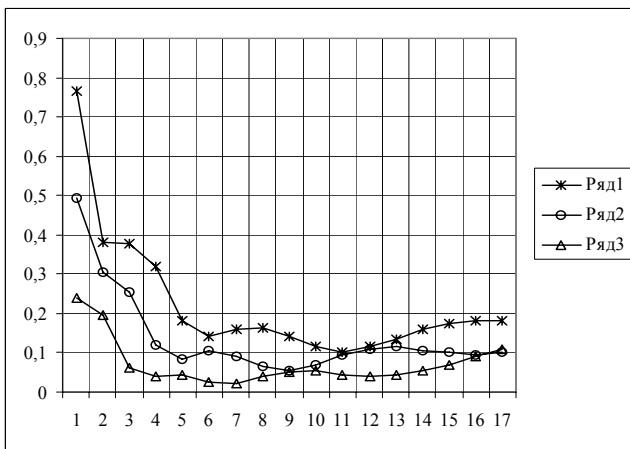


Рисунок 3.10.

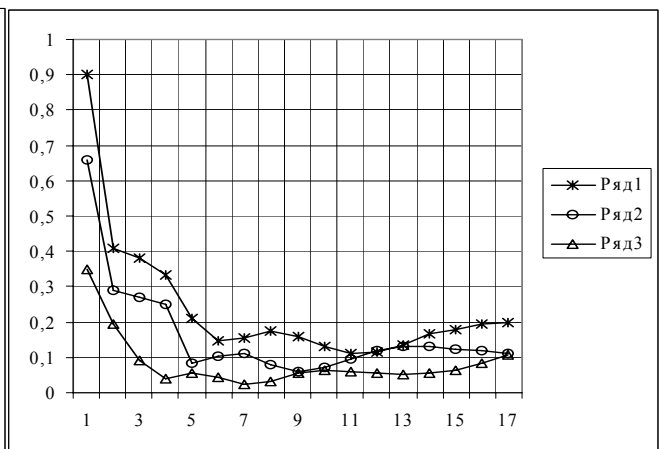


Рисунок 3.11.

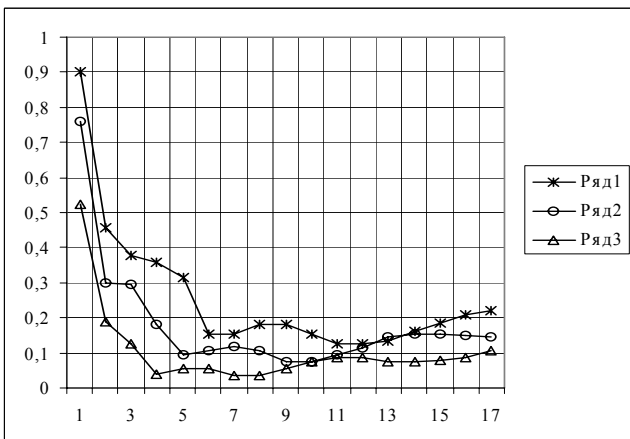


Рисунок 3.12.

На рисунке 3.10 – 3.12 ряду 1 соответствует значения погрешности при  $\omega_0 / \lambda = 5$ , ряду 2 – 4, ряду 3 – 3.

Анализ полученных результатов показывает, что методическая погрешность аппроксимации существенно образом зависит от величины параметра  $\chi$ .

Далее, для модели  $\rho_{x5}(\tau)$  были определены корни уравнения (3.42) и соответствующие им методические по-

грешности аппроксимации для  $m=2, 4$ ,  $\mu=1 \div 5$  (см. приложение П.14), а также коэффициенты разложения  $b_0, \dots, b_m$ , соответствующие минимуму-миниморуму погрешности (3.33).

Результаты расчета представлены на рис. 3.13, где ряд 1 соответствует значениям при  $m=2$ , ряд 2 -  $m=4$ .

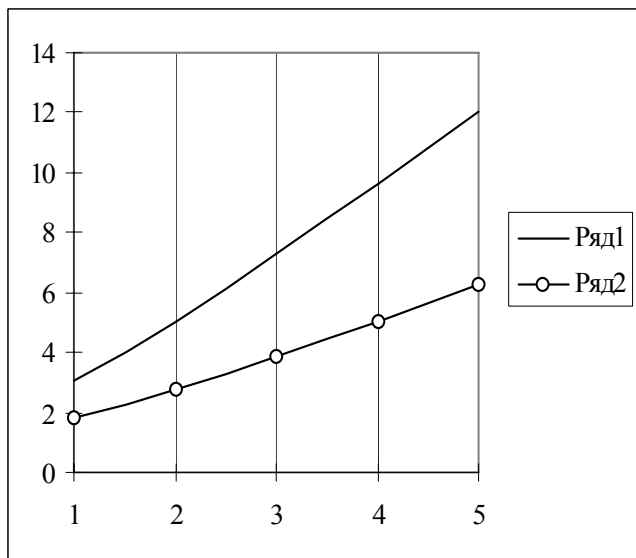


Рисунок 3.13. Оптимальные значения параметров

сущи те же недостатки, что и алгоритму, рассмотренному в подразделе 3.2. Однако, при правильно выбранном диапазоне изменения  $\alpha$ , алгоритм (3.42) обеспечивает погрешность аппроксимации, близкую к минимуму-миниморуму, и, кроме того, основное свойство корреляционной функции.

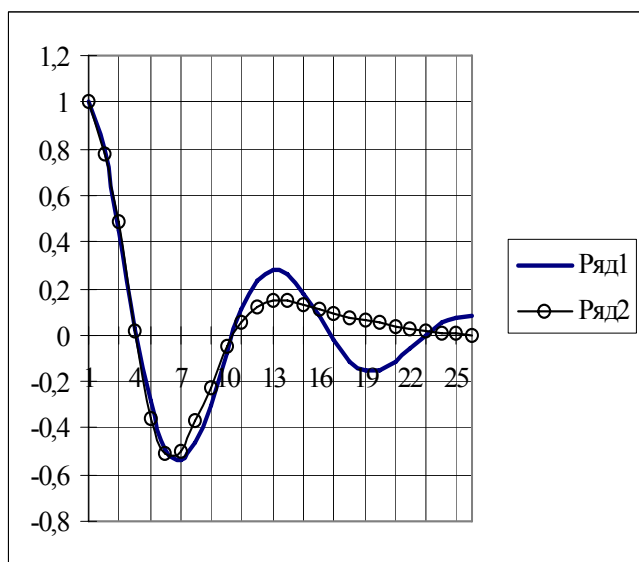


Рисунок 3.14. Результаты аппроксимации

Изменении числа членов разложения ряда (3.6), необходимо пересчитать в соответствии с (3.32) все параметры  $b_k$ .

Из анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы:

число корней уравнения (3.42) в общем случае равно  $(m+1)$ ;

величина минимума погрешности  $\Delta_1$  зависит от начального приближения  $\alpha$ ;

3. для обеспечения минимума-миниморума погрешности необходимо правильно выбирать диапазон изменения  $\alpha$ , т.е. необходима априорная информация о свойствах процесса.

Т.е., несмотря на то, что предложенный алгоритм обеспечивает выполнение основного свойства корреляцион-

ной функции  $K_x(0) = \sum_{k=0}^m b_k$ , ему при-

На рис. 3.14. приведены результаты аппроксимации корреляционной функции с показателем колебательности  $\mu=5$   $\rho_x(\tau) = e^{-\tau} \cos 5\tau$  рассматриваемой моделью при  $m=4$ , параметр которой  $\alpha=11,39$  определялся в результате решения уравнения (3.42), а коэффициенты  $b_0, \dots, b_m$  - в соответствии с выражением (3.32). Из анализа рисунка видно, что модель даже при небольшом числе членов разложения ряда с достаточной для практики точностью аппроксимирует корреляционную функцию исследуемого процесса, особенно на начальном участке.

Следует отметить, что, при изме-

### 3.4. Упрощенный алгоритм оценки параметра функции Лагерра

Рассмотренные в подразделах 3.2 и 3.3 алгоритмы легко реализуются в аппаратуре, на ЭВМ, однако, как указывалось, не лишены существенного недостатка - в результате решения уравнений (3.23) или (3.42) в общем случае возможно определение  $(m+1)$  корней, обеспечивающих локальные минимумы погрешностей  $\Delta$  и  $\Delta_1$ .

Это обстоятельство накладывает определенные неудобства при выборе диапазона изменения параметра функции Лагерра.

Для однозначного решения задачи, т.е. определения единственного корня, обеспечивающего погрешность аппроксимации, близкую к минимуму-миниморуму, необходимо анализировать сигнал, пропорциональный  $\beta_0$  [75].

Рассмотрим уравнение

$$\alpha \int_0^{\infty} K_x(\tau) L_0(\tau, \alpha) d\tau - k \sigma_x^2 = 0, \quad (3.48)$$

где  $L_0(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau/2}$  - функция Лагерра нулевого порядка;

$k$  - постоянная величина, которая, как видно из уравнения, меньше 2.

Для  $K_{x5}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau/2} \cos \omega_0 \tau$  это уравнение приведем к виду:

$$\alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau/2} e^{-\lambda\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau - k = 0. \quad (3.49)$$

Разрешив уравнение относительно  $\alpha$ , получим:

$$\alpha = 2 \frac{-\lambda(1-k) + \sqrt{\lambda^2(1-k)^2 + k(2-k)(\lambda^2 + \omega_0^2)}}{2-k}. \quad (3.50)$$

При  $k=1$  выражение примет самый простой вид, а именно:

$$\alpha = 2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}. \quad (3.51)$$

Решив уравнение (3.49) для корреляционных функций

$$K_{x,6,7}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right) \text{ при } k=1, \text{ получим:}$$

$$\alpha = 2 \left( \sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right). \quad (3.52)$$

Заметим, что зависимость параметра  $\alpha$  от параметров корреляционной функции в выражении (3.51) совпадает с выражением, полученным в [96] для условия минимума погрешности в равномерном смысле. Однако, в [96] приведен лишь результат, а не алгоритм поиска параметра  $\alpha$  в результате решения уравнения (3.49) (см. рис. 3.15).

Отметим важное преимущество предлагаемого алгоритма: при увеличении  $m$  параметр функции Лагерра  $\alpha = \text{const}$ , в отличие от значения  $\alpha$ , определенного по алгоритмам (3.23) и (3.42). При определении  $\alpha$  в результате уравнения (3.49), величина этого параметра будет близка к оптимальной величине  $\alpha_{\text{opt}}$  (см. рис. 3.16, где ряд 1 соответствует  $K_{x7}(\tau)$ , ряд 2 -  $K_{x5}(\tau)$ , ряд 3 -  $K_{x6}(\tau)$ ), а коэффициенты ряда (3.6)  $\beta_0, \dots, \beta_m$  обеспечат погрешность, близкую к минимуму-миниморуму. Для иллюстрации этого факта в таблице 3.2 приведены результаты расчета на ЭВМ значений нор-

мированного параметра  $\chi$ , вычисленного в соответствии с выражением (3.49) при  $k=1$ , и соответствующих ему значений относительной погрешности аппроксимации. Для сравнения в ней приведены значения  $\chi_{\text{opt}} = \alpha_0 / \lambda$  и  $\delta_{\text{min}}$ , соответствующие минимуму-минимуму погрешности аппроксимации.

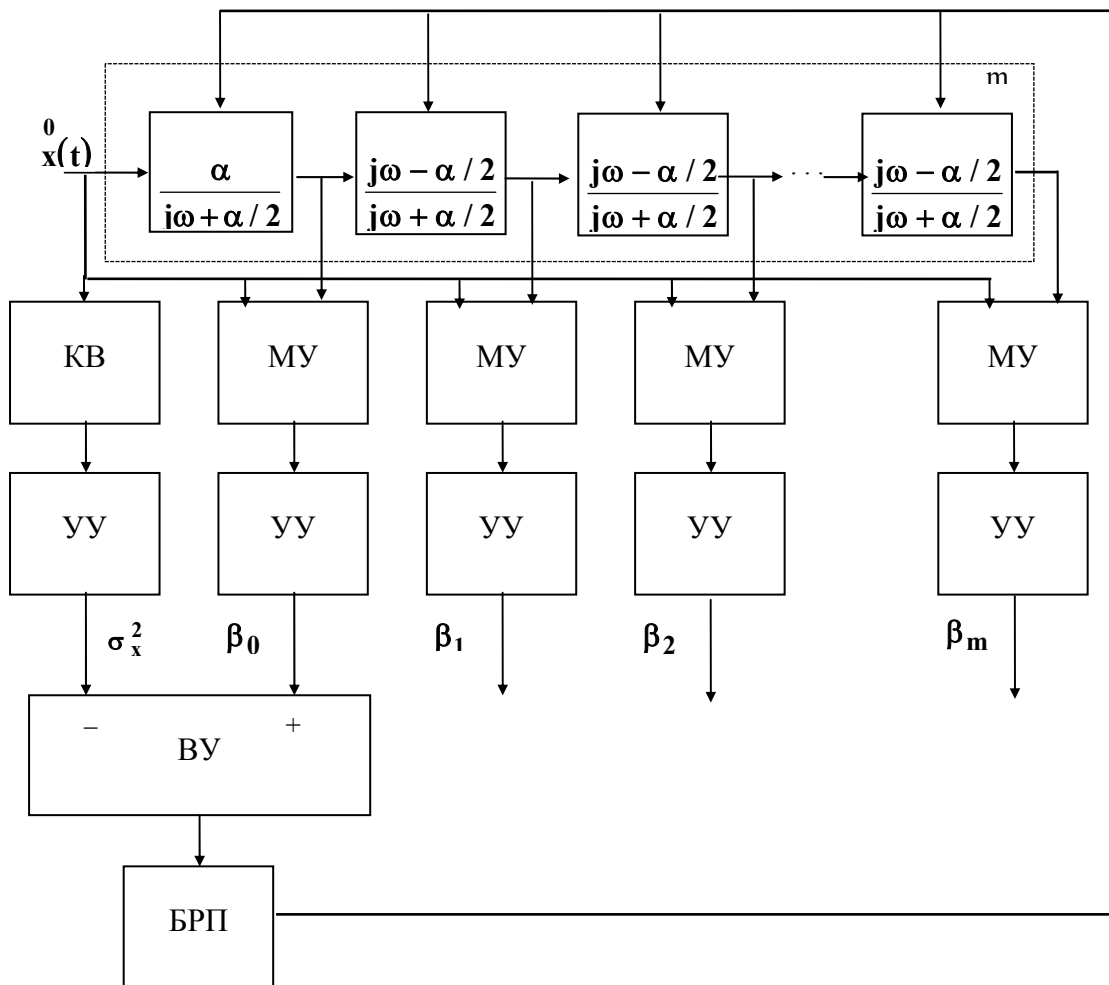


Рисунок 3.15. Коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра с подстройкой параметра

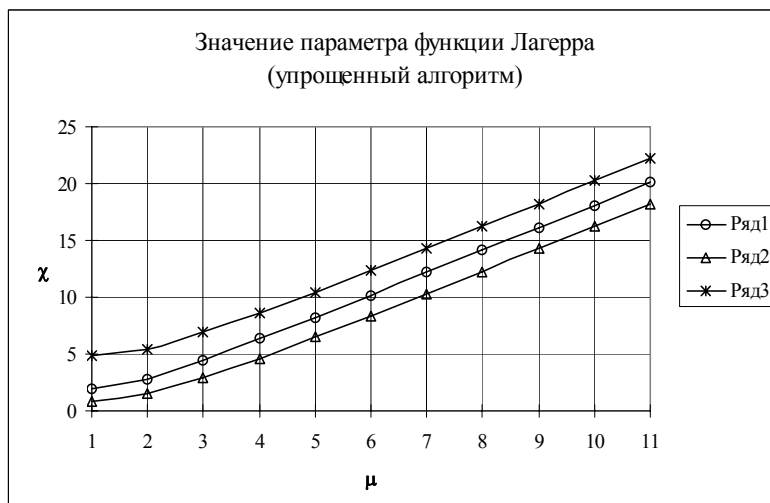


Рисунок 3.16. Параметр функций Лагерра

Параметры ортогональных функций Лагерра и погрешности аппроксимации

Таблица 3.2

$\rho_x(\tau)$	m	$\mu$	$\chi$	$\delta$	$\chi_{opt}$	$\delta_{min}$
$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	2	2	4,45	0,04	5,25	0,025
		3	6,35	0,115	7,70	0,08
		4	8,30	0,20	10,00	0,17
		5	10,20	0,38	12,45	0,24
	4	3	6,35	0,0275	7,00	0,025
		4	8,20	0,075	9,30	0,06
		5	10,20	0,1275	13,50	0,11
	6	3	6,35	0,01	7,00	0,005
		4	8,30	0,03	9,00	0,02
		5	10,20	0,0575	11,20	0,045
$e^{-\lambda \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau )$	4	2	3,9	0,005	5,00	0,001
		3	4,65	0,04	6,70	0,02
		4	6,45	0,10	8,80	0,055
		5	8,40	0,15	11,00	0,10
		6	10,35	0,205	13,00	0,15
		7	12,30	0,26	16,00	0,20
		8	14,25	0,30	18,00	0,24
$e^{-\lambda \tau } (\cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau )$	4	2	6,85	0,02	5,50	0,01
		3	8,65	0,045	7,30	0,03
		4	10,45	0,08	9,70	0,06
		5	12,4	0,12	12,00	0,12

Как показали исследования, значения параметра  $\alpha$  находятся в области глобального минимума квадратической погрешности аппроксимации для широкого класса корреляционных функций исследуемых процессов. В связи с этим, для поиска оптимального значения  $\alpha$  возможно последовательное решение двух уравнений:

$$\begin{cases} \beta_0 - \sigma_x^2 = 0; \\ \beta_{m+1} = 0. \end{cases} \quad (3.53)$$

Результат решения первого уравнения (единственный корень) используется в качестве начального приближения при решении второго уравнения.

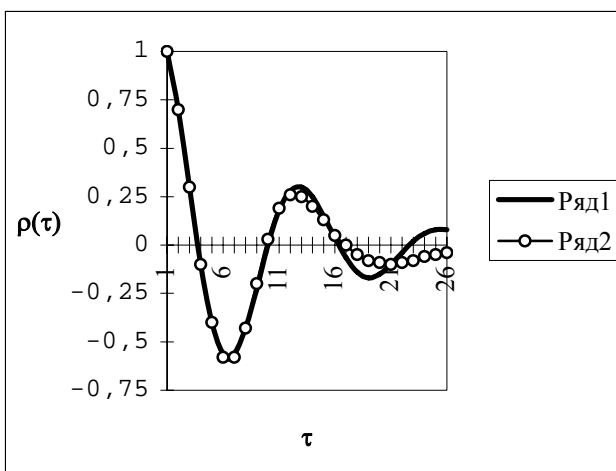
Полученные результаты можно обобщить и на случай определения параметра  $\alpha$  при аппроксимации корреляционной функции моделью (3.28).

Как и в случае (3.6), для повышения точности аппроксимации корреляционных функций моделью вида (3.28), возможно последовательное определение  $\alpha$  в результате решения двух уравнений:

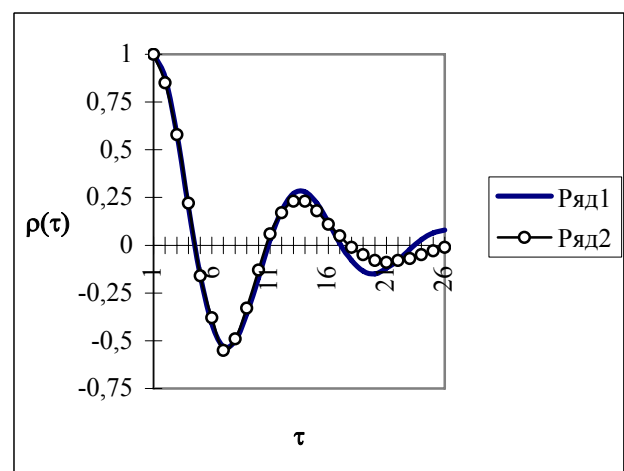
$$\begin{cases} \beta_0 - \sigma_x^2 = 0; \\ b_{m+1} = 0. \end{cases} \quad (3.54)$$

Причем, результат решения первого уравнения является начальным приближением для второго. Значения параметра  $\alpha$  и коэффициентов разложения  $b_0, \dots, b_m$  в этом случае будут удовлетворять минимуму-минимуму погрешности аппроксимации при дополнительном условии  $K_x(0) = \sum_{k=0}^m b_k$ . Пример аппроксимации корреляционных функций колебательных моделей ( $\lambda = 1$ ) моделью  $\rho_a(\tau) = \sum_{k=0}^7 b_k L_k(\tau, \alpha)$

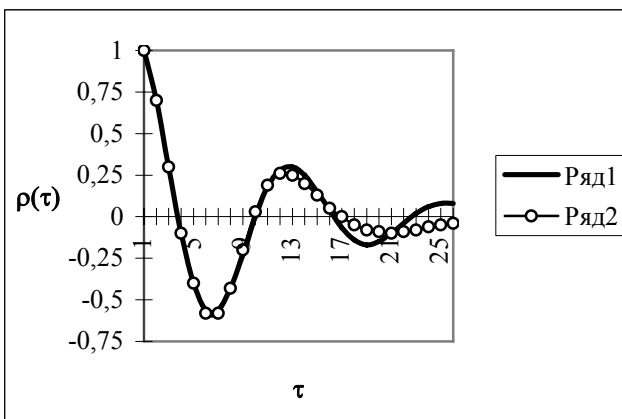
приведен на рис. 3.17.



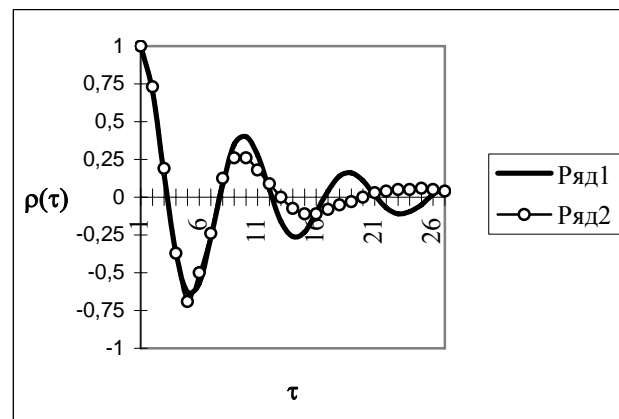
а)  $\rho_{x_5}(\tau)$ ,  $\mu = 5, \alpha = 10,198$



б)  $\rho_{x_6}(\tau)$ ,  $\mu = 5, \alpha = 8,40$



а)  $\rho_{x_7}(\tau)$ ,  $\mu = 5, \alpha = 12,40$



б)  $\rho_{x_5}(\tau)$ ,  $\mu = 7, \alpha = 10,198$

Рисунок 3.17. Результаты аппроксимации

### 3.5. Применение экспоненциальной аппроксимации корреляционной функции для определения параметра ортогональных функций Лагерра

При аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра параметр  $\alpha$  связан с интервалом корреляции исследуемого процесса. Так, например, для  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda\tau/2} \cos \omega_0\tau$

$$\alpha = \frac{2}{\tau_k^{(2)} \sqrt{1 + \mu^2}}. \quad (3.55)$$

Учитывая, что, при аппроксимации корреляционной функции экспоненциальной функцией  $e^{-\beta\tau}$ , её параметр характеризует затухание корреляционной функции, т.е. величину, связанную с интервалом корреляции [96], и, кроме того, зависимость параметра  $\beta$  от параметров корреляционной функции однозначна [87], представляет интерес рассмотреть алгоритм подбора параметра  $\alpha$ , основанный на аппроксимации корреляционной функции экспоненциальной функцией.

Уравнение для определения параметра  $\beta$  имеет вид:

$$4\beta^2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \tau e^{-\beta\tau} d\tau - \sigma_x^2 = 0. \quad (3.56)$$

Оно может быть решено как аналитически, так и аппаратно. Причём, при аппаратном решении этой задачи необходим фильтр с регулируемыми параметрами с импульсной характеристикой  $h(\tau, \alpha) = 4\beta^2 \tau e^{-\beta\tau}$ . Частотная характеристика такого фильтра имеет вид [50]:

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} h(\tau, \beta) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{4}{(1 + j\omega T)^2}, \quad (3.57)$$

где  $T=1/\beta$ .

Введя обозначение  $T=2/\alpha$ , частотную характеристику приведем к виду:

$$W(j\omega) = 1 - W_0(j\omega) + W_1(j\omega), \quad (3.58)$$

где  $W_0(j\omega)$  и  $W_1(j\omega)$  - частотные характеристики фильтров Лагерра нулевого и первого порядков соответственно.

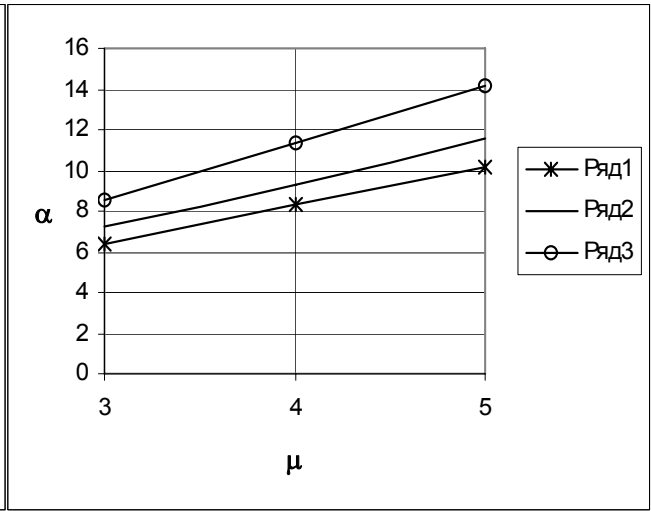
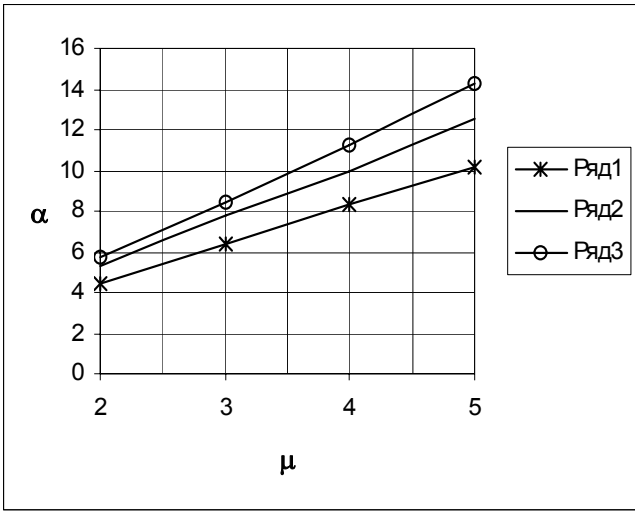
Уравнение (3.56), в соответствии с (3.58), приведём к виду:

$$\beta_0 - \beta_1 - \sigma_x^2 = 0. \quad (3.59)$$

Это уравнение дает возможность получить ещё один алгоритм поиска параметра функций Лагерра. Анализ результатов моделирования предложенного алгоритма на ЭВМ для колебательных моделей корреляционных функций показывает, что величина параметра  $\alpha$  (см. рис. 3.18.) также находится в области глобального минимума квадратической погрешности (см. рис. 3.19), а величина  $\chi=\alpha/\lambda$  (ряд 2), соответствующая минимуму-миниморуму, находится между  $\chi_1=\varphi_1(\beta_0)$  и  $\chi_2=\varphi_2(\beta_0, \beta_1)$ .

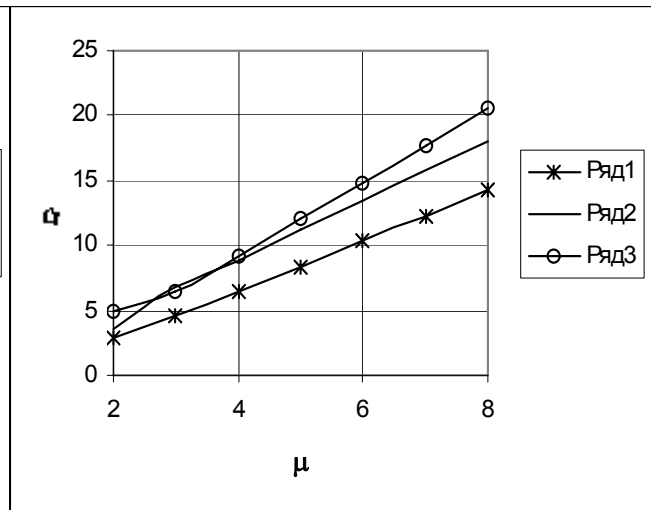
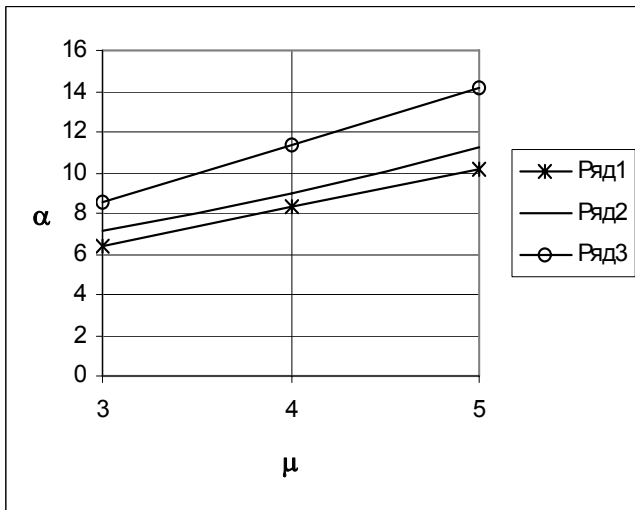
Следует отметить, что алгоритмы, рассмотренные в подразделах 3.4. и 3.5 являются частными случаями алгоритма [54]

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k - \sigma_x^2 = 0. \quad (3.60)$$



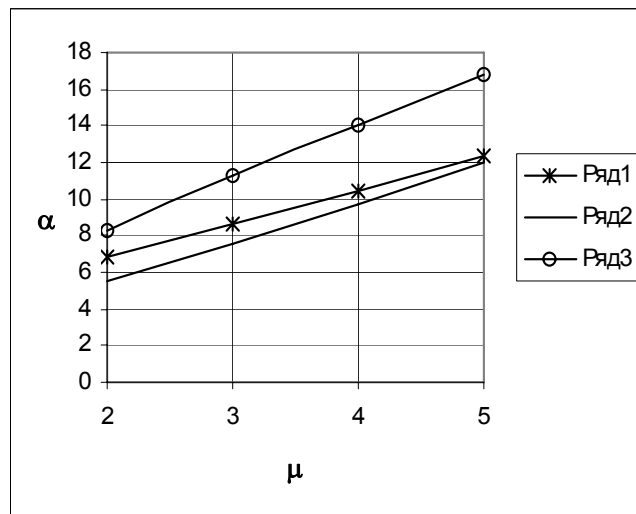
а)  $\rho_{x5}(\tau), m=2$

б)  $\rho_{x5}(\tau), m=4$



в)  $\rho_{x5}(\tau), m=6$

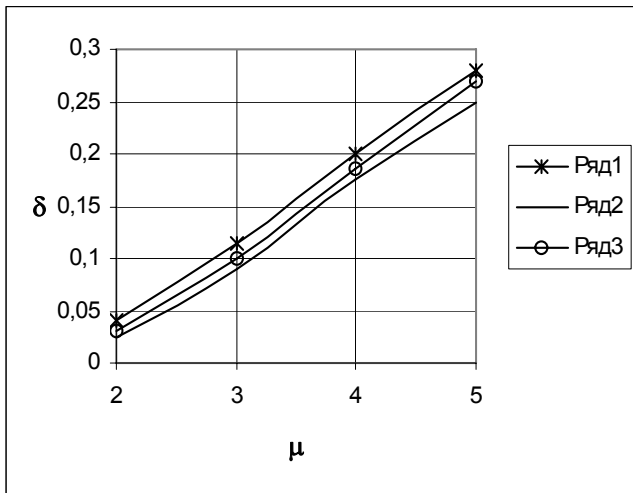
г)  $\rho_{x6}(\tau), m=4$



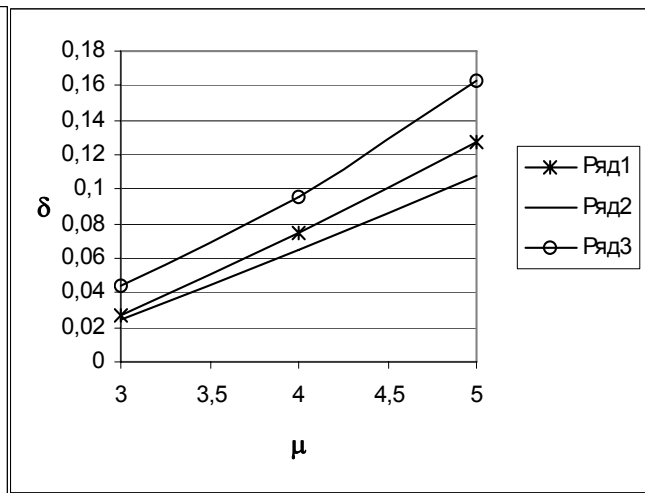
д)  $\rho_{x7}(\tau), m=4$

Рисунок 3.18. Значения параметров функций Лагерра

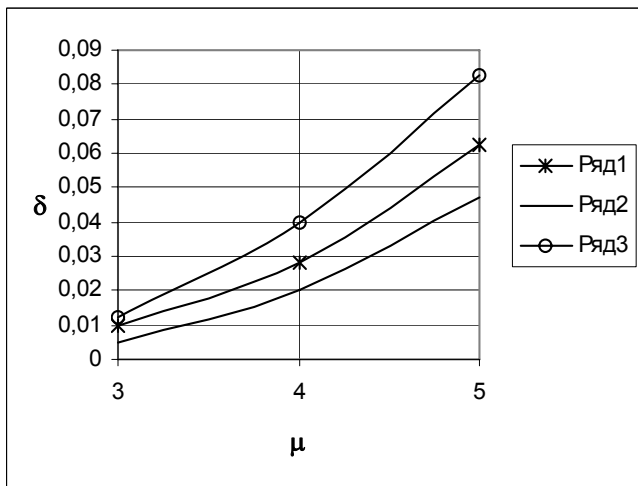




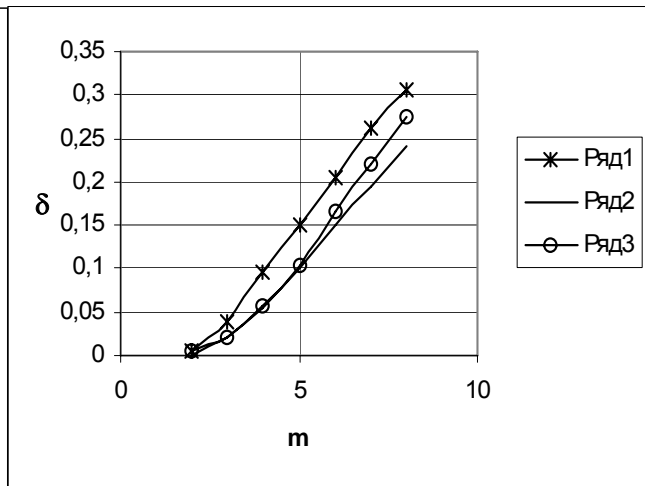
а)  $\rho_{x5}(\tau), m=2$



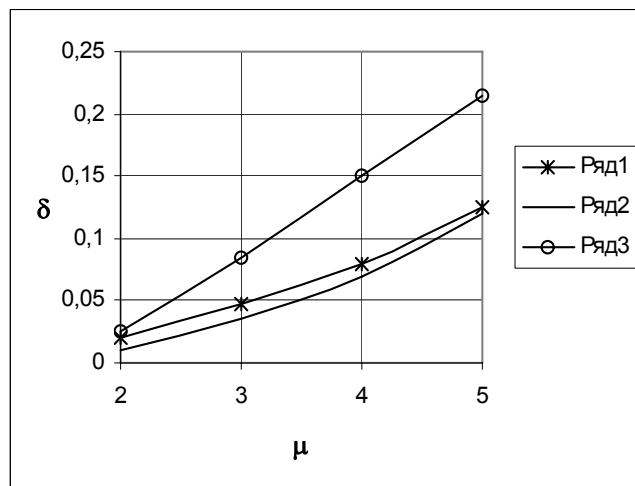
б)  $\rho_{x5}(\tau), m=4$



в)  $\rho_{x5}(\tau), m=6$



г)  $\rho_{x6}(\tau), m=4$



д)  $\rho_{x7}(\tau), m=4$

Рисунок 3.19. Погрешности аппроксимации

Структурная схема коррелометра, параметр функций Лагерра которого определяется в результате решения уравнения (3.56), представлена на рис. 3.20 [54].

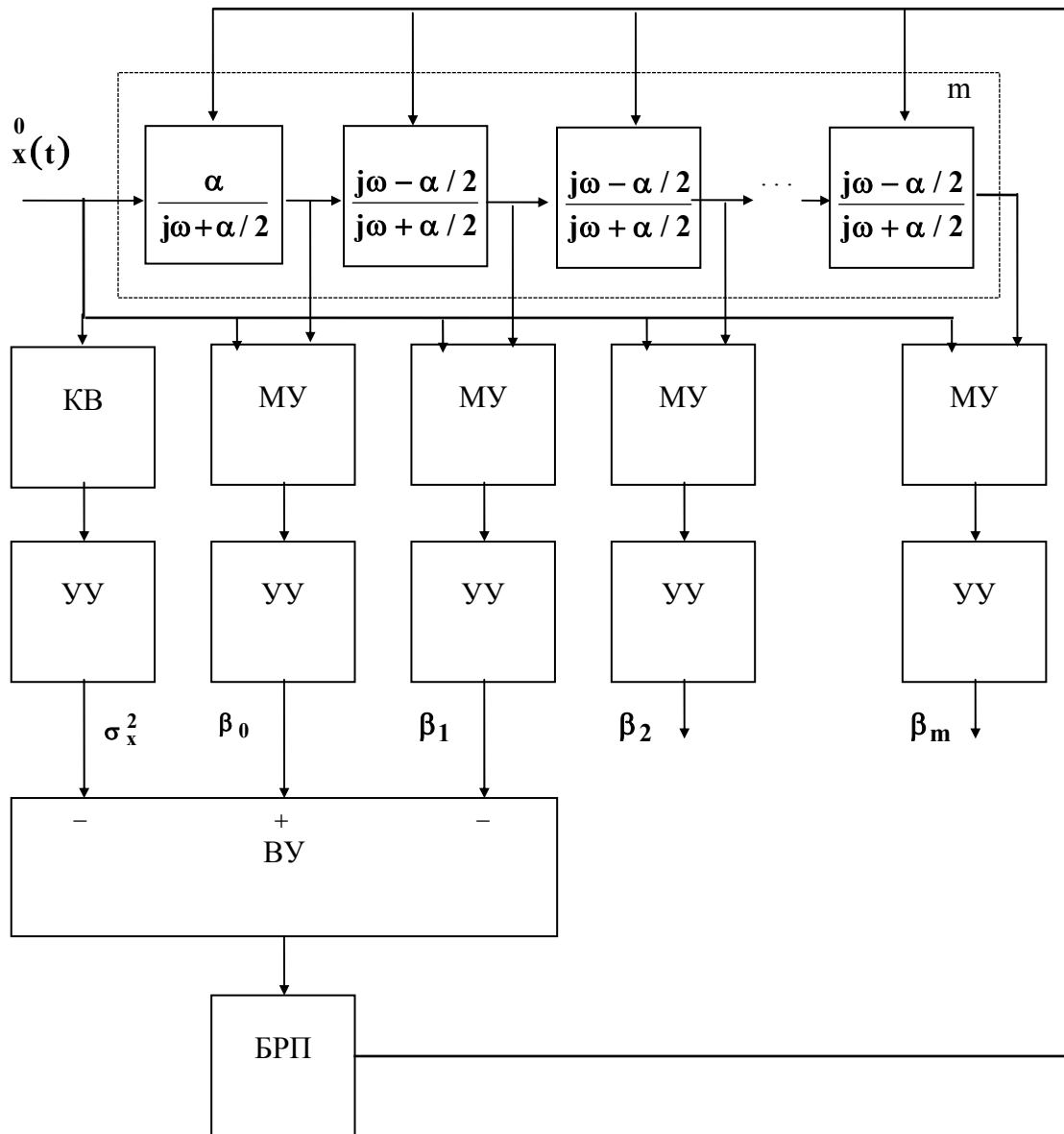


Рисунок 3.20. Коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра с подстройкой параметра  $\alpha$

На рис. 3.21 представлена схема коррелометра, в котором параметры разложения определяются в соответствии с выражением (3.42), а подстройка параметра – в соответствии с выражением (3.59) [6].

Коррелометр содержит фильтр Лагерра  $m$ -го порядка 1, включающий в себя фильтр нулевого порядка  $2_0$  и ячейки «бесконечной» полосы  $2_1, \dots, 2_m$ , блоки умножения 3, блоки усреднения 4, сумматоры 5, 7 (коэффициент передачи –  $1/(m+1)$ ), 9, инвертор 6, дисперсиометр 8, блок регулировки параметра 10.

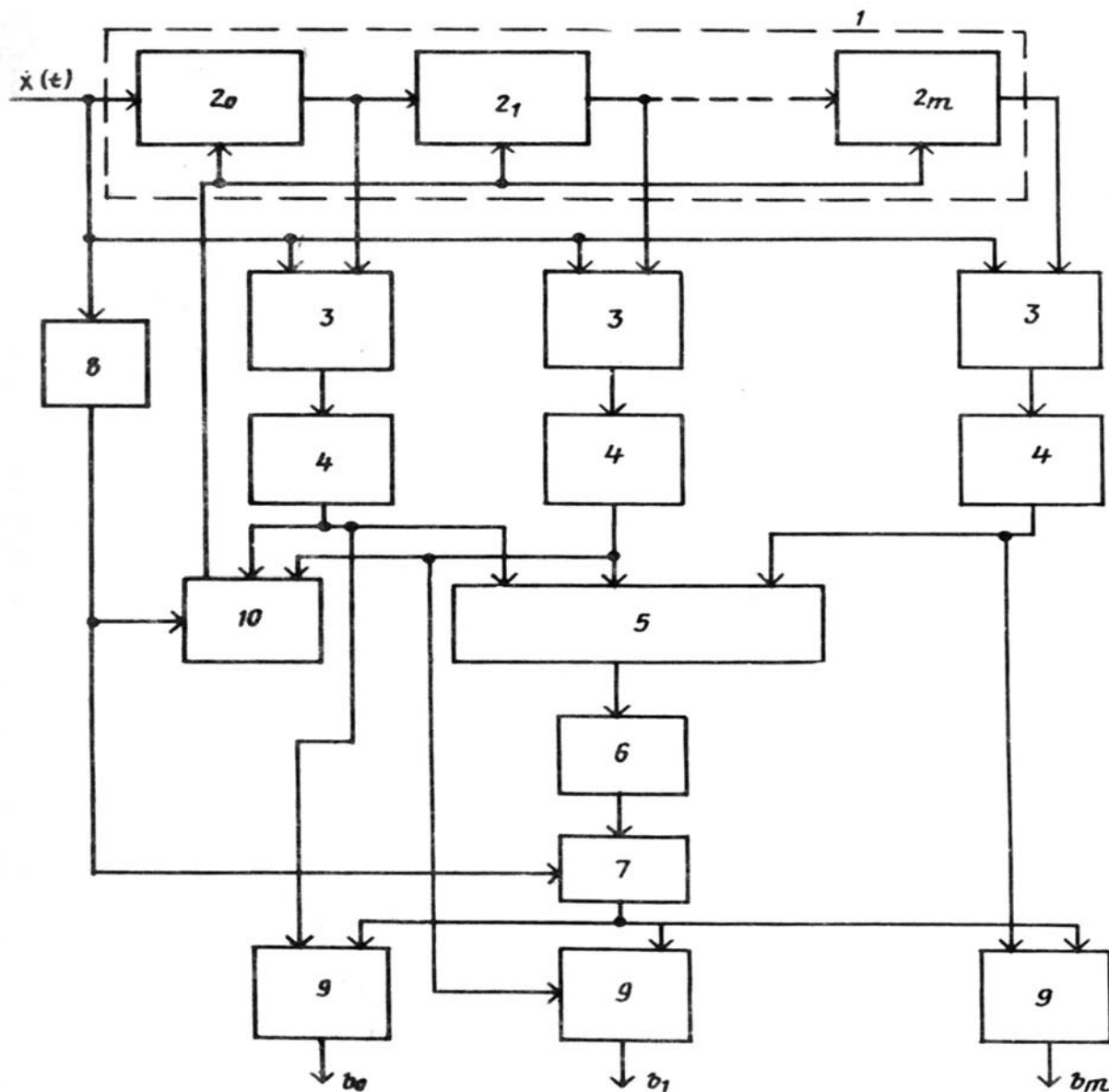


Рисунок 3.21. Коррелометр с аппроксимацией с подстройкой параметра и наблюдением основного свойства корреляционной функции

С помощью коррелометра возможна оценка как коэффициентов  $\beta_k$ , так и  $b_k$ . Выходные сигнал  $k$ -го блока усреднения 4, равные  $\beta_k$ , поступают на сумматор 5 и блок регулировки параметра  $\alpha$  10.

Выходной сигнал  $k$ -го сумматора 9 принимается в качестве оценки коэффициента разложения корреляционной функции в ряд (3.28)  $b_k$ , а значение параметра  $\alpha$  определяется блоком подстройки параметра 10, который работает в соответствии с алгоритмом (3.59).

### 3.6. Минимизация статистической погрешности в коррелометрах с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра

Предложенные алгоритмы точности аппроксимации корреляционных функций путем подбора величины параметра уменьшают лишь методическую погрешность аппроксимации, оставляя без изменения статистическую погрешность, вызванную конечным временем анализа, которая при заданном времени усреднения также является функцией параметра фильтра Лагерра.

Определим основные соотношения для погрешности аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра с учетом параметров усредняющего устройства [54].

Оценка квадратической погрешности аппроксимации имеет вид:

$$\bar{\Delta} = \int_0^{\infty} \left[ K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau, \quad (3.61)$$

где  $\beta_k = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(\tau_2) h_k(\tau_1, \alpha) \overset{\circ}{x}(t - \tau_2) \overset{\circ}{x}(t - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$  - оценка k-го коэффициента разложения;

$h_k(\tau, \alpha) = \alpha L_k(\tau, \alpha)$  - импульсная характеристика фильтра Лагерра k-го порядка;

$H(\tau)$  - импульсная характеристика усредняющего устройства.

Математическое ожидание коэффициента  $\beta_k$ , как следует из (3.8), равно:

$$M[\beta_k] = \alpha \int_0^{\infty} K_x(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau = \beta_k. \quad (3.62)$$

С учётом полученного выражения формула (3.61) может быть представлена в виде:

$$\bar{\Delta} = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \beta_k + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (3.63)$$

Обозначив через  $\overset{\circ}{\beta}_k = \beta_k - \beta_k$  центрированную оценку коэффициента, получим:

$$\bar{\Delta} = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \overset{\circ}{\beta}_k^2. \quad (3.64)$$

Из выражения (3.64) видно, что погрешность аппроксимации представляет сумму двух слагаемых

$$\bar{\Delta} = \Delta_M + \Delta_C.$$

Первое слагаемое

$$\Delta_M = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2$$

представляет собой методическую квадратическую погрешность аппроксимации корреляционной функции ортогональным рядом

$$\sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha).$$

Второе -

$$\overset{\circ}{\Delta}_C = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \overset{\circ}{\beta}_k^2 \quad (3.65)$$

носит случайный характер и целиком зависит от свойств оценок коэффициентов  $\overset{\circ}{\beta}_k$ .

Математическое ожидание погрешности будет равно

$$\Delta = M[\overset{\circ}{\Delta}] = \Delta_M + \overset{\circ}{\Delta}, \quad (3.66)$$

где  $\Delta_C = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m D_k$  - статистическая составляющая погрешности аппроксимации,  $D_k$  -

дисперсия оценки коэффициента  $\overset{\circ}{\beta}_k$ .

Условие экстремума квадратической погрешности аппроксимации  $\Delta$  в области изменения параметра  $\alpha$  примет вид:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Delta_M}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta_C}{\partial \alpha} = 0. \quad (3.67)$$

С учётом выражения (3.22)

$$\frac{\partial \Delta_M}{\partial \alpha} = -\frac{m+1}{\alpha^2} \beta_m \beta_{m+1}. \quad (3.68)$$

Рассмотрим статистическую составляющую погрешности аппроксимации. Для её определения необходимо найти выражение для  $\overset{\circ}{\beta}_k$ :

$$\overset{\circ}{\beta}_k = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(\tau_2) h_k(\tau_1, \alpha) [ \overset{\circ}{x}(t - \tau_2) \overset{\circ}{x}(t - \tau_1 - \tau_2) - K_x(\tau_1) ] d\tau_1 d\tau_2. \quad (3.69)$$

Считая закон распределения входного сигнала нормальным, получим:

$$D_k = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(\tau_2) H(\tau_4) h_k(\tau_3, \alpha) h_k(\tau_1, \alpha) K_x(\tau_4 - \tau_2) K_x(\tau_4 + \tau_3 - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 + \\ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(\tau_2) H(\tau_4) h_k(\tau_3, \alpha) h_k(\tau_1, \alpha) K_x(\tau_2 - \tau_3 - \tau_4) K_x(\tau_4 - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \quad (3.70)$$

Выразив в формуле (3.70)  $K_x(\tau)$  через спектральную плотность исследуемого процесса, получим:

$$D_k = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) |W(j\omega_1 + j\omega_2)|^2 |W_k(j\omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) |W(j\omega_2 - j\omega_1)|^2 |W_k(j\omega_1) W_k(-j\omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 \quad (3.71)$$

где  $W_k(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha/2} \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k$  - частотная характеристика фильтра Лагерра  $k$ -го порядка;

$W(j\omega)$  - частотная характеристика усредняющего фильтра.

Подставляя выражение для  $D_k$  из (3.70) в формулу (3.64) и учитывая, что  $|W_k(j\omega)|^2 = |W_0(j\omega)|^2$ , получим:

$$\Delta_C = \frac{m+1}{\alpha} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) |W(j\omega_1 + j\omega_2)|^2 |W_0(j\omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 + \quad (3.72)$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) |W(j\omega_2 - j\omega_1)|^2 W_k(j\omega_1) W_k(-j\omega_2) d\omega_1 d\omega_2$$

Отсюда

$$\frac{\partial \Delta_C}{\partial \alpha} = (m+1) \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) |W(j\omega_1 + j\omega_2)|^2 J_{1\alpha}(\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 + \quad (3.73)$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) |W(j\omega_2 - j\omega_1)|^2 J_{2\alpha}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2$$

где

$$J_{1\alpha}(\omega_2) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{\alpha} |W_0(j\omega_2)|^2 \right]; \quad (3.74)$$

$$J_{2\alpha}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m W_k(j\omega_1) W_k(j\omega_2) \right]. \quad (3.75)$$

Из выражения (3.15) находим, что  $|W_0(j\omega_2)|^2 = \frac{\alpha^2}{\omega_2^2 + \alpha^2/4}$ .

С учётом этого формула (3.74) примет вид:

$$J_{1\alpha} = \frac{\omega_2^2 - \alpha^2/4}{(\omega_2^2 + \alpha^2/4)^2} = \frac{1}{\alpha^2} \operatorname{Re}[W_k(j\omega_2) W_{k+1}(-j\omega_2)]. \quad (3.76)$$

Так как в соответствии с (3.15)

$$\sum_{k=0}^m W_k(j\omega_1) W_k(-j\omega_2) = \frac{\alpha}{j\omega_1 + j\omega_2} \left\{ 1 - \left[ \frac{j\omega_1 - \alpha/2}{j\omega_1 + \alpha/2} \frac{j\omega_2 - \alpha/2}{j\omega_2 + \alpha/2} \right]^{m+1} \right\}, \quad (3.77)$$

то из выражения (3.75) получим:

$$J_{2\alpha} = (m+1) \frac{j\omega_1 j\omega_2 - \alpha^2/4}{(j\omega_1 + \alpha/2)^2 (j\omega_2 + \alpha/2)^2} \left[ \frac{j\omega_1 - \alpha/2}{j\omega_1 + \alpha/2} \frac{j\omega_2 - \alpha/2}{j\omega_2 + \alpha/2} \right]^m = \quad (3.78)$$

$$= \frac{m+1}{2\alpha^2} [W_m(j\omega_1) W_{m+1}(j\omega_2) + W_{m+1}(j\omega_1) W_m(j\omega_2)]$$

Учитывая, что равенство (3.76) справедливо при любом  $k$ , подставив (3.76), (3.78) в выражение (3.73) и принимая во внимание свойства интегралов, будем иметь:

$$\frac{\partial \Delta_C}{\partial \alpha} = \frac{m+1}{\alpha^2} \left\{ \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) |W(j\omega_1 + j\omega_2)|^2 W_m(j\omega_2) W_{m+1}(-j\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 + \right. \quad (3.79)$$

$$\left. + \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) |W(j\omega_2 - j\omega_1)|^2 W_m(j\omega_1) W_{m+1}(j\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \right\}$$

Отсюда

$$\frac{\partial \Delta_C}{\partial \alpha} = \frac{m+1}{\alpha^2} M \left[ \overset{\circ}{\beta}_m \overset{\circ}{\beta}_{m+1} \right]. \quad (3.80)$$

Таким образом, подставляя выражение для производных составляющих погрешности аппроксимации из (3.68), (3.80) в (3.67), получим выражение.

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = \frac{m+1}{\alpha^2} \left\{ M \left[ \overset{\circ}{\beta}_m \overset{\circ}{\beta}_{m+1} \right] - \beta_m \beta_{m+1} \right\} = 0. \quad (3.81)$$

Так как выражение  $(m+1)/\alpha^2 \neq 0$ , то выполнение условия (3.81) возможно лишь при выполнении условия

$$M \left[ \overset{\circ}{\beta}_m \overset{\circ}{\beta}_{m+1} \right] - \beta_m \beta_{m+1} = 0. \quad (3.82)$$

Произведя в (3.82) замену:  $\beta_m = \overset{\circ}{\beta}_m - \overset{\circ}{\beta}_m$  и  $\beta_{m+1} = \overset{\circ}{\beta}_{m+1} - \overset{\circ}{\beta}_{m+1}$ , получим условие минимума погрешности  $\Delta$ :

$$M \left[ \overset{\circ}{\beta}_m \overset{\circ}{\beta}_{m+1} + \overset{\circ}{\beta}_m \overset{\circ}{\beta}_{m+1} - \overset{\circ}{\beta}_m \overset{\circ}{\beta}_{m+1} \right] = 0. \quad (3.83)$$

Структурная схема коррелометра с подстройкой параметра  $\alpha$  в соответствии с алгоритмом (3.83) представлена на рис. 3.22 [8].

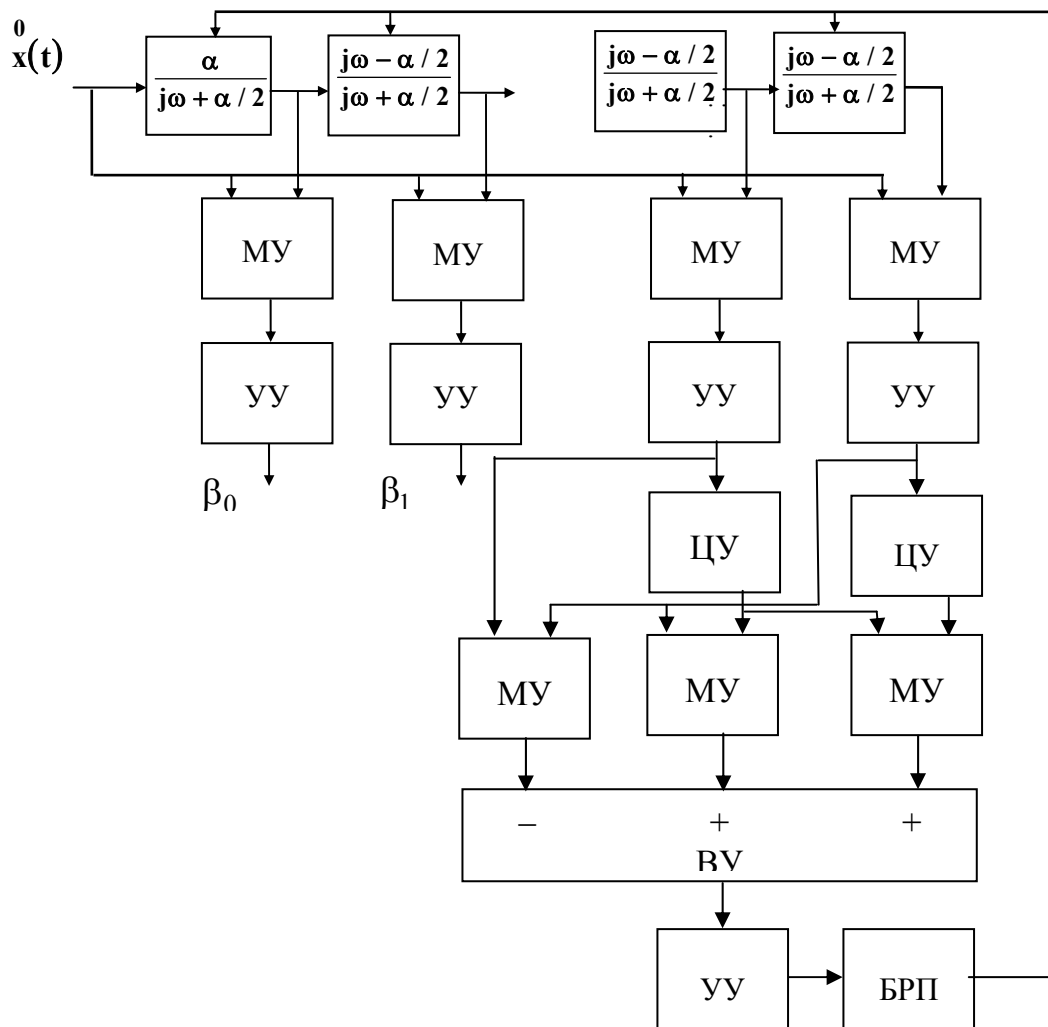


Рисунок 3.22. Коррелометр с аппроксимацией

### 3.7. Анализ погрешности коррелометра с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра

Одной из важных задач прикладного анализа случайных процессов является определение составляющих полной погрешности средств статистических измерений, к которым относится и коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра, содержащий фильтр Лагерра  $k$ -го порядка с частотной характеристикой

$$W_k(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha/2} \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k, \quad k=0, 1, 2, \dots, m, \quad (3.84)$$

включающий в себя фильтр нулевого и последующих порядков, множительные и усредняющие устройства, блок регулировки параметра фильтра Лагерра [54].

Вследствие разброса параметров реального коррелометра, частотная характеристика фильтра Лагерра будет отличаться от идеальной и примет вид:

$$W_k^*(j\omega) = c_k \frac{\alpha_0}{j\omega + \alpha_0/2} \prod_{s=1}^k \frac{j\omega - \lambda_s \alpha_s / 2}{j\omega + \alpha_s / 2}, \quad (3.85)$$

где  $c_k$  - коэффициент преобразования фильтра Лагерра  $k$ -го порядка;

$\alpha_s$  - параметр  $s$ -й ячейки фильтра Лагерра;

$\lambda_s$  - коэффициент преобразования вычитающего устройства  $s$ -й ячейки фильтра Лагерра.

В этом случае квадратическая погрешность аппроксимации будет равна:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[ K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k^* L_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \beta_k^* + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^{*2}, \quad (3.86)$$

где  $\beta_k = \int_0^{\infty} K_x(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau$  - «идеальный»  $k$ -й коэффициент разложения;

$\beta_k^* = \alpha \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x(t-\tau) x(t-\tau-\tau_1) h(\tau) L^*(\tau, \alpha_0, \dots, \alpha_k) d\tau d\tau_1$  - оценка  $k$ -го коэффициента

разложения;

$h(\tau)$  - импульсная характеристика сглаживающего устройства;

$L^*(\tau, \alpha_0, \dots, \alpha_k)$  - импульсная характеристика реального фильтра Лагерра.

Выражение (3.86) является функцией случайных параметров  $c_k$ ,  $\alpha_s$ ,  $\lambda_s$ . Считая отклонения реальных параметров от идеальных малыми, разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора в окрестности математических ожиданий этих параметров, ограничившись квадратичными членами. Тогда математическое ожидание  $\Delta$  при условии некоррелированности параметров  $c_k$ ,  $\alpha_s$ ,  $\lambda_s$  будет равно:

$$M[\Delta] = M[\Delta_{и}^*] + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m M \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial c_j^2} \right] \sigma_{c_j}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m M \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha_j^2} \right] \sigma_{\alpha_j}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m M \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda_j^2} \right] \sigma_{\lambda_j}^2, \quad (3.87)$$

где  $\Delta_{и}^* = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \beta_{ки}^* + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_{ки}^{*2}$ ;



$$\beta_{ки}^* = \alpha \int_0^\infty \int_0^\infty \overset{\circ}{x}(t - \tau) \overset{\circ}{x}(t - \tau - \tau_1) h(\tau) L_k(\tau_1, \alpha) d\tau d\tau_1 - \text{оценка } k\text{-го коэффициента раз-}$$

ложения при условии идеальности фильтра Лагерра;

$\sigma_{c_j}^2, \sigma_{\alpha_j}^2, \sigma_{\lambda_j}^2$  - среднеквадратические относительные погрешности параметров;

Определим коэффициенты ряда (3.87):

$$M \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial c_j^2} \right] = \frac{2}{\alpha} \beta_j^2 + \frac{2}{\alpha} \sigma_{\beta_j}^2, \text{ где } \sigma_{\beta_j}^2 = M \left[ \overset{\circ}{\beta}_{ji}^{*2} \right], \text{ а } \frac{\partial \beta_k^*}{\partial c_j} = \frac{\beta_k^*}{c_j}.$$

$$M \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha_0^2} \right] = \frac{1}{2\alpha^3} \left\{ \sum_{k=0}^m \left[ \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* \left( \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* + 2\overset{\circ}{\beta}_{(k+1)и}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k+2)и}^* \right) \right] + \sum_{k=0}^m \left( \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k+1)и}^* \right)^2 + \sum_{k=0}^m (\beta_k + \beta_{k+1})^2 \right\}.$$

При определении коэффициентов учитывалось, что  $\frac{\partial \beta_k^*}{\partial \alpha_0} = \frac{1}{2\alpha} (\beta_k^* + \beta_{k+1}^*)$ .

$$M \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha_j^2} \right] = \frac{1}{2\alpha^3} \left\{ \sum_{k=j}^m \left[ \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* \left( \overset{\circ}{\beta}_{(k-2)и}^* - 2\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k+2)и}^* \right) \right] + \sum_{k=j}^m \left( \overset{\circ}{\beta}_{(k-1)и}^* - \overset{\circ}{\beta}_{(k+1)и}^* \right)^2 + \sum_{k=j}^m (\beta_{k-1} + \beta_{k+1})^2 \right\}.$$

Отметим, что  $\frac{\partial \beta_k^*}{\partial \alpha_j} = -\frac{1}{2\alpha} (\beta_{k-1}^* - \beta_{k+1}^*)$ .

$$M \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda_j^2} \right] = \frac{1}{2\alpha} \left\{ \sum_{k=j}^m \left[ \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* \left( \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* - 2\overset{\circ}{\beta}_{(k-1)и}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k-2)и}^* \right) \right] + \sum_{k=j}^m \left( \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* - \overset{\circ}{\beta}_{(k-1)и}^* \right)^2 + \sum_{k=j}^m (\beta_k - \beta_{k+1})^2 \right\},$$

$$\text{а } \frac{\partial \beta_k^*}{\partial \lambda_j} = \frac{1}{2} (\beta_k^* - \beta_{k-1}^*).$$

Для получения более общего результата дадим оценки сверху коэффициентам ряда (3.87), предполагая при этом закон распределения входного процесса нормальным.

Для оценки  $M \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial c_j^2} \right]$  необходимо определить дисперсию коэффициентов раз-

ложения  $\beta_{ки}^*$

$$M \left[ \overset{\circ}{\beta}_{ки}^{*2} \right] = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty M \left[ \overset{\circ}{x}(t - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau_2) \overset{\circ}{x}(t - \tau_2 - \tau_3) \right] \times \quad (3.88)$$

$$\times h(\tau) h(\tau_2) L_j(\tau_1, \alpha) L_j(\tau_3, \alpha) d\tau d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 - \beta_j^2$$

Выражение для оценки дисперсии коэффициентов разложения  $M \left[ \overset{\circ}{\beta}_{ки}^{*2} \right]$

удобнее записать в виде:

$$M \left[ \overset{\circ}{\beta}_{ки}^{*2} \right] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) |W_k(j\omega_2)|^2 |W[j(\omega_1 + \omega_2)]|^2 d\omega_1 d\omega_2 + \\ + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) W_k(j\omega_2) W_k(j\omega_1) |W[j(\omega_1 + \omega_2)]|^2 d\omega_1 d\omega_2, \quad (3.89)$$

где  $W_k(j\omega) = \alpha \int_0^{\infty} L_k(\tau, \alpha) e^{-j\omega\tau} d\tau$  - частотная характеристика идеального фильтра Лагерра k-ого порядка.

Если  $W(j\omega_1) = \frac{1}{1 + j\omega_1 T}$ , т.е. представляет собой фильтр нижних частот, то

$$M \left[ \overset{\circ}{\beta}_k^{*2} \right] \leq 8 \frac{\tau_k^{(2)}}{T} \sigma_x^4 = 8 \Theta, \quad (3.90)$$

где  $\tau_k^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau$  - интервал корреляции случайного процесса;

$$\Theta = \frac{\tau_k^{(2)}}{T} \sigma_x^4.$$

Аналогично получим оценки сверху следующих выражений, входящих в коэффициенты разложения ряда (3.87):

$$M \left[ \left( \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k+1)и}^* \right)^2 \right] \leq 8 \Theta;$$

$$M \left[ \left( \overset{\circ}{\beta}_{(k-1)и}^* - \overset{\circ}{\beta}_{(k+1)и}^* \right)^2 \right] \leq 19 \Theta;$$

$$M \left[ \left( \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* - \overset{\circ}{\beta}_{(k-1)и}^* \right)^2 \right] \leq 32 \Theta;$$

$$M \left[ \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* \left( \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* + 2\overset{\circ}{\beta}_{(k+1)и}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k+2)и}^* \right) \right] \leq 19 \Theta;$$

$$M \left[ \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* \left( \overset{\circ}{\beta}_{(k-2)и}^* - 2\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k+2)и}^* \right) \right] \leq 16 \Theta;$$

$$M \left[ \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* \left( \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* - 2\overset{\circ}{\beta}_{(k-1)и}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k-2)и}^* \right) \right] \leq 11 \Theta;$$

$$M \left[ \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* \left( \overset{\circ}{\beta}_{ки}^* - \overset{\circ}{\beta}_{(k-2)и}^* \right) \right] \leq 11 \Theta.$$

Подставив найденные оценки в выражения для коэффициентов ряда (3.87), окончательно получим:

$$\begin{aligned}
M\left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial c_j^2}\right] &\leq \frac{2}{\alpha} \beta_j^2 + \frac{16}{\alpha} \Theta; \\
M\left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha_0^2}\right] &\leq \frac{1}{2\alpha^3} \sum_{k=0}^m (\beta_k + \beta_{k+1})^2 + \frac{27}{2\alpha^3} \Theta (m+1); \\
M\left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha_j^2}\right] &\leq \frac{1}{2\alpha^3} \sum_{k=j}^m (\beta_{k-1} - \beta_{k+1})^2 + \frac{35}{2\alpha^3} \Theta (m+1-j); \\
M\left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda_j^2}\right] &\leq \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=j}^m (\beta_k - \beta_{k-1})^2 + \frac{43}{2\alpha} \Theta (m+1-j).
\end{aligned}$$

Подставив найденные оценки коэффициентов в ряд (3.87), получим:

$$\begin{aligned}
M[\Delta] = M[\Delta_n^*] &+ \frac{1}{2\alpha} \sum_{j=0}^m (\beta_j^2 + 8\Theta) \sigma_{c_j}^2 + \\
&+ \frac{1}{4\alpha^3} \sigma_{\alpha_0}^2 \left\{ \sum_{k=0}^m (\beta_k + \beta_{k+1})^2 + 27 \Theta (m+1) \right\} + \\
&+ \frac{1}{4\alpha^3} \sum_{j=1}^m \sigma_{\alpha_j}^2 \left\{ \sum_{k=j}^m (\beta_{k-1} - \beta_{k+1})^2 + 35 \Theta (m+1-j) \right\} + \\
&+ \frac{1}{4\alpha} \sum_{j=1}^m \sigma_{\lambda_j}^2 \left\{ \sum_{k=j}^m (\beta_k - \beta_{k-1})^2 + 43 \Theta (m+1-j) \right\},
\end{aligned} \tag{3.91}$$

где  $M[\Delta_n^*] = \Delta_{\min} + \frac{(m+1)}{\alpha} 8 \Theta$  - погрешность аппроксимации корреляционной функции при условии, что фильтр Лагерра и вся аппаратура идеальна.

Рассмотрим подробнее составляющие полной погрешности.

Первая составляющая  $M[\Delta_n^*]$  представляет собой методическую погрешность аппроксимации, которая уменьшается с увеличением членов разложения ряда (3.6). Вторая составляющая, представляющая собой методическую статистическую погрешность, пропорциональна числу членов разложения ряда и параметру  $\Theta = \frac{\tau_k^{(2)}}{T} \sigma_x^4$

и с увеличением числа членов растет. Однако, выбором значения параметра  $\Theta$  статистическая методическая погрешность может быть сведена к сколь угодно малой величине. Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие  $T \gg \tau_k^{(2)}$ .

Для оценки составляющих, вызванных разбросом параметров аппаратуры, необходимо найти оценки сверху следующих выражений:

$$\begin{aligned}
\beta_j^2 &\leq 4 \sigma_x^4; \\
(\beta_{k-1} - \beta_{k+1})^2 &\leq 10 \sigma_x^4; \\
(\beta_k + \beta_{k+1})^2 &\leq 4 \sigma_x^4; \\
(\beta_k - \beta_{k-1})^2 &\leq 16 \sigma_x^4.
\end{aligned}$$

При дальнейших исследованиях перейдем к относительной погрешности аппроксимации, определив её в виде:

$$\delta = \frac{M[\Delta]}{\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau} = \frac{M[\Delta]}{\sigma_x^4 \tau_k^{(4)}}. \quad (3.92)$$

где  $\tau_k^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau$  - интервал корреляции.

Введем следующие обозначения:

$$\chi_{c_j}^2 = \sigma_{c_j}^2 / c_j, \chi_{\alpha_j}^2 = \sigma_{\alpha_j}^2 / \alpha_j, \chi_{\lambda_j}^2 = \sigma_{\lambda_j}^2 / \lambda_j, \Omega = \alpha \tau_k^{(4)} \text{ и } \Theta_1 = \Theta / \sigma_x^4.$$

Тогда, после промежуточных преобразований, получим:

$$\delta = \delta_{\min} + \left\{ 8(m+1)\Theta_1 + [4(m+1) + 8(m+1)\Theta_1] \chi_c^2 + [4(m+1) + 27(m+1)\Theta_1] \chi_{\alpha 0}^2 / 4 + [10m(m+1) + 35m(m+1)\Theta_1] \chi_{\alpha}^2 / 8 + [16m(m+1) + 43m(m+1)] \chi_{\lambda}^2 / 8 \right\} / \Omega. \quad (3.93)$$

Это выражение дает возможность дать оценку сверху полной относительной погрешности аппроксимации, если известен разброс и значения параметров коррелометра, относительная методическая погрешность аппроксимации, алгоритм определения параметра  $\alpha$ .

Для упрощения аналитических исследований определим  $\alpha$  в результате решения уравнения (см. подраздел 3.4)

$$\int_0^{\infty} \alpha L_0(\tau, \alpha) K_x(\tau) d\tau - \sigma_x^2 = 0. \quad (3.94)$$

Применив к уравнению (3.94) неравенство Буняковского, получим:

$$\alpha \sqrt{\int_0^{\infty} L_0^2(\tau, \alpha) d\tau} \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau \geq 1. \quad (3.95)$$

Отсюда видно,  $\alpha \tau_k^{(4)} = \Omega \geq 1$ . Поскольку  $\Omega$  в выражении (3.93) находится в знаменателе, возьмем  $\Omega = 1$ .

Положив  $\chi_{c_j}^2 = \chi_{\alpha_j}^2 = \chi_{\lambda_j}^2 = \chi^2$ , представим относительную погрешность в виде двух составляющих:

$$\delta = \delta_{\text{сист}} + \delta_{\text{сл}}, \quad (3.96)$$

где

$$\delta_{\text{сист}} = \delta_{\min} + \chi^2 [5(m+1) + 13m(m+1)/4] - \quad (3.97)$$

систематическая составляющая погрешности;

$$\delta_{\text{сл}} = 8(m+1)\Theta_1 + \chi^2 [59(m+1)/4 + 78m(m+1)/8] \Theta_1 - \quad (3.98)$$

случайная составляющая погрешности.

Систематическая составляющая погрешности представляет собой аддитивную смесь относительной погрешности аппроксимации  $\delta_{\min}$ , величина которой обеспечивается минимальной соответствующим выбором параметров модели (3.6), и аппаратной погрешности, величина которой зависит от среднеквадратической погрешности, параметров фильтра и числа членов разложения ряда.

Случайная составляющая погрешности также представляет собой аддитивную смесь статистической методической погрешности, которая имеет место при идеальной аппаратуре, и погрешности, обусловленной неидеальностью аппаратуры.

Из выражения (3.98) видно, что неидеальность аппаратуры вызывает незначительное увеличение случайной составляющей погрешности, и что всегда может быть сделана сколь угодно малой соответствующим выбором постоянной времени  $T$ .

Наибольшее влияние аппаратурная погрешность оказывает на систематическую составляющую погрешности. Причем, это влияние тем сильнее, чем больше среднеквадратическая погрешность параметров и число членов разложения ряда (3.6). Это, в свою очередь, при большом числе членов разложения будет вызывать необходимость наложения более жестких требований на точность аппаратуры.

Полученные соотношения позволяют по допустимой погрешности аппроксимации в каждом конкретном случае рассчитать основные параметры коррелометра.

### 3.8. Аппроксимация взаимных корреляционных функций

Взаимная корреляционная функция определяется как корреляционный момент значений двух случайных функций, соответствующих выбранным значениям аргументов  $t$  и  $t'$  [45]:

$$K_{xy}(t, t') = M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}(t') \right], \quad (3.99)$$

и является характеристикой степени линейной связи  $x(t)$  и  $y(t)$ .

Если взаимная корреляционная функция не тождественно равна нулю, то случайные процессы называются **коррелированными**. В противном случае процессы называются **некоррелированными**.

Часто, при решении различных прикладных задач, используют нормированную взаимную корреляционную функцию, которую с учетом свойств взаимной корреляционной функции определяют в виде:

$$\rho_{xy}(t, t') = \frac{K_{xy}(t, t')}{\sqrt{D_x(t)} \sqrt{D(t')}}. \quad (3.100)$$

Два случайных процесса называются стационарно связанными, если их взаимная корреляционная функция является функцией разности аргументов:

$$K_{xy}(t, t') = K_{xy}(\tau), \quad (3.101)$$

где  $\tau = t - t'$ .

Из свойств взаимной корреляционной функции следует, что

$$K_{xy}(\tau) = K_{yx}(-\tau). \quad (3.102)$$

Таким образом, взаимную корреляционную функцию необходимо определять как при положительных, так и отрицательных значениях аргумента  $\tau$ .

Нормированная взаимная корреляционная функция для стационарно связанных процессов примет вид:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sqrt{D_x} \sqrt{D_y}}. \quad (3.103)$$

Аналогичным образом, как и для стационарных нормальных процессов, можно определить релейную и полярную взаимные корреляционные функции:

$$\bullet R_{xy}(\tau) = M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \text{sign} \overset{\circ}{y}(t - \tau) \right] = k_{\phi} \sigma_x \rho_{xy}(\tau); \quad (3.104)$$

$$\bullet P_{xy}(\tau) = M \left[ \text{sign} \overset{\circ}{x}(t) \text{sign} \overset{\circ}{y}(t - \tau) \right] = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{xy}(\tau). \quad (3.105)$$

Учитывая большое разнообразие взаимокорреляционных функций, представляется более целесообразным искать модель в виде ортогонального ряда (3.6). Отличие заключается в том, что необходимо аппроксимировать как правую, так и левую ветви взаимокорреляционной функции.

Аппроксимативная модель в этом случае примет вид:

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_{k,\text{п}} l(\tau) L_k(\tau, \alpha) + \sum_k^m \beta_{k,\text{л}} l(-\tau) L_k(-\tau, \alpha), \quad (3.106)$$

$$\text{где } l(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } \tau > 0; \\ 1/2, & \text{при } \tau = 0; \\ 0, & \text{при } \tau < 0; \end{cases} \text{ и } l(-\tau) = \begin{cases} 0, & \text{при } \tau > 0; \\ 1/2, & \text{при } \tau = 0; \\ 1, & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

Коэффициенты разложения определяются в соответствии с выражениями:

$$\beta_{k,\text{п}} = \alpha \int_0^{\infty} K_{xy}(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (3.107)$$

$$\beta_{k,\text{л}} = \alpha \int_0^{\infty} K_{yx}(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (3.108)$$

Как показано в [9], условие для минимизации погрешности аппроксимации связано с выполнением равенства

$$-\frac{m+1}{\alpha^2} (\beta_{m,\text{п}} \beta_{m+1,\text{п}} + \beta_{m,\text{л}} \beta_{m+1,\text{л}}) = 0. \quad (3.109)$$

Так как первый множитель отличен от нуля, для значения параметра  $\alpha$  определяется в результате решения уравнения

$$(\beta_{m,\text{п}} \beta_{m+1,\text{п}} + \beta_{m,\text{л}} \beta_{m+1,\text{л}}) = 0. \quad (3.110)$$

На рис. 3.23 приведена структура взаимного коррелометра с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра, определяющего параметры модели в соответствии с алгоритмами (3.107), (3.108) и (3.110).

Коррелометр содержит два идентичных канала А и Б, каждый из которых, в свою очередь, включает фильтр Лагерра  $m+1$  порядка, имеющий звенья нулевого порядка 1 и «бесконечной» полосы, блоки умножения 3, 6, 7, блоки усреднения 4, блок регулировки параметра 5.

Коррелометр работает следующим образом. При подаче на входы коррелометра двух стационарно связанных случайных процессов сигналы на выходах усредняющих устройств 4 будут определяться выражениями: (3.107) – блок А, (3.108) – блок Б. Блок регулировки параметра 5 при этом будет изменять параметр ячеек фильтров Лагерра  $\alpha$  до установления нулевого сигнала на выходах сумматора 8 (см. (3.110)). Полученные в результате величины  $\beta_{k,\text{п}}$  и  $\beta_{k,\text{л}}$  берутся в качестве оценки коэффициентов ряда (3.106).

Таким образом, предложенный коррелометр осуществляет определение коэффициентов разложение модели взаимной корреляционной функции, обеспечивает минимум квадратической погрешности аппроксимации.

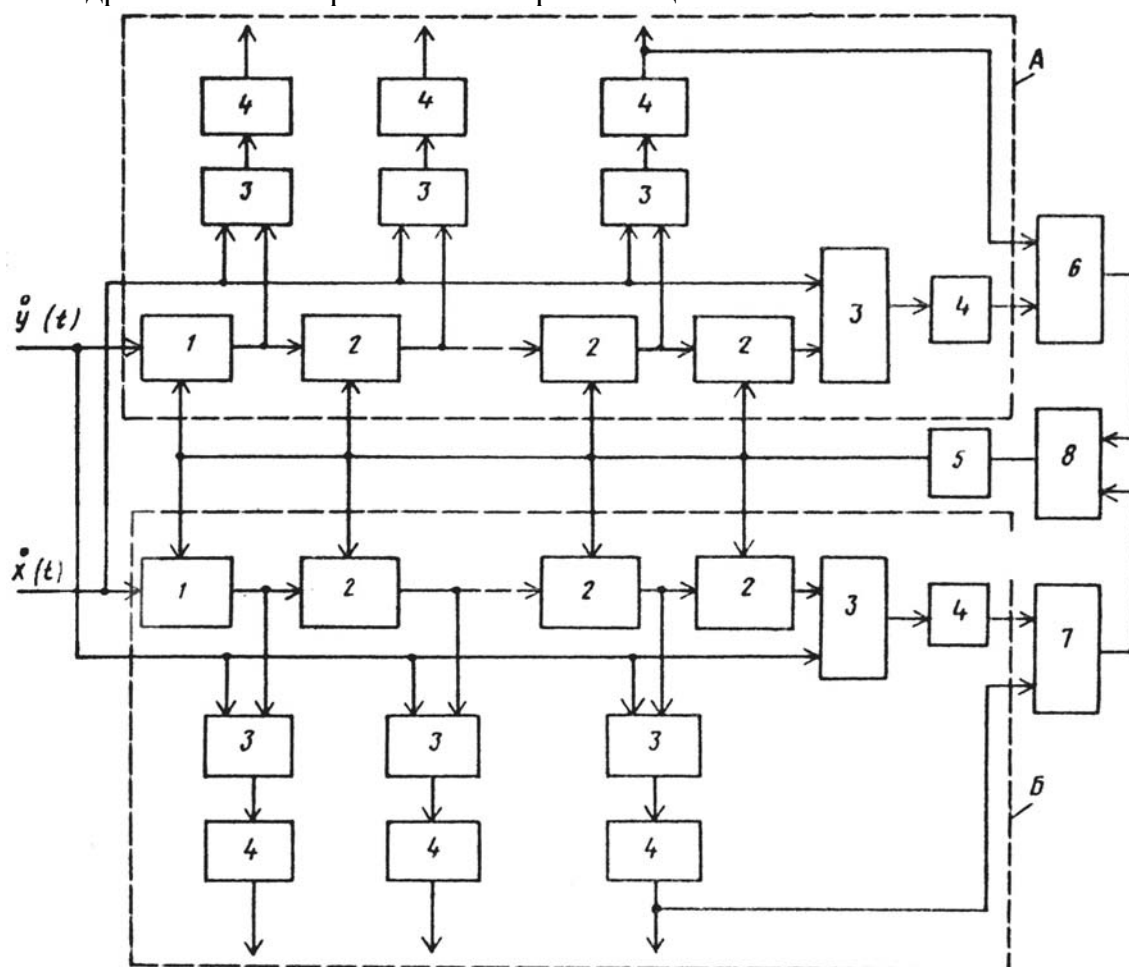
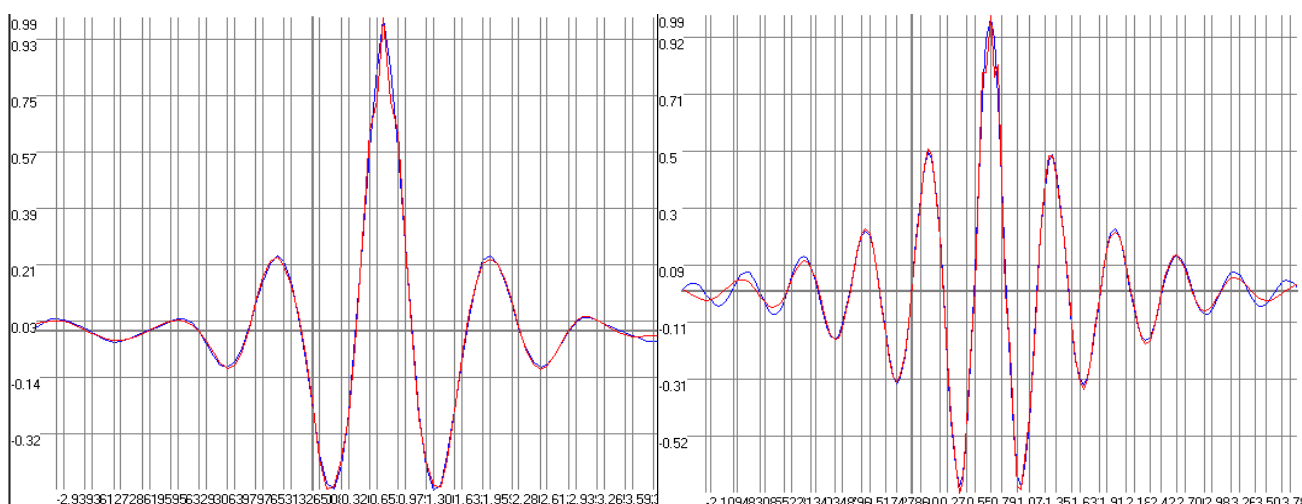


Рисунок 3.23. Взаимный коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра

Результаты аппроксимации корреляционной функций приведены на рис. 3.24.



а)  $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$

б)  $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} (\cos 8\tau + 0,125 \sin 8|\tau|)$

Рисунок 3.24. Результаты аппроксимации

## 4. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ

### 4.1. Основные понятия и определения

Рассмотренные в предыдущих разделах методы и аппаратура для аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями предназначены для работы с **реальными случайными сигналами**. Однако, часто исследователь имеет дело либо с **цифровыми данными**, полученными в ходе эксперимента с помощью информационно-измерительных систем, автоматизированных систем научных исследований, либо - в ходе **цифрового моделирования** того или иного процесса или явления.

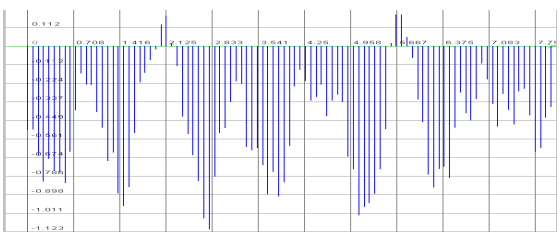
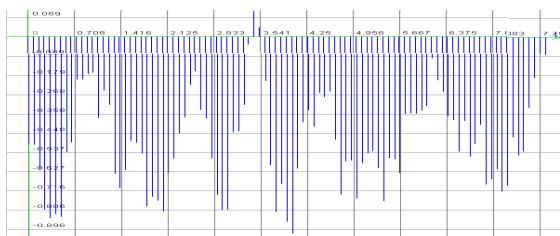
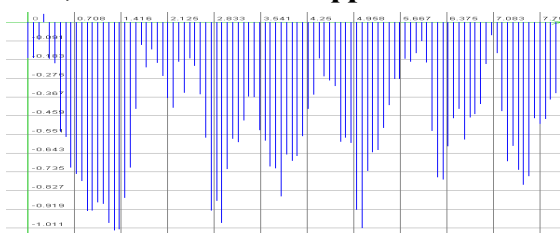


Рисунок 4.1. Примеры реализации регулярных случайных последовательностей

И в первом и во втором случае исследователь имеет дело со случайными последовательностями

$$\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, M}, \quad (4.1)$$

где  $j$  - номер реализации;  $i$  - номер отсчета в  $j$ -ой реализации;  $t_{ji}$  - время отсчёта;

$$\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji}. \quad (4.2)$$

При  $\Delta t_{ji} = \Delta t_0 = \text{const}$  исследователь имеет дело с **регулярной** временной последовательностью - регулярным временным рядом, примеры реализаций которого приведены на рис. 4.1.

Выражения (В.21)-(В.23) для оценки корреляционной функции при анализе последовательностей примут вид:

$$\begin{cases} \hat{K}_{xi}(J\Delta\tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ji} x_{j,i+J}; \\ \hat{K}_{xj}(J\Delta\tau) = \frac{1}{M-J-1} \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} x_{j,i+J}; \\ \hat{K}_{xcp}(J\Delta\tau) = \frac{1}{N(M-J-1)} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} x_{j,i+J}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Следует отметить, что при аппроксимации корреляционных функций с помощью ЭВМ не важно, какая характеристика аппроксимируется -  $t$ -текущая,  $j$ -текущая или средняя, - подход один и тот же.

Блок схема алгоритма аппроксимации представлена на рис. 4.2.

В тех случаях, когда исследователь располагает только одной реализацией, при проведении корреляционного анализа, как правило, используется мультипликативный алгоритм, инвариантный к закону распределения случайного процесса.

При этом интервал дискретизации корреляционной функции, как правило, выбирают равным  $\Delta\tau = \Delta t_0$ .

Для получения достоверных оценок (статистическая погрешность 0,02-0,05), как показали исследования, количество отсчетов  $M=5000-2000$  соответственно [80].



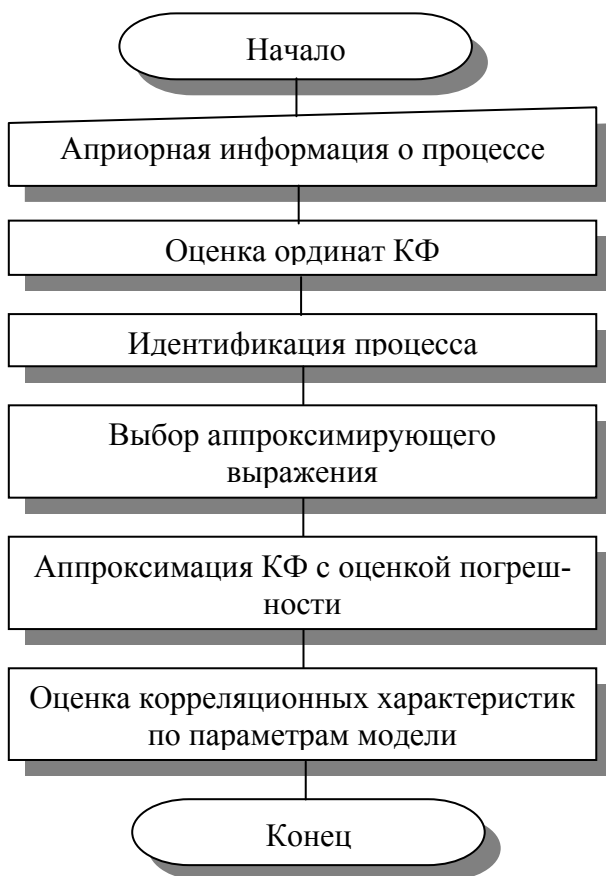


Рисунок 4.2. Алгоритм аппроксимации

Значение интервала дискретизации  $\Delta t$  зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, допустимой погрешности  $\delta$  и способа восстановления корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат корреляционной функции  $J_{\max}$  при линейной интерполяции и различных погрешностях её восстановления представлено в таблице 4.1.

Специфика проведения аппроксимативного корреляционного анализа с помощью ЭВМ заключается либо в «дискретизации» полученных ранее уравнений, либо получении новых уравнений, выборе численного метода для их решения, написании, отладке соответствующего программного обеспечения и проведении счёта.

Количество ординат корреляционной функции и интервалы дискретизации

Таблица 4.1

$\rho_x(\tau) \setminus \delta$	$\Delta t$	$\delta = 0,02$		$\delta = 0,05$	
		$\Delta t$	$J_{\max}$	$\Delta t$	$J_{\max}$
$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sqrt{8\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,4}{\alpha}$	9	$\frac{0,632}{\alpha}$	6
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau )$	$\frac{\sqrt{8\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,4}{\alpha}$	13	$\frac{0,632}{\alpha}$	9
$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau )$	$\frac{\sqrt{8\delta/3}}{\alpha}$	$\frac{0,23}{\alpha}$	19	$\frac{0,365}{\alpha}$	13
$e^{-\alpha \tau }\left(1 + \alpha \tau  + \frac{\alpha^2 \tau^2}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{24\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,693}{\alpha}$	10	$\frac{1,095}{\alpha}$	7
$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{8\delta}{\mu^2 - 1}}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,16}{\mu^2 - 1}}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,4}{\mu^2 - 1}}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$
$e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{8\delta}{\mu^2 + 1}}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,16}{\mu^2 + 1}}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,4}{\mu^2 + 1}}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$

## 4.2. Идентификация корреляционных функций

При аппроксимации корреляционной функции параметрическими моделями исследователь выбором фильтра с регулируемыми параметрами однозначно выбирает аппроксимирующее выражение. Выбор другой модели неизбежно приводит к замене фильтра. При аппроксимации корреляционных функций с помощью ЭВМ исследователь применяет только другую подпрограмму. Учитывая дополнительные возможности, которые даёт ЭВМ, рассмотрим особенности идентификации корреляционных функций.

Следует отметить, что этой задаче всегда уделялось большое внимание [38, 95, 96, 101, 106,].

На практике задачу идентификации решают на основе анализа:

1. статистической корреляционной функции и её соответствия теоретической кривой (см. приложение П.14);
2. фазовых портретов.

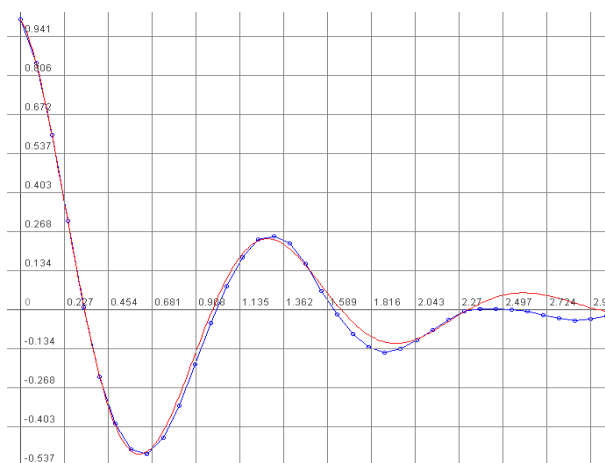


Рисунок 4.3.

При большом числе экспериментальных данных в ряде случаев по виду корреляционной функции можно высказать предположение о её виде. На рис. 4.3, в качестве примера, приведена статистическая корреляционная функция ( $M=1000$ ), которую можно отнести к  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ ,  $\mu \approx 5$  (пять пересечений корреляционной функции оси  $\tau$  на интервале корреляции). Однако, при большом показателе колебательности возможны ошибки идентификации.

Поэтому, представляется более перспективным, как и в случае идентификации законов распределения, использование фазовых портретов. Под фазовым портретом будем понимать графическую зависимость, построенную в координатах:  $\rho_x(\tau)$  и  $\rho'_x(\tau)$  (см. рис. 4.4)

$$\rho'_x(\tau) = \Phi_x[\rho_x(\tau)]. \quad (4.4)$$

Следует отметить, что каждому типу корреляционных функций соответствует свой, уникальный фазовый портрет, зависящий от показателя колебательности. На практике при построении фазового портрета вместо значения производных корреляционных функций возможно определение её приращений на заданном интервале.

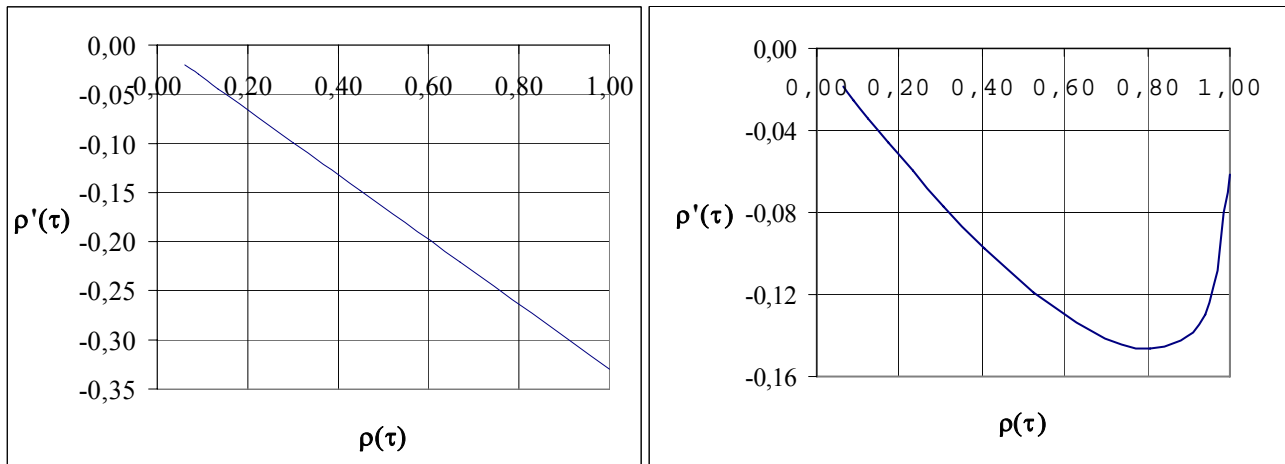
Для сравнения фазовых портретов определим квадратическую погрешность в виде:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=0}^{J_{\max}} [\Phi_T[\rho_x(\tau_i)] - \Phi_x[\rho(\tau_i)]]^2}{\sum_{i=0}^{J_{\max}} \Phi_T^2[\rho_x(\tau_i)]}, \quad (4.5)$$

где  $\Phi_T[\rho_x(\tau_i)]$  - эталонный фазовый портрет.

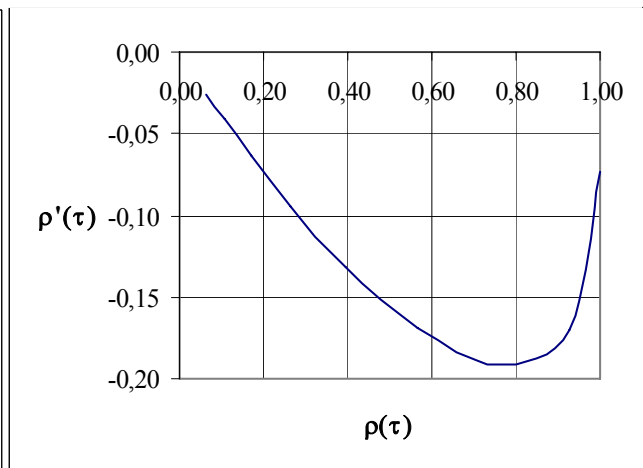
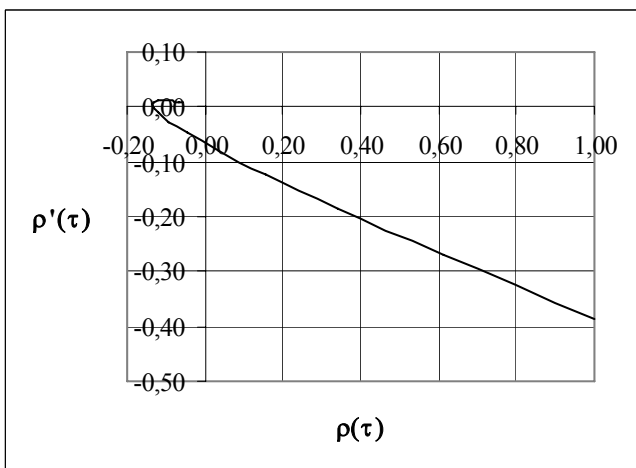
На рис. 4.4 приведены фазовые портреты широко применяемых однопараметрических моделей. Следует отметить, что за исключением фазового портрета корреляционных функций

ляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$ , все фазовые портреты расположены в четвертом квадранте и не пересекают ось абсцисс. Кроме этого, фазовые портреты второй и четвертой моделей очень близки по форме и отличаются лишь численными значениями, в частности, значениями минимума.



а)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \alpha\tau = 0,4$

б)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|), \alpha\tau = 0,4$



в)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|), \alpha\tau = 0,23$

г)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau| + \alpha^2\tau^2/3), \alpha\tau = 0,693$

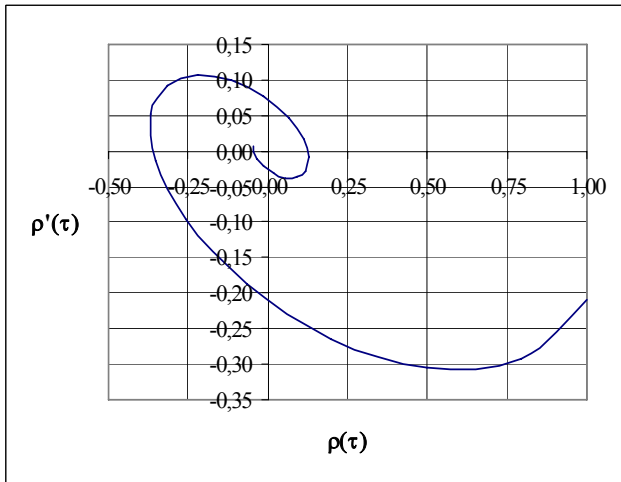
Рисунок 4.4. Фазовые портреты однопараметрических моделей

Фазовые портреты колебательных моделей, представленные на рис. 4.5, расположены во всех квадрантах. Причем, количество пересечений оси абсцисс зависит не от вида корреляционной функции, а от численного значения показателя колебательности  $\mu = \omega_0 / \alpha$ .

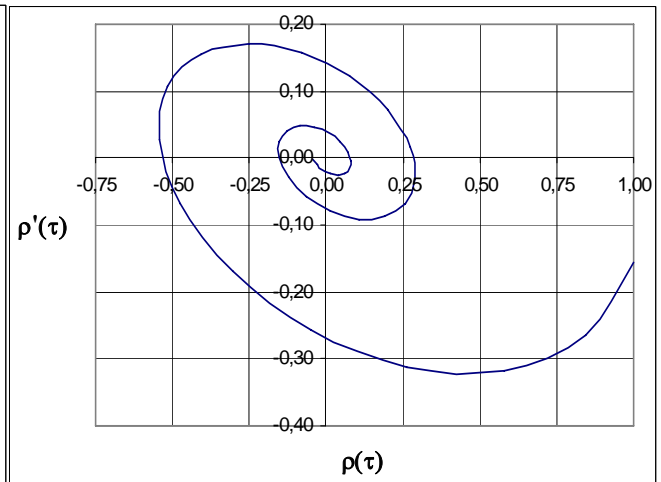
Алгоритм идентификации КФ на основе анализа фазовых портретов заключается в выполнении следующих этапов:

1. построение фазового портрета экспериментальной КФ;
2. выбор типа модели (экспоненциальная, колебательная); построение фазового портрета типовой КФ из выбранной группы и использование ее в качестве эталона;
3. сравнение портретов (вычисление квадратической погрешности);
  - в случае неудовлетворительного результата, следует:
  - повторить алгоритм с п.3, используя при этом в качестве эталонной другую типовую функцию;

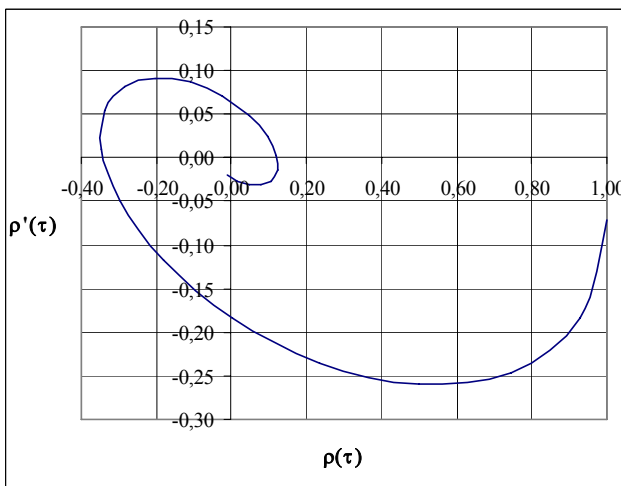
- выбрать из всех имеющихся такую функцию, которая дает минимальное значение погрешности;
- подобрать коэффициент колебательности эталонной модели таким образом, чтобы погрешность была минимальной.



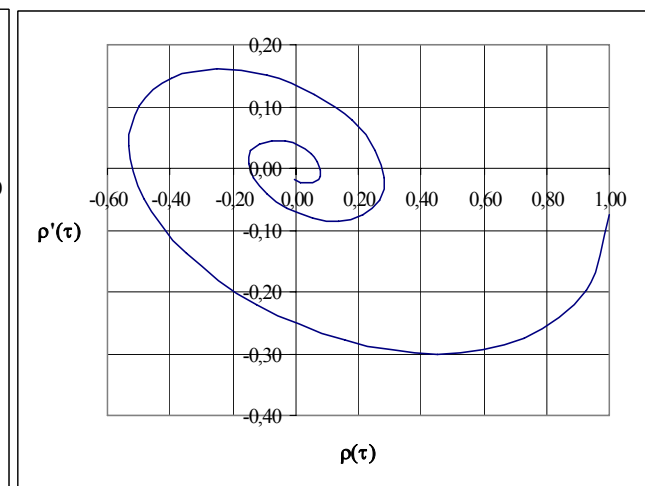
а)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 3$



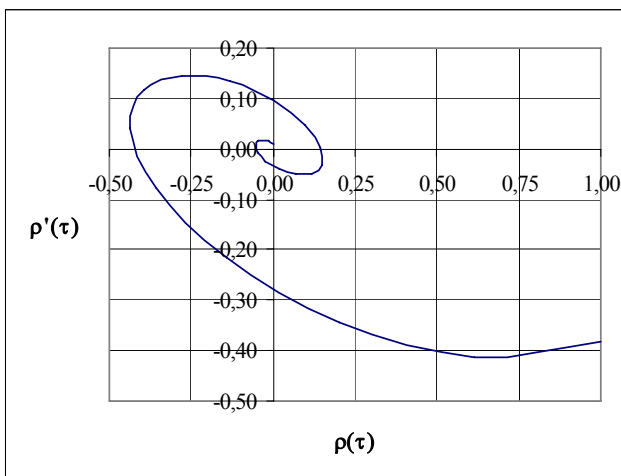
б)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 5$



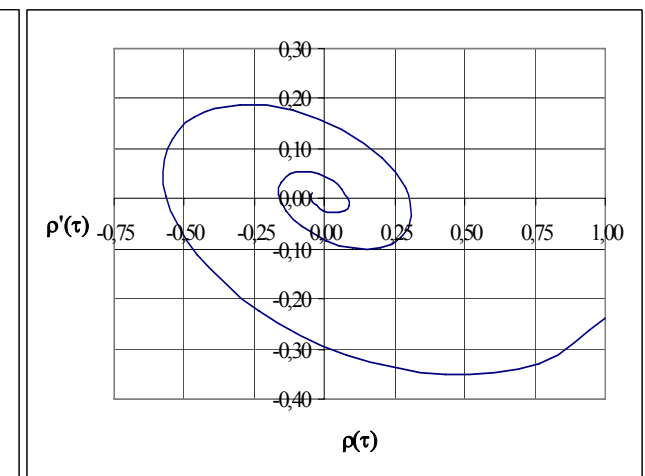
в)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 3$



г)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 5$



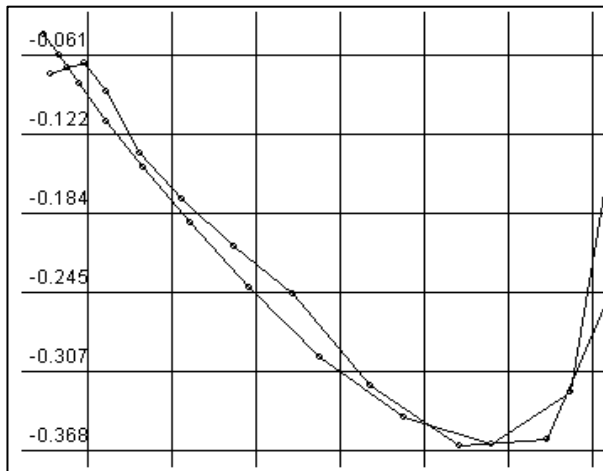
д)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 3$



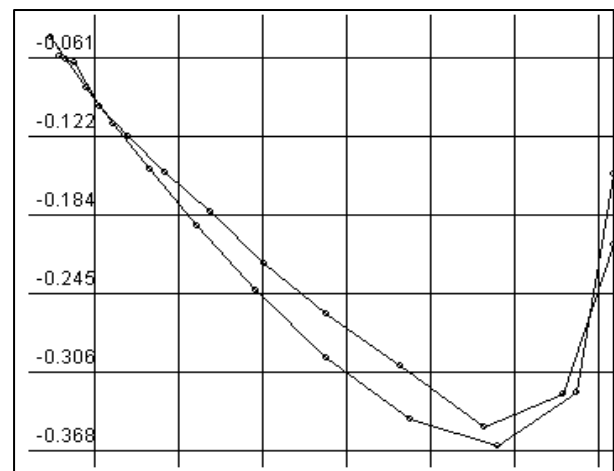
е)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|), \mu = 5$

Рисунок 4.5. Фазовые портреты колебательных корреляционных функций

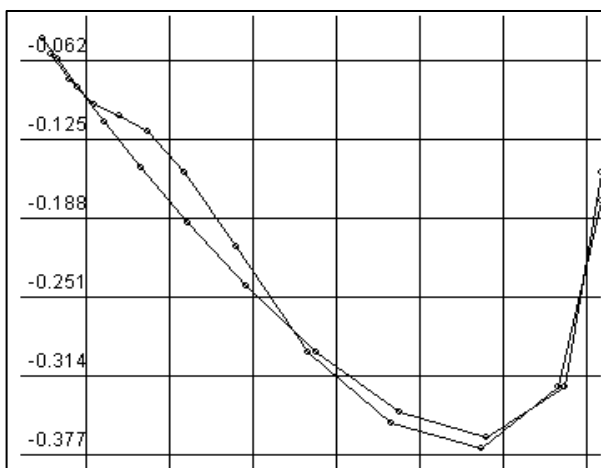
На рис 4.6. представлены результаты обработки псевдослучайных последовательностей с  $\rho_{x_2}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$ , а на рис. 4.7 -  $\rho_{x_5}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  при различных объёмах выборки.



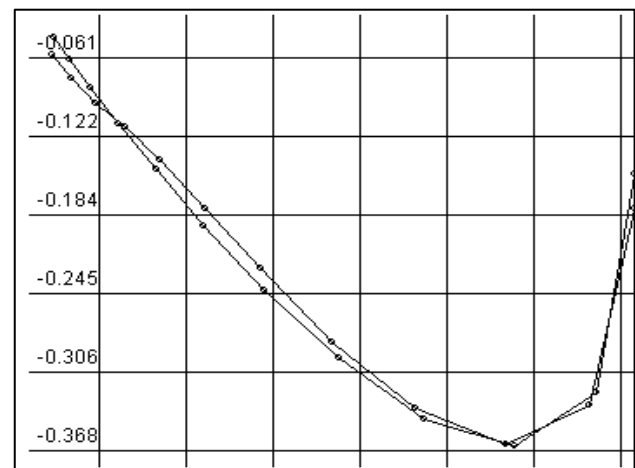
а)  $M=100; \delta^2=0,0283;$



б)  $M=500; \delta^2=0,0165;$



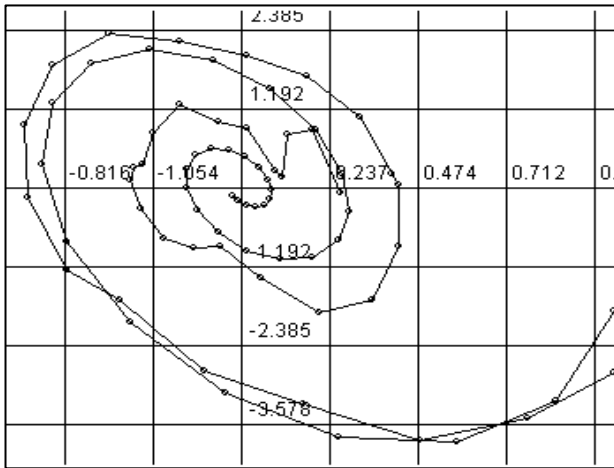
в)  $M=1000; \delta^2=0,0122;$



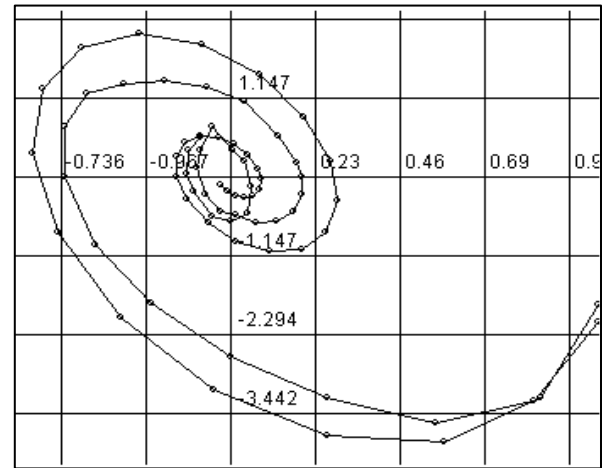
г)  $M=2000; \delta^2=0,0043;$

Рисунок 4.6. Влияние объёма выборки на результат идентификации монотонной корреляционной функции

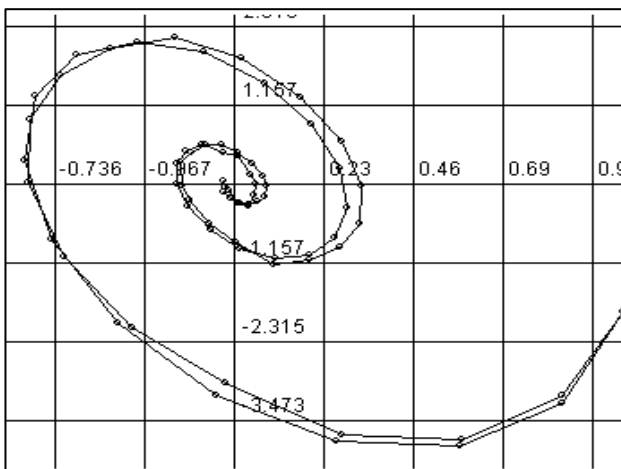
Как и следовало ожидать, погрешность идентификации по фазовым портретам уменьшается с увеличением объёма выборки. Однако, как показали исследования, фазовые портреты являются устойчивыми при отношении интервала наблюдения к интервалу корреляции  $\geq 10$ . Это, в свою очередь, позволяет при решении аппроксимативных задач уменьшить объём выборки при вычислении исходной корреляционной функции по сравнению с принятыми рекомендациями [104]. Кроме этого, фазовые портреты оказываются своеобразной «обратной связью» качества аппроксимации. Для этого необходимо после нахождения параметров аппроксимирующего выражения корреляционной функции построить новый фазовый портрет. Если задача решена правильно, расхождение между уточненным теоретическим и экспериментальным фазовыми портретами будет минимальным.



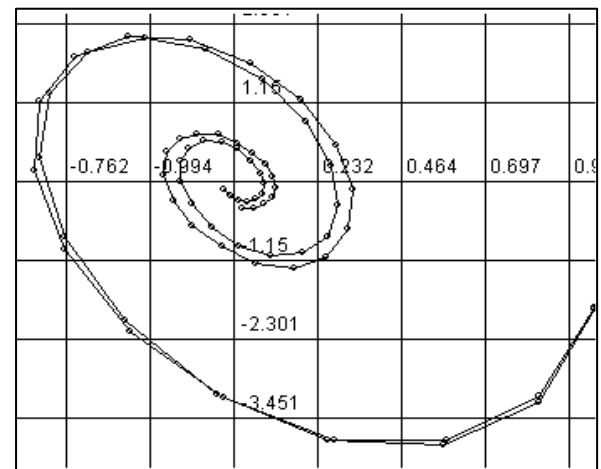
а)  $M=100$ ;  $\delta^2=0.5753$ :



б)  $M=500$ ;  $\delta^2=0.1213$



в)  $M=1000$ ;  $\delta^2=0.0289$ :



г)  $M=2000$ ;  $\delta^2=0.0083$ :

Рисунок 4.7. Влияние объёма выборки на результат идентификации колебательной корреляционной функции

Поскольку при увеличении показателя колебательности наибольшие различия наблюдаются вблизи «нуля» корреляционной функции (см. приложение П.12), наиболее информативным у фазового портрета является «хвост».

На рис. 4.8- 4.13 приведены примеры идентификации корреляционных функций при обработке результатов моделирования псевдослучайных последовательностей на ЭВМ с заданным видом корреляционной функции. Объём выборки равен  $M=1000$ , погрешность восстановления корреляционной функции - 0,02 (см. таблицу 4.2). В качестве метода генерирования использовался метод рекурсивной и нерекурсивной фильтрации «белого шума». Импульсные характеристики формирующих фильтров приведены в приложении П.10-П.11. [112].

Анализ рисунков показывает, что фазовые портреты дают уверенный ответ о принадлежности статистической корреляционной функции к определенному классу как для монотонных, так и колебательных моделей.

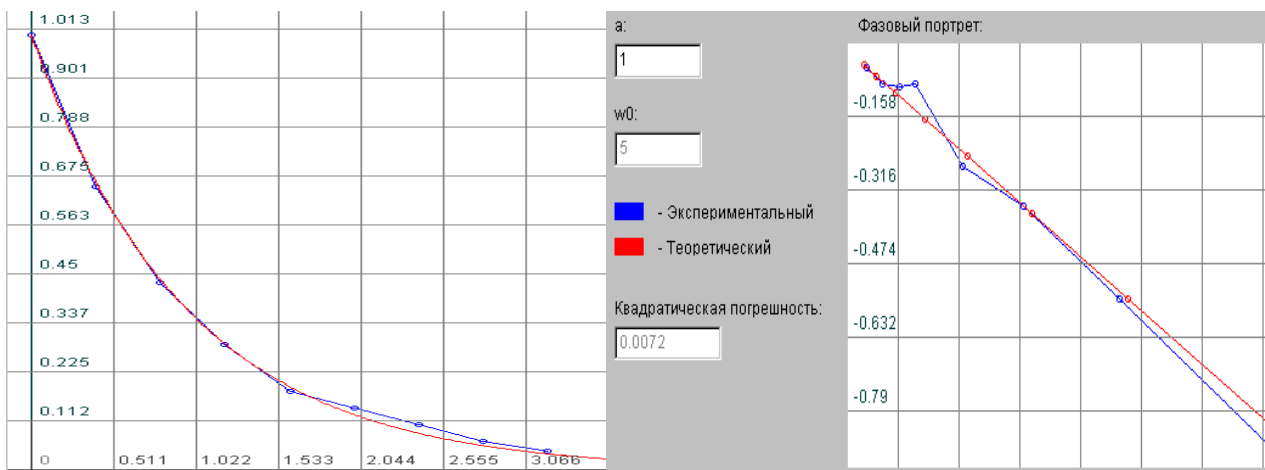


Рисунок 4.8. Аппроксимация  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$

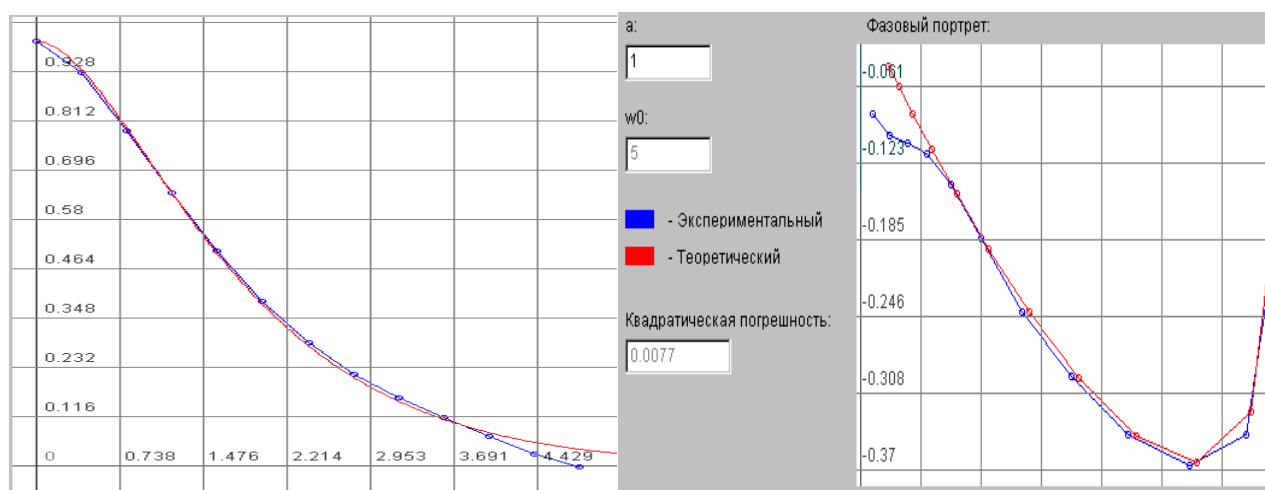


Рисунок 4.9. Аппроксимация  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|)$

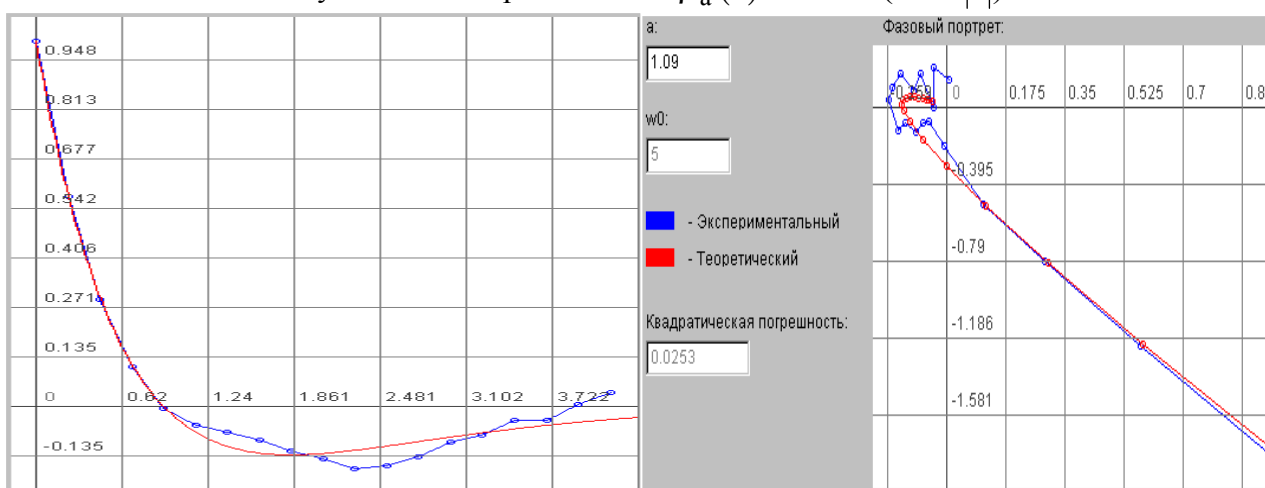


Рисунок 4.10. Аппроксимация  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|)$

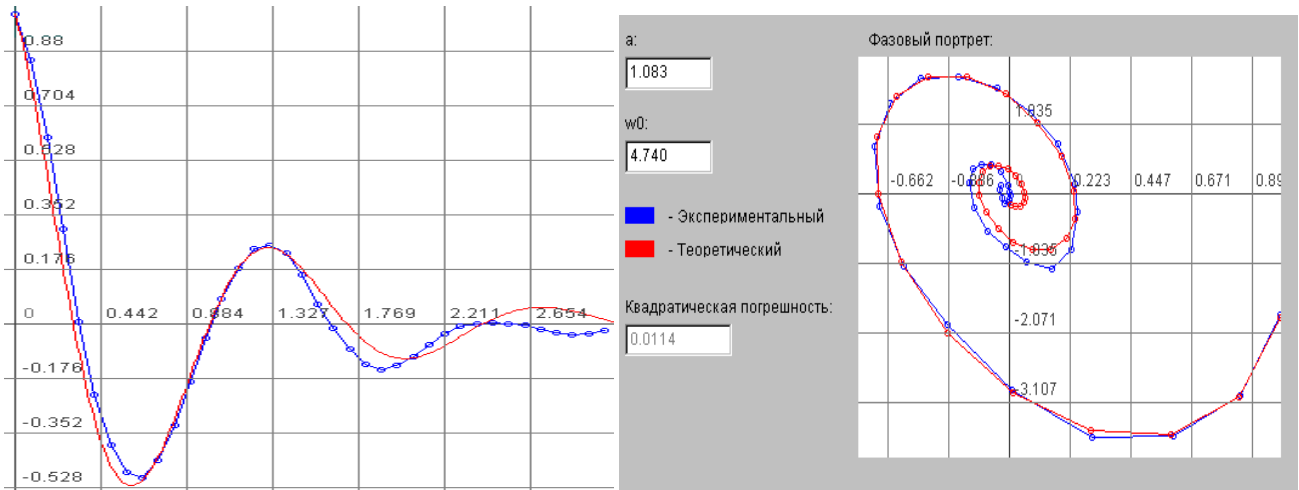


Рисунок 4.11. Аппроксимация  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

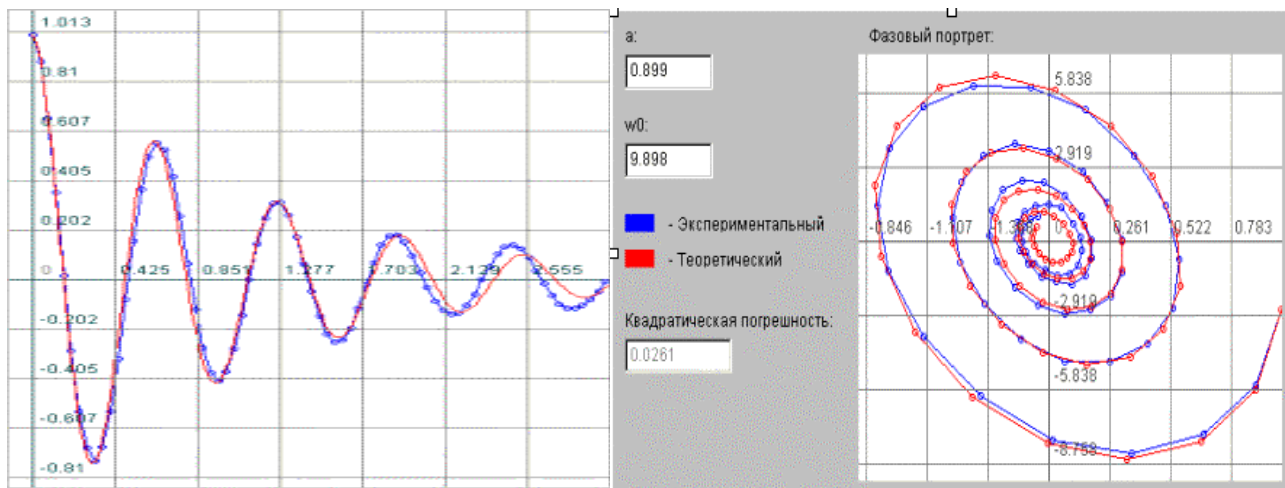


Рисунок 4.12. Аппроксимация  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \cos \omega_0 \tau)$

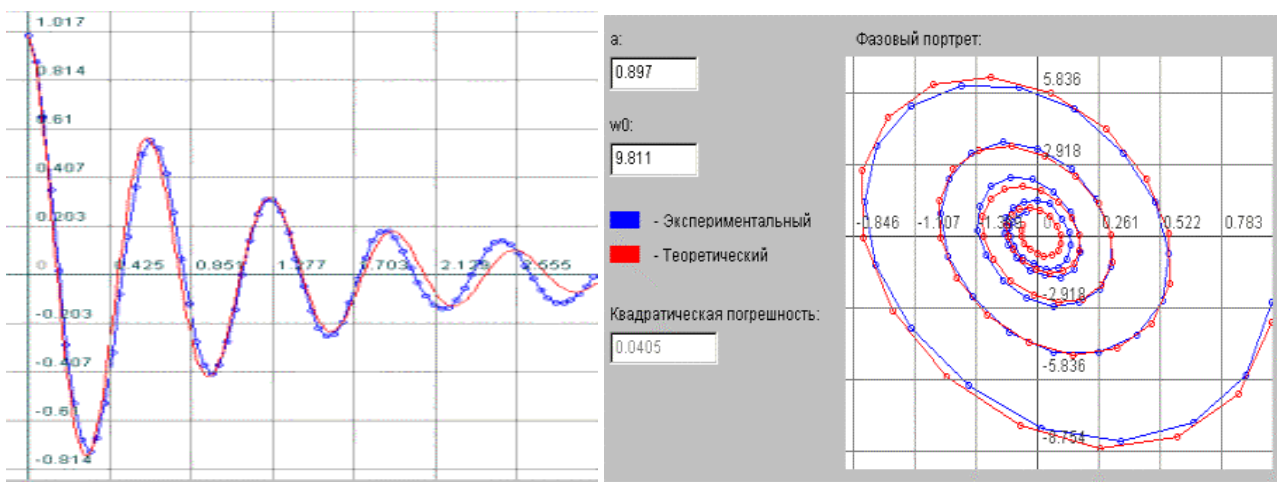


Рисунок 4.13. Аппроксимация  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \cos \omega_0 \tau)$



### 4.3. Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом Ньютона (с аналитическим взятием производных)

Следующим шагом решения задачи аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями является составление системы уравнений (в случае однопараметрических моделей – уравнения) для определения неизвестных параметров. С учетом того, что исходными данными, подлежащими обработке, является массив значений ординат нормированной корреляционной функции -  $\{\rho_x(J\Delta\tau)\}_{J=0,\dots,J_{\max}}$ , критерий приближения целесообразнее записать в виде:

$$\Delta = \sum_{i=0}^{J_{\max}} [\rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)]^2 = \min. \quad (4.6)$$

В случае, если модель содержит один параметр, задача сводится к решению одного уравнения. Найдем это уравнение. Для этого необходимо, подставив в (4.6)  $\rho_a(\tau_i, \alpha)$ , выполнить дифференцирование и результат приравнять нулю:

$$\frac{\partial \Delta(\alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{i=0}^{J_{\max}} [\rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)] \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \quad (4.7)$$

Для решения полученного уравнения воспользуемся методом Ньютона [62]. Тогда

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \alpha_n}}{\sum_{i=0}^N \left\{ R_i \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial^2 \alpha} - \left[ \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^2 \right\} \Big|_{\alpha = \alpha_n}}, \quad (4.8)$$

где  $R_i = \rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)$ .

Начальное приближение  $\alpha_0 = \frac{\epsilon_{k_{\max}}}{3}$  (см. таблицу 6.1). Процесс вычисления заканчивается, когда  $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \epsilon$ , где  $\epsilon$  - любое малое наперед заданное число.

Рассмотрим примеры решения задачи аппроксимации корреляционных функций типовыми однопараметрическими моделями.

Аналитическое выражение  $\rho_{a1}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}$  широко применяется для аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых широкополосных процессов. Параметр модели определяется в результате решения следующего уравнения [88]:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=1}^{J_{\max}} R_i \tau_i e^{-\alpha_n \tau_i}}{\sum_{i=1}^{J_{\max}} [\tau_i^2 e^{-2\alpha_n \tau_i} - R_i \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i}]}, \quad (4.9)$$

где  $R_i = \rho_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i}$ .

Следует подчеркнуть, что эта простая модель оказывается весьма полезной при определении скорости затухания корреляционной функции, оценки максимального интервала корреляции. На рис 4.14. приведен пример аппроксимации корреляционной

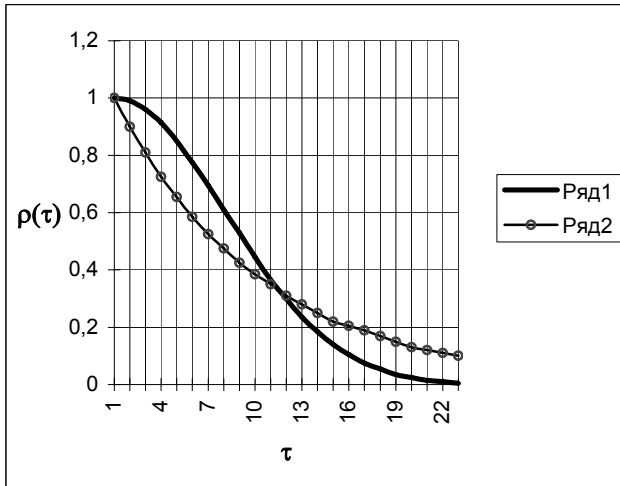


Рисунок 4.14. Результат аппроксимации

функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\tau^2}$  (ряд 1) моделью  $\rho_a(\tau) = e^{-1,07\tau}$  (ряд 2), параметр которой найден в результате решения уравнения (4.9).

Подобные задачи возникают при создании автоматизированных систем сбора и обработки информации, систем автоматического управления и регулирования, систем передачи данных, когда приходится выбирать шаг дискретизации во времени. Часто эта модель выбирается в качестве базовой при оценке точностных характеристик аппаратно-программных средств, так как существует большой класс динамических систем, для которых случайные

процессы с экспоненциальной корреляционной функцией оказываются наилучшими с точки зрения помехозащищенности.

Аналитическое выражение  $\rho_{a2}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$  применяется для аппроксимации корреляционных функций однократно дифференцируемых широкополосных случайных процессов. Параметр модели определяется в результате решения уравнения [88]:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=1}^{J_{\max}} R_i \alpha_n \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i}}{\sum_{i=1}^{J_{\max}} \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i} [R_i (\alpha_n \tau_i - 1) - \alpha_n^2 \tau_i^2]} \quad (4.10)$$

где  $R_i = \rho_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 + \alpha_n \tau_i)$ .

Аналитическое выражение  $\rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$  применяется для аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых широкополосных процессов, у которых  $S_x(0) = 0$ . Параметр определяется в результате решения уравнения [88]:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=1}^{J_{\max}} R_i \tau_i e^{-\alpha_n \tau_i} (\alpha_n \tau_i - 1)}{\sum_{i=1}^{J_{\max}} [R_i \tau_i^2 e^{-\alpha_n \tau_i} (2 - \alpha_n \tau_i) - \tau_i^2 e^{-2\alpha_n \tau_i} (\alpha_n \tau_i - 1)]} \quad (4.11)$$

где  $R_i = \rho_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 - \alpha_n \tau_i)$ .

Аналитическое выражение  $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  применяется при аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых узкополосных процессов. Параметры модели определяются в результате решения системы двух трансцендентных уравнений методом Ньютона [88]:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{S_1 S_5 - S_2 S_4}{S_3 S_5 - S_4^2}; \\ \omega_{n+1} = \omega_n - \frac{S_2 S_3 - S_1 S_4}{S_3 S_5 - S_4^2}, \end{cases} \quad (4.12)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= e^{-\alpha_n \tau_i}; A_2 = A_1 \cos \omega_n \tau_i; A_3 = A_1 \sin \omega_n \tau_i; R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - A_2; \\ S_1 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i A_2 \tau_i; S_2 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i A_3 \tau_i; S_3 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \tau_i^2 A_2 (A_2 - R_i); S_4 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \tau_i^2 A_3 (A_2 - R_i); \\ S_5 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \tau_i^2 (A_3^2 + R_i A_2) \end{aligned}$$

Начальные значения  $\alpha$  и  $\omega_0$  выбираются следующим образом (см. таблицу 6.1):

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{3}{\tau_{k \max}}; \\ \omega_0 = \frac{\pi}{2 \tau'}, \end{cases} \quad (4.13)$$

где  $\tau'$  - интервал времени, соответствующий первому пересечению  $\hat{\rho}_x(\tau)$  оси абсцисс.

Процесс вычисления заканчивается при совместном выполнении условий:

$$\begin{cases} |\omega_{n+1} - \omega_n| \leq \varepsilon; \\ |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (4.14)$$

При аппроксимации корреляционных функций дифференцируемых узкополосных процессов применяется аналитическое выражение

$$\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Система уравнений для определения параметров модели имеет вид (4.12).

Для рассматриваемого случая [88]

$$\begin{aligned} A_1 &= e^{-\alpha_n \tau_i}; A_2 = A_1 \cos \omega_n \tau_i; A_3 = A_1 \sin \omega_n \tau_i; R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - A_2 - \frac{\alpha_n A_3}{\omega_n}; \\ S_1 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i (A_2 \tau_i + A_3 (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n); S_2 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i (A_3 (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) - A_2 \tau_i \alpha_n / \omega_n); \\ S_3 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left( (A_2 \tau_i + A_3 (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n)^2 - R_i \tau_i (A_3 (\alpha_n \tau_i + 2) / \omega_n + A_2 \tau_i) \right); \quad (4.15) \\ S_4 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left( (A_2 \tau_i + A_3 (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n) (A_3 (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) - A_2 \tau_i \alpha_n / \omega_n) + \right. \\ &\quad \left. + R_i (A_2 \tau_i (\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n - A_3 ((\alpha_n \tau_i - 1) / \omega_n^2 + \tau_i^2)) \right); \\ S_5 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left( (A_3 (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) - A_2 \tau_i \alpha_n / \omega_n)^2 + R_i (A_2 \tau_i^2 + A_3 (\tau_i^2 + 1 / \omega_n^2) \alpha_n / \omega_n) \right). \end{aligned}$$

При аппроксимации корреляционных функций недифференцируемых узкополосных случайных процессов, у которых  $S_x(0) = 0$ , применяют выражение

$$\rho_{a6}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Система уравнений для определения параметров модели имеет тот же вид – (4.12). В этом случае [88]

$$\begin{aligned} A_1 &= e^{-\alpha_n \tau_i}; A_2 = A_1 \cos \omega_n \tau_i; A_3 = A_1 \sin \omega_n \tau_i; R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - A_2 + \frac{\alpha_n A_3}{\omega_n}; \\ S_1 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i (A_2 \tau_i + A_3 (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n); S_2 = \sum_{i=0}^{J_{\max}} R_i \left( A_2 \alpha_n \tau_i / \omega_n + (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) A_3 \right); \\ S_3 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left( (A_2 \tau_i + A_3 (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n)^2 - R_i \tau_i (A_2 \tau_i + A_3 (2 - \alpha_n \tau_i / \omega_n)) \right); \\ S_4 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left( (A_2 \tau_i + A_3 (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n) \left( A_2 \alpha_n \tau_i / \omega_n + (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) A_3 \right) + \right. \\ &\quad \left. + R_i \left( A_2 \tau_i (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n - A_3 (\tau_i^2 + (1 - \alpha_n \tau_i) / \omega_n^2) \right) \right); \\ S_5 &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left( (A_2 \alpha_n \tau_i / \omega_n + (\tau_i - \alpha_n / \omega_n^2) A_3)^2 + R_i \left( A_3 (1 / \omega_n^2 - \tau_i^2) \alpha_n / \omega_n + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_2 \tau_i (\tau_i - 2 \alpha_n / \omega_n^2) \right) \right); \end{aligned} \quad (4.16)$$

Начальные значения параметров модели и условия окончания вычислений аналогичны предыдущему случаю.

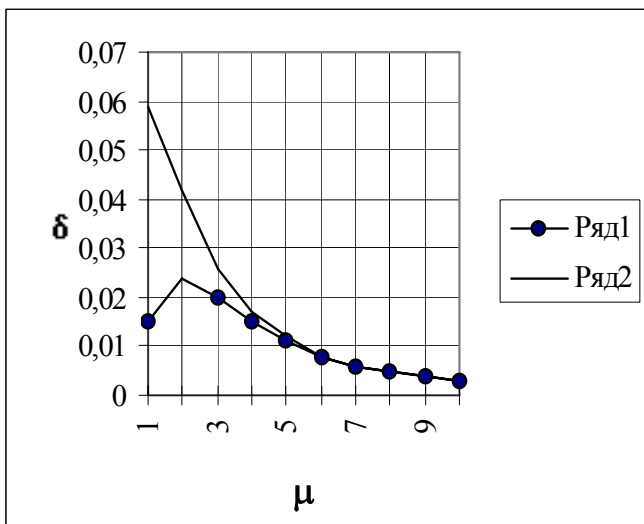


Рисунок 4.15. Погрешности аппроксимации корреляционных функций

Сравнительный анализ выражений для оценки параметров двухпараметрических выражений показывает, что они существенно проще для экспоненциально-косинусной модели. Заметим, что при увеличении  $\mu$ , модели  $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0)$  и  $\rho_{a6}(\tau, \alpha, \omega_0)$  стремятся к модели  $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0)$ . Т.е., в том случае, когда не требуется сохранения свойств случайного процесса: дифференцируемости или  $S_x(0)=0$ , - более целесообразно применять в качестве модели узкополосного процесса экспоненциально-косинусную корреляционную функцию -  $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0)$ , допускающую более простое определение параметров и приемлемые погрешности аппроксимации (см. рис. 4.15). Ряд 1

иллюстрирует погрешности аппроксимации модели  $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0)$ , а ряд 2 – модели  $\rho_{a6}(\tau, \alpha, \omega_0)$  моделью  $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0)$ . Отсюда видно, что независимо от вида аппроксимируемой модели, погрешности аппроксимации при  $\mu \geq 2$  меньше 0,05, что вполне допустимо при решении большинства практических задач.

В тех случаях, когда требуется учёт более «тонких свойств» процесса, необходимо тщательнее подходить к выбору аппроксимирующего выражения. На рис. 4.16 приведены примеры определения параметров колебательных моделей корреляционных функций с помощью системы [38, 73, 83, 109].

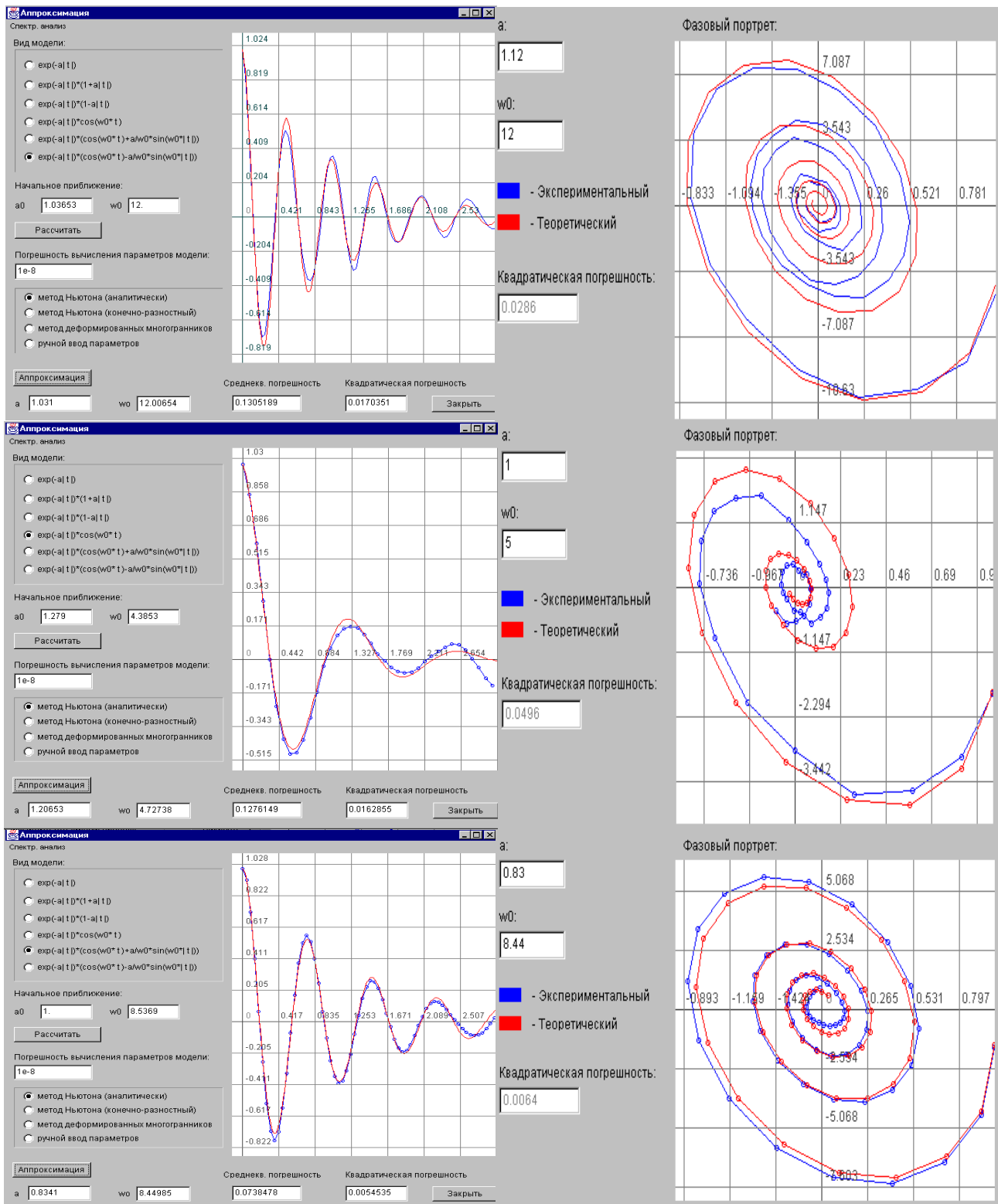


Рисунок 4.16. Аппроксимация корреляционных функций колебательными моделями

#### 4.4. Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом Ньютона (с конечно-разностными производными)

Следует отметить, что система уравнений с использованием метода Ньютона с аналитическим взятием первой и второй производных имеет достаточно сложный вид, обладает плохой сходимостью, решение сильно зависит от начального приближения. Одним из способов устранения ряда недостатков является применение конечно-разностного метода Ньютона [108].

Рассмотрим примеры решения задачи аппроксимации корреляционных функций типовыми однопараметрическими моделями с использованием конечно-разностного метода Ньютона [38, 73].

$$1. \rho_{a1}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}.$$

Параметр модели определяется в результате решения уравнения (4.7), где

$$\begin{aligned} R_i &= \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i}; \\ \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} &\approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} - e^{-\alpha_n \tau_i}}{h}; \\ \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} &\approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i} - 2e^{-\alpha_n \tau_i} + e^{-(\alpha_n-h)\tau_i}}{h^2} \end{aligned}$$

где  $h$  – любое достаточно малое приращение по  $\alpha$ .

$$2. \rho_{a2}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

Параметр модели определяется в результате решения уравнения (4.7), в котором:

$$\begin{aligned} R_i &= \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i}(1 + \alpha_n \tau_i); \\ \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} &\approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i}(1 + (\alpha_n + h)\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i}(1 + \alpha_n \tau_i)}{h}; \\ \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} &\approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i}(1 + (\alpha_n + h)\tau_i) - 2e^{-\alpha_n \tau_i}(1 + \alpha_n \tau_i) + e^{-(\alpha_n-h)\tau_i}(1 + (\alpha_n - h)\tau_i)}{h^2}, \end{aligned}$$

$$3. \rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$$

Параметр определяется в результате решения уравнения (4.7), где:

$$\begin{aligned} R_i &= \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i}(1 - \alpha_n \tau_i); \\ \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} &\approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i}(1 - (\alpha_n + h)\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i}(1 - \alpha_n \tau_i)}{h}; \\ \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} &\approx \frac{e^{-(\alpha_n+h)\tau_i}(1 - (\alpha_n + h)\tau_i) - 2e^{-\alpha_n \tau_i}(1 - \alpha_n \tau_i) + e^{-(\alpha_n-h)\tau_i}(1 - (\alpha_n - h)\tau_i)}{h^2}. \end{aligned}$$

Для двухпараметрических моделей корреляционных функций параметры модели определяются в результате решения системы двух трансцендентных уравнений методом Ньютона:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=0}^N R_i \frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_n}}{\sum_{i=0}^N \left( R_i \frac{\partial^2 \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} - \left( \frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \right)^2 \right) \Big|_{\alpha=\alpha_n}}; \\ \omega_{n+1} = \omega_n - \frac{\sum_{i=0}^N R_i \frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \Big|_{\omega_0=\omega_n}}{\sum_{i=0}^N \left( R_i \frac{\partial^2 \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0^2} - \left( \frac{\partial \rho_\alpha(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \right)^2 \right) \Big|_{\omega_0=\omega_n}}. \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Рассмотрим примеры решения задачи аппроксимации корреляционных функций типовыми двухпараметрическими моделями с использованием конечно-разностного метода Ньютона [67].

4. Для модели  $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha n \tau_i} \cos \omega_n \tau_i;$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{\cos \omega_n \tau_i (e^{-(\alpha n + h)\tau_i} - e^{-\alpha n \tau_i})}{h};$$

$$\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{\cos \omega_n \tau_i (e^{-(\alpha n + h)\tau_i} - 2e^{-\alpha n \tau_i} + e^{-(\alpha n - h)\tau_i})}{h^2};$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{e^{-\alpha n \tau_i} (\cos((\omega_n + k)\tau_i) - \cos \omega_n \tau_i)}{k};$$

$$\frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{e^{-\alpha n \tau_i} (\cos((\omega_n + k)\tau_i) - 2\cos \omega_n \tau_i + \cos((\omega_n - k)\tau_i))}{k^2},$$

где  $h$  – любое достаточно малое приращение по  $\alpha$ ,

$k$  – любое достаточно малое приращение по  $\omega_0$ .

5. Для модели  $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - \left( e^{-\alpha n \tau_i} \left( \cos \omega_n \tau_i + \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right);$$

$$S_1 = e^{-\alpha n \tau_i} \left( \cos \omega_n \tau_i + \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_2 = e^{-(\alpha n + h)\tau_i} \left( \cos \omega_n \tau_i + \frac{(\alpha_n + h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_3 = e^{-(\alpha n - h)\tau_i} \left( \cos \omega_n \tau_i + \frac{(\alpha_n - h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{S_2 - S_1}{h}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{S_2 - 2S_1 + S_3}{h^2},$$

$$S_4 = e^{-\alpha n \tau_i} \left( \cos((\omega_n + k)\tau_i) + \frac{\alpha_n}{(\omega_n + k)} \sin((\omega_n + k)\tau_i) \right);$$

$$S_5 = e^{-\alpha n \tau_i} \left( \cos((\omega_n - k)\tau_i) + \frac{\alpha_n}{(\omega_n - k)} \sin((\omega_n - k)\tau_i) \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \approx \frac{S_4 - S_1}{k}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0^2} \approx \frac{S_4 - 2S_1 + S_5}{k^2}.$$

6. Для модели  $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$

$$R_i = \hat{\rho}_x(\tau_i) - \left( e^{-\alpha n \tau_i} \left( \cos \omega_n \tau_i - \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right);$$

$$S_1 = e^{-\alpha n \tau_i} \left( \cos \omega_n \tau_i - \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_2 = e^{-(\alpha n + h) \tau_i} \left( \cos \omega_n \tau_i - \frac{(\alpha_n + h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$S_3 = e^{-(\alpha n - h) \tau_i} \left( \cos \omega_n \tau_i - \frac{(\alpha_n - h)}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{S_2 - S_1}{h}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \alpha^2} \approx \frac{S_2 - 2S_1 + S_3}{h^2},$$

$$S_4 = e^{-\alpha n \tau_i} \left( \cos((\omega_n + k)\tau_i) - \frac{\alpha_n}{(\omega_n + k)} \sin((\omega_n + k)\tau_i) \right);$$

$$S_5 = e^{-\alpha n \tau_i} \left( \cos((\omega_n - k)\tau_i) - \frac{\alpha_n}{(\omega_n - k)} \sin((\omega_n - k)\tau_i) \right);$$

$$\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0} \approx \frac{S_4 - S_1}{k}, \quad \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha, \omega_0)}{\partial \omega_0^2} \approx \frac{S_4 - 2S_1 + S_5}{k^2}.$$

Начальные значения параметров модели и условия окончания вычислений определяются по формулам (4.13) и (4.14).

На рис. 4.17 – 4.19 приведены результаты аппроксимации корреляционных функций типовыми моделями с использованием конечно-разностного метода Ньютона. Для сравнения приведены результаты с использованием метода Ньютона с аналитическим взятием первой и второй производных. Объем выборки во всех рассматриваемых случаях равен  $M=1000$ .

Из анализа результатов видно, что погрешности аппроксимации практически равны. Однако конечно-разностный метод проще реализовать.



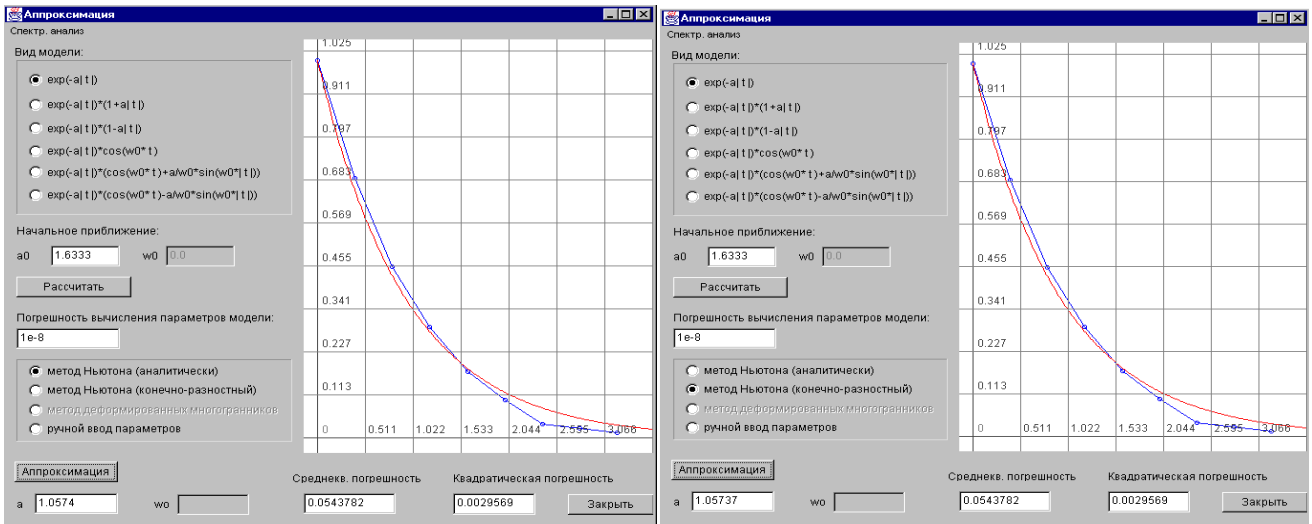


Рисунок 4.17. Результаты аппроксимации моделью  $\rho_{a1}(\tau)e^{-\alpha|\tau|}$

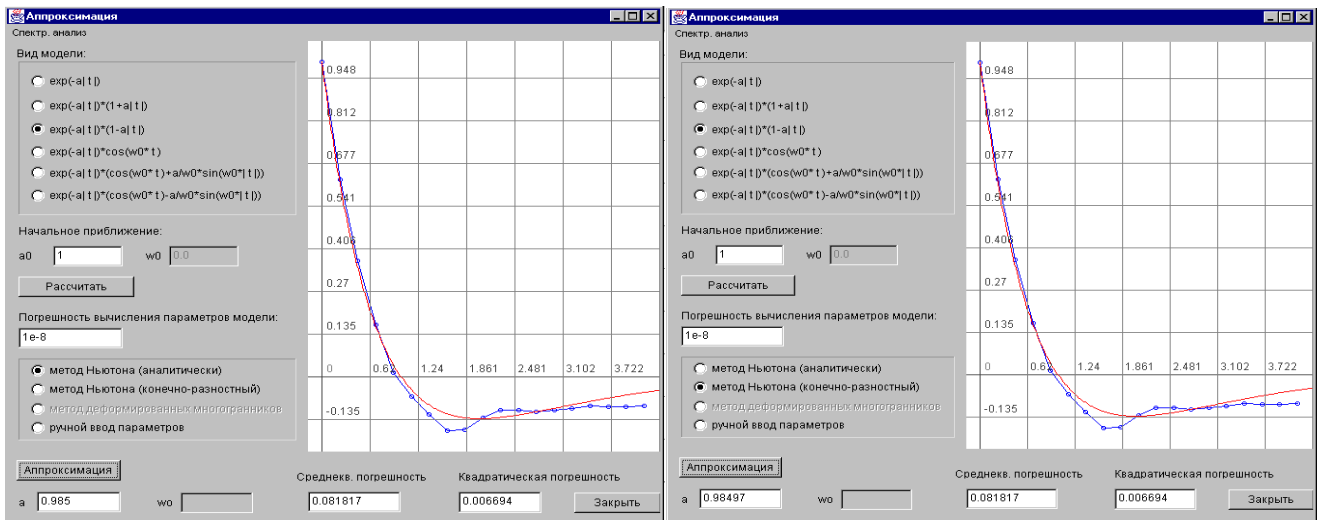


Рисунок 4.18. Результаты аппроксимации моделью  $\rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$

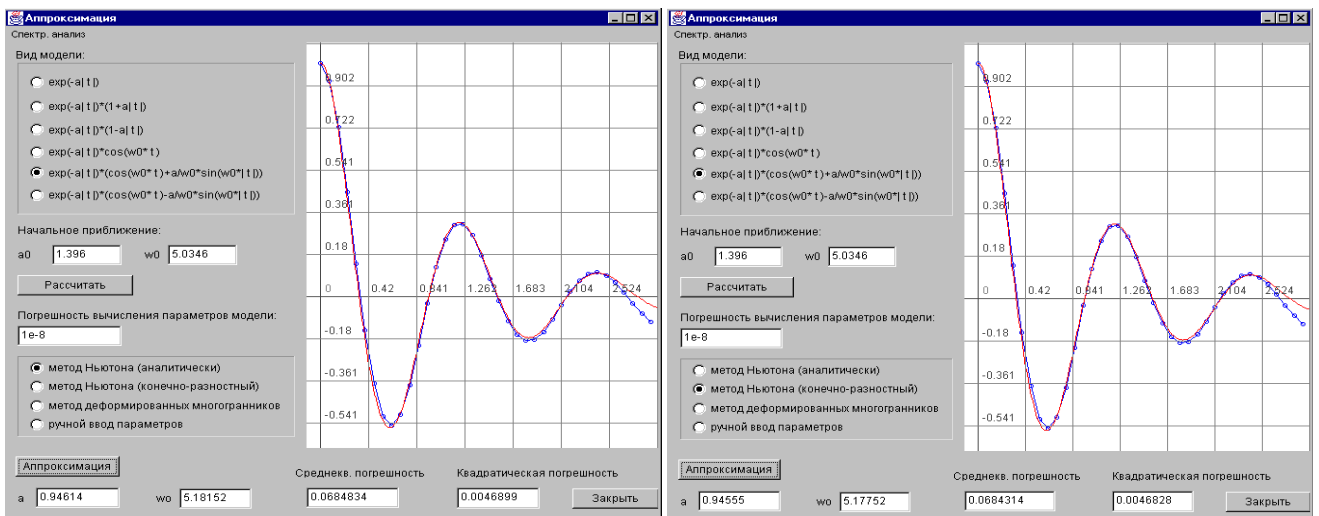


Рисунок 4.19. Результаты аппроксимации моделью  $\rho_{a6}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|)$

#### 4.5. Аппроксимация корреляционных функций функциями заданного вида методом деформированного многогранника

При аппроксимации КФ функциями заданного вида можно также использовать метод деформированного многогранника, который является одним из прямых методов многомерного поиска и выделяется высокой эффективностью и помехозащищенностью [108].

Метод деформируемого многогранника Нелдера и Мида легко адаптируется к особенностям оптимизируемой функции, не «замечает» отдельные шероховатости функции (вызванные ошибками вычисления), а скорость сходимости алгоритма не слишком сильно зависит от регулярности целевой функции. Очень часто этот метод оптимизации конкурирует с такими мощными методами оптимизации, как метод Ньютона.

Метод деформируемого многогранника является модификацией симплексного метода. Симплексом называют регулярный многогранник в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Для случая 2-х переменных симплекс представляет собой равносторонний треугольник; 3-х переменных - тетраэдр и т.д. Для  $n$ -мерного пространства симплекс всегда имеет  $n+1$  вершину.

Координаты вершин регулярного симплекса можно определить с помощью матрицы размером  $n \times (n + 1)$ :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & r_1 & r_2 & \dots & r_2 \\ 0 & r_2 & r_1 & \dots & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & r_2 & r_2 & \dots & r_1 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \left[ \frac{s}{(n\sqrt{2})} \right] \left( \sqrt{n+1} + n - 1 \right), \\ r_2 &= \left[ \frac{s}{(n\sqrt{2})} \right] \left( \sqrt{n+1} - 1 \right), \end{aligned} \quad (4.19)$$

$s$  - параметр, отождествляемый с расстоянием между двумя вершинами.

Элемент  $r_{ij}$  матрицы  $R$  равен  $i$ -ой координате  $j$ -ой вершины симплекса.

Поиск минимума функции симплексным методом ведётся следующим образом:

1. В каждой вершине симплекса вычисляется значение функции  $y_i = f(x_i)$ .
2. Определяется вершина с наибольшим (наихудшим) значением  $f(x)$ .
3. Через эту вершину и центральную точку симплекса проводится прямая, на которой на некотором удалении от центра  $S$  устанавливается новая вершина (см. рис. 4.20).
4. Вершина с наибольшим значением  $F(x)$  удаляется. Симплекс по существу «переворачивается» через грань, противоположную наихудшей вершине.
5. Далее процесс повторяется, начиная с п.1.

Важной особенностью симплексного метода поиска является то, что для реализации каждого последующего шага итерации необходимо вычислить функцию  $f(x)$  лишь в одной новой точке симплекса. Сама же оптимизация этим алгоритмом ассоциируется с процессом «кантования» симплекса вниз по поверхности функции  $f(x)$  в направлении её минимума.

Регулярный метод симплексного поиска склонен к зацикливанию, поэтому,

Нелдер и Мид, нарушив регулярность, устранили указанный недостаток.

Обозначим  $X_k^A$  - вершину многогранника (первоначального симплекса), которая даёт максимальное значение  $f(x)$  на  $k$ -ом шаге, а  $X_k^B$  - минимальную оценку функции  $f(x)$ . Определим вектор координат  $X_k^C$  центра многогранника по следующей формуле:

$$x_i^C = \frac{1}{n} \left[ \left( \sum_{j=1}^{n+1} x_i^j \right) - x_i^A \right], \quad (4.20)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

где  $i$  - номер координаты,  $j$  - номер вершины симплекса,  $k$  - номер шага итерации.

В методе деформируемого многогранника над многогранником выполняются операции **отражения, растяжения, сжатия и редукции**.

1. **Отражение** есть проецирование  $X_k^A$  через центр  $X_k^C$  в соответствии с соотношением:

$$X_k^0 = X_k^C + a(X_k^C - X_k^A), \quad (4.21)$$

где  $a > 0$  - коэффициент отражения,  $X_k^0$  - вектор координат новой (отражённой вершины).

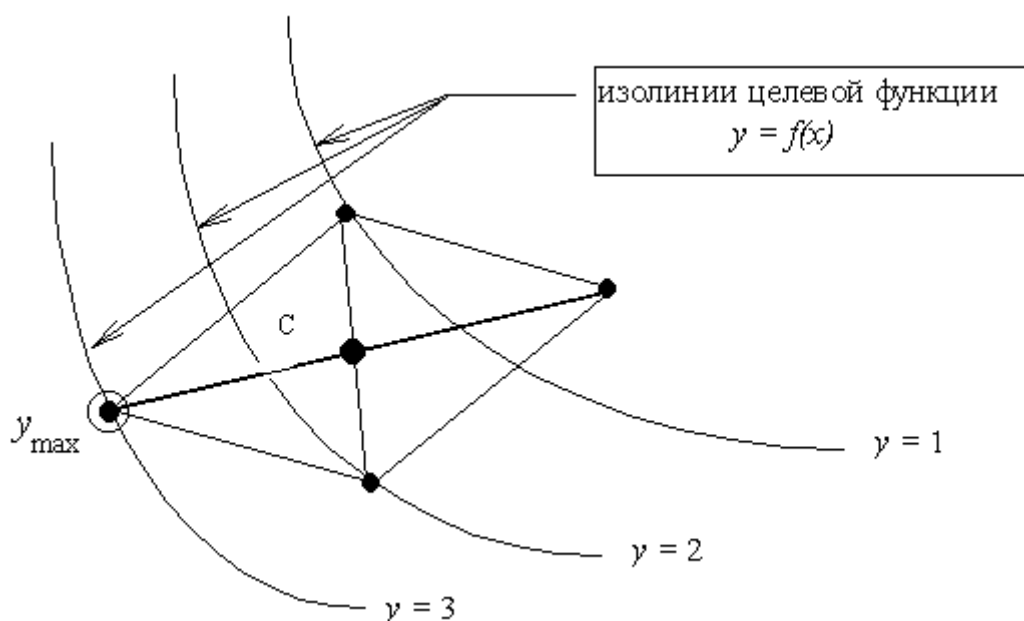


Рисунок 4.20. Геометрическая интерпретация симплексного поиска

2. **Растяжение** применяется в том случае, когда отражение оказалось удачным, то есть значение функции в новой точке меньше, чем в наилучшей из вершин многогранника:

$$f(X_k^0) \leq f(X_k^B),$$

при этом вектор  $X_k^0 - X_k^C$  растягивается, и получается новая точка

$$X_k^P = X_k^C + \gamma(X_k^0 - X_k^C), \quad (4.22)$$

где  $\gamma > 1$  - коэффициент растяжения.

3. **Сжатие** выполняется, когда в результате отражения значение функции в точке  $X_k^0$  оказалось больше, чем во всех вершинах многогранника, кроме вершины  $X_k^A$ , то есть:

$$\begin{aligned} f(X_k^0) &< f(X_k^A) \\ f(X_k^0) &> f(X_k^j), j \neq A \end{aligned}$$

тогда вектор  $X_k^A - X_k^C$  сжимается так, что

$$X_k^{Cж} = X_k^C + \beta(X_k^0 - X_k^C) \quad (4.23)$$

где  $0 < \beta < 1$  - коэффициент сжатия.

4. **Редукция**, то есть сжатие симплекса в два раза по отношению к вершине с наименьшим значением  $f(x): f(X_k^B)$ .

Редукция применяется, если  $f(X_k^0) > f(X_k^A)$  и выполняется по формуле:

$$X_k^j = X_k^B + 0,5(X_k^j - X_k^B), \text{ при } j=1,2,\dots,n+1.$$

На рис. 4.21 схематично показаны перечисленные операции.

Метод деформируемого многогранника прекращает свою работу, если выполняются условия:

$$\left[ \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} [f(x_k^j) - f(x_k^C)]^2 \right]^{1/2} \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon > 0$  - малое число, определяющее  $\varepsilon$ -окрестность поиска экстремума.

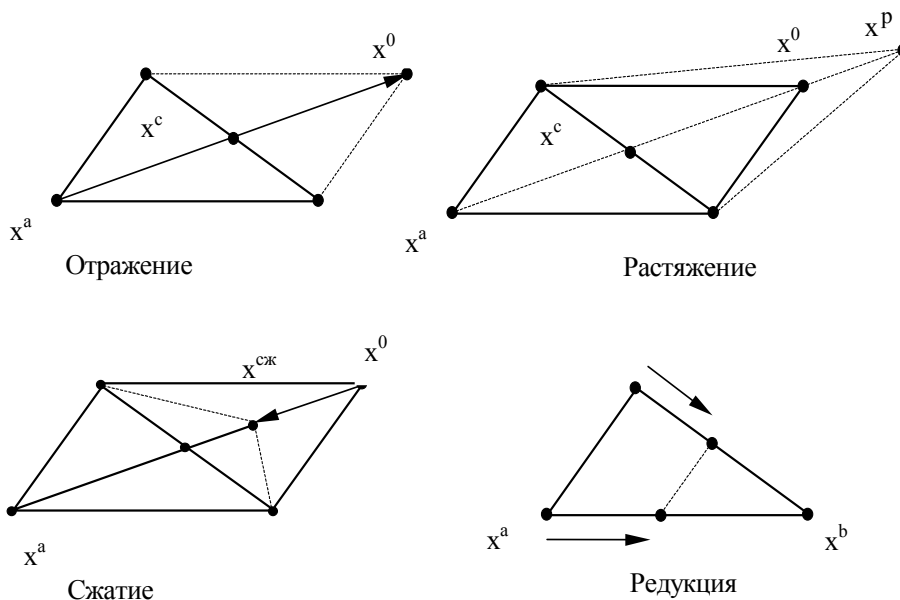


Рисунок 4.21. Основные операции метода деформированного многогранника

Рассмотрим применение метода деформированного многогранника к решению задач аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида, параметры которой удовлетворяют минимуму квадратической погрешности аппроксимации.

При использовании метода деформированного многогранника задача поиска параметров, удовлетворяющих минимуму квадратичной погрешности, сводится к отысканию экстремума (минимума) следующей целевой функции:

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[ \hat{\rho}_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right]^2 \rightarrow \min, \quad (4.24)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  – независимые переменные (входные, варьируемые параметры).

Рассмотрим примеры целевых функций, используемых для решения задачи аппроксимации КФ типовыми однопараметрическими моделями [73].

1.  $\rho_{a1}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}$ .

Целевая функция:

$$f(\alpha_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[ \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \right]^2 \rightarrow \min.$$

2.  $\rho_{a2}(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|)$ .

Целевая функция:

$$f(\alpha_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[ \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 + \alpha_n \tau_i) \right]^2 \rightarrow \min.$$

3.  $\rho_{a3}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|)$ .

Целевая функция:

$$f(\alpha_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[ \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} (1 - \alpha_n \tau_i) \right]^2 \rightarrow \min.$$

4.  $\rho_{a4}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ .

Целевая функция:

$$f(\alpha_n, \omega_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[ \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \cos \omega_n \tau_i \right]^2 \rightarrow \min.$$

5.  $\rho_{a5}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$ .

Целевая функция:

$$f(\alpha_n, \omega_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[ \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \left( \cos \omega_n \tau_i + \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right]^2 \rightarrow \min.$$

6.  $\rho_{a6}(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$ .

Целевая функция:

$$f(\alpha_n, \omega_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[ \hat{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_n \tau_i} \left( \cos \omega_n \tau_i - \frac{\alpha_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau_i \right) \right]^2 \rightarrow \min.$$

На рис. 4.22–4.23 приведены результаты аппроксимации колебательных корреляционных функций двухпараметрическими моделями методом деформированного многогранника. Объём выборки равен  $M=1000$ .

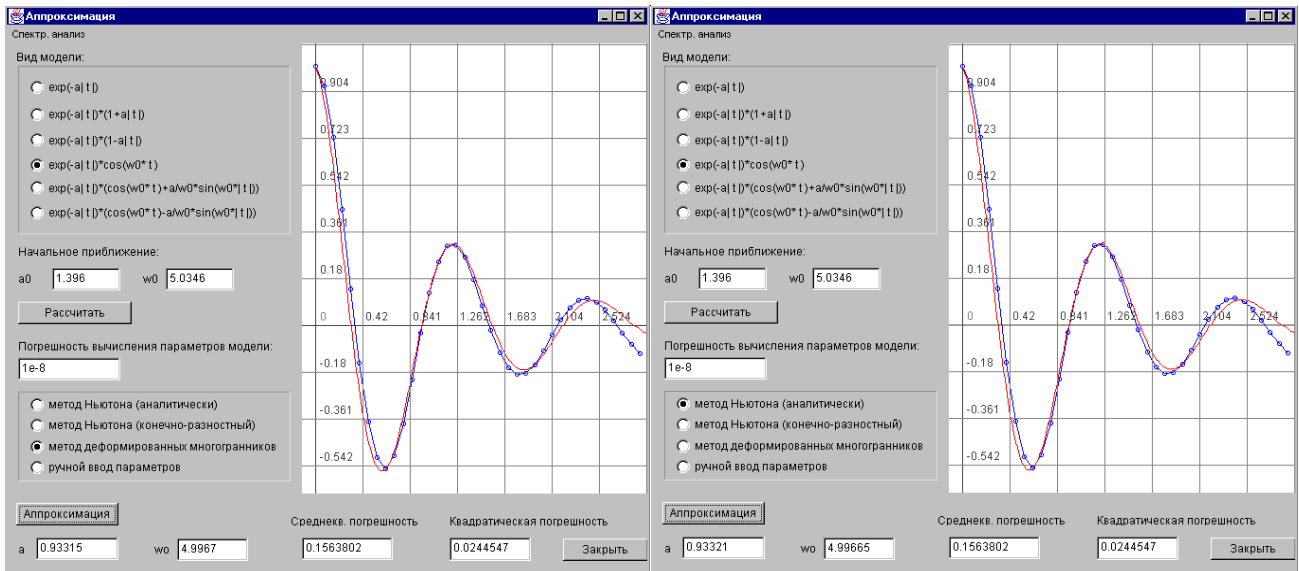


Рисунок 4.22. Результаты аппроксимации  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ ,  
 $\alpha = 0,9332$ ,  $\omega_0 = 4,9967$ ,  $\delta = 0,1564$

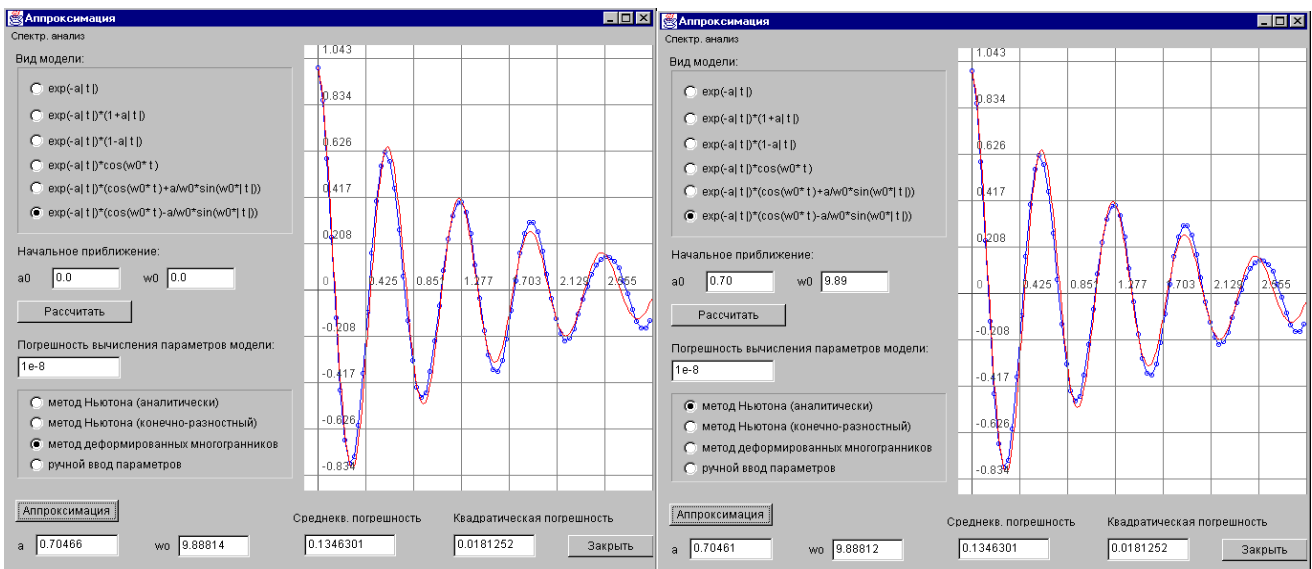


Рисунок 4.23. Результаты аппроксимации  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 \tau)$ ,  
 $\alpha = 0,7047$ ,  $\omega_0 = 9,8881$ ,  $\delta = 0,1346$

На правых рисунках приведены результаты аппроксимации корреляционных функций методом Ньютона с аналитическим определением производных, которые практически не отличаются от результатов, полученных методом деформированного многогранника. Однако следует подчеркнуть (см. рис. 4.23), что метод деформируемых многогранников менее критичен к выбору начального приближения.

## 4.6. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра

При аппроксимации корреляционных параметрическими моделями исследователь, как правило, в качестве модели выбирает параметрическую модель с минимальным числом параметров, обеспечивающую допустимую погрешность аппроксимации.

Однако в ряде случаев вопрос выбора модели затруднен, особенно при малом объеме выборки. Например, требуется найти аналитическую модель и определить её параметры, обеспечивающие минимум квадратической погрешности аппроксимации для процесса, представленного на рис. 4.24 а). Объем выборки  $M=100$ ,  $\Delta\tau=0,085$ , число отсчетов корреляционной функции  $J_{\max}=38$ .

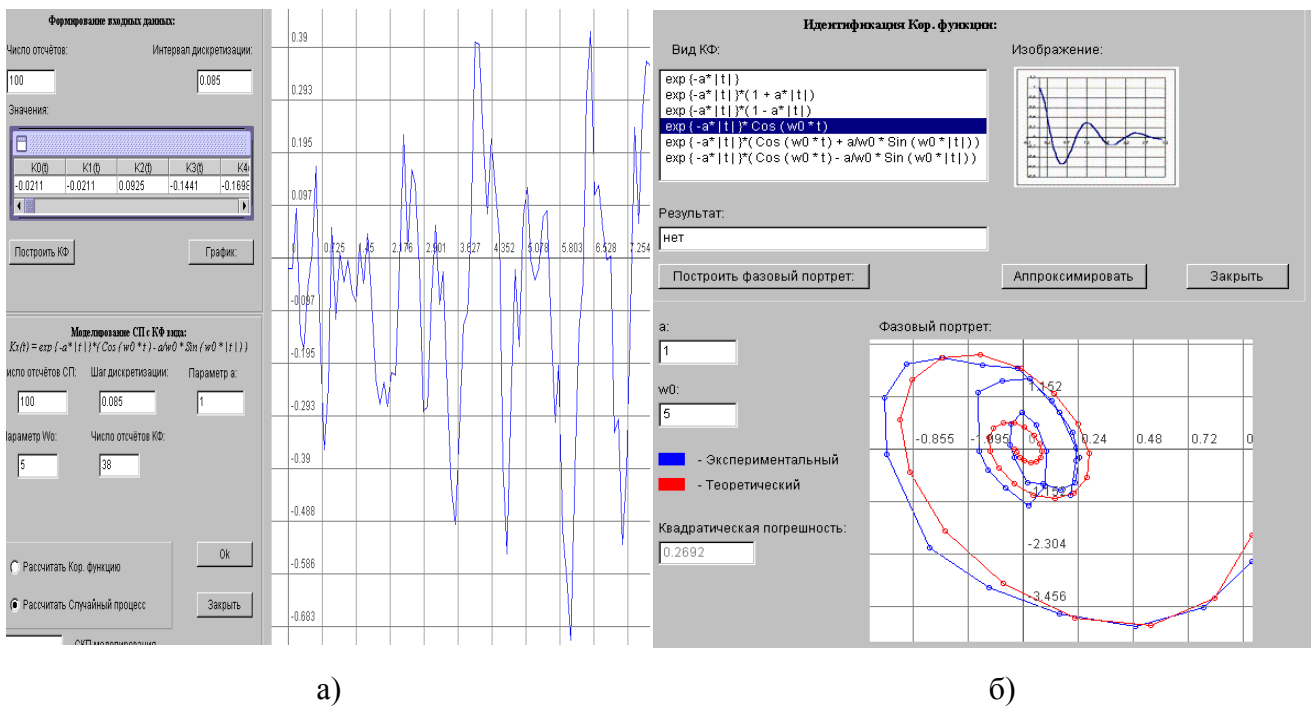


Рисунок 4.24.

Идентификация корреляционных функций с использованием фазовых портретов (см. рис. 4.25) не позволяет однозначно определить вид модели.

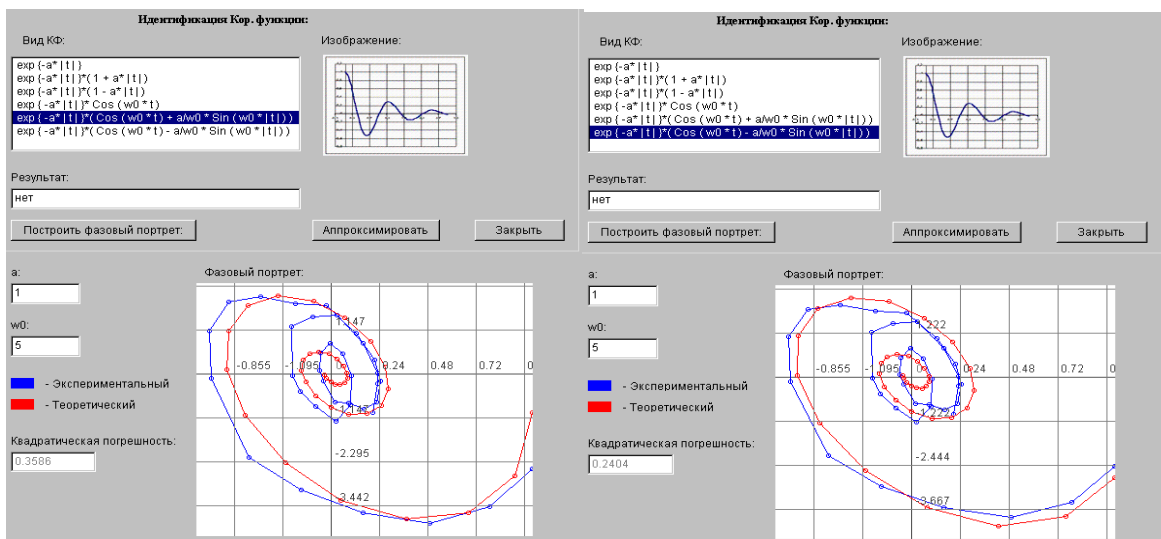


Рисунок 4.25. Фазовые портреты корреляционной функции

Результаты, представленные на рис.4.26, показывают, что при аппроксимации коореляционной функции моделью  $e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$  квадратическая погрешность аппроксимации  $\delta=0,394$ , а при аппроксимации моделью  $e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$  -  $\delta=0,363$ . Т.е. результаты аппроксимации неудовлетворительные.

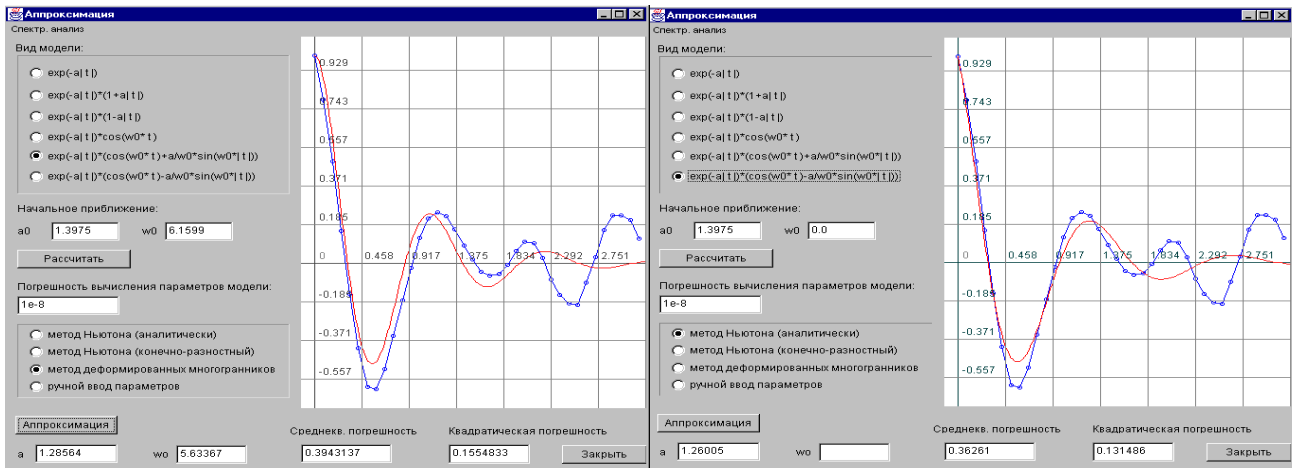


Рисунок 4.26. Результаты аппроксимации корреляционной функции параметрическими моделями  $\delta_1 = 0,3943$ ,  $\delta_2 = 0,3626$

Для обеспечения меньших погрешностей аппроксимации в качестве модели необходимо выбрать модель, представляющую разложение корреляционных функций в ряд по ортогональным функциям Лагерра:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha). \quad (4.25)$$

Для построения модели необходимо определить:  $\beta_k$ ,  $\alpha$ , и  $m$ .

Специфика проведения аппроксимативного корреляционного анализа с помощью ЭВМ заключается в «дискретизации» полученных ранее уравнений, выборе численного метода для их решения, написании, отладке соответствующего программного обеспечения и проведении счёта.

Определив  $\beta_k$  для обеспечения минимальной погрешности аппроксимации

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \quad (4.26)$$

в виде

$$\beta_k = \alpha \int_0^{\infty} K_x(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (4.27)$$

необходимо решить вопрос об определении значения параметра  $\alpha$ , обеспечивающего минимальную (допустимую) погрешность аппроксимации.



В разделе 3 рассматривались различные алгоритмы решения этой задачи, которые для удобства сравнения представим в таблице 4.2. Кроме этого, в таблице представлен эвристический алгоритм (см. 8).

Алгоритмы подбора параметра  $\alpha$

Таблица 4.2

№	Алгоритм	Преимущества	Недостатки
1	$\beta_{m+1} = 0$	Минимум погрешности	$m+1$ корней
2	$b_{m+1} = \beta_{m+1} + \frac{D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1} = 0$	Минимум погрешности, $K_x(\tau) = \sigma_x^2$	$m+1$ корней
3	$\beta_0 - \sigma_x^2 = 0$	Аналитическое решение, один корень	$\delta \neq \min$
4	$\begin{cases} \beta_0 - \sigma_x^2 = 0 \\ \beta_{m+1} = 0 \end{cases}$	Выход на глобальный минимум погрешности	Сложность реализации, увеличивается время анализа
5	$\begin{cases} \beta_0 - \sigma_x^2 = 0 \\ b_{m+1} = 0 \end{cases}$	Выход на минимум погрешности, $K_x(\tau) = \sigma_x^2$	Сложность реализации, увеличивается время анализа
6	$\beta_0 - \beta_1 - \sigma_x^2 = 0$	Один корень	$\delta \neq \min$
7	$\sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k - \sigma_x^2 = 0$	Близок к $\delta_{\min}$	$m+1$ корней
8	$\alpha = 2\omega_0$	Простота определения $\alpha$	$\delta \neq \min$

Сравнительный анализ алгоритмов показывает, что с точки зрения минимизации вычислительных затрат, обеспечения допустимых погрешностей аппроксимации и обеспечения лучшей сходимости (уравнение имеет только один корень) наиболее целесообразно выбрать алгоритм 3. Параметр  $\alpha$ , определенный по этому алгоритму находится вблизи  $\alpha_{\text{опт}}$  и обеспечивает погрешности аппроксимации, близкие к минимальным.

Однако при решении уравнения (3.48) с применением для вычисления интеграла метода прямоугольников

$$\alpha \Delta \tau \sum_{i=0}^M K_x(i\Delta\tau) e^{-i\alpha\Delta\tau/2} - \sigma_x^2 = 0 \quad (4.28)$$

было обнаружено, что погрешности оценки параметра  $\alpha$  могут достигать больших значений. Так, например, при аппроксимации корреляционной функции  $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|}$  с параметрами  $\lambda = 1$ ,  $\Delta\tau = 0,4$ ,  $N=5000$ ,  $M=9$   $\alpha = 2$ , и относительная погрешность оценки параметра составляет более 100%.

Значительно меньшие погрешности оценки параметра  $\alpha$  наблюдались при применении формулы трапеций для вычисления интеграла в (3.48):

$$\alpha \Delta \tau \left\{ \left[ K_x(0) + K_x(M\Delta\tau) e^{-M\alpha\Delta\tau/2} \right] / 2 + \sum_{i=1}^{M-1} K_x(i\Delta\tau) e^{-i\alpha\Delta\tau/2} \right\} - \sigma_x^2 = 0. \quad (4.29)$$

Но все же расхождение между теоретическими и определенными по формуле (4.29) значениями  $\alpha$  существенно (см. таблицу 4.3).

Более точный результат при решении уравнения дает формула Симпсона [58]:

$$\frac{\alpha\Delta\tau}{3} \left\{ K_x(0) + K_x(2n)e^{-2n\alpha\Delta\tau/2} + 2[K_x(2\Delta\tau)e^{-2\alpha\Delta\tau/2} + \dots + K_x[(2n-2)\Delta\tau]e^{-(2n-2)\alpha\Delta\tau/2}] + \right. \\ \left. + [K_x(\Delta\tau)e^{-\alpha\Delta\tau/2} + \dots + K_x[(2n-1)\Delta\tau]e^{-(2n-1)\alpha\Delta\tau/2}] \right\} - \sigma_x^2 = 0; \quad (4.30)$$

где  $n=J_{\max}/2$ .

В таблице 4.3 приведены результаты определения параметра  $\alpha$ , в результате решения уравнений (4.28)-(4.30) и аналитически для процессов с различными корреляционными функциями. При этом обрабатывались данные имитационного моделирования случайных процессов на ЭВМ, с параметрами:

- объём выборки  $M=10000$ ;
- погрешность восстановления корреляционной функции  $\delta = 0,02$ ;
- интервал дискретизации  $\Delta\tau$  определялся по таблице 5.4.1;
- параметры корреляционных функций -  $\lambda = 1$ ,  $\omega_0 = 5$ .

Большой объём выборки был выбран для уменьшения погрешности генерирования на ЭВМ случайного процесса с заданным видом корреляционной функции и повышения достоверности результата сравнения различных алгоритмов оценки параметра  $\alpha$ .

#### Результаты оценки параметра функций Лагерра

Таблица 4.3

$\rho_x(\tau)$	$\alpha_{\text{числ}}$			$\alpha_{\text{аналит}}$
	$\alpha_{\text{симпс}}$	$\alpha_{\text{трап}}$	$\alpha_{\text{прям}}$	
$e^{-\alpha \tau }$	1,949	1,789	1,156	2
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau )$	0,869	0,861	2,440	0,828
$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau )$	4,908	4,337	2,725	4,828
$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	10,226	9,824	6,992	10,198
$e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	8,468	8,289	6,204	8,392
$e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	12,624	11,797	8,018	12,392

Из анализа таблицы 4.3 видно, что алгоритм (4.30) даёт более точный результат при определении параметра функций Лагерра, поэтому, при оценке коэффициентов разложения ряда наиболее целесообразно при вычислении интеграла в выражении (3.48) применить метод Симпсона. В этом случае выражение (3.8) запишем в виде:

$$\beta_k = \frac{\alpha\Delta\tau}{3} \left\{ K_x(0)L_k(0) + 2[K_x(2\Delta\tau)L_k(2\Delta\tau) + \dots + K_x[(2n-2)\Delta\tau]L_k[(2n-2)\Delta\tau]] + \right. \\ \left. + 4[K_x(\Delta\tau)L_k(\Delta\tau) + \dots + K_x[(2n-1)\Delta\tau]L_k[(2n-1)\Delta\tau]] + K_x(2n\Delta\tau)L_k(2n\Delta\tau) \right\}. \quad (4.31)$$

А коэффициенты разложения  $b_k$ , обеспечивающие минимальную погрешность аппроксимации при ограничениях на модель корреляционной функции, определяются в соответствии с выражением (3.32).

При определении числа членов разложения ряда  $m$  воспользуемся результатами подраздела 3.7, с помощью которых определим оптимальное число членов разложения ряда (3.6), обеспечивающее минимальную погрешность аппроксимации.

Методика аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра заключается в выполнении следующих этапов:

1. определяются ординаты нормированной корреляционной функции  $\{\rho_x(J\Delta\tau)\}_{J=0,\dots,J_{\max}}$ ;
2. определяется параметр функций Лагерра  $\alpha$  в результате решения уравнения (4.30);
3. определяются коэффициенты разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$  в соответствии с выражением (4.31);
4. определяются коэффициенты разложения  $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$  в соответствии с выражением (3.32);
5. определяется число членов разложения ряда (3.6)  $m_{\text{opt}}$ , обеспечивающее минимальное значение погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции  $\delta$ ;
6. определяются параметры аппроксимирующего выражения:  $\alpha$ ,  $m = m_{\text{opt}}$ ,  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$ ,  $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$ ,  $\delta$ .

Результаты аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра для рассмотренного примера приведены на рис. 4.27

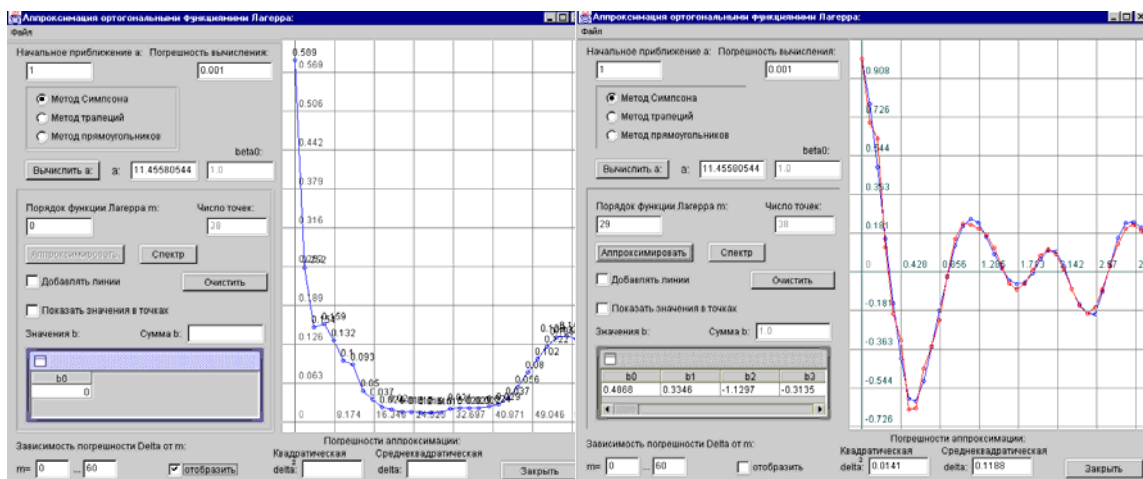


Рисунок 4.27. Аппроксимация корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра

$$\alpha = 11,4558, m_{\text{opt}} = 29, \delta = 0,1188$$

Сравнительный анализ результатов, представленных на рис. 4.26, 4.27, показывает, что погрешность аппроксимации ортогональным рядом значительно меньше, чем при аппроксимации функциями заданного вида. Отсюда следует вывод, что при аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями при малой выборке предпочтение следует отдать ортогональным разложениям.

#### 4.7. Аппроксимация взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра

Полученные в подразделе 4.6 результаты можно обобщить на аппроксимацию взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра. При этом необходимо аппроксимировать как правую, так и левую ветви взаимной корреляционной функции. Т. е., как показано в подразделе 3.8, искать модель в виде:

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_{k,п} l(\tau)L_k(\tau, \alpha_1) + \sum_{k=0}^m \beta_{k,л} l(-\tau)L_k(-\tau, \alpha_2). \quad (4.32)$$

Исследования показали, что это будет справедливо, если максимум взаимной корреляционной функции будет находиться в нуле. В противном случае в нулевой точке будет наблюдаться выброс. Результаты аппроксимации нормированной взаимной корреляционной функции  $\rho_{xy}(\tau) = e^{-\lambda|\tau-\tau_m|}$ , где  $\tau_m$  - значение аргумента, соответствующее максимуму взаимной корреляционной функции, при  $M=5000$  представлены на рис. 4.28.

Из анализа результатов видно, что даже при аппроксимации простейших моделей взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра для обеспечения допустимых погрешностей необходимо определять большое число членов разложения ряда (4.32) – 82 параметра. Кроме того, после аппроксимации необходима нормировка, так как значение модели корреляционной функции в нуле не равно 1. Эти обстоятельства без модификации модели затрудняют её применение.

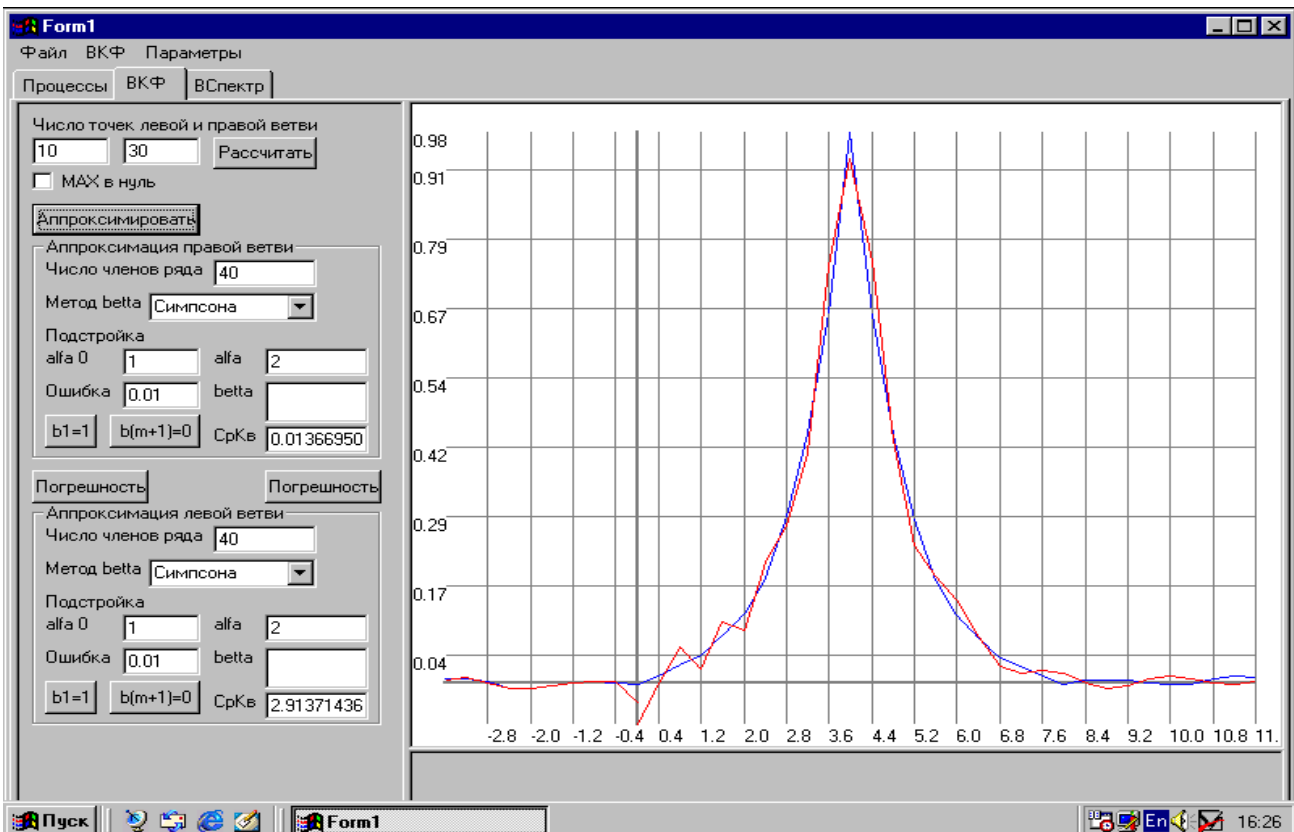


Рисунок 4.28. Результаты аппроксимации взаимной корреляционной функции

Для устранения этих недостатков необходимо, в первую очередь, определить  $\tau_m$  и искать модель взаимной корреляционной функции в виде:

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_{k,p} l(\tau - \tau_m) L_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_{k=0}^m \beta_{k,l} l(\tau_m - \tau) L_k(\tau_m - \tau, \alpha_2). \quad (4.33)$$

После модификации модели можно воспользоваться методикой оценки параметров ортогонального ряда, разработанного в подразделе 4.6.

Результаты аппроксимации для рассмотренного на рис. 4.28 примера приведены на рис. 4.29.

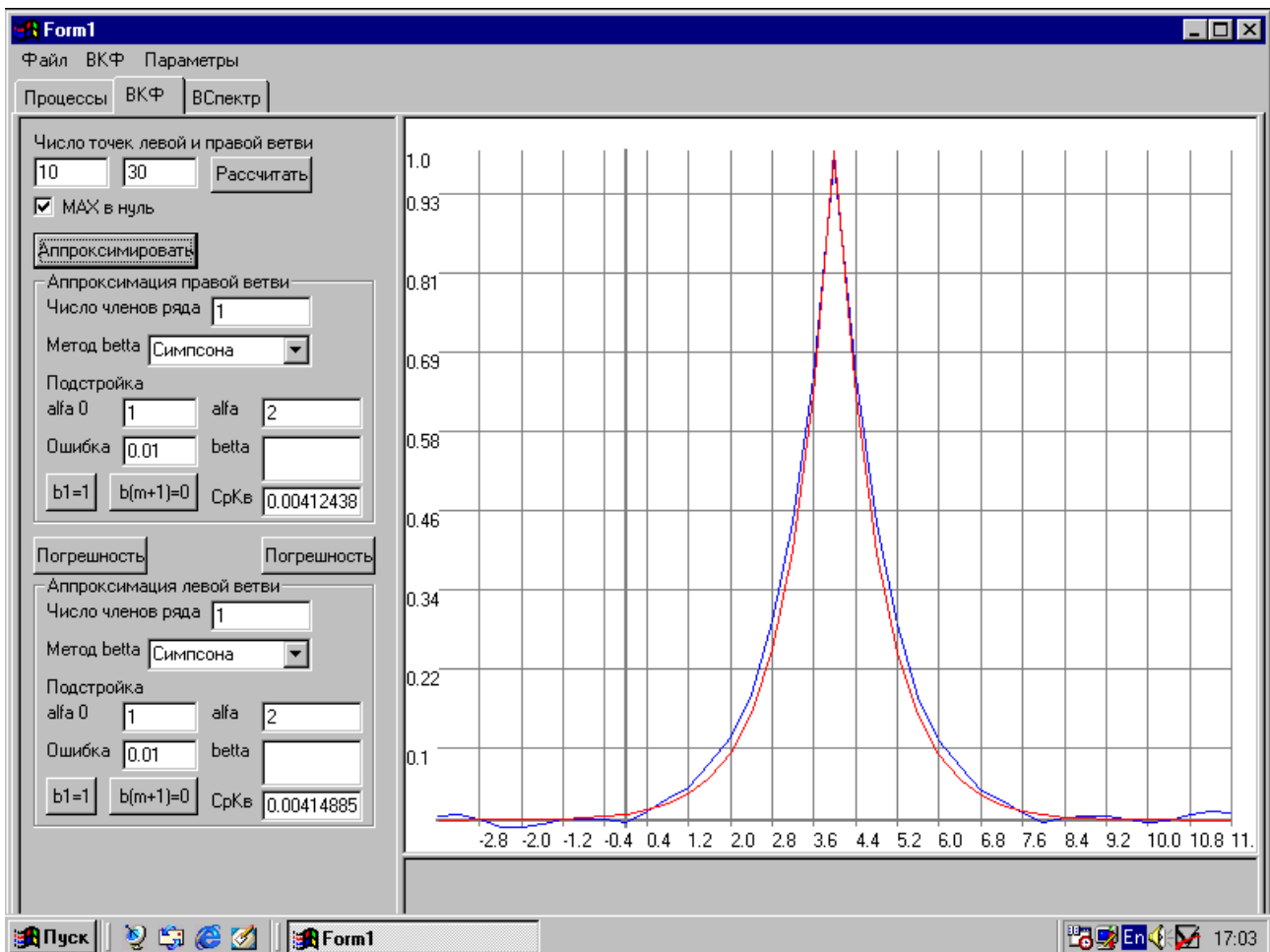


Рисунок 4.29. Результаты аппроксимации взаимной корреляционной функции с использованием модифицированного алгоритма

Заметим, что полученная модель содержит всего пять параметров:  $\tau_m, \beta_{0,p}, \beta_{0,l}, \alpha_1, \alpha_2$ , а значение нормированной взаимной корреляционной функции в нуле равно 1.

На рис. 4.30 приведены результаты аппроксимации взаимной корреляционной функции колебательных моделей стационарных случайных процессов, один из которых задержан относительно другого на некоторое количество интервалов дискретизации. Объём выборки  $M=2000$ .

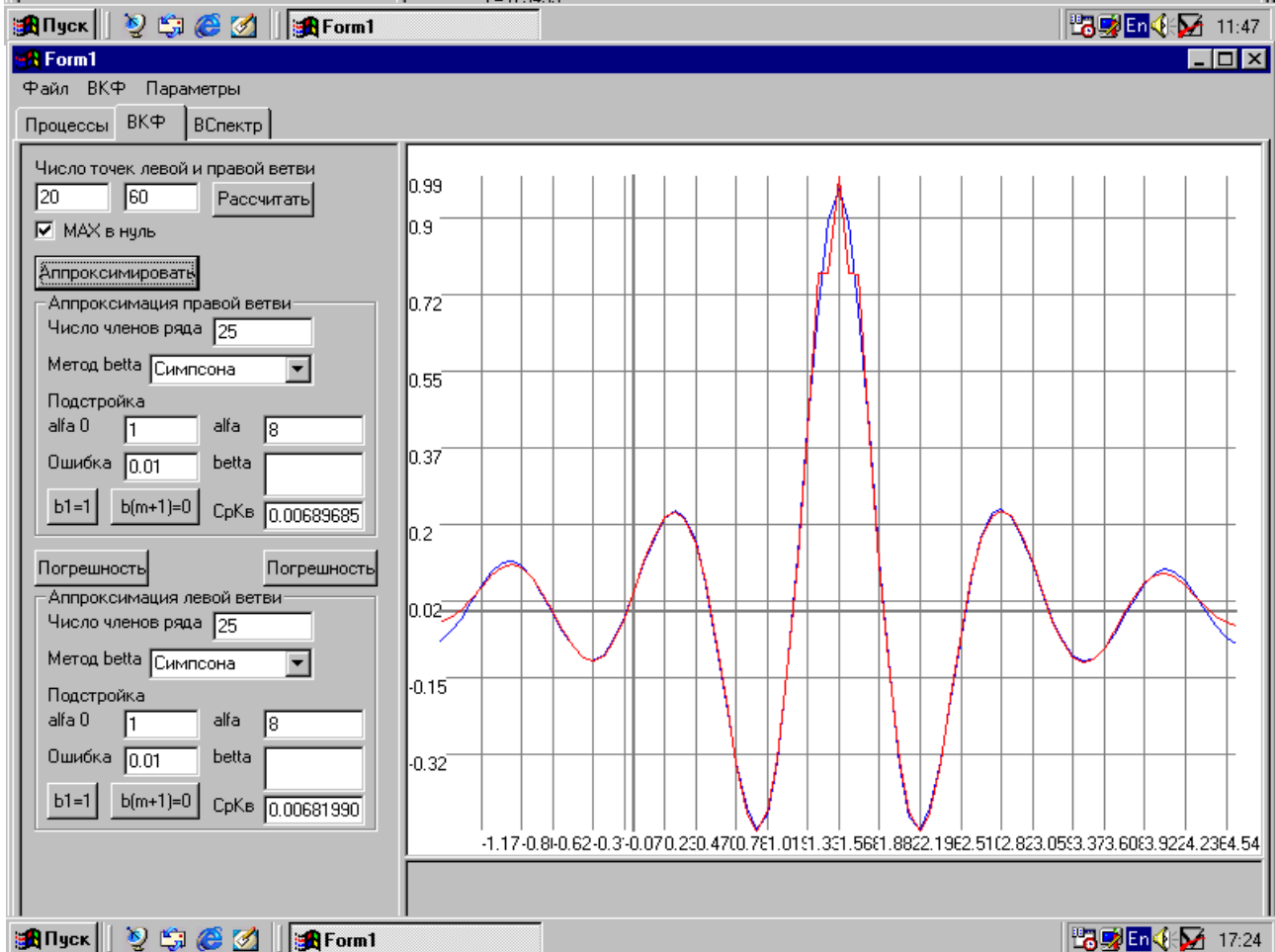
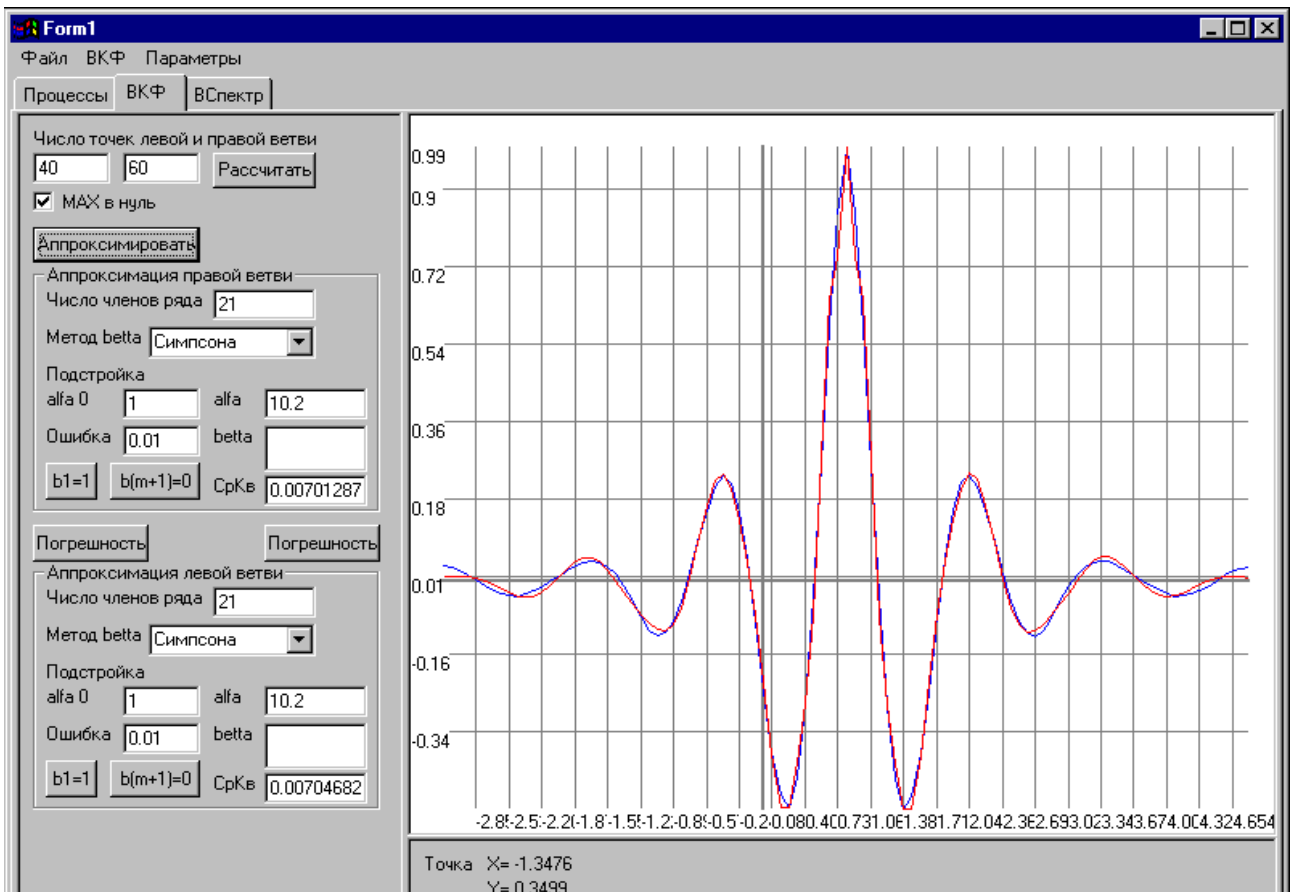


Рисунок 4.30. Результаты аппроксимации взаимных корреляционных функций колебательных моделей

## 4.8. Аппроксимация взаимных корреляционных функций параметрическими моделями

При решении ряда практических задач, к которым относятся, например:

- измерение скорости движения, проката [80];
- измерение значения «мертвого» времени [113] и т.д. -

исследуемый случайный сигнал  $\overset{\circ}{x}(t)$  задерживается на некоторый временной интервал  $\tau_m$  (см. рис. 4.31).

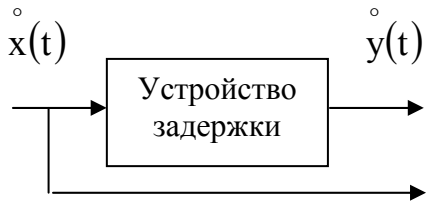


Рисунок 4.31.

Выходной сигнал устройства задержки можно представить в виде  $\overset{\circ}{y}(t) = \overset{\circ}{x}(t - \tau_m)$ , и взаимная корреляционная функция входного и выходного сигналов будет равна

$$K_{xy}(\tau) = K_x(\tau - \tau_m). \quad (4.34)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае возможна аппроксимация взаимных корреляционных функций параметрическими моделями. Для сведения задачи аппроксимации взаимной корреляционной функции к аппроксимации корреляционных функций необходимо определить значение  $\tau_m$ , соответствующее максимуму взаимной корреляционной функции. После этого можно воспользоваться результатами подразделов 4.2-4.6.

В общем же случае необходимо аппроксимировать как правую, так и левую ветви взаимной корреляционной функции. Для идентификации взаимной корреляционной функции можно воспользоваться фазовыми портретами (см. рис.4.32-4.33).

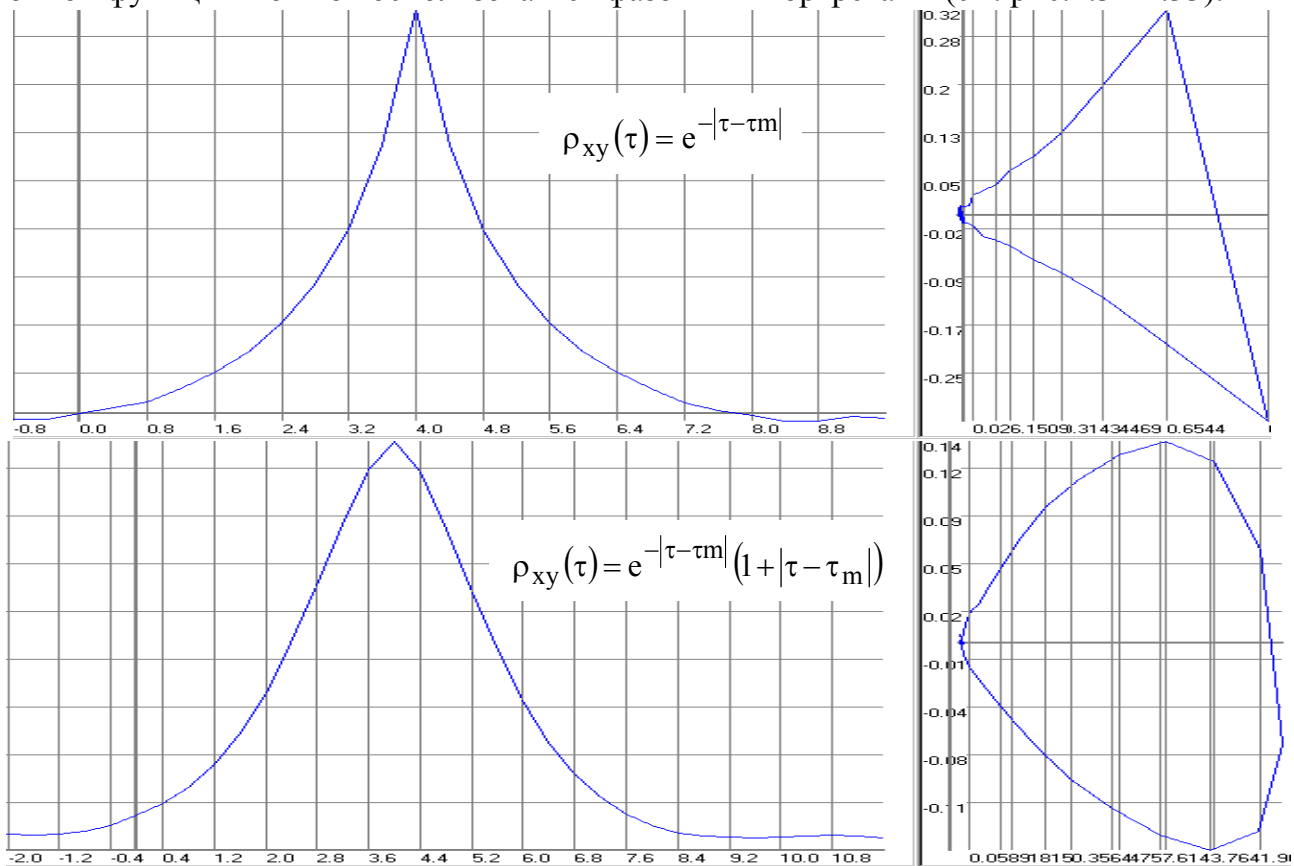


Рисунок 4.32. Взаимные корреляционные функции и их фазовые портреты

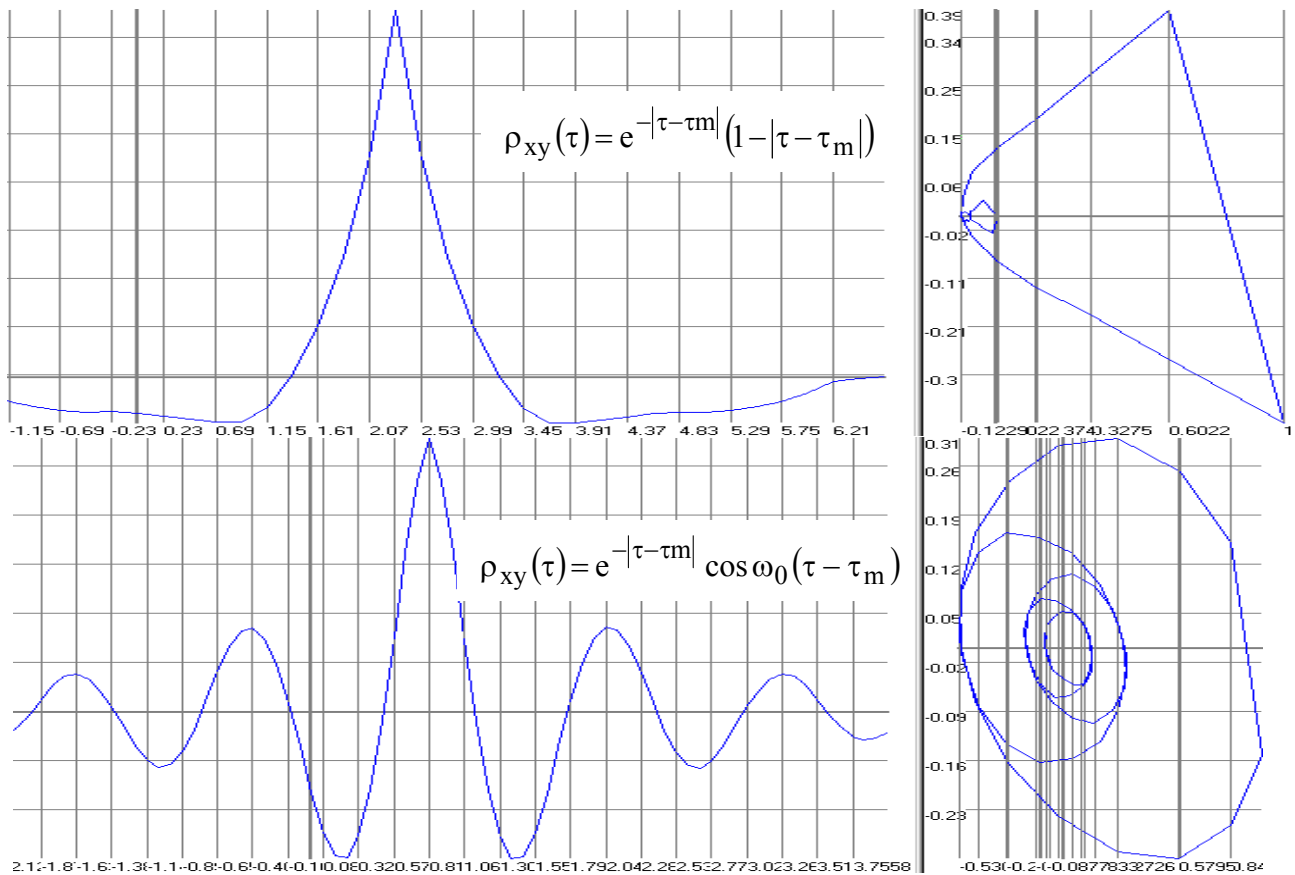


Рисунок 4.33. Взаимные корреляционные функции и их фазовые портреты

На рис. 4.34-4.36 последовательно представлены результаты аппроксимации взаимной корреляционной функции параметрической моделью

$$\rho_{xy}(\tau) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|} \left( \cos \omega_0(\tau - \tau_m) + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0|\tau - \tau_m| \right). \quad (4.35)$$

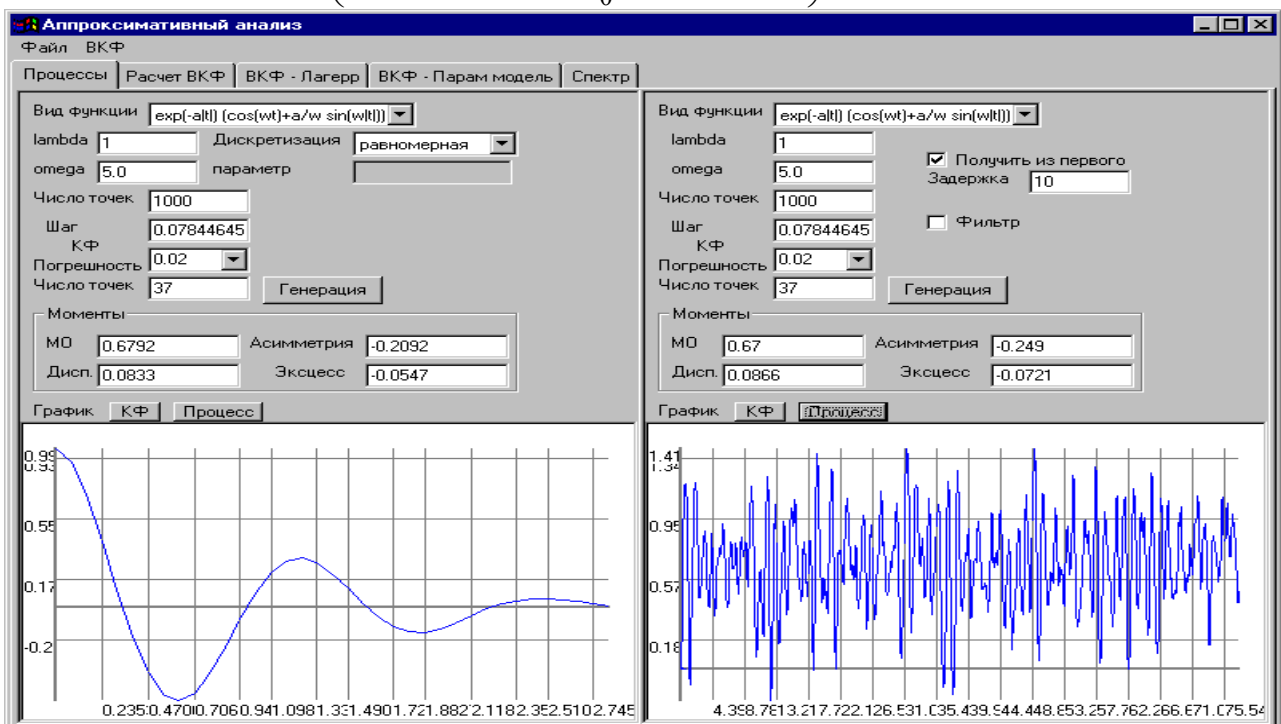


Рисунок 4.34. Характеристики исследуемых процессов



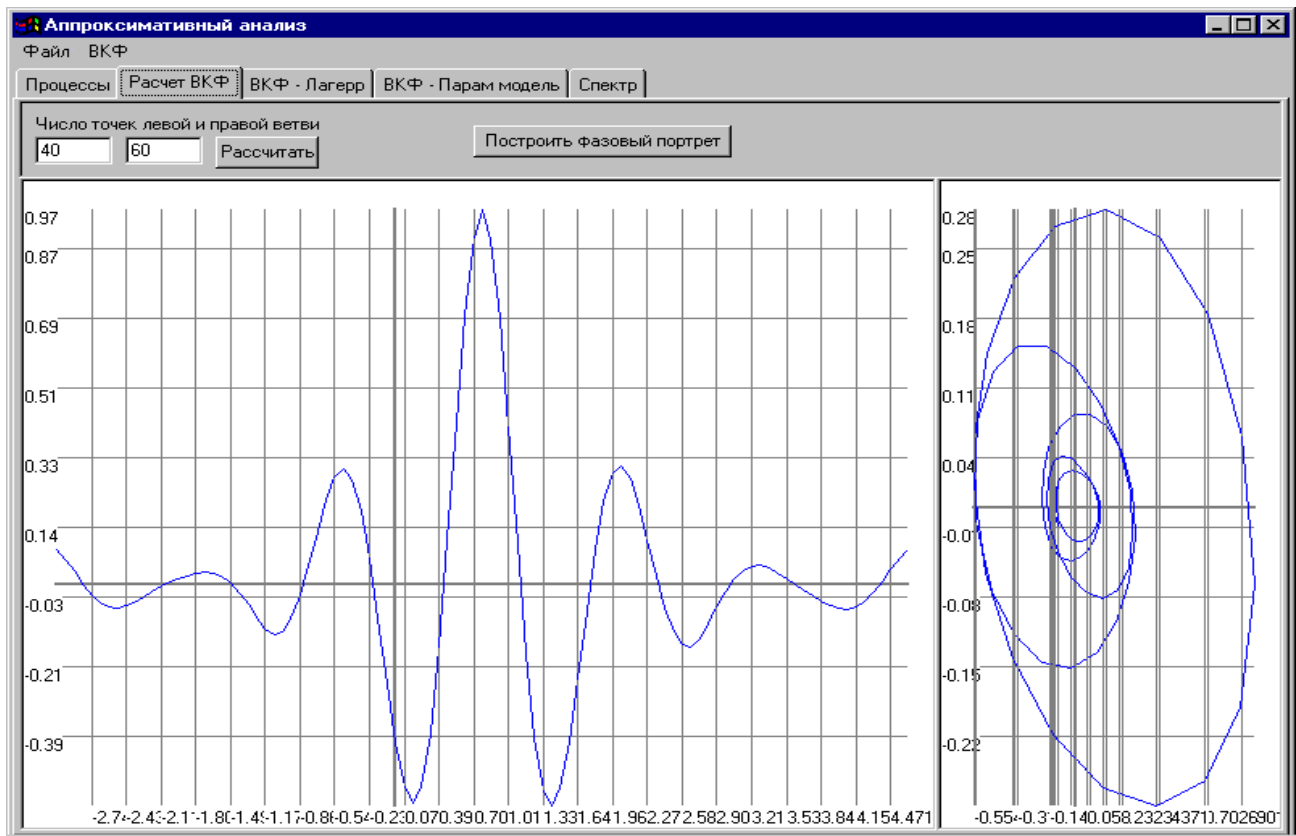


Рисунок 4.35. Взаимная корреляционная функция и её фазовый портрет

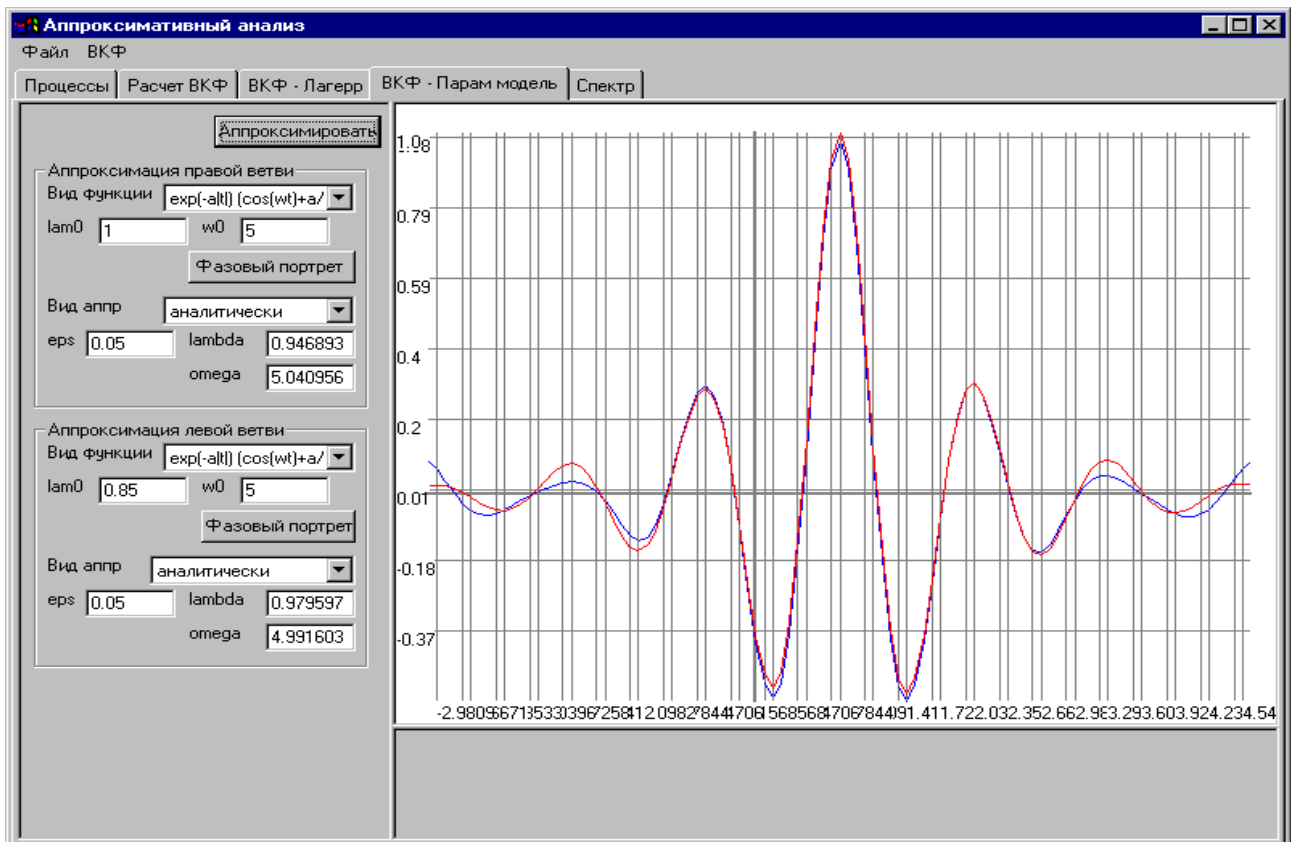


Рисунок 4.36. Результаты аппроксимации

Аналогичным образом можно найти аналитические выражения взаимной корреляционной функции и для других моделей.

#### 4.9. Анализ сходимости методов аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями

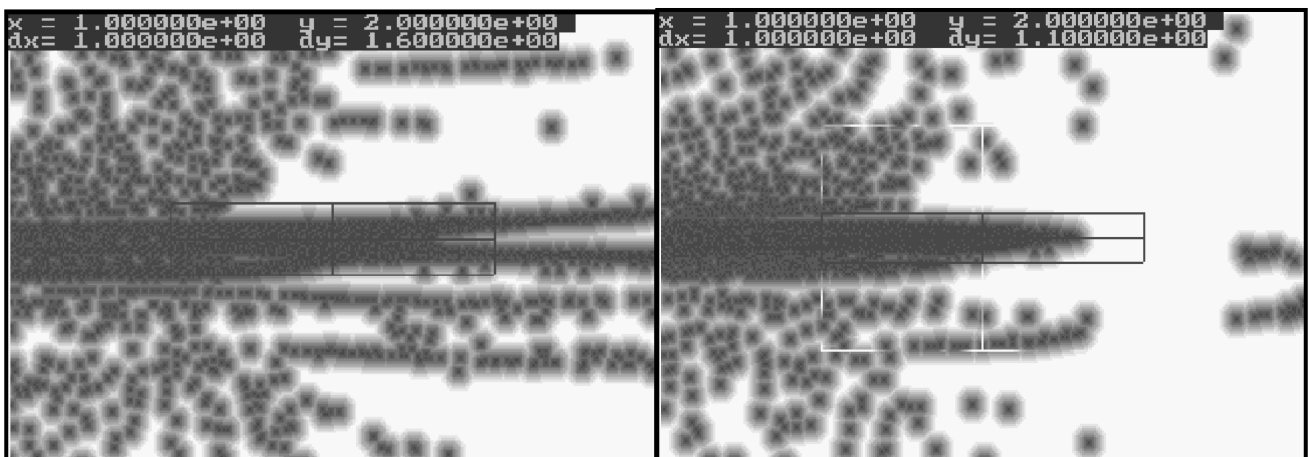
При аппроксимации КФ функциями заданного вида методом Ньютона было замечено, что, для того, чтобы алгоритм сошелся, то есть были найдены приемлемые значения искомых параметров, необходимо задать начальные приближения, близкие к истинным. На рис. 4.37 - 4.41 приведены фрагменты области сходимости метода Ньютона с численным (конечно-разностным) и аналитическим взятием производных при аппроксимации экспоненциально-косинусной модели с различными параметрами  $\omega_0$  и  $\alpha=1$ . На данных рисунках ось  $x$  отвечает значениям параметра  $\alpha$ , а ось  $y$  – значениям параметра  $\omega_0$ , а темные участки соответствуют области сходимости.

Из данных рисунков видно, что сходимость метода Ньютона с конечно-разностным взятием производных лучше, чем с аналитическим взятием производных. Точки, из которых алгоритм сходится, сгруппированы около истинного решения. Причем, сходимость более чувствительна к значению параметра  $\omega_0$ , нежели к  $\alpha$ . То есть при подборе начальных приближений большее внимание нужно уделять выбору  $\omega_0$ , что хорошо согласуется с результатами подраздела 2.5.

Ввиду плохой сходимости метода Ньютона, для аппроксимации КФ функциями заданного вида был также использован метод деформированного многогранника, область сходимости которого более широка (рис. 4.42-4.43). Однако, в некоторых случаях метод Ньютона дает меньшую погрешность аппроксимации. В данной ситуации можно предложить следующий способ получения наилучшего результата:

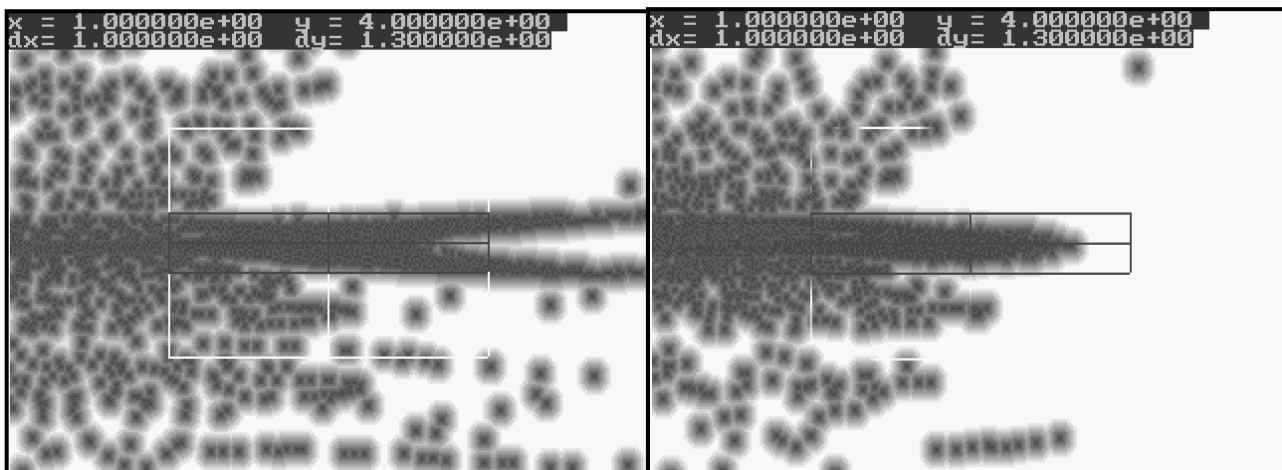
- аппроксимировать КФ, используя метод деформированного многогранника, при любых начальных приближениях;
- затем аппроксимировать КФ методом Ньютона, используя в качестве начальных приближений результаты предыдущей аппроксимации.

При таком подходе нет строгих требований к подбору начальных приближений, и одновременно достигается наименьшая погрешность аппроксимации. Следует также отметить, что метод деформированного многогранника можно использовать в тех случаях, когда количество параметров функции  $\geq 2$ . То есть для экспоненциальных моделей этот метод неприменим.

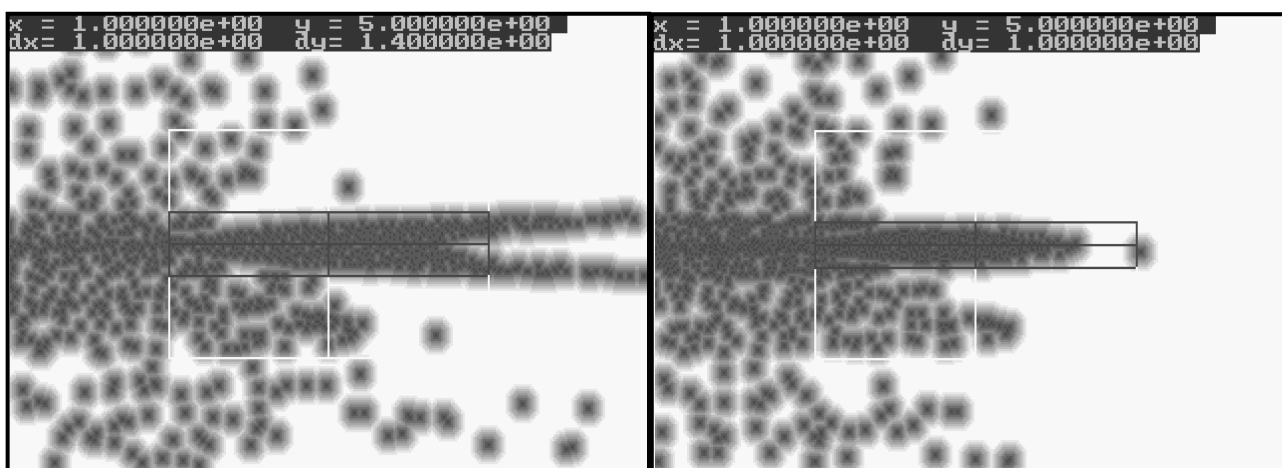


а) конечно-разностные производные б) аналитические производные  
с приращениями  $d\alpha = d\omega_0 = 0.001$ ,  $\alpha=1$ ,  $\omega_0=2$

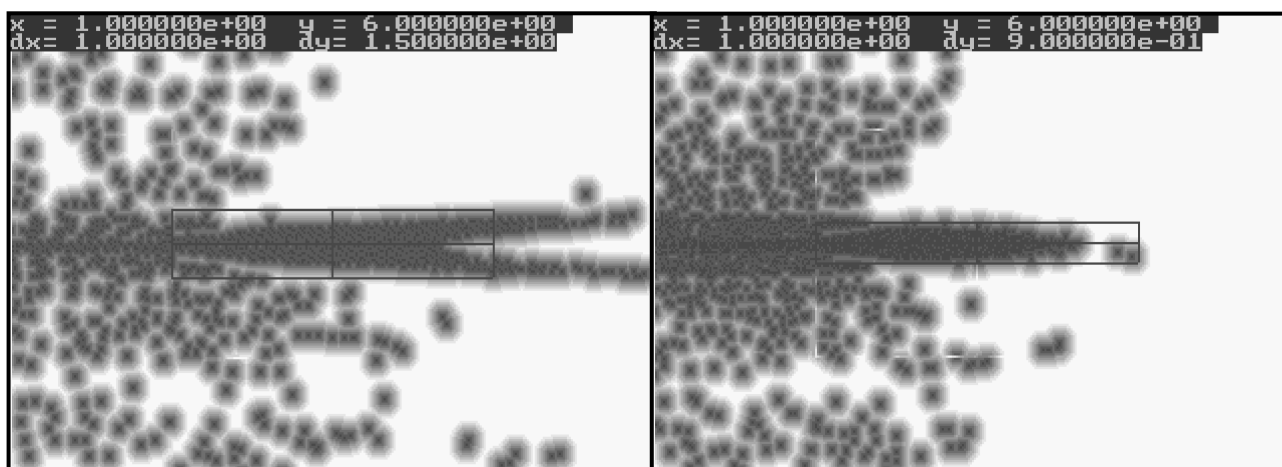
Рисунок 4.37.



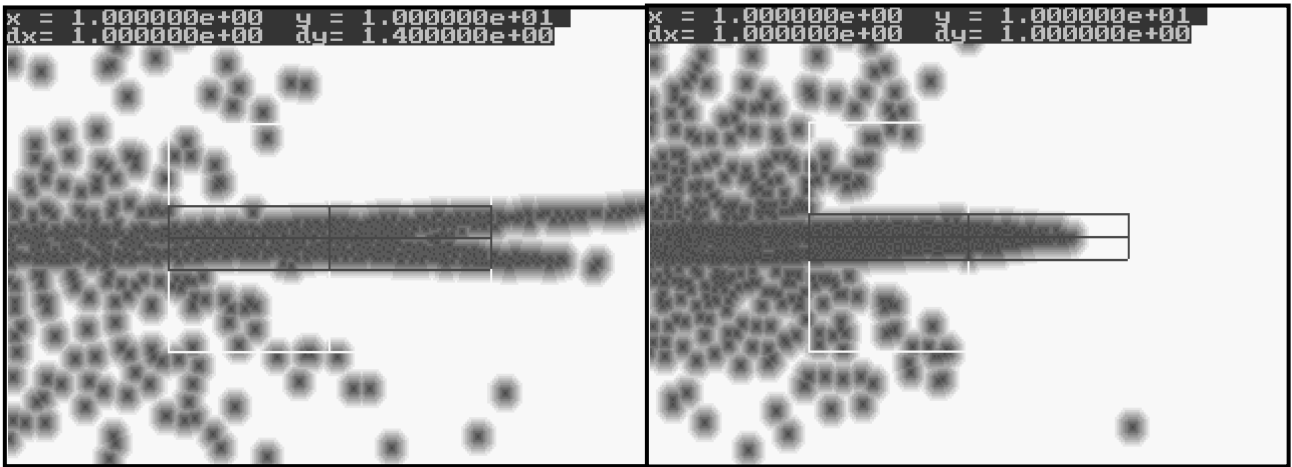
а) конечно-разностные производные                      б) аналитические производные  
с приращениями  $d\alpha = d\omega_0 = 0.001$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\omega_0 = 4$   
Рисунок 4.38.



а) конечно-разностные производные                      б) аналитические производные  
с приращениями  $d\alpha = d\omega_0 = 0.001$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\omega_0 = 5$   
Рисунок 4.39.



а) конечно-разностные производные                      б) аналитические производные  
 $d\alpha = d\omega_0 = 0.001$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\omega_0 = 6$   
Рисунок 4.40.

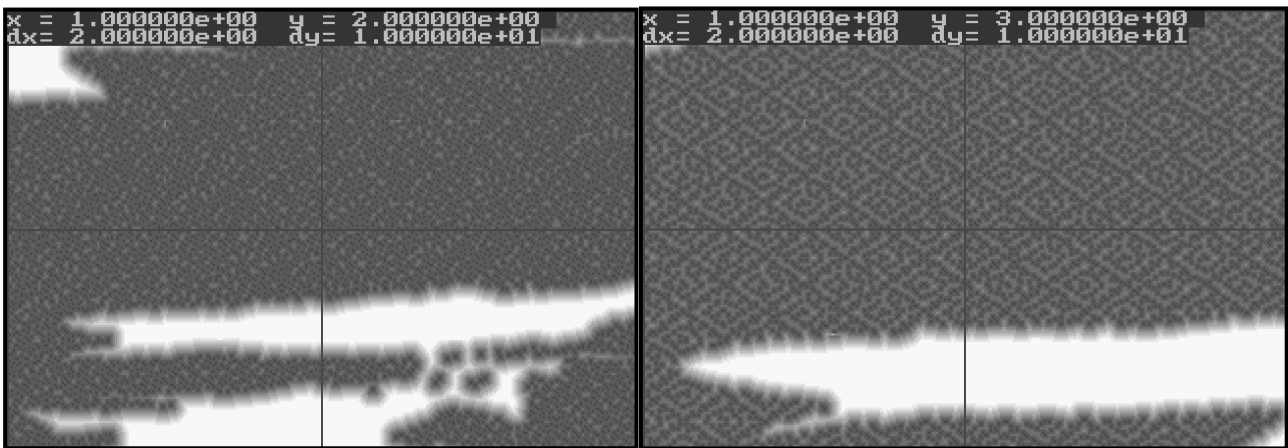


а) конечно-разностные производные                      б) аналитические производные

$$d\alpha = d\omega_0 = 0.001, \alpha = 1, \omega_0 = 10$$

Рисунок 4.41.

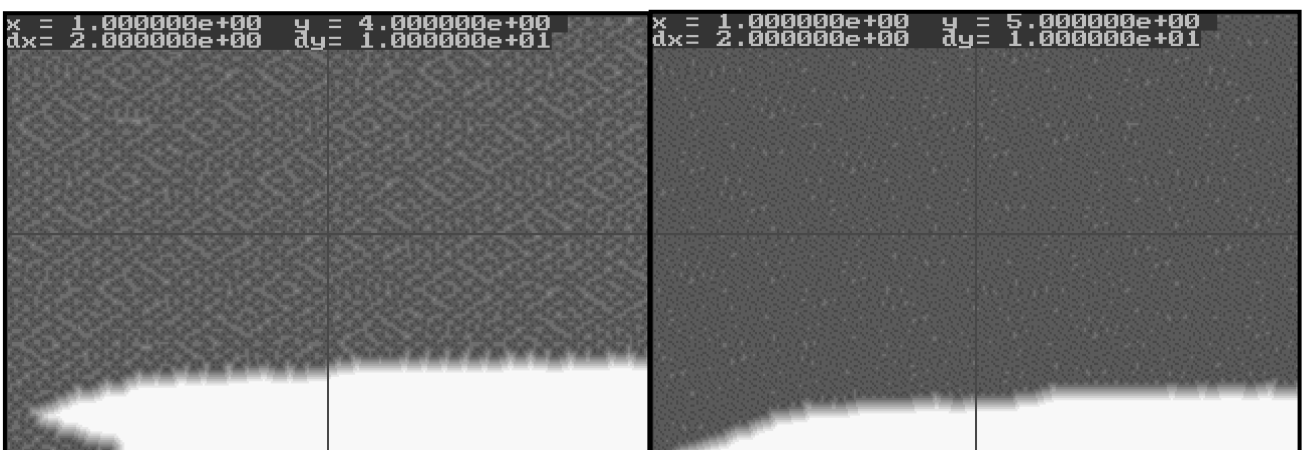
Визуализация сходимости метода деформированного многогранника при аппроксимации экспоненциально-косинусной модели с различными параметрами представлена ниже. Сравнительный анализ показывает, что метод деформируемого многогранника обладает лучшей сходимостью.



а)  $\alpha=1, \omega_0=2$

б)  $\alpha=1, \omega_0=3$

Рисунок 4.42.



а)  $\alpha=1, \omega_0=4$

б)  $\alpha=1, \omega_0=5$

Рисунок 4.43.

## 5. АППРОСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

### 5.1. Основные понятия и определения

При решении самых разнообразных научно-технических задач исследователю приходится сталкиваться с ситуациями, когда исследуемый процесс  $X(t)$  представлен **неэвидистантным временным рядом**

$$\left[ x_{ji} (t_{ji} / \Delta t_{ji}) \right]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, M_j} \quad (5.1)$$

где  $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random}$ .

Заметим, что индекс  $i$  в этом случае характеризует лишь место отсчёта или метки времени в массивах, где хранятся входные данные, а не характеризует время наступления события. Примеры реализаций неэвидистантных временных рядов приведены на рис. 5.1.

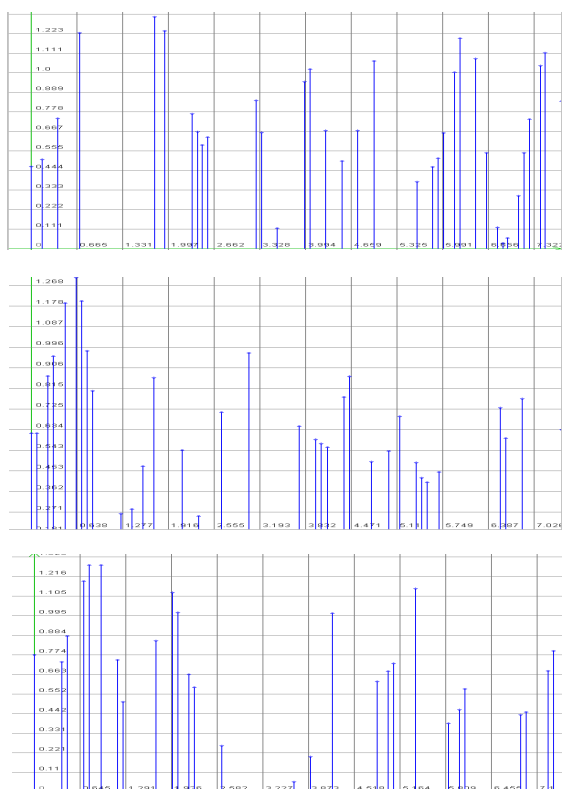


Рисунок 5.1. Примеры реализаций неэвидистантных временных рядов

Основными источниками информации при наблюдениях являются береговые посты, гидрологические разрезы, рейдовые станции, а также данные, получаемые с помощью автоматических буйковых станций (АБС) и дистанционных методов, уточняемых по результатам наблюдений со специализированных судов.

Для обработки и анализа данных измерений исследуемых параметров применяются разнообразные методики, описанные, например, в [77], предполагающие наличие качественных исходных данных в виде регулярных временных рядов измеренных значений. Однако, по ряду причин данные измерений имеют следующие особенности.

Приведем характерные задачи инженерно-гидрометеорологических изысканий, целью которых является обеспечение необходимой гидрометеорологической информацией и расчетными параметрами проектирования и строительства нефтегазопромысловых гидротехнических сооружений, в том числе - поисково-разведочных работ [66].

В состав морских инженерно-гидрометеорологических изысканий, представляющих собой сложную комплексную проблему, входят ряд этапов, требующих привлечения специалистов в области статистических измерений, автоматизации научных исследований [66]:

- сбор и обработка имеющейся информации: гидрометеорологических справочников, ежегодников и ежемесячников, атласов, материалов аэрофотосъемок, топографических съемок и промерных работ, отчетов и других материалов;
- обработка данных наблюдений и расчета характеристик режима.

Так, при установлении закономерностей вертикальной структуры скоростей течений и оценки ее временной изменчивости, проводимых с помощью АЦИТТ (автономный цифровой измеритель течения, температуры, электропроводности воды, глубины погружения [83]) на АБС, установленных на полигоне в тропической зоне Тихого океана во время экспедиционных работ НИС "Профессор Храмов" (4 рейс), "Океан" (39 рейс), "Академик Королев" (40, 42 рейсы), НИСП "Георгий Ушаков" (44 рейс) обнаружено [76]:

- при заданной дискретности измерений (например, через 15 мин.) результаты перфорации данных содержат пропуски. В качестве примера в таблице 5.1 приведены количественные характеристики длины регистрации и пропусков, из которой видно, что эта погрешность измерений приводит к потере от 1 до 40% исходной информации. Кроме того, из-за стохастичности времени пропусков в данных ряд измеренных значений становится неэквиливантным;

- из-за технических причин регистрации исходных данных во временном ряду наблюдаются выбросы. Статистические данные о количестве выбросов в исходных данных приводятся в таблице 5.2;

- ряды исходных данных содержат значительную шумовую составляющую, уровень которой может существенно затушевать закономерности пространственной и временной изменчивости скоростей течений.

При определении сезонной изменчивости гидрологических параметров: кислорода ( $O_2$ ), температуры ( $t^\circ$ ), солености ( $S$ ), плотности ( $\sigma$ ), - полученных с помощью буйковой станции ВУ-5, расположенной в Балтийском море, исходные данные являются неэквиливантными временными рядами, представляющими собой результаты измерений параметров на различных глубинах (0-90 м) с 1909 по 1983г. (таблица 5.3). Следует отметить, что минимальный интервал дискретизации равен одному дню. Из анализа таблицы 5.3 видно, что большая часть информации (99%) об измеряемых параметрах безвозвратно потеряна.

Рассмотренные случаи не являются единственными. Неэквиливантными временными рядами представляются результаты измерений при решении разнообразных задач. К ним относятся, например [40, 41, 57, 68, 84, 86, 98]:

- статистические измерения с применением адаптивных систем сбора и обработки информации;

- учет «дрожания» при датировании;

- неточность датирования в многоканальных системах;

- дискретизация с пропусками, сбоями наблюдений;

- стохастическое и квазистохастическое кодирование;

- потоки отсчетов в цифровых системах передачи информации, использующих коды с обнаружением ошибок, в синхронных многоканальных системах передачи информации с временным уплотнением, в асинхронно-адресных системах связи, в системах передачи информации с многостанционным доступом, в спутниковых системах связи;

- передача информации по каналу объект-ЭВМ;

- принципиальная невозможность получения равномерных отсчетов в ходе проведения эксперимента при теплофизических, океанологических и океанографических исследованиях и т.д.

Часто нерегулярность вносится в процесс дискретизации **неумышленно**, независимо от желания исследователя, например, при нарушении условий нормального

Характеристика информации о скоростях течений (по данным АЦИТТ)

Таблица 5.1

Научно-исследовательское судно	Год	№ АБС	Горизонт . м	Количество циклов измерений М	Общее количество пропущенных данных (циклов)			
					n	%		
«Океан»	1985	1	50	1094	57	5,2		
			200	1094	74	7,2		
			500	1094	35	3,3		
			1000	1094	4	0,4		
			2000	1094	72	6,6		
			3000	970	14	1,4		
			4800	1094	196	17,7		
			2	50	984	186	18,9	
				200	1143	71	6,2	
		500		1143	27	2,4		
		3	1000	1143	8	0,7		
			2000	1142	82	7,2		
			4800	1143	143	12,5		
					50	806	4	0,5
					100	807	109	13,5
200	806				57	7,1		
500	806				283	35,1		
2000	806				437	54,2		





функционировании системы, при использовании методов импульсной модуляции, приводящих к флуктуации интервала дискретизации, но может вводиться и **преднамеренно** с целью получения новых эффектов, ценных для практических приложений.

К ним относятся [40, 41, 44, 86]:

- расширение области применения знаковых методов;
- применение метода статистических испытаний в аппаратном анализе;
- измерение временных интервалов в наносекундном диапазоне;
- упрощение технической реализации;
- уменьшение ошибок вероятностного округления чисел при выполнении повторных арифметических операций;
- рандомизация квантования и фазовых сдвигов;
- нерегулярная дискретизация исследуемых случайных процессов, приводящая к сокращению объема измерительной информации, достаточной для его восстановления, в случае необходимости, с заданной погрешностью.

Последний эффект особенно важен, так как приводит к [40]:

- сокращению времени сеансов связи в адаптивных телеметрических системах;
- сокращению объема данных, подлежащих последующей обработке;
- уменьшению времени обработки данных;
- энергетическим выигрышам;
- уменьшению весов и габаритов аппаратуры сбора и передачи информации;
- возможности работы в реальном масштабе времени и т.д.

При таком способе представления информации исследователь, независимо от способа нерегулярной дискретизации, получает два массива выборочных данных: значений случайного процесса (существенных отсчетов) -  $x_j(t_i)$  и соответствующих им меток или интервалов времени между существенными отсчетами -  $t_{ji} / \Delta t_{ji}$ .

В большинстве случаев это обстоятельство не позволяет применять классические алгоритмы оценивания и соответствующие им технические средства, принципиально ориентированные на обработку регулярных временных рядов.

С учетом особенностей представления данных, участвующих в формировании оценки измеряемой случайной величины, сформировались три основных направления статистических измерений вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов:

- оценка вероятностной характеристики без учета нерегулярности временного ряда;
- оценка измеряемой величины с предварительным восстановлением неэквидистантного временного ряда в промежуточных точках (точках регулярной дискретизации) с учетом модели и критерия восстановления;
- оценка измеряемой величины без восстановления неэквидистантного временного ряда в промежуточных точках с использованием только существенных отсчетов и соответствующих им меток времени.

Первые два направления ориентированы на применение классической теории оценивания и соответствующих ей классических алгоритмов и аппаратно-программных средств.

Третье - требует разработки новой теории описания неэквидистантных временных рядов, оценки их вероятностных характеристик, а также принципов построения и

проектирования видов обеспечения и всего комплекса аппаратно-программных средств в целом.

## 5.2. Метод и алгоритмы корреляционного анализа неэквилидистантных временных рядов с использованием интервальной корреляционной функции

В соответствии с общей теорией статистических измерений выражение для оценки вероятностных характеристик неэквилидистантных временных рядов примет вид [76]:

$$\mathcal{G}[X(t)] = S_d g \left\{ x_{ji}(t_{ji}) \right\}_{j=1,2,\dots,N}^{i=1,2,\dots,M_j} \quad (5.2)$$

Отсюда видны основные отличия алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквилидистантных временных рядов от классических алгоритмов:

1.  $x_{ji}$ ,  $t_{ji}$  и  $M_j$  являются случайными величинами;
2. необходимо определить вид функционального преобразования  $g[ ]$ , учитывающий специфику представления входных данных  $x_{ji}$ ,  $t_{ji}$  и  $M_j$ ;
3. необходимо определить вид оператора усреднения  $S_d$ .

При оценке корреляционных функций неэквилидистантных временных рядов, аргументом которых являются  $t$ ,  $t'$  или  $\tau$ , необходимо учитывать нерегулярность временного ряда, так как  $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random}$ . В этом случае применение классических алгоритмов корреляционного анализа без восстановления пропущенных отсчетов невозможно - получится неверный результат.

Предположим, что в результате эксперимента получена совокупность центрированных неэквилидистантных временных рядов (в противном случае ряды необходимо предварительно центрировать):

$$\left[ \begin{array}{c} \circ \\ x_{ji}(t_{ji}) \end{array} \right]_{j=1,\dots,N}^{i=1,\dots,M_j} \quad (5.3)$$

Отметим, что длительность  $j$ -реализации ряда

$$T_j = \sum_{i=1}^{M_j-1} \Delta t_{ji} \quad (5.4)$$

Восстановив пропущенные отсчеты по какому-либо алгоритму восстановления (пока неважно по какому), получим регулярный временной ряд с интервалом дискретизации  $\Delta\tau$  между отсчетами:

$$\left[ \begin{array}{c} \circ \\ x_{jn}^{(M)} \end{array} \right]_{j=1,\dots,N}^{n=1,\dots,M^*_j} \quad (5.5)$$

где  $\overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)}[(n-1)\Delta\tau]$  - модельное значение регулярного временного ряда;

$M_j^* = \text{ent} \left[ \frac{T_j}{\Delta\tau} \right]$  - объем выборки  $j$ -ой реализации восстановленного ряда.

В каждом  $j$ -ом ряду случайным образом будут расположены и существенные, и модельные отсчеты, причём, в ряде случаев модельные и существенные значения будут совпадать -  $\overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)}[(n-1)\Delta\tau] = \overset{\circ}{x}_{ji}(t_{ji})$ .

Пусть требуется найти  **$j$ -текущую** оценку корреляционной функции стационарного неэквидистантного временного ряда с учетом восстановления пропущенных отсчётов. В этом случае при оценке корреляционной функции возможны четыре варианта произведений существенных и модельных отсчётов. Для однозначности введем индикатор состояния  $\delta_{jn,k}$ , который в зависимости от выполнения некоторых условий принимает одно из двух значений: 0 или 1. Тогда

$$\mathbb{K}_{xj}(J) = M \left[ \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} \right] = M \left[ \overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J} \delta_{jn,1} + \overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} \delta_{jn,2} + \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \overset{\circ}{x}_{j,n+J} \delta_{jn,3} + \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} \delta_{jn,4} \right], \quad (5.6)$$

где  $\delta_{jn,1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn} \cap \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$\delta_{jn,2} = \begin{cases} 1, & \text{если } \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn} \cap \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\delta_{jn,3} = \begin{cases} 1, & \text{если } \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \cap \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\delta_{jn,4} = \begin{cases} 1, & \text{если } \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{jn}^{(M)} \cap \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

В том случае, когда восстановление пропущенных отсчётов невозможно или алгоритм восстановления неизвестен, необходимо обрабатывать только существенные отсчёты неэквидистантного временного ряда. Тогда  $\delta_{jn,1} = 1$ , а  $\delta_{jn,2} = \delta_{jn,3} = \delta_{jn,4} = 0$ , и корреляционная функция будет определяться выражением:

$$\mathbb{K}_{xj}(J) = M \left[ \overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J} \right]. \quad (5.7)$$

Полученное выражение, из-за случайного характера расположения существенных отсчетов в восстановленном ряду, не позволяет синтезировать алгоритм для оценки корреляционной функции, так как **значение индекса  $n$  не определяет датирование отсчётов неэквидистантного временного ряда**. Напомним, что в неэквидистантном временном ряду значение второго индекса  $i$  не определяет время прихода существенного отсчёта, а определяет лишь его место в массивах данных, подлежащих обработке.

Заметим, что значение индикатора состояния  $\delta_{jn,1} = 1$  только в том случае, когда на временном интервале  $J\Delta\tau$  находятся два существенных отсчёта неэквидистантного временного ряда  $\overset{\circ}{x}_{ji}(t_{ji}) = \overset{\circ}{x}_{jn}$  и  $\overset{\circ}{x}_{j,i+s}(t_{j,i+s}) = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}$ , где  $s$  - целая случайная величина, характеризующая количество пропущенных существенных отсчётов. Значение случайной величины  $s$  при оценке корреляционной функции находится в

диапазоне  $(0, L \leq J_{\max})$ , при этом равенство соблюдается только для регулярного потока.

Таким образом, необходимо ввести новый индикатор состояния, который бы однозначно определял отсчёт  $x_{j,i+s}^{\circ}(t_{j,i+s})$ , отстоящий от отсчёта  $x_{ji}^{\circ}(t_{ji})$  на временном интервале  $J\Delta\tau$ . Так как в общем случае  $t_{ji}$  являются действительными, а не целыми числами, определим индикатор состояния с использованием оператора выделения целой части  $\text{ent}[\ ]$  в виде:

$$\delta_{j,i+s} = \begin{cases} 1, & \text{ent}\left[\frac{t_{j,i+s} - t_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5\right] = J \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (5.8)$$

Выражение для определения отсчёта ряда с учётом (5.8) и фильтрующего свойства индикатора состояния (аналогичного фильтрующему свойству  $\delta$ -функции) примет вид:

$$x_{j,i}^{\circ}(t_{ji} + J\Delta\tau) = \sum_{s=0}^L x_{j,i+s}^{\circ} \delta_{j,i+s}, \quad (5.9)$$

С учётом (5.9) выражение (5.7) представим в виде:

$$\mathbb{K}_{x_j}(J) = M \left[ x_{ji}^{\circ} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s}^{\circ} \delta_{j,i+s} \right]. \quad (5.10)$$

Заметим, что количество произведений существенных отсчётов в выражении (5.10) будет равно сумме индикаторов состояния:

$$d = \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s} \leq M_j \leq M_j^*. \quad (5.11)$$

Это значение  $d$  используется для усреднения при получении оценок корреляционных функций. С учетом выражений (5.2) и (5.11) выражение (5.10) запишется в виде:

$$\mathbb{K}_{x_j}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} x_{ji}^{\circ} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s}^{\circ} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}. \quad (5.12)$$

Разделив числитель и знаменатель в (5.12) на  $M_j$ , окончательно получим:

$$\mathbb{K}_{x_j}(J) = \frac{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji}^{\circ} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s}^{\circ} \delta_{j,i+s}}{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}. \quad (5.13)$$

Выражение

$$\mathbb{E}_{x_j}(J) = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s} \quad (5.14)$$

является **j-текущей** оценкой **интервальной корреляционной функции** и характеризует распределение отсчётов в потоке, находящихся на временном интервале  $J\Delta\tau$  [95, 96].

Отсюда видно, что выражение (5.12) отличается от классического алгоритма **j-текущей** оценки корреляционной функции (4.2):

1. видом функционального преобразования  $g \left[ x_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right]$ , учитываю-

щего специфику представления входных данных  $x_{ji}$ ,  $t_{ji}$ ,  $L$  и  $\Delta\tau$ ;

2. видом оператора усреднения  $S_d = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_j} L}$  и значением  $d$ ;

3. переходом алгоритма в **новый класс – класс косвенных алгоритмов** оценивания корреляционных функций.

Таким образом, **j-текущая** оценка корреляционной функции зависит от интервальной корреляционной функции потока отсчётов неэквидистантного временного ряда. Назовем этот алгоритм **алгоритмом с использованием интервальной корреляционной функции (АИИКФ)**, а метод - **косвенным методом измерения корреляционных функций неэквидистантных временных рядов с использованием интервальной корреляционной функции**.

Заметим, что для регулярного временного ряда с интервалом дискретизации  $\Delta\tau$   $M_j = M$  и, как видно из выражения (5.8),

$$\delta_{j,i+s} = \begin{cases} 1, & \text{если } s = J \\ 0, & \text{если } s \neq J \end{cases} \quad (5.15)$$

Из выражения (5.11) следует, что  $d = M - J$  и

$$\epsilon_{x_j}(J) = \frac{1}{M - J} \sum_{i=1}^{M-J} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s} = 1 \quad (5.16)$$

Подставив выражение (5.15) в выражение (5.12), окончательно получим:

$$\kappa_{x_j}(J) = \frac{1}{M - J} \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} x_{j,i+J} \quad (5.17)$$

Отметим, что выражение (5.17) является **частным случаем** выражения (5.12) или (5.13) для регулярного временного ряда и представляет собой **классический мультипликативный алгоритм j-текущей оценки корреляционной функции**.

При синтезе аппаратных, аппаратно-программных средств **j-текущей** оценки корреляционной функции неэквидистантного временного ряда или интервальной корреляционной функции потока отсчётов целесообразно использовать выражение (5.12). При теоретических же исследованиях, особенно при анализе погрешностей оценивания, - выражение (5.13), так как оно в явном виде содержит интервальную корреляционную функцию, что позволяет использовать при решении ряда задач математический аппарат, разработанный для анализа результатов косвенных измерений [88].

На основе выражения (5.12) возможен синтез алгоритмов для оценивания различных корреляционно-структурных функций, в том числе, и взаимных корреляционных. Следует заметить, что необходимо оценивать две ветви взаимных корреляционных функций. При оценке правой ветви  $\overset{\circ}{x}_{j,i+s} = \overset{\circ}{y}_{j,i+s}$ , а левой -  $\overset{\circ}{x}_{ji} = \overset{\circ}{y}_{ji}$ .

Для получения более общего результата преобразуем выражение (5.12) к виду:

$$\mathfrak{G}_{x_j}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} \overset{\circ}{g}_1[x_{ji}] \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{g}_2[x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}]}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}, \quad (5.18)$$

где  $\overset{\circ}{g}_1[\ ]$  и  $\overset{\circ}{g}_2[\ ]$  - функциональные преобразования  $\overset{\circ}{x}_{ji}$  и  $\overset{\circ}{x}_{j,i+s}$  соответственно. Отметим, что в некоторых случаях функциональные преобразования могут совпадать.

Алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции j-текущей оценки различных корреляционно-структурных функций, полученные на основе алгоритма (5.18), представлены в таблице 5.4.

На основании общей теории оценивания определим **t-текущую** оценку корреляционной функции неэквидистантного ряда с использованием только существенных отсчётов. С учетом принятых обозначений в (5.6) и (5.7) выражение представим в виде:

$$K_{xt}(\zeta, \zeta + J) = M \left[ \overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J} \right], \quad (5.19)$$

где  $t = \zeta \Delta \tau$ .

Полученное выражение, как и в случае j-текущей оценки, не позволяет синтезировать алгоритм для оценки корреляционной функции, так как второй индекс не определяет датирование неэквидистантного временного ряда, т.е.  $t_{jn} \neq t_{ji}$  при  $n=i$ .

При анализе t-текущих оценок корреляционных функций неэкидистантных временных рядов, в первую очередь, необходимо в j-ой последовательности определить наличие существенного отсчета  $\overset{\circ}{x}_{ji}(t_{ji})$  в точке  $t = t_{ji} = \zeta \Delta \tau$ . Для решения этой задачи введем индикатор состояния:

$$\delta_{\zeta, ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ent} \left[ \frac{t_{ji}}{\Delta \tau} + 0,5 \right] = \zeta \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}. \quad (5.20)$$

Только в случае, когда индикатор состояния  $\delta_{\zeta, ji} = 1$ , можно выполнять функциональное преобразование в (5.19) и искать отсчет, находящийся на временном интервале  $J \Delta \tau$  от отсчёта  $\overset{\circ}{x}_{ji}(\zeta \Delta \tau)$ .

Так как выражение для определения отсчёта ряда  $\overset{\circ}{x}_{j,i}(t_{ji} + J \Delta \tau)$ , находящегося на временном интервале  $J \Delta \tau$  от отсчёта  $\overset{\circ}{x}_{ji}(t_{ji})$ , определяется выражением (5.6), то выражение (5.19) с учётом (5.20) запишется в виде:

Алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции  
j-текущей оценки корреляционно-структурных функций

Таблица 5.4

№	Алгоритм измерения
1	$\mathfrak{K}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} x_{ji} \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
2	$\mathfrak{F}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} \text{sign } x_{ji} \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
3	$\mathfrak{E}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} \left  x_{ji} - \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right }{\sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
4	$\mathfrak{S}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} \left[ x_{ji} - \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right]^2}{\sum_{i=1}^{Mj} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
5	$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_{xyj}(J) &= \frac{1}{M_{xj}} \sum_{i=1}^{Mxj} \sum_{s=0}^L \delta^{xy}_{j,i+s}; \quad \delta^{xy}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ ent } \left[ \frac{t^y_{j,i+s} - t^x_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \\ \mathfrak{E}_{yxj}(J) &= \frac{1}{M_{yj}} \sum_{i=1}^{Myj} \sum_{s=0}^L \delta^{yx}_{j,i+s}; \quad \delta^{yx}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ ent } \left[ \frac{t^x_{j,i+s} - t^y_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \end{aligned} \right.$
6	$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{K}_{xyj}(J) &= \frac{\sum_{i=1}^{Mxj} x_{ji} \sum_{s=0}^L y_{j,i+s} \delta^{xy}_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{Mxj} \sum_{s=0}^L \delta^{xy}_{j,i+s}} \\ \mathfrak{K}_{yxj}(J) &= \frac{\sum_{i=1}^{Myj} y_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{yx}_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{Myj} \sum_{s=0}^L \delta^{yx}_{j,i+s}} \end{aligned} \right.$

$$\mathbb{K}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = M \left[ \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right], \quad (5.21)$$

а количество произведений существенных отсчётов в выражении (5.19) будет равно

$$d = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s} < N. \quad (5.22)$$

Это значение  $d$ , как и в случае  $j$ -текущих оценок, используется для усреднения при получении  $t$ -текущих оценок корреляционных функций. Тогда, с учётом выражения (5.2), (5.21) и (5.22) выражение для  $t$ -текущей оценки корреляционной функции неэквидистантного временного ряда запишется в виде:

$$\mathbb{K}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}. \quad (5.23)$$

Заметим, что выражение (5.23) отличается от классического алгоритма **t-текущей** оценки корреляционной функции (4.2) и **j-текущей** оценки (5.12):

1. видом функционального преобразования  $g \left[ \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right]$ , учитывающего специфику представления входных данных  $x_{ji}$ ,  $t_{ji}$ ,  $M_j$ ,  $L$  и  $\Delta t$ ;

2. видом оператора усреднения  $S_d = \frac{\sum_{i=1}^N}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$  и значением  $d$ ;

3. переходом алгоритма в **новый класс косвенных алгоритмов** оценивания корреляционных функций.

Разделив числитель и знаменатель в (5.23) на  $N$ , окончательно получим:

$$\mathbb{K}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}. \quad (5.24)$$

Знаменатель в выражении (5.24), представляющий собой функцию от  $\zeta, \zeta + J$ , характеризует распределение отсчётов в потоке, находящихся на временном интервале  $J\Delta t$  от точки  $t = \zeta\Delta t$ , является **t-текущей** оценкой интервальной корреляционной функции [86]:

$$\mathbb{E}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}. \quad (5.25)$$

Таким образом, алгоритм **t текущей** оценки корреляционной функции также относится классу алгоритмов **с использованием интервальной корреляционной**



**функции, синтезированных на основе косвенного метода измерения корреляционных функций неэквидистантных временных рядов.**

На основе выражения (5.23) возможен синтез алгоритмов для оценивания различных корреляционно-структурных функций, в том числе, и взаимных корреляционных.

Для получения более общего результата преобразуем выражение (5.23) к виду:

$$\mathfrak{G}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} g_1[x_{ji} \delta_{\zeta,ji}] \sum_{s=0}^L g_2[x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}]}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}. \quad (5.26)$$

Алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции t-текущей оценки различных корреляционно-структурных функций, полученные на основе алгоритма (5.26), представлены в таблице 5.5.

Алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции t-текущей оценки корреляционно-структурных функций

Таблица 5.5

№	Алгоритм измерения
1	$\mathfrak{R}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
2	$\mathfrak{F}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \text{sign } x_{ji} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
3	$\mathfrak{G}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j}  x_{ji} \delta_{\zeta,ji} - \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} }{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
4	$\mathfrak{S}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} [x_{ji} \delta_{\zeta,ji} - \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}]^2}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta,ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$

№	Алгоритм измерения
5	$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_{xyt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji}^x \sum_{s=0}^L \delta_{j, i+s}^{xy}; & \delta_{j, i+s}^{xy} &= \begin{cases} 1, \text{ent} \left[ \frac{t_{j, i+s}^y - t_{ji}^x}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \\ \mathfrak{E}_{yxt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji}^y \sum_{s=0}^L \delta_{j, i+s}^{yx}; & \delta_{j, i+s}^{yx} &= \begin{cases} 1, \text{ent} \left[ \frac{t_{j, i+s}^x - t_{ji}^y}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \end{aligned} \right.$
6	$\left\{ \begin{aligned} \hat{K}_{xyt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L y_{j, i+s} \delta_{j, i+s}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j, i+s}} \\ \hat{K}_{yxt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} y_{ji} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L x_{j, i+s} \delta_{j, i+s}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \sum_{s=0}^L \delta_{j, i+s}} \end{aligned} \right.$

Заметим, что для регулярного временного ряда с интервалом дискретизации  $\Delta\tau$ ,  $M_j = M$ ,

$$\delta_{\zeta, ji} = \begin{cases} 1, \text{если } i = \zeta; \\ 0, \text{иначе,} \end{cases} \tag{5.27}$$

а

$$\delta_{j, i+s} = \begin{cases} 1, \text{если } s = J \\ 0, \text{иначе} \end{cases} . \tag{5.28}$$

Из выражения (5.22) следует, что  $d = N$  и

$$\mathfrak{E}_{xj}(J) = \frac{1}{M-J} \sum_{i=1}^{M-J} \sum_{s=0}^L \delta_{j, i+s} = 1. \tag{5.29}$$

Окончательно получим

$$\mathfrak{K}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{j\zeta} x_{j, \zeta+J} . \tag{5.30}$$

Отсюда видно, что выражение (5.30), является **частным случаем** выражения (5.23) или (5.24) для регулярного временного ряда и представляет собой **классический мультипликативный алгоритм t-текущей оценки корреляционной функции**.

При нахождения t-текущей оценки корреляционной функции неэквидистантного временного ряда из-за случайного характера объёма выборки j-реализации  $M_j$  не-

обходимо иметь в виду, что, для получения оценки по всей совокупности реализации, требуется выполнение условия:

$$(\zeta + J)\Delta\tau \leq \sum_{i=1}^{M_j-1} \Delta t_{ji} . \quad (5.31)$$

Полученные результаты можно обобщить и для получения **средних** оценок корреляционных функций неэквидистантных временных рядов. Для этого необходимо полученные **j-текущие оценки усреднить по совокупности реализации**. Алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции средней оценки корреляционно-структурных функций приведены в таблице 5.6.

Алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции средней оценки корреляционно-структурных функций.

Таблица 5.6

№	Алгоритм измерения
1	$\mathfrak{K}_{xcp}(J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
2	$\mathfrak{E}_{xcp}(J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}$
3	$\mathfrak{P}_{xcp}(J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sum_{i=1}^{M_j} \text{sign } x_{ji} \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
4	$\mathfrak{C}_{xcp}(J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sum_{i=1}^{M_j} \left  x_{ji} - \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right }{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$
5	$\mathfrak{S}_{xcp}(J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sum_{i=1}^{M_j} \left[ x_{ji} - \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s} \right]^2}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}}$

№	Алгоритм измерения
6	$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_{xycp}(J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{M_{xj}} \sum_{i=1}^{M_{xj}} \sum_{s=0}^L \delta^{xy}_{j,i+s}; \quad \delta^{xy}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ent} \left[ \frac{t^y_{j,i+s} - t^x_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \\ \mathcal{E}_{yxcp}(J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{M_{yj}} \sum_{i=1}^{M_{yj}} \sum_{s=0}^L \delta^{yx}_{j,i+s}; \quad \delta^{yx}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ent} \left[ \frac{t^x_{j,i+s} - t^y_{ji}}{\Delta\tau} + 0,5 \right] = J \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \end{aligned} \right.$
7	$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{K}_{xycp}(J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sum_{i=1}^{M_{xj}} x_{ji} \sum_{s=0}^L y_{j,i+s} \delta^{xy}_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_{xj}} \sum_{s=0}^L \delta^{xy}_{j,i+s}} \\ \mathcal{K}_{yxcp}(J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sum_{i=1}^{M_{yj}} y_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{yx}_{j,i+s}}{\sum_{i=1}^{M_{yj}} \sum_{s=0}^L \delta^{yx}_{j,i+s}} \end{aligned} \right.$

На основе косвенного метода оценивания с использованием интервальной корреляционной функции возможен синтез алгоритмов для оценки и других средних вероятностных характеристик [86].

### 5.3. Аппроксимативный метод и алгоритмы измерения корреляционных функций неэквидистантных временных рядов

Сущность аппроксимативного метода, как следует из его определения, заключается в замене участка реализации случайного процесса на интервале дискретизации его моделью  $x^{(M)}_{ji}(t_{ji})$  и выполнении необходимых функциональных преобразований над ее параметрами в соответствии с выражением:

$$\mathcal{G}[X(t)] = S_d g \left\{ \left[ x^{(M)}_{ji}(t_{ji}) \right]_{\substack{j=1,2,\dots,M_j \\ i=1,2,\dots,N}} \right\}. \tag{5.32}$$

Отсюда видны основные отличия алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов от классических алгоритмов:

1.  $x_{ji}$ ,  $t_{ji}$  и  $M_j$  являются случайными величинами;
2. необходимо определить вид функционального преобразования  $g[ ]$ , учитывающий специфику представления входных данных  $x^{(M)}_{ji}(t_{ji})$  и  $M_j$ ;
3. необходимо определить вид оператора усреднения  $S_d$ .

Применение метода возможно при преднамеренной неравномерной дискретизации с известным алгоритмом восстановления информации на интервале дискретизации, например, адаптивно-временной, спорадической дискретизации, адаптивной коммутации [40, 67, 68]. Как правило, с целью упрощения аппаратной реализации

при этом используются полиномиальные модели нулевого и первого порядка (см. таблицу 5.7), требующие для реализации устройств сжатия данных сравнительно простые технические средства и обладающие достаточной эффективностью, хотя в некоторых случаях рассматривается применение и других моделей, в том числе и сплайн аппроксимация.

Модели входных сигналов при адаптивной дискретизации

Таблица 5.7

№	Название модели	Аналитическое выражение	Критерий	$\Delta t_0$	
				n=0	n=1
1	Интерполяционный полином Лагранжа	$\sum_{m=0}^n a_m t^m$	Равномерное приближение	$\frac{\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{8\varepsilon}{\mu_2}}$
2	Ряд Маклорена	$\sum_{m=0}^n \frac{x^{(m)}(0)t^m}{m!}$	Равномерное приближение	$\frac{\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{8\varepsilon}{\mu_2}}$
3	Полиномиальная	$\sum_{m=0}^n b_m t^m$	Квадратическое приближение	$\frac{2\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{12\varepsilon}{\mu_2}}$
4	Полиномиальная	$\sum_{m=0}^n c_m t^m$	Интегральное приближение	$\frac{4\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{48\varepsilon}{\mu_2}}$

Следует подчеркнуть, что для синтеза алгоритмов измерения практически не имеет значения вид модели, критерии, по которым определяются ее параметры, влияющие только на сложность алгоритма и его метрологические характеристики, поэтому представляется целесообразным рассмотреть синтез аппроксимативных алгоритмов статистических измерений (ААСИ) с использованием полиномиальных моделей нулевого и первого порядка.

В рассматриваемых полиномиальных моделях при  $n = 0$  и  $n = 1$  модели  $j$ -ой реализации случайного процесса на  $i$  интервале дискретизации записываются в виде

$$x_{ji}^{(0)}(t) = a_{ji}^{(0)} \delta^*_{ji}; \quad (5.33)$$

$$x_{ji}^{(1)}(t) = \left( a_{ji}^{(0)} + a_{ji}^{(1)} t \right) \delta^*_{ji}, \quad (5.34)$$

где

$$\delta^*_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } t_{ji} \leq t < t_{j,i+1}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5.35)$$

индикатор состояния, определяющий интервал дискретизации.

Так, при адаптивно-временной дискретизации и критерии равномерного приближения параметры моделей определяются в следующем виде:

1. для предсказателя нулевого порядка с фиксированной апертурой:
2.  $a_{ji}^{(0)} = x_{ji};$  (5.36)

3. для предсказателя первого порядка, определяющего производную сигнала по соседним отсчетам равномерной дискретизации, т.е. непосредственно в существенном отсчете:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = x_{ji} - \Delta_{ji} t_{ji}; \\ a_{ji}^{(1)} = \Delta_{ji}, \end{cases} \quad (5.37)$$

где  $\Delta_{ji} = \frac{x_{jl} - x_{ji}}{t_{jl} - t_{ji}}$ , а  $t_{jl} = t_{ji} + \Delta t_0$ ,  $x_{jl} = x_{jl}(t_{jl})$ ,

$\Delta t_0$  - интервал дискретизации процесса;

1. для предсказателя первого порядка, определяющего производную сигнала по предыдущему и текущему существенным отсчетам сигнала:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = \frac{x_{j,i-1} t_{ji} - x_{ji} t_{j,i-1}}{t_{ji} - t_{j,i-1}}; \\ a_{ji}^{(1)} = \frac{x_{ji} - x_{j,i-1}}{t_{ji} - t_{j,i-1}}; \end{cases} \quad (5.38)$$

2. для «вверного» интерполятора первого порядка:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = \frac{x_{ji} t_{j,i+1} - x_{j,i+1} t_{ji}}{t_{j,i+1} - t_{ji}}; \\ a_{ji}^{(1)} = \frac{x_{j,i+1} - x_{ji}}{t_{j,i+1} - t_{ji}}. \end{cases} \quad (5.39)$$

Предположим, что известна модель восстановления пропущенных отсчётов на  $i$ -интервале дискретизации  $j$ -ой реализации неэквидистантного временного ряда и требуется найти  $j$ -текущую оценку корреляционной функции. Положив в выражении (5.6)  $\delta_{jn,1} = \delta_{jn,2} = 1$ , а  $\delta_{jn,3} = \delta_{jn,4} = 0$ , получим оценку корреляционной функции в виде:

$$\mathfrak{K}_{xj}(J) = M \left[ \overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J} + \overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} \right]. \quad (5.40)$$

Или

$$\mathfrak{K}_{xj}(J) = M \left[ \overset{\circ}{x}_{jn} \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} \right], \quad (5.41)$$

где  $\overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,n+J} \cup \overset{\circ}{x}_{j,n+J}^{(M)}$ .

Заметим, что значение индикатора состояния  $\delta_{jn,1} = \delta_{jn,2} = 1$  только в том случае, когда на временном интервале  $J\Delta\tau$  находятся два существенных отсчёта неэквидистантного временного ряда  $\overset{\circ}{x}_{ji}(t_{ji}) = \overset{\circ}{x}_{jn}$  и  $\overset{\circ}{x}_{j,i+s}(t_{j,i+s}) = \overset{\circ}{x}_{j,n+J}$ , где  $s$  - целая случайная величина, определяющая номер существенного отсчёта, для которого выполняется неравенство:  $t_{j,i+s} \leq t_{ji} + J\Delta\tau < t_{j,s+i+1}$  и характеризующая количество пропущенных существенных отсчётов. Значение случайной величины  $s$  при оценке корреляционной функции находится в диапазоне  $(0, L \leq J_{\max})$ , при этом равенство соблюдается только для регулярного потока.

В выражении (5.41) присутствует модельное значение, которое определяется, например, одним из выражений (5.36)-(5.39). В зависимости от сложности алгоритма восстановления процесса на интервале дискретизации можно получить алгоритм той или иной степени сложности. Наиболее простой алгоритм соответствует адаптивно-временной дискретизации при  $n = 0$ .

В этом случае

$$\overset{\circ}{x}_{j,i+s}^{(M)} = \overset{\circ}{x}_{j,i+s}, \text{ если } t_{j,i+s} \leq t_{ji} + J\Delta\tau < t_{j,s+i+1}, \quad (5.42)$$

и выражение (5.41) приводится к виду

$$\mathbb{K}_{xj}(J) = M \left[ \overset{\circ}{x}_{ji} \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \right]. \quad (5.43)$$

Для определения значения  $s$  воспользуемся фильтрующим свойством индикатора состояния. Тогда выражение (5.43) примет вид:

$$\mathbb{K}_{xj}(J) = M \left[ \overset{\circ}{x}_{ji} \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^* \right]. \quad (5.44)$$

Заметим, что количество произведений существенных отсчётов в выражении (5.44) будет равно сумме индикаторов состояния:

$$d = \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^* < M_j. \quad (5.45)$$

Это значение  $d$  и используется для усреднения при получении оценок корреляционных функций. С учетом выражений (5.2), и (5.45) выражение (5.44) запишется в виде:

$$\mathbb{K}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} \overset{\circ}{x}_{ji} \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^*}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^*}. \quad (5.46)$$

Разделив числитель и знаменатель в (5.12) на  $M_j$ , окончательно получим:

$$\mathbb{K}_{xj}(J) = \frac{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \overset{\circ}{x}_{ji} \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^*}{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^*}. \quad (5.47)$$

Выражение

$$\mathbb{E}_{xj}^*(J) = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^* \quad (5.48)$$

является ***j*-текущей оценкой интервальной корреляционной функции** и характеризует распределение отсчётов в потоке, находящихся на временном интервале  $J\Delta\tau$  [76].

Отсюда видно, что выражения (5.46) или (5.47) отличаются от классического алгоритма ***j*-текущей оценки корреляционной функции** (4.2):

1. видом функционального преобразования  $g \left[ x_{ji} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^* \right]$ , учитываю-

щего специфику представления входных данных  $x_{ji}$ ,  $t_{ji}$ ,  $L$  и  $\Delta\tau$ ;

2. видом оператора усреднения  $S_d = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} L}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^*}$  и значением  $d$ ;

3. переходом алгоритма в **новый класс – класс косвенных алгоритмов**.

Так как  $j$ -текущая оценка корреляционной функции зависит от интервальной корреляционной функции, то этот алгоритм относится к классу **аппроксимативных алгоритмов с использованием интервальной корреляционной функции**, а метод – к **косвенным методам измерения корреляционных функций неэквидистантных временных рядов с использованием интервальной корреляционной функции**.

Заметим, что для регулярного временного ряда с интервалом дискретизации  $\Delta\tau$   $M_j = M$  и, как видно из выражения (5.35),

$$\delta_{j,i+s}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } s = J \\ 0, & \text{если } s \neq J \end{cases} \quad (5.49)$$

Из выражения (5.11) следует, что  $d = M - J$  и

$$\mathcal{E}_{xj}^*(J) = \frac{1}{M - J} \sum_{i=1}^{M-J} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s} = 1. \quad (5.50)$$

Подставив выражение (5.50) в выражение (5.47), окончательно получим:

$$\mathcal{K}_{xj}(J) = \frac{1}{M - J} \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} x_{j,i+J}. \quad (5.51)$$

Отсюда видно, что выражение (5.51) является **частным случаем** выражения (5.12) или (5.13) для регулярного временного ряда и представляет собой **классический мультипликативный алгоритм  $j$ -текущей оценки корреляционной функции**.

Для получения более общего результата преобразуем выражение (5.46) к виду:

$$\mathcal{G}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} g_1[x_{ji}] \sum_{s=0}^L g_2[x_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^*]}{\sum_{i=1}^{M_j} \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^*}, \quad (5.52)$$

где  $g_1[\ ]$  и  $g_2[\ ]$  - функциональные преобразования  $x_{ji}$  и  $x_{j,i+s}$  соответственно.

Заметим, что алгоритм (5.52), совпадая по структуре, отличается от косвенного алгоритма с использованием интервальной корреляционной функции  $j$ -текущей оценки корреляционной функции (5.18) лишь **индикатором состояния**  $\delta_{j,i+s}^*$ . Очевидно, что при оценке  **$t$ -текущей** и **средней** корреляционных функций, **отличие** аппроксимативных алгоритмов **при  $n=0$**  также будет заключаться лишь в **индикаторе состоя-**



ния. Поэтому, для **аппроксимативных алгоритмов** справедливы все выражения, приведенные в таблицах 5.1-5.3, с учётом замены  $\delta_{j,i+s}$  на  $\delta_{j,i+s}^*$ .

Следует отметить, что при формировании  $j$ -текущей оценки корреляционной функции используют ближайший левый отсчет  $\overset{\circ}{x}_{j,i+s}$ , попавший в коридор  $t_{j,i+s} \leq t_{j_i} + J\Delta\tau < t_{j,i+s+1}$  (см. (5.35)). Это, в свою очередь, приводит к увеличению погрешности от смещенности оценки корреляционной функции. Для устранения этого недостатка введем индикаторы состояния, которые определим следующим образом:

$$\delta_{j,i+s}^{*(1)} = \begin{cases} 1, & \text{если } t_{j,i+s} \leq t_{j_i} + J\Delta\tau < (t_{j,i+s} + t_{j,i+s+1})/2; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad (5.53)$$

$$\delta_{j,i+s}^{*(2)} = \begin{cases} 1, & \text{если } (t_{j,i+s} + t_{j,i+s+1})/2 \leq t_{j_i} + J\Delta\tau < t_{j,i+s+1}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}. \quad (5.54)$$

С помощью введенных индикаторов состояния можно организовать процесс получения оценки корреляционной функции таким образом, чтобы в качестве сомножителя всегда выступал ближайший отсчёт неэквидистантного временного ряда  $\overset{\circ}{x}(t_{j,i+s})$  или  $\overset{\circ}{x}(t_{j,i+s+1})$ , отстоящий от отсчёта  $\overset{\circ}{x}(t_{j_i})$  на временном интервале  $J\Delta\tau$ .

Алгоритм  $j$ -текущей оценки (5.47) в этом случае примет вид:

$$\mathfrak{K}_{x_j}(J) = \frac{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \overset{\circ}{x}_{j_i} \left[ \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^{*(1)} + \sum_{s=0}^L \overset{\circ}{x}_{j,i+s+1} \delta_{j,i+s}^{*(2)} \right]}{\frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \left[ \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^{*(1)} + \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^{*(2)} \right]}. \quad (5.55)$$

Выражение

$$\mathfrak{E}_{x_j}^{*(1)}(J) = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \left[ \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^{*(1)} + \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^{*(2)} \right] \quad (5.56)$$

является  **$j$ -текущей оценкой интервальной корреляционной функции, но другой**, и также характеризует распределение отсчётов в потоке, находящихся на временном интервале  $J\Delta\tau$ .

Для получения более общего результата преобразуем выражение (5.55) к виду:

$$\mathfrak{G}_{x_j}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} g_1[\overset{\circ}{x}_{j_i}] \left\{ \sum_{s=0}^L g_2[\overset{\circ}{x}_{j,i+s} \delta_{j,i+s}^{*(1)}] + \sum_{s=0}^L g_2[\overset{\circ}{x}_{j,i+s+1} \delta_{j,i+s+1}^{*(2)}] \right\}}{\sum_{i=1}^{M_j} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s}^{*(1)} + \sum_{s=0}^L \delta_{j,i+s+1}^{*(2)} \right\}}. \quad (5.57)$$

Выражение (5.57) может быть положено в основу синтеза алгоритма любой  $j$ -текущей корреляционно-структурной характеристики, когда в формировании оценки возможно использование ближайшего отсчёта неэквидистантного временного ряда  $\overset{\circ}{x}(t_{j,i+s})$  или  $\overset{\circ}{x}(t_{j,i+s+1})$ , отстоящего от отсчёта  $\overset{\circ}{x}(t_{j_i})$  на временном интервале  $J\Delta\tau$  (см. таблицу 5.8).

Аппроксимативные алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции j-текущей оценки корреляционно-структурных функций

Таблица 5.8

№	Алгоритм измерения
1	$\mathfrak{K}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} x_{ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\sum_{i=1}^{Mj} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
2	$\mathfrak{F}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} \text{sign } x_{ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\sum_{i=1}^{Mj} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
3	$\mathfrak{G}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} \left  x_{ji} - \left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\} \right }{\sum_{i=1}^{Mj} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
4	$\mathfrak{S}_{xj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{Mj} \left[ x_{ji} - \left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\} \right]^2}{\sum_{i=1}^{Mj} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
5	$\begin{cases} \mathfrak{E}_{xyj}(J) = \frac{1}{M_{xj}} \sum_{i=1}^{M_{xj}} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\} \\ \mathfrak{E}_{yxj}(J) = \frac{1}{M_{yj}} \sum_{i=1}^{M_{yj}} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\} \end{cases}$ $\delta^{*xy(1)}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ если } t^y_{j,i+s} \leq t^x_{ji} + J\Delta\tau < (t^y_{j,i+s} + t^y_{j,i+s+1})/2 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$ $\delta^{*xy(2)}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ если } (t^y_{j,i+s} + t^y_{j,i+s+1})/2 \leq t^x_{ji} + J\Delta\tau < t^y_{j,i+s+1} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$ $\delta^{*yx(1)}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ если } t^x_{j,i+s} \leq t^y_{ji} + J\Delta\tau < (t^x_{j,i+s} + t^x_{j,i+s+1})/2 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$ $\delta^{*yx(2)}_{j,i+s} = \begin{cases} 1, \text{ если } t^x_{j,i+s} \leq t^y_{ji} + J\Delta\tau < (t^x_{j,i+s} + t^x_{j,i+s+1})/2 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

№	Алгоритм измерения
6	$\mathfrak{K}_{xyj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_{xj}} x_{ji} \left[ \sum_{s=0}^L y_{j,i+s} \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L y_{j,i+s+1} \delta^{*xy(2)}_{j,i+s} \right]}{\sum_{i=1}^{M_{xj}} \left[ \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(2)}_{j,i+s} \right]}$ $\mathfrak{K}_{yxj}(J) = \frac{\sum_{i=1}^{M_{yj}} y_{ji} \left[ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*yx(2)}_{j,i+s} \right]}{\sum_{i=1}^{M_{yj}} \left[ \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(2)}_{j,i+s} \right]}$

На основании результатов, полученных в подразделе 5.2, приведем аппроксимативные алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции для оценки t-текущих корреляционно-структурных характеристик (см. таблицу 5.9).

Аппроксимативные алгоритмы с использованием интервальной корреляционной функции t-текущей оценки корреляционно-структурных функций

Таблица 5.9

№	Алгоритм измерения
1	$\mathfrak{E}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}$
2	$\mathfrak{K}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
3	$\mathfrak{K}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
4	$\mathfrak{F}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \text{sign } x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \text{sign } x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$

№	Алгоритм измерения
5	$\mathfrak{E}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
6	$\mathfrak{F}_{xt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \left[ x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\} \right]^2}{\left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*(1)}_{j,i+s} \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$
7	$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_{xyt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta^x_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\} \\ \mathfrak{E}_{yxt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta^y_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\} \end{aligned} \right.$
8	$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{K}_{xyt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mxj} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L y_{j,i+s} \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L y_{j,i+s+1} \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\}} \\ \mathfrak{K}_{yxt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Myj} y_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\}} \end{aligned} \right.$
9	$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{K}_{xyt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mxj} x_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \text{sign} y_{j,i+s} \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \text{sign} y_{j,i+s+1} \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\}} \\ \mathfrak{K}_{yxt}(\zeta, \zeta + J) &= \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Myj} y_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \text{sign} x_{j,i+s} \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \text{sign} x_{j,i+s+1} \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{Mj} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\}} \end{aligned} \right.$

№	Алгоритм измерения
10	$\mathfrak{S}_{xyt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{xj}} \left[ x_{ji} \delta_{\zeta, ji} - \left\{ \sum_{s=0}^L y_{j,i+s} \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L y_{j,i+s+1} \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\} \right]^2}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*xy(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$ $\mathfrak{S}_{yxt}(\zeta, \zeta + J) = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_{yj}} \left[ y_{ji} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L x_{j,i+s} \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L x_{j,i+s+1} \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\} \right]^2}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \delta_{\zeta, ji} \left\{ \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(1)}_{j,i+s} + \sum_{s=0}^L \delta^{*yx(2)}_{j,i+s+1} \right\}}$

На основе анализа существующих методов корреляционного анализа неэкви-  
 стантных временных рядов была разработана классификация методов, приведенная  
 на рис. 5.2, которая, на наш взгляд, может быть полезна при разработке новых мето-  
 дов анализа.



Рисунок 5.2. Классификация методов измерения корреляционных функций  
 неэквилистантных временных рядов

#### 5.4. Анализ методических погрешностей результатов измерений вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов

Воспользуемся разработанной в работе [86] методикой для прямых методов измерений вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов и определим погрешности и их составляющие для косвенных методов с использованием интервальной корреляционной функции.

Для этого случая выражение для оценки вероятностной характеристики имеет вид:

$$\mathfrak{G}[X(t)] = \frac{\mathfrak{G}_1[x_{ji}, t_{ji}]}{\mathfrak{G}_2[t_{ji}]} = \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}_2}. \quad (5.58)$$

Разложим  $\mathfrak{G}[X(t)]$  в ряд Тейлора относительно  $M[\mathfrak{G}_1]$  и  $M[\mathfrak{G}_2]$ , ограничившись линейными членами:

$$\mathfrak{G} = \frac{M[\mathfrak{G}_1]}{M[\mathfrak{G}_2]} + \{\mathfrak{G}_1 - M[\mathfrak{G}_1]\} \frac{1}{M[\mathfrak{G}_2]} - \{\mathfrak{G}_2 - M[\mathfrak{G}_2]\} \frac{M[\mathfrak{G}_1]}{M^2[\mathfrak{G}_2]}. \quad (5.59)$$

Введя обозначения  $m_i = M[\mathfrak{G}_i]$  и  $\overset{\circ}{\Theta} = \mathfrak{G}_i - M[\mathfrak{G}_i]$ , окончательно получим:

$$\mathfrak{G} = \frac{m_1}{m_2} + \overset{\circ}{\Theta}_1 \frac{1}{m_2} - \overset{\circ}{\Theta}_2 \frac{m_1}{m_2^2}. \quad (5.60)$$

Отсюда

$$M[\Theta] = \frac{m_1}{m_2}. \quad (5.61)$$

Абсолютная, относительная и приведенная погрешности от смещенности соответственно равны:

$$\Delta_{см} = M[\mathfrak{G}] - \Theta; \quad (5.62)$$

$$\gamma_{см} = \frac{\Delta_{см}}{\Theta}; \quad (5.63)$$

$$\gamma_{см.пр} = \frac{\Delta_{см}}{\Theta_{max}}. \quad (5.64)$$

Дисперсия оценки,  $\mathfrak{G}$  при условии некоррелированности  $\mathfrak{G}_1$  и  $\mathfrak{G}_2$ , равна:

$$D[\mathfrak{G}] = \frac{D[\overset{\circ}{\Theta}_1]}{m_2^2} + \frac{D[\overset{\circ}{\Theta}_2] m_1^2}{m_2^4}. \quad (5.65)$$

Тогда относительные и приведенные статистические погрешности равны:

$$\gamma_{ст} = \sqrt{\frac{D[\overset{\circ}{\Theta}_1]}{m_1^2} + \frac{D[\overset{\circ}{\Theta}_2]}{m_2^2}} = \sqrt{\gamma_{ст.1}^2 + \gamma_{ст.2}^2}; \quad (5.66)$$

$$\gamma_{\text{ст.пр}} = \sqrt{\frac{D[\overset{\circ}{\Theta}_1]}{m_2^2} \max\left[\frac{m_2^2}{m_1^2}\right] + \frac{D[\overset{\circ}{\Theta}_2]}{m_2^4} m_1^2 \max\left[\frac{m_2^2}{m_1^2}\right]} = \sqrt{\gamma_{\text{ст.пр.1}}^2 + \gamma_{\text{ст.пр.2}}^2}. \quad (5.67)$$

Для косвенных методов оценки вероятностных характеристик, воспользовавшись методикой, описанной в [86], также можно выделить составляющие методической погрешности, обусловленные:

**1. неадекватностью -**

$$\Delta_{\text{на}} = \frac{\mathfrak{G}_1^{(1)}[x_{ji}, t_{ji}, d \rightarrow \infty]}{\mathfrak{G}_2^{(1)}[t_{ji}, d \rightarrow \infty]} - \Theta[X(t)]; \quad (5.68)$$

**2. конечностью объёма выборки -**

$$\Delta_{\text{кв}} = \frac{\mathfrak{G}_1^{(2)}[x_{ji}, t_{ji}, d]}{\mathfrak{G}_2^{(2)}[t_{ji}, d]} - \frac{\mathfrak{G}_1^{(1)}[x_{ji}, t_{ji}, d \rightarrow \infty]}{\mathfrak{G}_2^{(1)}[t_{ji}, d \rightarrow \infty]}, \quad (5.69)$$

**3. конечностью каналов -**

$$\Delta_{\text{кк}} = \frac{\mathfrak{G}_1^{(3)}[x_{ji}, t_{ji}, d, L]}{\mathfrak{G}_2^{(3)}[t_{ji}, d, L]} - \frac{\mathfrak{G}_1^{(2)}[x_{ji}, t_{ji}, d]}{\mathfrak{G}_2^{(2)}[t_{ji}, d]}, \quad (5.70)$$

**4. дискретизацией -**

$$\Delta_{\text{д}} = \frac{\mathfrak{G}_1^{(4)}[x_{ji}, l_{ji}, \Delta t_0, d, L]}{\mathfrak{G}_2^{(4)}[l_{ji}, \Delta t_0, d, L]} - \frac{\mathfrak{G}_1^{(3)}[x_{ji}, t_{ji}, d, L]}{\mathfrak{G}_2^{(3)}[t_{ji}, d, L]}, \quad (5.71)$$

где  $l_{ji} = \text{ent}\left[\frac{t_{ji}}{\Delta t_0} + \lambda\right]$ ,  $\Delta t_0$  - интервал дискретизации.

**5. квантованием -**

$$\Delta_{\text{к}} = \frac{\mathfrak{G}_1^{(5)}[\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L]}{\mathfrak{G}_2^{(5)}[l_{ji}, \Delta t_0, d, L]} - \frac{\mathfrak{G}_1^{(4)}[x_{ji}, l_{ji}, \Delta t_0, d, L]}{\mathfrak{G}_2^{(4)}[l_{ji}, \Delta t_0, d, L]}, \quad (5.72)$$

где  $\eta_{ji} = \text{ent}\left[\frac{|x_{ji}|}{q} + \lambda\right] \text{sign} x_{ji}$ ,  $q$  - величина кванта.

**6. конечной разрядностью аппаратно-программных средств -**

$$\Delta_{\text{р}} = \frac{\mathfrak{G}_1^{(6)}[\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L, R]}{\mathfrak{G}_2^{(6)}[l_{ji}, \Delta t_0, d, L, R]} - \frac{\mathfrak{G}_1^{(5)}[\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L]}{\mathfrak{G}_2^{(5)}[l_{ji}, \Delta t_0, d, L]}. \quad (5.73)$$

Методическая погрешность будет равна сумме её составляющих:

$$\Delta_{\text{м}} = \Delta_{\text{на}} + \Delta_{\text{кв}} + \Delta_{\text{кк}} + \Delta_{\text{д}} + \Delta_{\text{к}} + \Delta_{\text{р}}, \quad (5.74)$$

образующих полную группу погрешностей.

Найденные выражения используются как при аналитических методах исследования методических погрешностей и её составляющих, так и при применении метода имитационного моделирования [86].

Результат  $j$ -го измерительного эксперимента

$$\mathfrak{G}_j[X(t)] = \mathfrak{G}_j^{(6)}[\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L, R] \quad (5.75)$$

может рассматриваться как функционал  $j$ -го массива выборочных данных о преобразованных мгновенных значениях процесса при выбранных  $\eta_{ji}, q, l_{ji}, \Delta t_0, d, L, R$ .

Следует подчеркнуть, что при статистической обработке, как правило, анализируют погрешности от неадекватности (смещенности) и конечности выборки. При проектировании же специализированных или универсальных аппаратно-программных средств реального времени необходимо определить конкретные значения  $\Delta t_0, q, L, R$ . Для этого необходим анализ и остальных составляющих методической погрешности. Результатом анализа является выбор таких значений параметров измерительно-вычислительного канала, чтобы можно было бы пренебречь составляющими  $\Delta_{kk}, \Delta_d, \Delta_k$  и  $\Delta_p$ .

### 5.5. Математическое описание неэквидистантных временных рядов

При описании неэквидистантного временного ряда необходимо учитывать специфику его представления в виде двух массивов выборочных данных: массива мгновенных значений  $x_{ji}$  и соответствующих им меток времени  $t_{ji}$ , фиксирующих факт проведения измерений.

Такое представление позволяет для математического описания массива значений  $x_{ji}$  использовать математический аппарат теории случайных процессов, а для описания временной последовательности  $t_{ji}$  - математический аппарат теории потоков событий [86].

Независимо от особенностей математического описания  $x_{ji}$  и  $t_{ji}$  неэквидистантные временные ряды можно разбить на два класса:

- характеристики потока событий  $t_{ji}$  не зависят от характеристик исследуемого случайного процесса (см. рис. 5.3);
- характеристики потока событий  $t_{ji}$  полностью определяются характеристиками исследуемого случайного процесса (см. рис. 5.4).

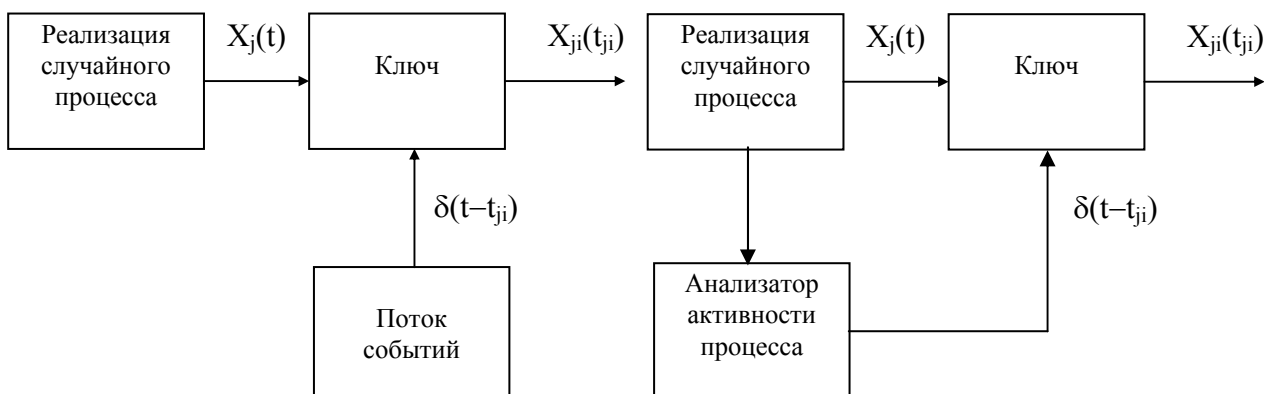


Рисунок 5.3. Характеристики потока не зависят от характеристик процесса

Рисунок 5.4. Характеристики потока зависят от характеристик процесса



К первому классу неэквидистантных временных рядов приводит **непреднамеренная случайная дискретизация**, не зависящая от желания исследователя, в том числе, и «некачественная» регулярная дискретизация [40, 54]:

- регулярная дискретизация с пропусками наблюдений;
- регулярная дискретизация с «дрожанием»;
- регулярная дискретизация с «дрожанием» и пропускам наблюдений.

Ко второму классу относится **преднамеренная нерегулярная дискретизация**, например: адаптивно-временная, спорадическая, - вводимая по желанию исследователя [40, 67]. Следует подчеркнуть, что чем большей априорной информацией о характере нерегулярной дискретизации располагает исследователь, тем более точную модель потока событий он построит.

Так, например, если  $\Delta x_{ji} = \text{const}$ ;  $\Delta t_{ji} = \text{random}$ , то такая дискретизация называется спорадической [67]. Для неё известна связь между интервалом дискретизации и характеристиками случайного процесса [67]. Учёт этого важного обстоятельства позволяет упростить процедуру оценивания вероятностных характеристик и её метрологический анализ.

Математическое описание потоков событий и его характеристики зависят от способа дискретизации (см. рис. 5.5).

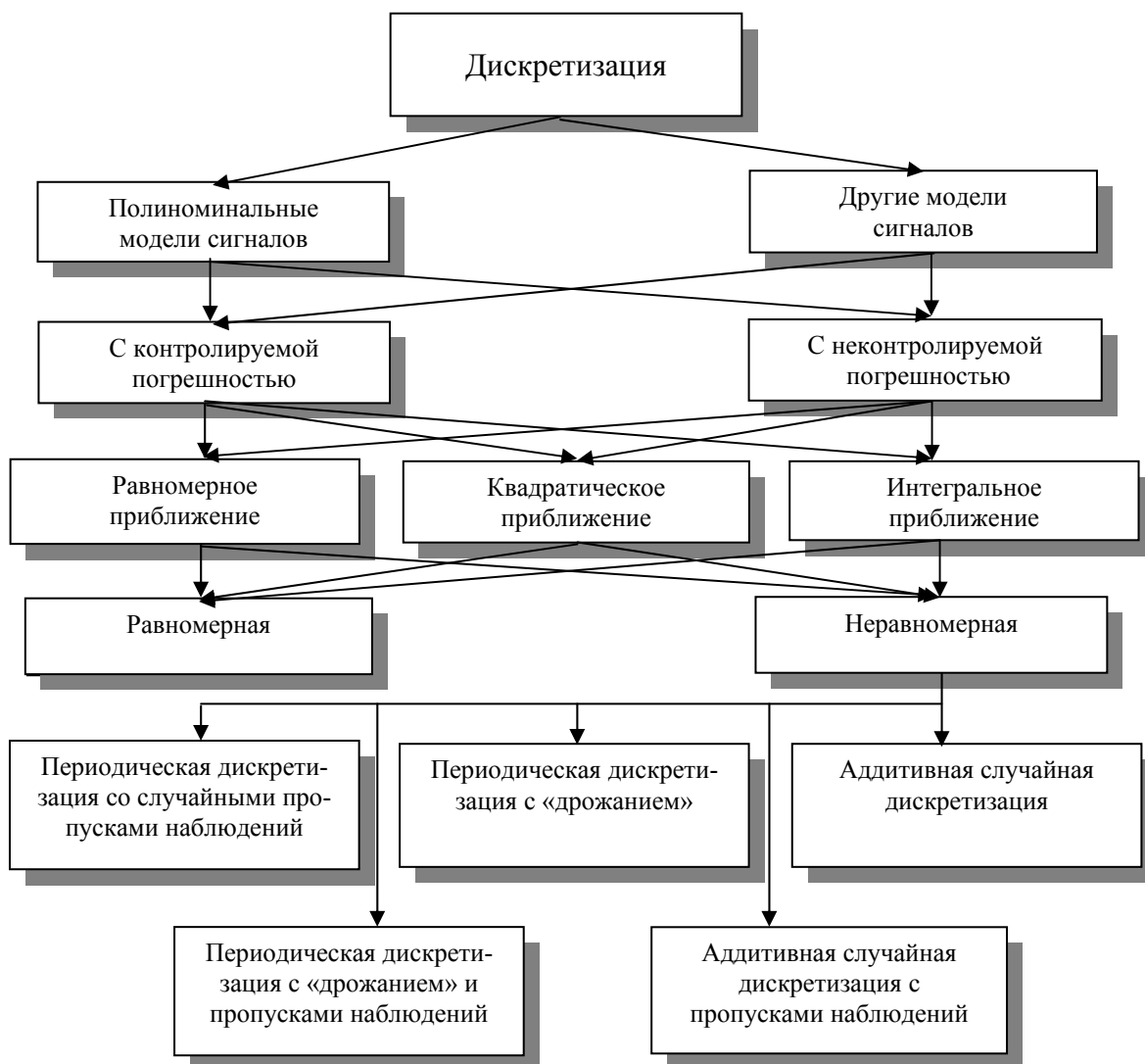


Рисунок 5.5. Классификация методов дискретизации

Различают потоки **однородных** и **неоднородных** событий. Например, в системах связи, реализующих приоритет определенной группы абонентов, поток вызовов будет с этой точки зрения неоднородным, система по-разному будет реагировать на разные события (вызовы) в потоке. На рассматриваемые же события (отсчеты первичного процесса) реакция устройств дискретных информационно-измерительных систем, как правило, не меняется при изменении порядкового номера события и поэтому поток выборок можно считать однородным [57].

Основными характеристиками, классифицирующими случайный поток, являются свойства стационарности, ординарности и последствий [57].

**Стационарным** называется поток событий, для которого вероятность  $P_k(l-t, l)$  появления какого-либо числа  $k$  событий на определенном интервале времени  $(l-t, l)$  зависит лишь от значения этого интервала  $t$  и не зависит от его расположения на оси времени.

**Ординарным** называется поток, для которого вероятность появления на малом участке  $\delta t$ , примыкающем к произвольно выбранному моменту времени, более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления хотя бы одного события.

**Последствием** потока заключается в зависимости вероятности  $P_k(l-t, l)$  от распределения событий на оси времени вне интервала  $(l-t, l)$ . Либо, другими словами, поток не обладает последствием, если вероятность появления на любом интервале времени какого-либо числа событий не зависит от того, сколько событий произошло на других, не перекрывающихся с данным интервалом. Из литературы известно [57], что не обладает последствием только простейший случайный или иначе стационарный пуассоновский поток, имеющий экспоненциальное распределение интервалов времени между событиями в потоке.

Варьируя этими свойствами, можно образовывать различные классы потоков:

- **простейший поток - поток Пуассона**, обладающий всеми тремя свойствами, наиболее широко применяемый на практике [40, 57];
- **рекуррентные потоки**, относящиеся к классу стационарных потоков Пальма, у которых одномерные законы распределения интервалов дискретизации одинаковы, а сами интервалы независимы между собой [57, 86];
- **поток смены состояний марковского процесса Вольда**, предполагающий зависимость соседних интервалов между событиями в потоке [57];
- **альтернирующие потоки** [41, 57], у которых плотность распределения интервалов чередуется от интервала к интервалу (выбирается из двух возможных видов);
- модель рекуррентного потока, получаемого разряжением, посредством **р-преобразования** исходного потока (каждое событие с вероятностью  $p$  остается в потоке, а с вероятностью  $q=1-p$  выбрасывается) [57, 76, 86].

Выбор модели потока зависит от способа неравномерной дискретизации, характера решаемой задачи, метода исследований (аналитический или имитационное моделирование) и т.д. При аналитических исследованиях предпочтение следует отдавать простейшим моделям, позволяющим получить сравнительно простые выражения, удобные для инженерного расчета основных параметров алгоритмов.

При статистических измерениях при неравномерной дискретизации случайных процессов возможны следующие случаи:

- случайная дискретизация непреднамеренная и для нее необходимо оценить увеличение методической погрешности, вызванное этой неравномерностью;

- случайная дискретизация преднамеренная с известными характеристиками потока и необходимо: разработать алгоритмы статистических измерений, определить увеличение методической погрешности, вызванной неравномерностью дискретизации;

- случайная дискретизация преднамеренная, и для нее необходимо определить требования к потоку при известных характеристиках процесса с целью обеспечения допустимых методических погрешностей измерения значений вероятностных характеристик.

При решении перечисленных задач необходимо определить характеристики потока, которые можно задать различными способами [57, 86]:

- вероятностью числа событий на заданном временном интервале;
- законом распределения интервалов дискретизации;
- временами возвращения.

Эти способы дополняют друг друга, и в зависимости от решаемой задачи применяется один из них или совокупность. Как правило, для анализа алгоритмов статистических измерений и расчета основных параметров необходимо знание:

- закона распределения интервалов и их моментных характеристик, используемых при оценке составляющей методической погрешности, обусловленной неравномерностью дискретизации;

- закона распределения сумм интервалов, требуемого для определения числа каналов аппаратно-программных средств для измерения корреляционно-структурных характеристик;

- плотности распределения времен возвращения, используемой при статистическом анализе взаимных корреляционно-структурных характеристик;

- интервальной корреляционной функции, необходимой для усреднения результата и оценки составляющих методической погрешности;

- минимального интервала дискретизации - параметра аппаратно-программных средств, обеспечивающего допустимые значения составляющей методической погрешности, обусловленной дискретизацией;

- интенсивности потока - величины, обратной математическому ожиданию интервала дискретизации, используемой для оценки коэффициента сжатия, определения допустимого значения погрешности восстановления случайного процесса;

- коэффициента сжатия  $k_{сж}$ , характеризующего число существенных отсчетов на выходе аналого-цифрового преобразователя.

Рассмотрим в общем виде определение указанных характеристик без учета конкретных особенностей моделей потоков.

Плотность  $f_{\Delta t}(\Delta t)$  и функция распределения вероятностей интервалов  $F_{\Delta t}(\Delta t)$  являются основными характеристиками, позволяющими определить большинство вероятностных характеристик, указанных выше, за исключением минимального интервала дискретизации и  $k_{сж}$ , для определения которых необходима дополнительная информация о свойствах исследуемого случайного процесса.

Задаче определения статистических характеристик интервалов между существенными отсчетами, являющейся задачей о первом достижении границ, посвящено большое число работ [40, 79, 68]. Как известно, строгое решение этой задачи, связанное с  $n$ -мерным интегрированием  $n$ -мерной плотности вероятности процессов при  $n \rightarrow \infty$ , может быть получено в аналитическом виде только для марковского процесса первого порядка [79]. В остальных же случаях авторы для конкретных способов не-

равномерной дискретизации при определенных допущениях приводят аналитические выражения  $f_{\Delta t}(\Delta t)$ ,  $F_{\Delta t}(\Delta t)$ .

Так, в [40] для адаптивно-временной дискретизации, полиномами нулевого и первого порядка при условии постоянства производной на интервале дискретизации, что справедливо лишь при малых погрешностях восстановления (уставки) и известном законе распределения модуля  $n+1$  производной, приводятся и анализируются законы распределения интервалов.

Однако, на практике применение такого подхода оказывается проблематичным, так как только для нормального  $n+1$  раз дифференцируемого входного процесса возможно аналитическое определение закона распределения модуля  $n+1$  производной. В остальных же случаях задача не имеет решения.

В [57] в результате обработки большого экспериментального материала автор делает вывод о том, что математическая модель интервалов дискретизации для адаптивно-временных дискретизаторов с предсказателем нулевого порядка представляет собой рекуррентный поток с гамма-распределением интервалов:

$$f_{\Delta t}(t) = \frac{(\alpha \lambda)^\alpha \Delta t^{\alpha-1} \exp(-\alpha \lambda \Delta t)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (5.76)$$

где  $\lambda$  - интенсивность потока.

Причем, чем меньше корреляционные связи между отсчетами входного процесса источника, тем меньше коэффициент  $\lambda$ , а для безызбыточных выборок он практически равен 1.

Отметим, что при  $\alpha = 1$  распределение интервалов становится экспоненциальным:

$$f_{\Delta t}(t) = \lambda \exp(-\lambda \Delta t), \quad (5.77)$$

а поток отсчетов - пуассоновским [54].

На пуассоновский характер потока при различных способах неравномерной дискретизации указывают и другие авторы [40, 68].

В некоторых частных случаях неравномерной дискретизации возможно аналитическое определение закона распределения интервалов, в остальных же случаях полученные результаты для повышения достоверности должны проверяться методом имитационного моделирования и экспериментальными исследованиями.

Определение моментных характеристик интервалов дискретизации при известном законе их распределения затруднений не вызывает.

Законы распределения сумм интервалов для рекуррентных потоков наиболее целесообразно определить через характеристическую функцию интервалов  $\varphi_{\Delta t}(u)$  [91].

В этом случае характеристическая функция  $\Theta_s = \sum_{i=1}^s \Delta t_i$  равна:

$$\varphi_{\Theta_s}(u) = [\varphi_{\Delta t}(u)]^s \quad (5.78)$$

Отсюда, воспользовавшись обратным преобразованием Фурье для  $\varphi_{\Theta_s}(u)$ , определим  $f_{\Theta_s}(\Theta_s)$  и  $F_{\Theta_s}(\Theta_s)$ .

При определении числа каналов аппаратно-программных средств возникает необходимость в определении распределения сумм  $L$  интервалов дискретизации на

заданном интервале наблюдения оцениваемой вероятностной характеристики, например, на максимальном интервале корреляции  $\tau_{k\max}$  [76]:

$$\begin{aligned} P(L, \tau_{k\max}) &= P(\tau_{k\max} \leq \Theta_L \cap \Theta_{L-1} < \tau_{k\max}) = \\ &= F_{L-1}(\tau_{k\max}) - F_L(\tau_{k\max}). \end{aligned} \quad (5.79)$$

Значение  $L_{\max}$ , обеспечивающего выполнение условия (5.79) с вероятностью  $P_d$ , находится из уравнения:

$$F_{L_{\max}}(\tau_{k\max}) = 1 - P_d. \quad (5.80)$$

Плотности распределения прямого  $V$  и обратного  $U$  времен возвращения, необходимые для метрологического анализа оценки взаимных корреляционно-структурных функций, определяется в виде [40, 54]:

$$\varphi(t) = \varphi_v(t) = \varphi_u(t) = \lambda F(t), \quad (5.81)$$

где  $F(t)$ -функция распределения интервала дискретизации,  $\lambda$ - интенсивность потока.

В системах реального времени обработки и передачи информации, управления наблюдаются различные потоки событий. Поток событий представляет собой точечный процесс с событиями, появляющимися случайным или периодическим образом во времени. В этом случае обычно представляет интерес время появления события и его отношение к предшествующим событиям, не обращая внимание ни на амплитуду событий, ни на информацию, которую они несут. В системах реального времени к событиям могут быть отнесены: электрический импульс, сигнал переключения, прерывания, момент окончания алгоритма и т.д.

В настоящее время в литературе описаны различные статистические методы и аппаратура для анализа случайных событий [74, 86, 113, 114]. Важной частью этого анализа является корреляционный анализ потоков событий. Корреляция событий основана на измерении распределения интервалов времени между случайными событиями. События могут представлять поток данных в вычислительных системах реального времени или временные ряды экспериментальных импульсов.

**Автокорреляция**  $C_a(t)$  определяет вероятность появления события в потоке  $A$  как функцию времени после данного события без учета числа прошедших событий:

$$C_a(t) dt = P [\text{событие в } A(t, t+dt) / \text{событие в } A \text{ в } 0]. \quad (5.82)$$

В дальнейшем, для отличия автокорреляционной функции случайных процессов (последовательностей) автокорреляционную функцию потоков будем называть **интервальной корреляционной функцией (ИКФ)**.

**Взаимокорреляция**  $C_{ab}(t)$  применяется в случае двух потоков событий  $A$  и  $B$  и определяет вероятность наблюдения события в потоке  $B$  как функцию времени после данного события в потоке  $A$ , без учета числа прошедших событий:

$$C_{ab}(t) dt = P [\text{событие в } B \text{ в } (t, t+dt) / \text{событие в } A \text{ в } 0]. \quad (5.83)$$

Функцию  $C_{ab}(t)$  по аналогии назовем **взаимной интервальной корреляционной функцией (ВИКФ)**.

Определенные таким образом автокорреляция и взаимокорреляция применяются для объяснения поведения систем реального времени, для измерения и управления нейронных сетей и моделей поведения, определения зависимости в случайных потоках, осуществления этой зависимости, обнаружения скрытых моделей в случайной последовательности и предложения соответствующей вероятностной модели исследуемой системы.

Это важное обстоятельство дает возможность определения степени зависимости событий одного потока (разных потоков) через интервальные корреляционные

функции и позволяет применять их и для анализа неэквидистантных временных рядов.

Интервальные корреляционные функции используются для формирования массивов, необходимых для оценки значений различных функциональных вероятностных характеристик НВР, метрологическом анализе найденных оценок и являются характеристикой равномерности случайного потока.

Определим вероятность того, что один отсчёт потока отстоит от другого на расстоянии  $J\Delta\tau \pm \Delta\tau/2$  без учёта числа прошедших отсчётов.

Введем случайную величину, равную сумме  $k$  интервалов дискретизации:

$$\Theta_{jk} = \sum_{i=1}^k \Delta t_{ji}. \quad (5.84)$$

Найдем вероятность того, что случайная величина  $\Theta_{jk}$  находится в диапазоне  $J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} < \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}$ :

$$P\left\{J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} < \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right\} = F_{\Theta_{jk}}\left(J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right) - F_{\Theta_{jk}}\left(J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2}\right). \quad (5.85)$$

Вероятность того, что в этот интервал попадет любой из  $k$  отсчетов, равна:

$$\begin{aligned} C_{xj}(J) = C_{xj}(J\Delta\tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left[J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} \leq \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ F_{jk}\left(J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right) - F_{jk}\left(J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.86)$$

В соответствии с определением это и есть интервальная корреляционная функция.

Основными требованиями, предъявляемыми к модели потока событий, являются следующие:

- модель должна адекватно описывать поток - совпадение основных характеристик потока и модели;
- быть по возможности простой, позволяющей аналитическое определение основных характеристик потока;
- для потоков, зависящих от характеристик случайного процесса, позволять определение характеристик потока в зависимости от характеристик процесса.
- На практике, при описании различных видов неравномерной дискретизации, как правило, применяют модели рекуррентных потоков Пальма [40, 44, 57, 68]:
  - периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений
  - периодической дискретизации с «дрожанием»;
  - аддитивной случайной дискретизации;
  - периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений;
  - аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений.

Так для периодического потока со случайными пропусками наблюдений интервал дискретизации  $\Delta t_{ji} = t_{j,i+} - t_{ji}$  определяется в соответствии с выражением

$$\Delta t_{ji} = Y_{ji} \Delta t_0, \quad (5.87)$$

где  $\Delta t_0$  - интервал принудительной дискретизации;

$Y$  - случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром  $p$  [46]:

$$P(Y = m) = pq^{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (5.88)$$

В соответствии с выражением (5.87) мгновенное значение выборки случайного процесса и соответствующая ему метка времени равны:

$$\begin{cases} x_{ji} = x_{ji} \left( \Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{jk} \right); \\ t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{j=1}^i Y_j. \end{cases} \quad (5.89)$$

Для периодического потока с «дрожанием»

$$\begin{cases} t_{ji} = i\Delta t_0 + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (5.90)$$

где  $\xi_{ji}$  - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей  $f_{\xi}(\xi)$ , каждая из которых расположена в диапазоне  $\left(-\frac{\Delta t_0}{2}, \frac{\Delta t_0}{2}\right)$ , а интервал дискретизации равен

$$\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_i - \xi_{i-1}. \quad (5.91)$$

Для аддитивного случайного потока

$$\begin{cases} t_{ji} = t_{j,i-1} + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (5.92)$$

где  $\xi_{ji}$  - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей  $f_{\xi}(\xi)$ , каждая из которых расположена в диапазоне  $(0, \infty)$ .

Интервал дискретизации для этой модели равен

$$\Delta t_{ji} = \xi_{ji}. \quad (5.93)$$

Модель периодического потока с «дрожанием» и пропусками наблюдений является обобщением модели периодической дискретизации с «дрожанием», интервалы которой  $\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_{j,i+1} - \xi_{j,i}$  с плотностью распределения вероятностей  $f_{\Delta t}(\Delta t)$ , разряжены  $p$ -преобразованием [86].

Для нее:

$$\begin{cases} t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{kj} + \xi_{\sum_{k=1}^i Y_{kj}} - \xi_0; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (5.94)$$

где  $Y_i$  - случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром  $p$  в соответствии с выражением (5.88), а интервал дискретизации

$$Z = \sum_{i=1}^Y \Theta_i = Y_i \Delta t_0 + \xi_{\sum_{j=1}^i Y_j} - \xi_{\sum_{j=1}^{i-1} Y_j}. \quad (5.95)$$

Модель аддитивного случайного потока с пропусками наблюдений является обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой

$\Delta t_{ji} = \xi_{ji}$  - с плотностью распределения вероятностей  $f_{\Delta t}(\Delta t)$  разряжены р-преобразованием.

Для этой модели момент отсчёта и интервал дискретизации равны:

$$\begin{cases} t_i = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{Y_j} \xi_{k+\sum_{l=1}^{j-1} Y_l}; \\ x_i = x(t_i), \\ z_i = \sum_{l=1}^Y \Theta_l = \sum_{k=1}^{Y_i} \xi_{k+\sum_{l=1}^{i-1} Y_l}. \end{cases} \quad (5.96)$$

## 5.6. Процессорные статистические анализаторы

Программно-аппаратный дуализм позволяет реализовать алгоритмы измерения как в виде специализированных средств, построенных на базе «жесткой» логики [20-37, 86], так и в виде процессорных измерительных средств (ПРИС) [86, 113, 114]. Перспективность разработки и применения ПРИС объясняется рядом преимуществ:

- универсальностью - способностью решать программными средствами широкий круг измерительных задач;
- гибкостью - возможностью модификации алгоритмов измерения характеристик сигналов и параметров алгоритмов программным путем без изменения структуры анализатора;
- наличием развитого математического обеспечения;
- наличием развитой системы прерываний от внешних устройств, позволяющей строить системы реального времени;
- возможностью одновременного использования микро-ЭВМ, являющейся ядром ПРИС, для решения других задач, например, вторичной статистической обработки информации;
- уменьшением затрат на проектирование и макетирование и т.д.

Пожалуй, единственным недостатком, ограничивающим область применения ПРИС, является сравнительно низкое, по сравнению со специализированными устройствами, быстродействие. Повышение быстродействия ПРИС возможно различными способами, наиболее перспективными из которых являются:

- алгоритмические;
- структурные;
- программные;
- применение аппаратных множителей;
- рациональное распределение функций между внешними устройствами и микро-ЭВМ.

Кроме того, для расширения частотного диапазона исследуемых случайных процессов при возможности задержки в обработке информации значительный эффект дает предварительная буферизация.



Обобщенная структурная схема ПРИС для измерения значений вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов содержит блок неравномерной дискретизации, интерфейс ввода, микро-ЭВМ, регистратор. В качестве блока неравномерной дискретизации могут быть применены адаптивно-временные дискретизаторы [98], адаптивный коммутатор [40], спорадический дискретизатор [67] и т.д. Основные взаимодействующие узлы микро-ЭВМ и их связи зависят от решаемой задачи. Интерфейс ввода и регистратор являются стандартными блоками.

Основой для построения процессорных статистических анализаторов, реализующих алгоритмы с использованием интервальных корреляционных функций, являются процессорные интервальные коррелометры [86, 113, 114].

На рис. 5.6 представлена структура интервального коррелометра потоков событий, разработанная на базе микро-ЭВМ [113]. Для каждого случайного события, поступающего на его вход, выполняется следующая последовательность операций.

**Операция 1.** Дискретизация временного интервала  $t_i$ .

Эта процедура осуществляется вне компьютера, используя счетчик, подключенный к генератору стабильной частоты. Каждое случайное событие прерывает компьютер. Компьютер переписывает содержимое счетчика в интервальный регистр А и обнуляет счетчик. Содержимое счетчика представляет цифровой эквивалент интервала  $t_i$  между двумя последними событиями.

**Операция 2.** Формирование сумм интервалов.

Для вычисления вклада нового события в корреляционную функцию необходимо вычислить следующие суммы интервалов:

$$\begin{cases} \sum_i = t_i \\ \dots\dots\dots ; \\ \sum_{i-L} = t_i + \dots + t_{i-L} \end{cases} \quad (5.97)$$

Память резервируется для запоминания всех частичных сумм. Назовем ее памятью интервальных сумм. Она запоминает L частичных сумм предшествующих событий. L - верхний предел числа интервалов, необходимых для вычисления корреляционной функции.

$\Sigma_i$  запоминается в i-ой позиции памяти сумм. Для этих целей программа прерывания первой обнуляет i-ую позицию. Затем будут сформированы новые частичные суммы путем добавления  $t_i$  к старым частичным суммам. Частичные суммы запоминаются в памяти циркуляционным способом:  $\Sigma_{i-1}$  находится слева от  $\Sigma_i$  и  $\Sigma_{i-L}$  - справа от  $\Sigma_i$ . (Для формирования и запоминания частичных сумм возможно применение блока регистров. В этом случае, если все регистры подключены к общему блоку, добавление осуществляется автоматически).

**Операция 3.** Добавить единицу по всем адресуемым позициям корреляционной функции. Поле памяти резервируется для запоминания гистограмм корреляционной функции. Каждая частичная сумма будет адресом одной ячейки корреляционного поля. Содержимое L адресуемых корреляционных ячеек увеличивается на 1. Заметим, что корреляционное поле состоит из M ячеек ( $M > L$ ). Отношение M/L зависит от шага интервала дискретизации, который может быть установлен выбором частоты генератора.

Программа обработки прерывания для ЭВМ представлена ниже:

$$\begin{aligned} & \text{Reset } R_i ; \\ & \text{Input } t_i ; \text{ Reset Counter;} \end{aligned} \quad (5.98)$$

ADD  $t_i$  to  $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$ ;  
 INCR Indirect  $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$ .

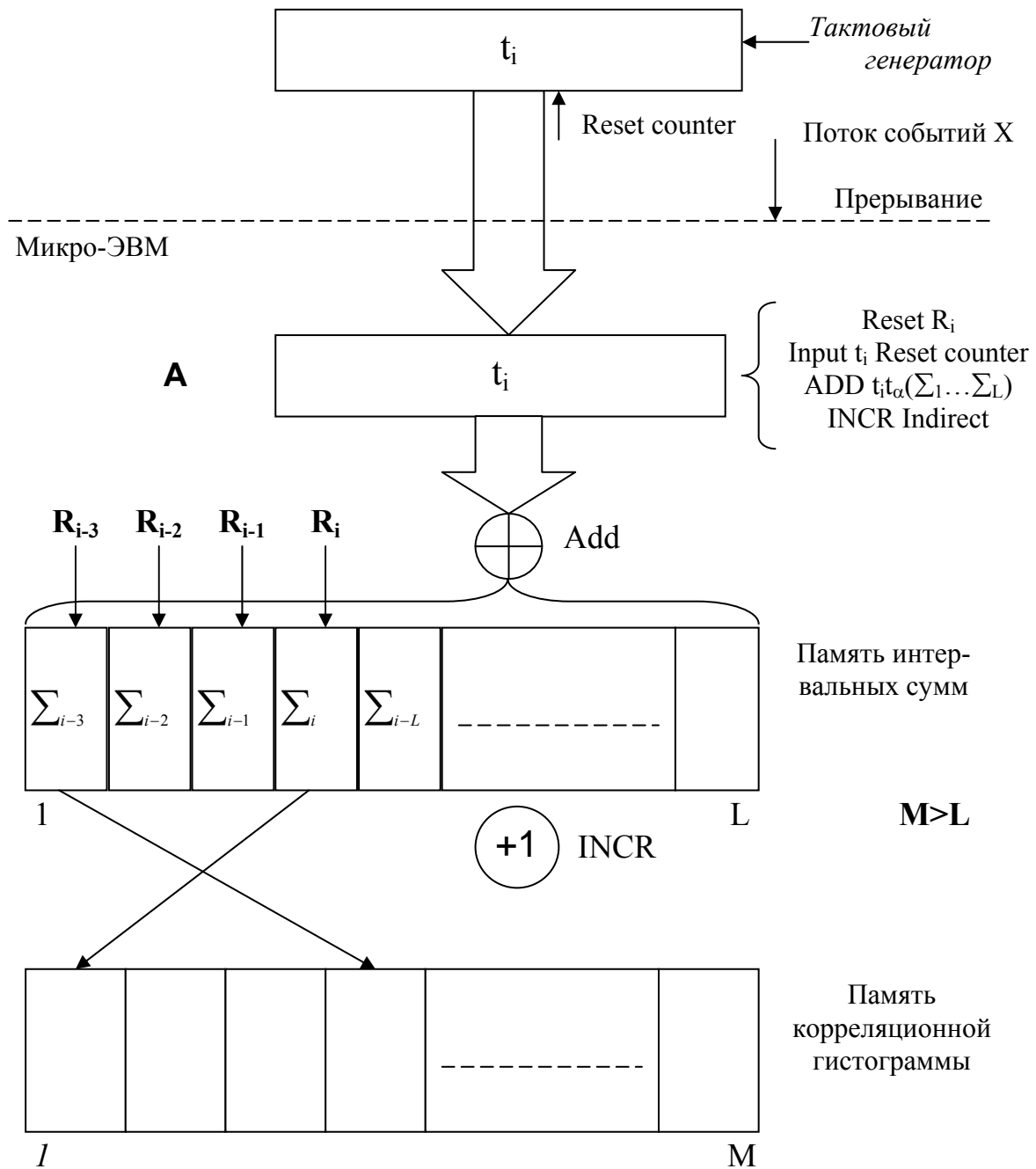


Рисунок 5.6.

Структурная схема интервального взаимного коррелятора, разработанного на базе микро-ЭВМ, представлена на рис. 5.7 [86]. Взаимный коррелометр имеет структуру, аналогичную автокоррелометру. Отличие заключается во взаимодействии двух программ обработки прерываний по каналам  $x$  и  $y$ . Следует отметить, что только программа обработки прерывания по  $x$  обнуляет  $i$ -ую позицию по модулю  $L$ , а программа обработки прерывания  $y$  добавляет единицу ко всем адресуемым позициям корреляционной функции.

Программы обработки прерывания представлены ниже:

- для потока  $x$ :

Input  $t_i$ ; Reset Counter;

ADD  $t_i$  to  $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$ ;

Reset  $R_i$ ;

- для потока  $y$ :

Input  $t_i$ ; Reset Counter;

ADD  $t_i$  to  $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$ ;

INCR Indirect  $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_L)$ .

(5.99)

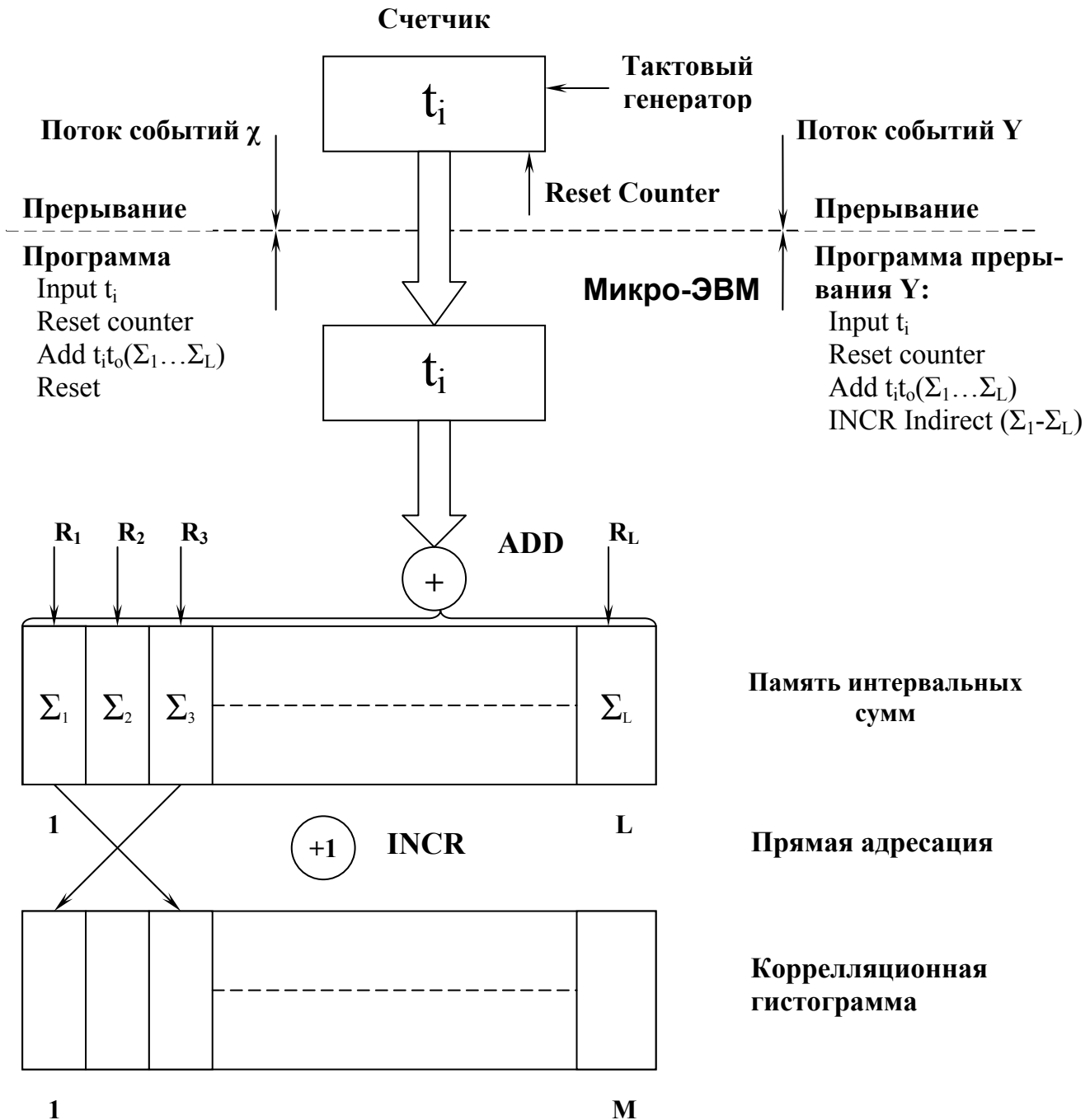


Рисунок 5.7. Взаимный интервальный коррелометр

На базе интервальных коррелометров могут быть разработаны статистические анализаторы для измерения значений разнообразных вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов.

Один из вариантов структурной схемы многофункционального коррелометра, реализованного на базе микро-ЭВМ, представлен на рис. 5.8, где  $Rg\ x_i$ ,  $Rg\ y_i$  - регистры текущих значений входных процессов,  $Rg\ t_i$  - регистр-счетчик, подсчитывающий длину интервала времени между отсчетами, БуфРг - буферный регистр [76].

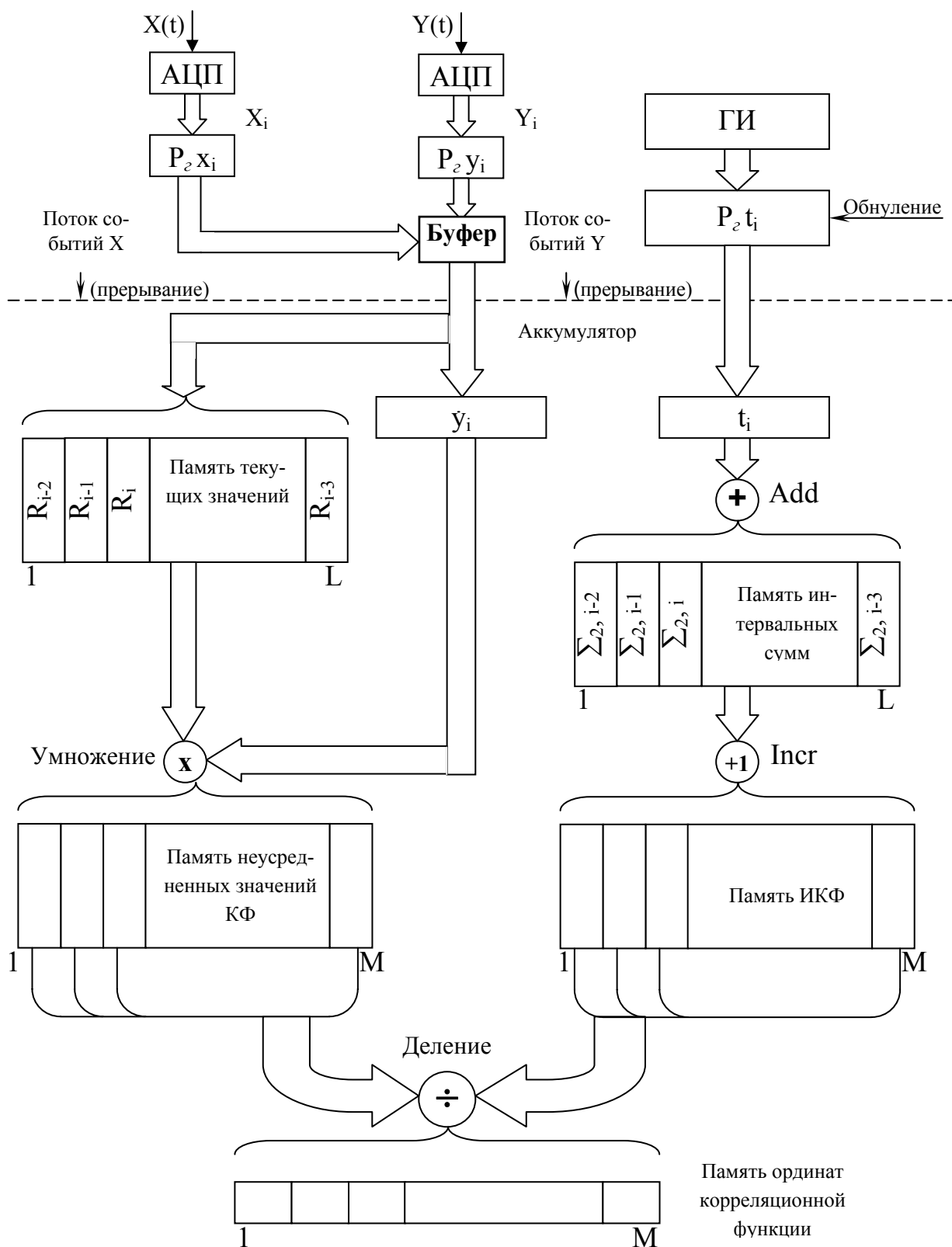


Рисунок 5.8. Коррелометр

Коррелометр позволяет оценивать авто и взаимную корреляционную функции как случайных процессов с регулярным интервалом дискретизации, так и неэквидистантных временных рядов, а также интервальные авто и взаимные корреляционные функции случайных потоков. При этом, для повышения эффективности проводимых вычислений в структуре алгоритмов обработки информации применены циркуляционная организация памяти и косвенная адресация.

Коррелометр начинает работать с приходом внешнего сигнала на прерывание. По этому сигналу в регистры Rг  $x_i$  и Rг  $y_i$  записываются текущие значения входных процессов, и микро-ЭВМ начинает обработку прерываний. Обработка прерываний происходит по одной из следующих программ, представленных в символических обозначениях:

*- автокорреляционная функция с равномерной дискретизацией процессов;*

Input  $x_i$  to A;  
 $\langle A \rangle \rightarrow ((i) \bmod L)$ ;  
 JMS MULT ( $x_i$ ;  $x_1, \dots, x_L$ );  
 JMS ADD Indirect( $\Sigma_1, \dots, \Sigma_L$ ). (5.100)

*- взаимная КФ с равномерной дискретизацией процессов;*

Input  $x_i$  to A;  
 $\langle A \rangle \rightarrow ((i) \bmod L)$ ;  
 Input  $y_i$  to A;  
 JMS MULT ( $y_i$ ;  $x_1, \dots, x_L$ );  
 JMS ADD Indirect ( $\Sigma_1, \dots, \Sigma_L$ ). (5.101)

*- интервальная автокорреляционная функция случайных потоков;*

Reset  $R_i$ ;  
 Input  $t_i$  to A;  
 Reset Counter;  
 ADD  $t$  to ( $\Sigma_1, \dots, \Sigma_L$ );  
 INCR Indirect ( $\Sigma_1, \dots, \Sigma_L$ ). (5.102)

*- интервальная взаимная корреляционная функция случайных потоков;*

*прерывание по каналу X:*

*прерывание по каналу Y:*

Input $t_i$ to A	Input $t_i$ to A;	
Reset Counter;	Reset Counter;	(5.103)
ADD $t_i$ to ( $\Sigma_1, \dots, \Sigma_L$ );	ADD $t_i$ to ( $\Sigma_1, \dots, \Sigma_L$ );	
Reset $R_i$ ;	INCR Indirect ( $\Sigma_1, \dots, \Sigma_L$ ).	

- автокорреляционная функция неэквидистантных временных рядов:

*амплитудная корреляция*

*интервальная корреляция*

<p><b>Input <math>x_i</math> to A;</b>  <b>&lt;A&gt; <math>\rightarrow ((i) \bmod L)</math>;</b>  <b>JMS MULT (<math>x_i; x_1, \dots, x_L</math>);</b>  <b>JMS ADD Indirect (<math>\Sigma_1, \dots, \Sigma_L</math>);</b></p>	<p><b>Reset <math>R_i</math> ;</b>  <b>Input <math>t_i</math> to A;</b>  <b>Reset Counter;</b>  <b>ADD <math>t_i</math> to (<math>\Sigma_1, \dots, \Sigma_L</math>);</b>  <b>INCR Indirect (<math>\Sigma_1, \dots, \Sigma_L</math>).</b></p>	(5.104)
---	--	---------

- взаимная КФ с неравномерной дискретизацией процессов:

*прерывание по каналу X:*

*прерывание по каналу Y:*

*амплитудная корреляция*

<p><b>Input <math>x_i</math> to A;</b>  <b>&lt;A&gt; <math>\rightarrow ((i) \bmod L)</math>;</b>  <b>JMS ADD Indirect (<math>\Sigma_1, \dots, \Sigma_L</math>);</b></p>	<p><b>Input <math>y_i</math> to A;</b>  <b>JMS MULT (<math>y_i ; x_1, \dots, x_L</math>);</b></p>	(5.105)
---	---	---------

*интервальная корреляция*

<p><b>Input <math>t_i</math> to A;</b>  <b>Reset Counter;</b>  <b>ADD <math>t_i</math> to (<math>\Sigma_1, \dots, \Sigma_L</math>);</b>  <b>Reset <math>R_i</math> ;</b></p>	<p><b>Input <math>t</math> to A;</b>  <b>Reset Counter;</b>  <b>ADD <math>t_i</math> to (<math>\Sigma_1, \dots, \Sigma_L</math>);</b>  <b>INCR Indirect (<math>\Sigma_1, \dots, \Sigma_L</math>);</b></p>	(5.106)
--	---	---------

где **JMS MULT** - обращение к подпрограмме последовательного перемножения;

**JMS ADD Indirect** - обращение к подпрограмме последовательного суммирования с косвенной адресацией.

Для усреднения результатов оценки КФ необходимо:

- при равномерной дискретизации процессов частичные суммы соответственно разделить на  $N-J$ , где  $N$  - объем выборки,  $J$  - номер ординаты КФ;
- при анализе неэквидистантных временных рядов частичные суммы, соответствующие ординатам амплитудной КФ, разделить на частичные суммы, соответствующие ординатам интервальной КФ.

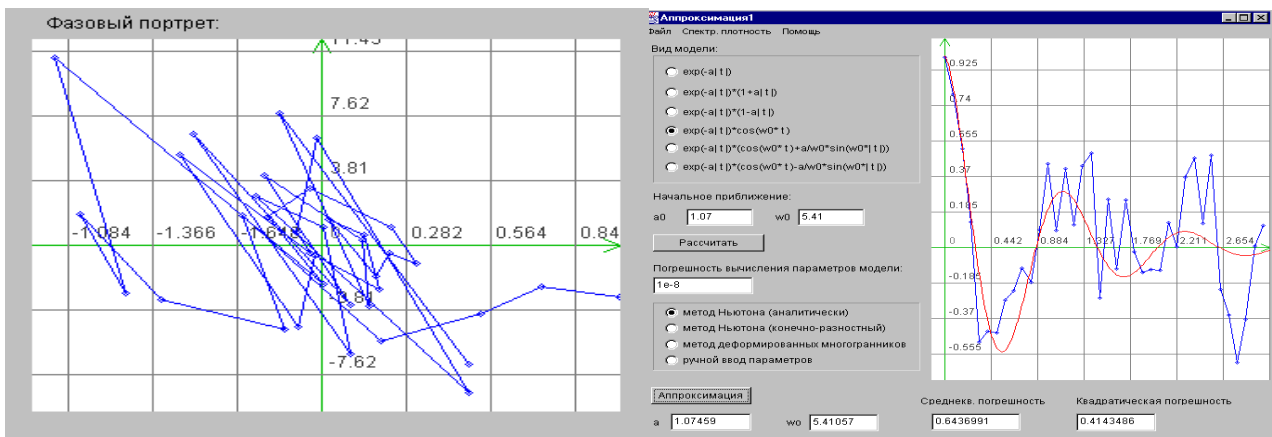
Следует отметить, что для повышения быстродействия коррелометра возможно применение двух подсистем, реализованных на микро-ЭВМ, первая из которых определяет амплитудную корреляцию, вторая - интервальную. Взаимодействие этих подсистем при организации косвенной адресации и усреднения обеспечивает искомый результат.

## 5.7. Аппроксимация корреляционных функций неэквидистантных временных рядов функциями заданного вида

Специфика аппроксимации корреляционных функций неэквидистантных временных рядов заключается в следующем:

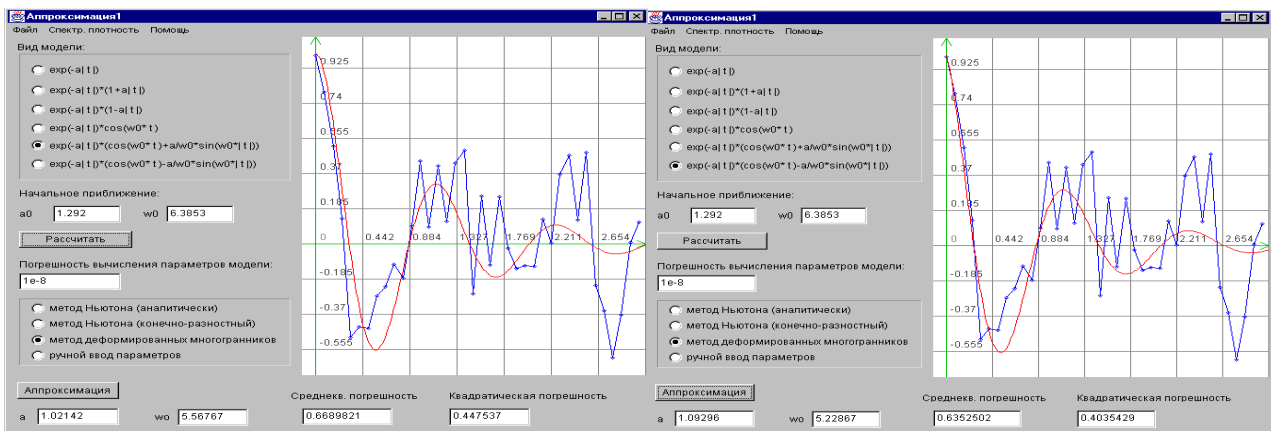
1. пропуски наблюдений, «дрожание» приводят к увеличению дисперсии оценки ординат корреляционной функции, особенно при небольшой выборке;
2. увеличение дисперсии оценки ординат корреляционной функции затрудняет её идентификацию по фазовым портретам;
3. при небольшой выборке теряет смысл понятие погрешности приближения, так как корреляционная функция оценивается с большой погрешностью;
4. минимальное значение погрешности аппроксимации позволяет убедиться, что выбрана лучшая модель из рассматриваемого класса моделей.

В качестве примера, на рис.5.9 приведены результаты аппроксимации корреляционной функции неэквидистантного временного ряда, полученного р-преобразованием псевдослучайной последовательности с корреляционной функцией  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  с параметрами  $\lambda = 1$ ,  $\omega_0 = 5$ ,  $p=0,15$ ,  $M=1000$ , колебательными моделями, которые иллюстрируют высказанные утверждения.



а) фазовый портрет

$$б) \rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$$



$$в) \rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$$

$$г) \rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$$

Рисунок 5.9. Результаты аппроксимации

Рассмотрим подробнее результаты аппроксимации для двух типовых моделей нерегулярной дискретизации: р-преобразования и «дрожания», - которые характерны для непреднамеренной дискретизации и не зависят от желания исследователя. Для получения более общих результатов рассмотрим пять реализаций для каждого сочетания параметров, приведенных в таблицах 5.8-5.10.

Результаты аппроксимации корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$  неэквидистантного временного ряда, полученного р-преобразованием исходного ряда, приведены в таблице 5.8. Эквивалентный объём выборки, участвующей в получении оценки корреляционной функции, равен  $M_3 = Mr$ .

Результаты аппроксимации корреляционных функций неэквидистантного временного ряда

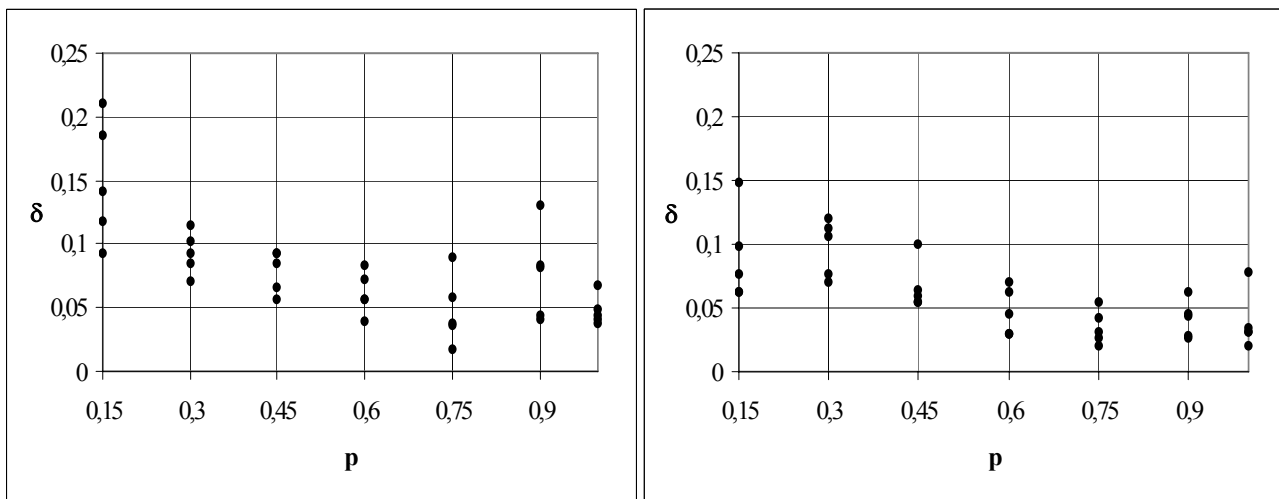
Таблица 5.8

М	р	$\alpha$	$\delta$	М	р	$\alpha$	$\delta$
6667	0,15	1,225	0,141	10000	0,15	1,270	0,099
		1,155	0,211			1,089	0,148
		0,986	0,118			0,950	0,076
		1,174	0,186			1,080	0,063
		0,891	0,093			1,075	0,063
3333	0,30	1,043	0,085	5000	0,30	0,949	0,106
		0,811	0,102			0,840	0,071
		0,978	0,115			1,115	0,112
		0,919	0,071			1,160	0,121
		1,014	0,093			1,089	0,076
2222	0,45	1,056	0,092	3333	0,45	1,081	0,054
		0,931	0,056			1,169	0,054
		0,954	0,085			0,938	0,060
		0,847	0,066			0,982	0,064
		1,137	0,093			0,167	0,100
1667	0,60	1,010	0,057	2500	0,60	0,972	0,046
		0,072	0,057			1,061	0,062
		1,078	0,040			1,114	0,029
		1,131	0,073			1,039	0,070
		1,192	0,083			1,016	0,030
1333	0,75	1,353	0,058	2000	0,75	0,930	0,021
		1,097	0,037			0,860	0,026
		0,880	0,089			1,117	0,042
		1,042	0,017			0,956	0,054
		1,095	0,036			0,857	0,032
1111	0,9	1,040	0,041	1667	0,09	0,964	0,026
		0,859	0,083			0,997	0,043
		1,092	0,044			0,997	0,028
		0,973	0,081			0,887	0,063
		1,115	0,130			1,003	0,046
1000	1	1,094	0,068	1500	1,00	1,042	0,032
		1,122	0,041			0,982	0,032
		1,142	0,049			1,030	0,078
		0,871	0,038			0,924	0,035
		1,217	0,044			0,943	0,020



На рис. 5.10 приведены зависимости погрешности аппроксимации от значения параметра  $p$ -преобразования, которые показывают, что:

1. при уменьшении значения  $p$ -преобразования даже при  $M_{\varepsilon} = \text{const}$  погрешность аппроксимации растет;
2. для обеспечения погрешности аппроксимации  $\delta < 0,15$   $M_{\varepsilon} \geq 1500$  при  $p > 0,15$ ;
3. для получения более точных результатов аппроксимации необходимо увеличивать  $M_{\varepsilon}$ .

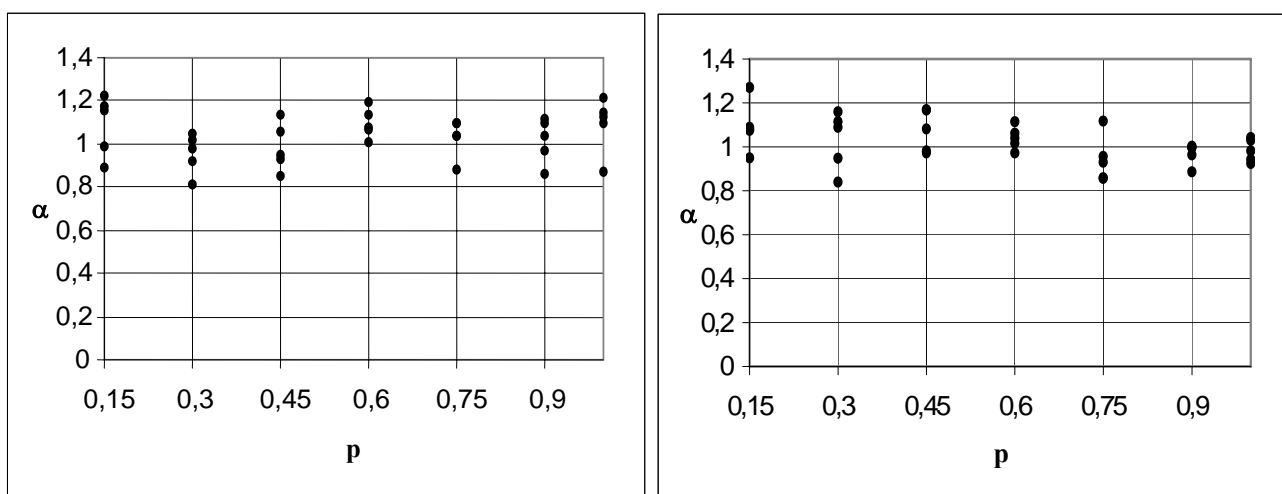


а)  $M_{\varepsilon}=1000$

б)  $M_{\varepsilon}=1500$

Рисунок 5.10. Зависимость погрешности аппроксимации от значения параметра  $p$ -преобразования

На рис. 5.11 представлены результаты оценки параметра аппроксимирующего выражения – показателя затухания. Из анализа результатов видно, что погрешность оценки показателя затухания в меньшей степени зависит от значения параметра  $p$ -преобразования и эквивалентного объема выборки, чем погрешность аппроксимации.



а)  $M_{\varepsilon}=1000$

б)  $M_{\varepsilon}=1500$

Рисунок 5.11. Зависимость показателя затухания от значения параметра  $p$ -преобразования

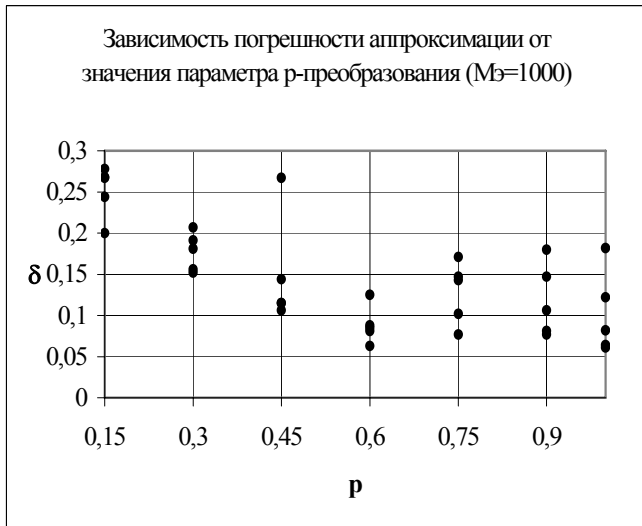
Результаты аппроксимации корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  неэквилидистантного временного ряда, полученного р-преобразованием исходного ряда, приведены в таблице 5.9.

На рис. 5.12 представлены результаты оценки погрешности аппроксимации, показателя затухания и частоты колебания корреляционной функции. Из анализа результатов видно, что погрешности оценки показателя затухания и, особенно, частоты колебания также в меньшей степени зависит от значения параметра р-преобразования и эквивалентного объёма выборки, чем погрешность аппроксимации, особенно при  $M\lambda = 1500$ .

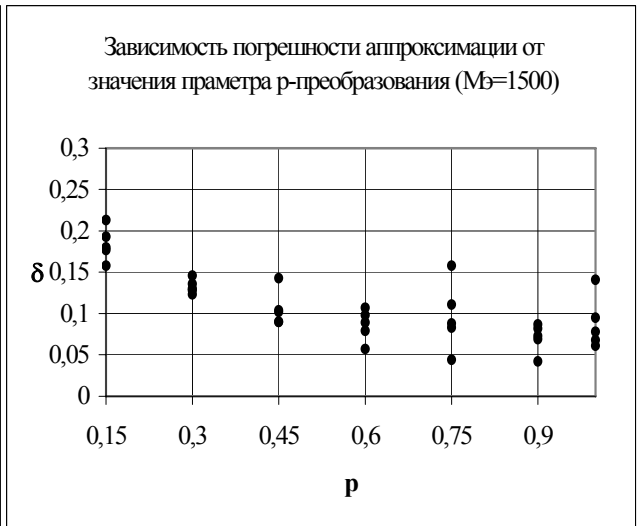
Результаты аппроксимации корреляционной функции

Таблица 5.9

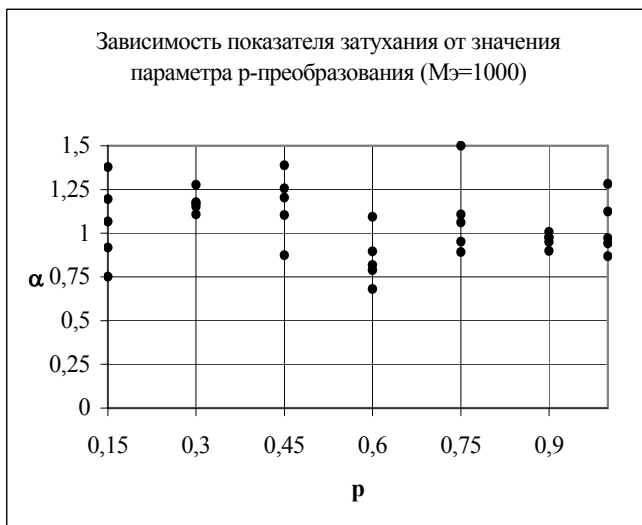
M	p	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	M	p	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
6667	0,15	1,378	5,056	0,278	10000	0,15	0,900	4,928	0,177
		1,067	5,038	0,267			0,937	4,828	0,193
		0,918	5,028	0,244			1,034	4,785	0,180
		1,195	4,944	0,268			0,926	5,094	0,213
		0,751	5,022	0,200			0,966	5,017	0,158
3333	0,30	1,107	5,095	0,181	5000	0,30	1,054	4,828	0,136
		1,169	4,942	0,191			0,892	4,910	0,130
		1,177	4,990	0,207			1,338	5,301	0,146
		1,277	4,812	0,156			0,916	5,089	0,123
		1,152	5,215	0,152			1,016	4,850	0,128
2222	0,45	1,103	5,009	0,144	3333	0,45	0,815	5,039	0,090
		1,257	4,780	0,115			1,028	5,138	0,104
		1,203	5,141	0,106			0,960	4,934	0,090
		0,873	5,060	0,115			1,013	5,074	0,143
		1,388	5,262	0,276			0,882	5,014	0,102
1667	0,60	0,789	5,046	0,085	2500	0,60	1,082	5,031	0,107
		1,094	4,999	0,125			1,219	5,079	0,089
		0,680	4,826	0,081			0,873	5,080	0,057
		0,896	5,318	0,088			1,096	5,154	0,098
		0,818	4,710	0,063			1,105	5,026	0,079
1333	0,75	1,108	5,190	0,102	2000	0,75	1,213	4,929	0,158
		1,500	5,036	0,171			0,852	5,119	0,083
		0,951	5,115	0,147			0,842	4,691	0,111
		1,061	4,828	0,077			1,093	5,063	0,044
		0,893	5,073	0,143			0,0868	5,157	0,088
1111	0,9	1,007	4,851	0,106	1667	0,09	1,162	4,922	0,073
		0,977	4,677	0,147			0,870	5,038	0,042
		0,950	4,835	0,180			0,958	5,005	0,069
		0,976	4,974	0,081			0,904	5,307	0,087
		0,899	5,159	0,077			0,888	4,846	0,082
1000	1	1,282	4,482	0,061	1500	1,00	0,970	5,209	0,078
		0,971	5,242	0,182			0,947	4,967	0,095
		0,941	5,010	0,122			1,132	4,851	0,061
		0,868	4,921	0,064			0,911	4,704	0,141
		1,124	5,039	0,082			1,170	4,996	0,068



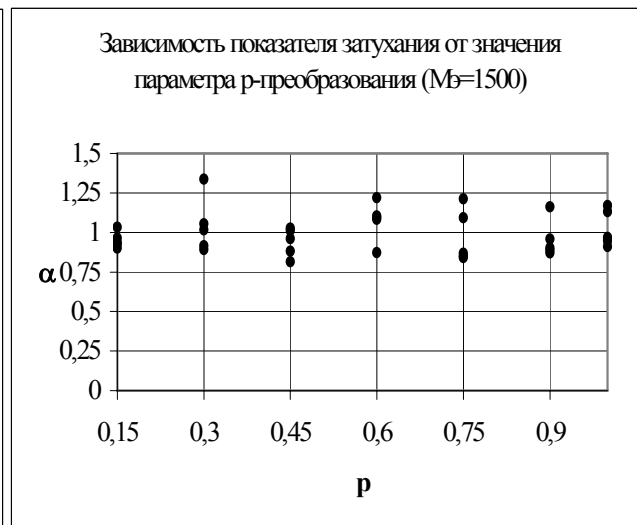
а)



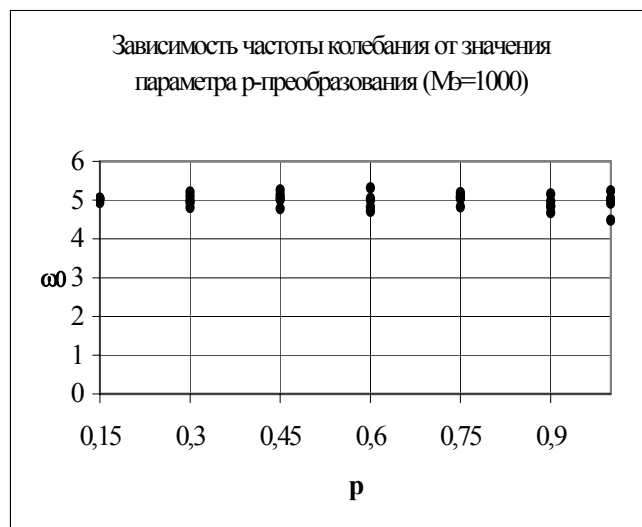
б)



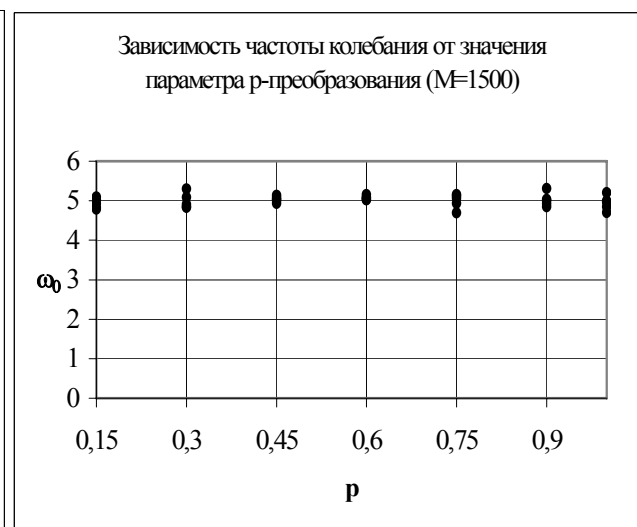
в)



г)

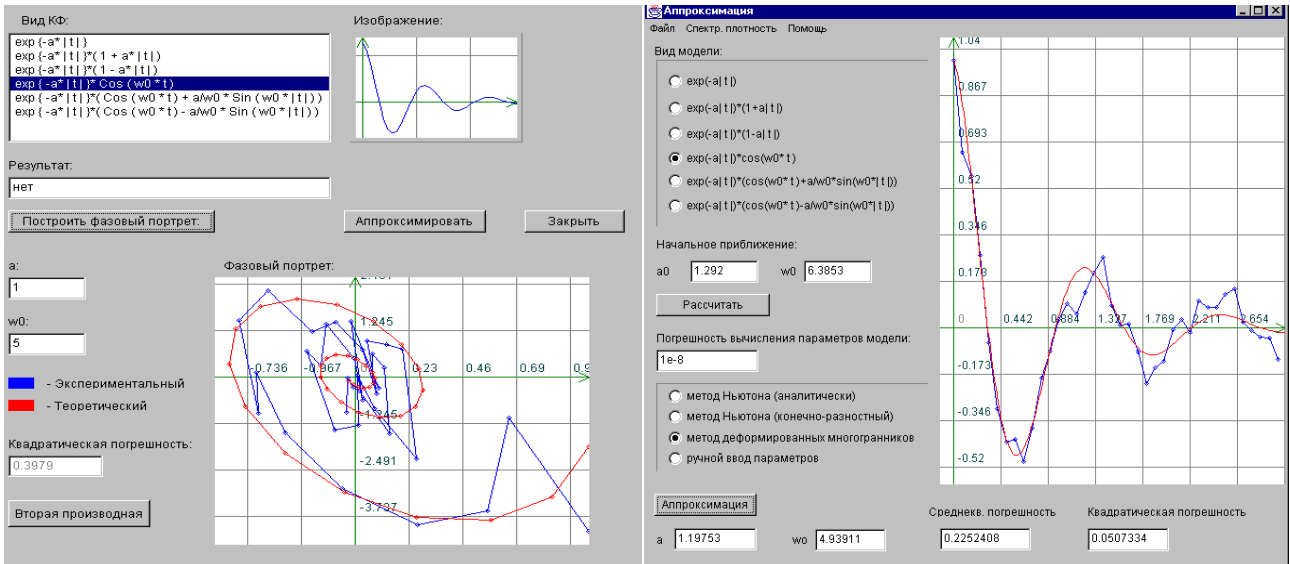


д)

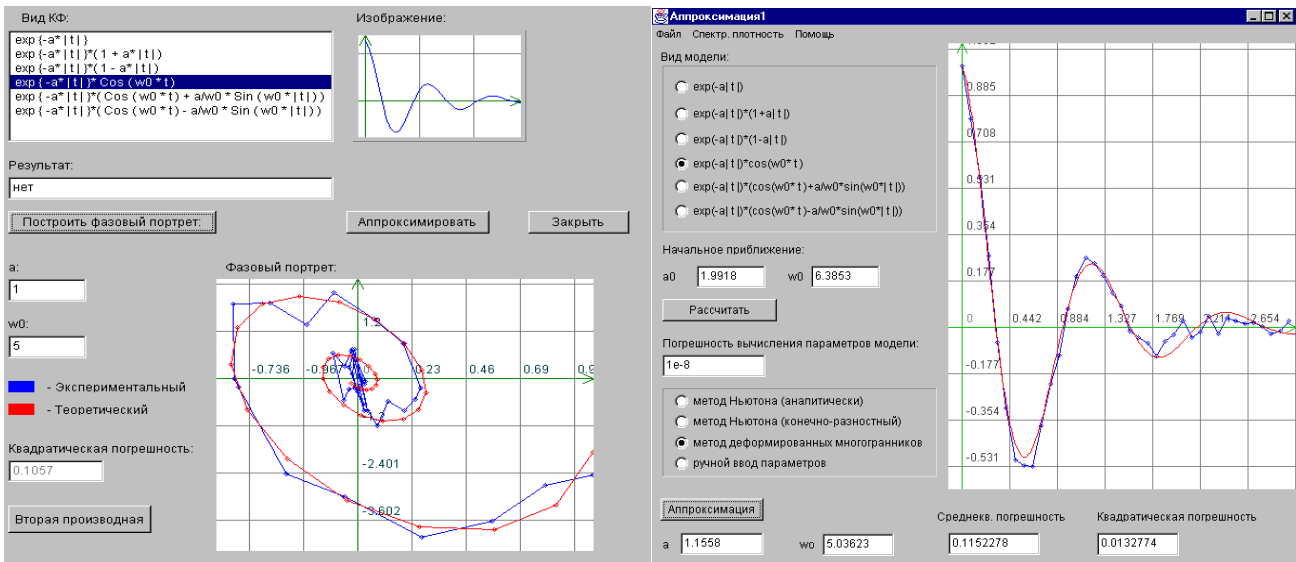


е)

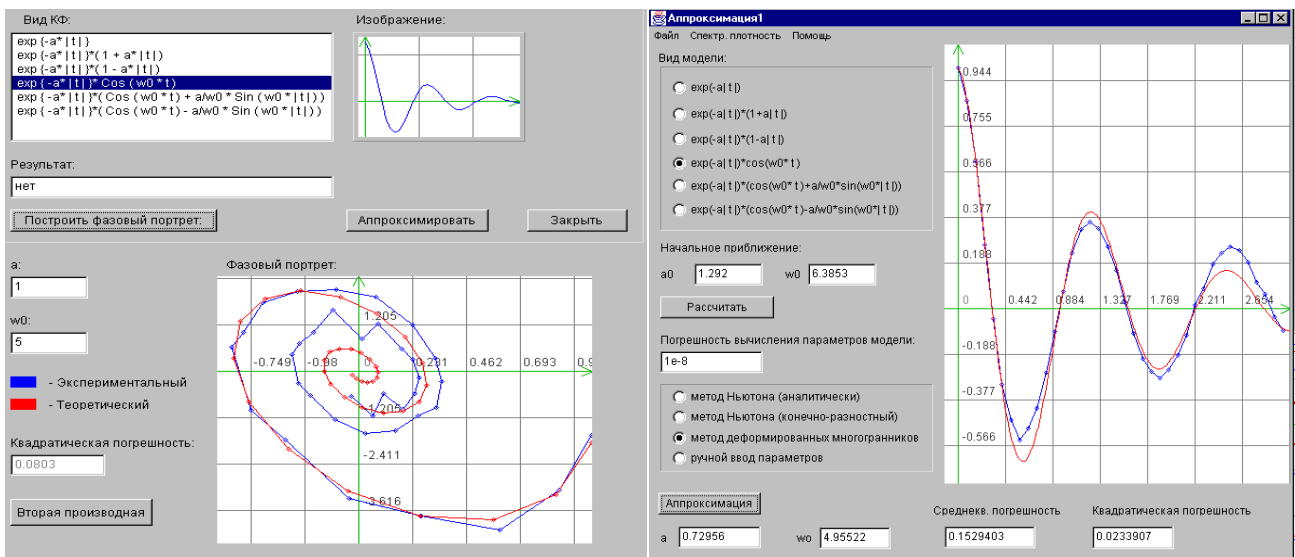
Рисунок 5.12. Результаты аппроксимации корреляционных функций колебательной модели



а)  $p=0,15, M=10000$



б)  $p=0,45, M=3333$



в)  $P=0,75, M=2000$

Рисунок 5.13. Результаты аппроксимации

Ниже приведены результаты аппроксимации корреляционных функций при «дрожании» временного ряда (см. таблицу 5.10, рис. 5.14-5.15).

Результаты аппроксимации корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  неэквилидистантного временного ряда с «дрожанием»

Таблица 5.10

M	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	M	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
1000	0,961	4,817	0,123	2000	1,008	4,806	0,086
	1,059	5,343	0,208		0,926	4,733	0,114
	1,238	5,024	0,174		1,208	4,780	0,115
	1,279	4,970	0,183		1,003	4,871	0,081
	1,067	4,867	0,166		1,160	4,834	0,097
1500	0,934	4,720	0,081	3000	1,020	4,853	0,141
	0,959	4,931	0,134		1,018	4,983	0,124
	1,209	4,997	0,198		0,966	4,837	0,092
	0,880	4,864	0,143		0,896	5,020	0,150
	1,112	4,798	0,138		1,095	5,116	0,094

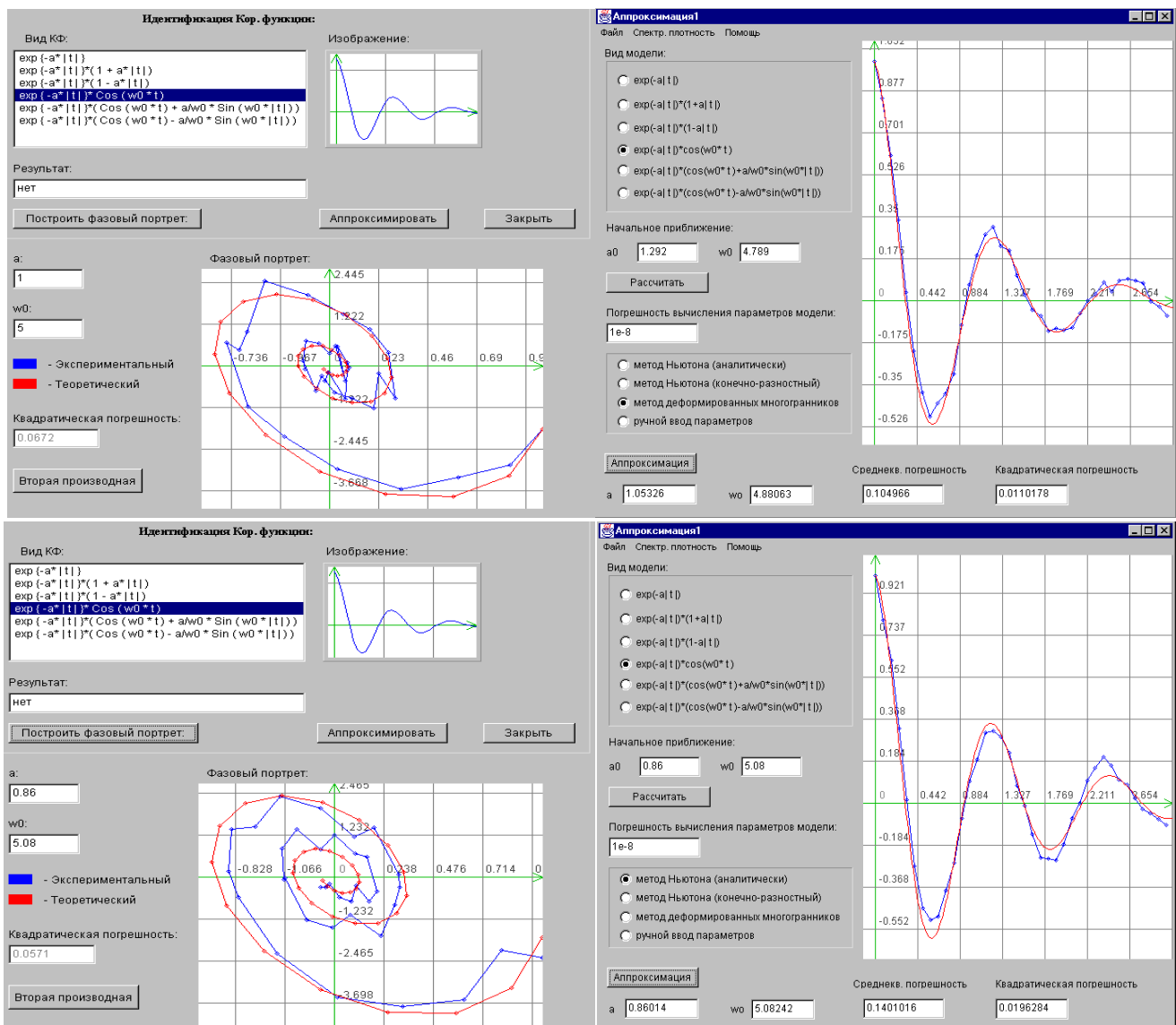
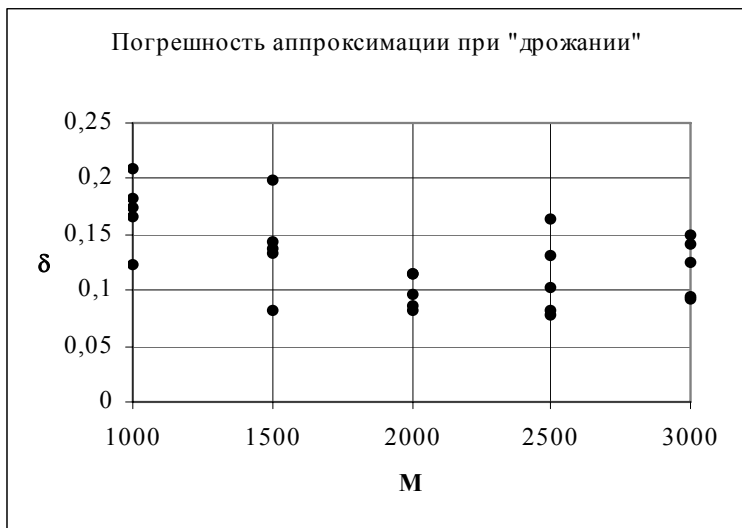
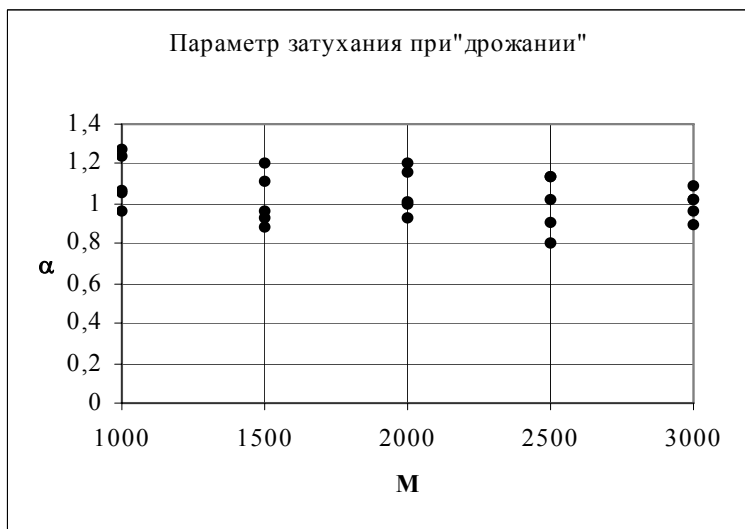


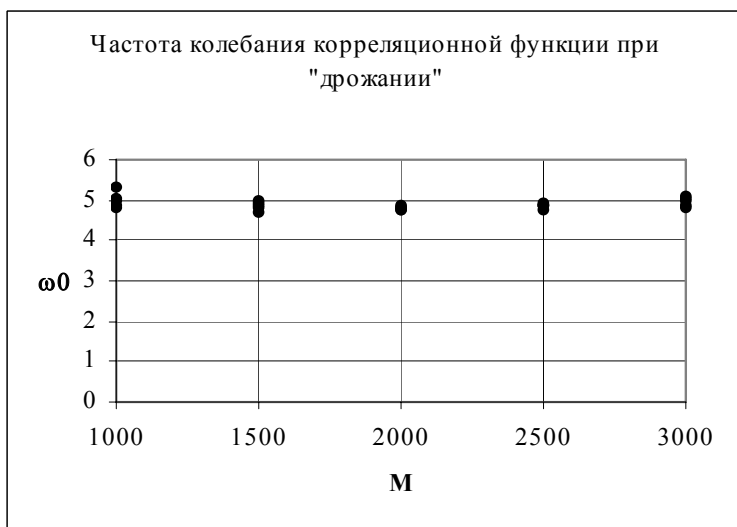
Рисунок 5.14. Результаты аппроксимации корреляционных функций при «дрожании»



а)



б)



в)

Рисунок 5.15. Результаты аппроксимации при «дрожании»

На рис. 5.15 а) приведены результаты оценки погрешности аппроксимации корреляционной функции при «дрожании» временного ряда (см. таблицу 5.10). Анализ результатов показывает, что погрешность аппроксимации при «дрожании» больше, чем погрешность аппроксимации для регулярного временного ряда и уменьшается с увеличением объёма выборки. В любом случае, «дрожание» временного ряда необходимо учитывать.

На рис. 5.15 б) приведены результаты оценки параметра затухания колебательной модели корреляционной функции  $\alpha = 1$ . Анализ результатов показывает, что погрешность оценки параметра при объёме выборки  $M \geq 1000$  находятся в пределах  $\pm 0,25$ . Увеличение погрешности оценки параметра объясняется поведением корреляционной функции на её «хвосте».

На рис. 5.15 в) приведены результаты оценки частоты колебания корреляционной функции  $\omega_0 = 5$ . Анализ результатов показывает, что при том же объёме выборки погрешность оценки частоты колебания меньше, чем показателя затухания. Отсюда следует вывод, что на увеличение погрешности аппроксимации корреляционной функции наибольшее влияние оказывает неточность оценки показателя затухания.

Таким образом, представленные результаты показывают, что разработанные алгоритмы можно применять и для аппроксимации корреляционных функций неэквидистантных временных рядов.

### 5.8. Аппроксимация корреляционных функций неэквидистантных временных рядов ортогональными функциями Лагерра

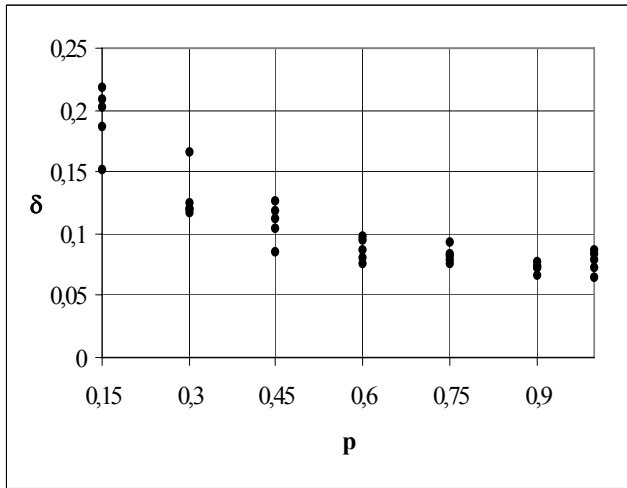
В случае, если вид корреляционной функции идентифицировать не удастся, целесообразно воспользоваться аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра. В таблице 5.11 в качестве примера приведены результаты аппроксимации корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  неэквидистантного временного ряда, полученного р-преобразованием исходного ряда, ортогональными функциями Лагерра.

Результаты аппроксимации

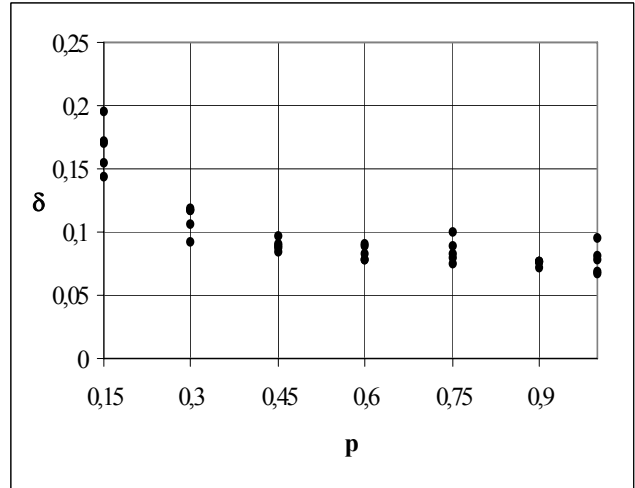
Таблица 5.11

М	р	$\alpha$	m	$\delta$	М	р	$\alpha$	m	$\delta$
6667	0,15	10,028	21	0,1872	10000	0,15	11,848	27	0,1936
		10,728	18	0,2027			11,124	21	0,1700
		10,712	18	0,2093			11,282	17	0,1445
		10,236	21	0,1513			10,370	20	0,1712
		10,186	29	0,2184			8,758	24	0,1545
3333	0,30	9,923	18	0,1659	5000	0,30	11,116	19	0,1168
		11,594	18	0,1173			10,126	21	0,1177
		9,604	20	0,1253			11,538	19	0,1181
		9,578	19	0,1195			10,688	19	0,1068
		11,185	17	0,1203			10,452	19	0,0919
2222	0,45	10,109	22	0,1265	3333	0,45	10,527	18	0,0842
		9,772	22	0,1051			10,811	18	0,0878
		10,502	20	0,1192			9,672	21	0,0969
		10,137	19	0,0861			9,762	21	0,0892
		10,581	21	0,1130			9,895	18	0,0904
1667	0,60	10,340	18	0,0754	2500	0,60	10,263	20	0,0785
		10,963	16	0,0814			10,130	21	0,0896
		10,436	18	0,0872			10,605	18	0,0821
		10,351	18	0,0980			10,602	18	0,0774
		10,964	18	0,0954			10,202	20	0,0910
1333	0,75	10,713	18	0,0757	2000	0,75	10,444	20	0,0792
		10,735	18	0,0838			9,772	18	0,0994
		10,413	20	0,0825			10,586	20	0,0747
		9,396	22	0,0786			10,369	20	0,0887
		10,899	18	0,0941			10,076	18	0,0823
1111	0,90	10,332	20	0,0741	1667	0,90	10,009	18	0,0764
		10,228	21	0,0781			10,255	20	0,0723
		10,108	19	0,0722			10,585	18	0,0759
		9,814	18	0,0671			10,384	19	0,0762
		10,253	20	0,0725			10,002	19	0,0769
1000	1	10,566	17	0,0787	1500	1,00	10,180	20	0,0683
		10,401	18	0,0642			10,300	20	0,0820
		10,197	21	0,0844			10,255	18	0,0667
		10,545	20	0,0878			10,452	18	0,0785
		10,100	19	0,0728			10,025	22	0,0957

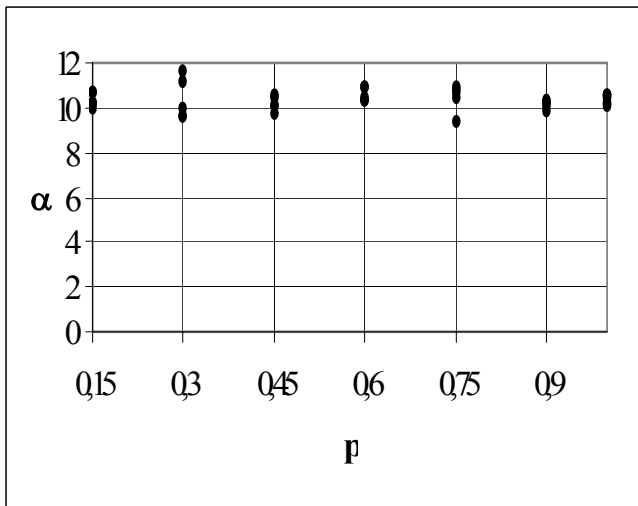
На рис. 5.16 приведены результаты оценки погрешности аппроксимации  $\delta$ , параметра функции Лагерра  $\alpha$  и оптимального числа членов разложения ряда  $m$  от



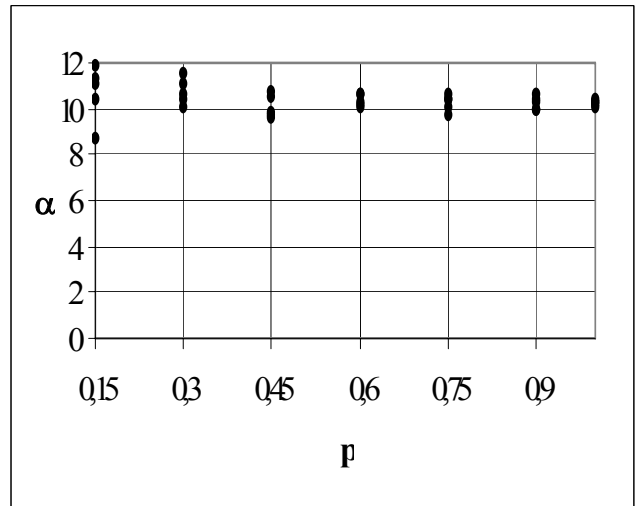
а)  $\delta = f(p)$ ,  $M_3 = 1000$



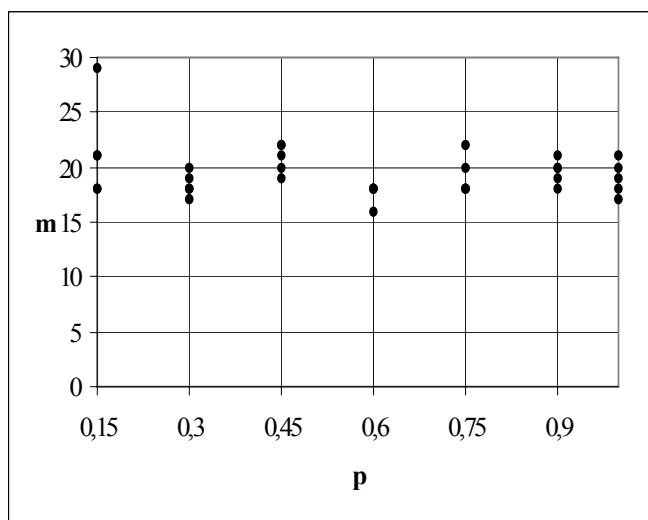
б)  $\delta = f(p)$ ,  $M_3 = 1500$



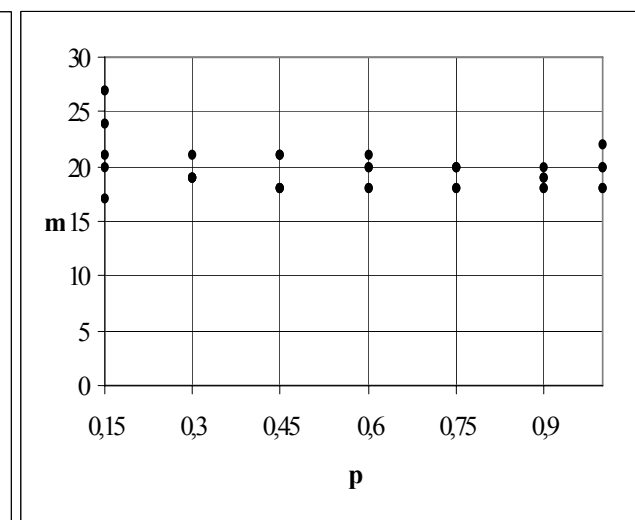
в)  $\alpha = f(p)$ ,  $M_3 = 1000$



г)  $\alpha = f(p)$ ,  $M_3 = 1500$



д)  $m = f(p)$ ,  $M_3 = 1000$



е)  $m = f(p)$ ,  $M_3 = 1500$

Рисунок 5.16. Результаты аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра при  $p$ -преобразовании неэквидистантных временных рядов



значения параметра  $p$ -преобразования для различных эквивалентных объёмов выборки.

Анализ результатов показывает, что погрешность аппроксимации зависит от численного значения параметра  $p$ -преобразования и уменьшается с увеличением  $p$ . Зависимость погрешности от эквивалентного объёма выборки при аппроксимации корреляционных функций Лагерра меньше, чем аналогичные зависимости при аппроксимации функциями заданного вида.

Значение параметра функции Лагерра  $\alpha$  для рассматриваемой модели близко к теоретическому значению  $\alpha_T = 10,2$  и практически не зависит от значения параметра  $p$  при эквивалентном объёме выборки  $M_s \geq 1000$ .

Оптимальное число членов разложения ряда  $m$  колеблется около 20 и также мало зависит от значения параметра  $p$  и эквивалентного объёма выборки при  $M_s \geq 1000$ .

На рис. 5.17-5.19 приведены: зависимости погрешности аппроксимации от числа членов разложения ряда и результаты аппроксимации для корреляционной функции вида  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  для  $M_s = 1500$ , на рис. 5.20-5.21 – для других колебательных моделей.

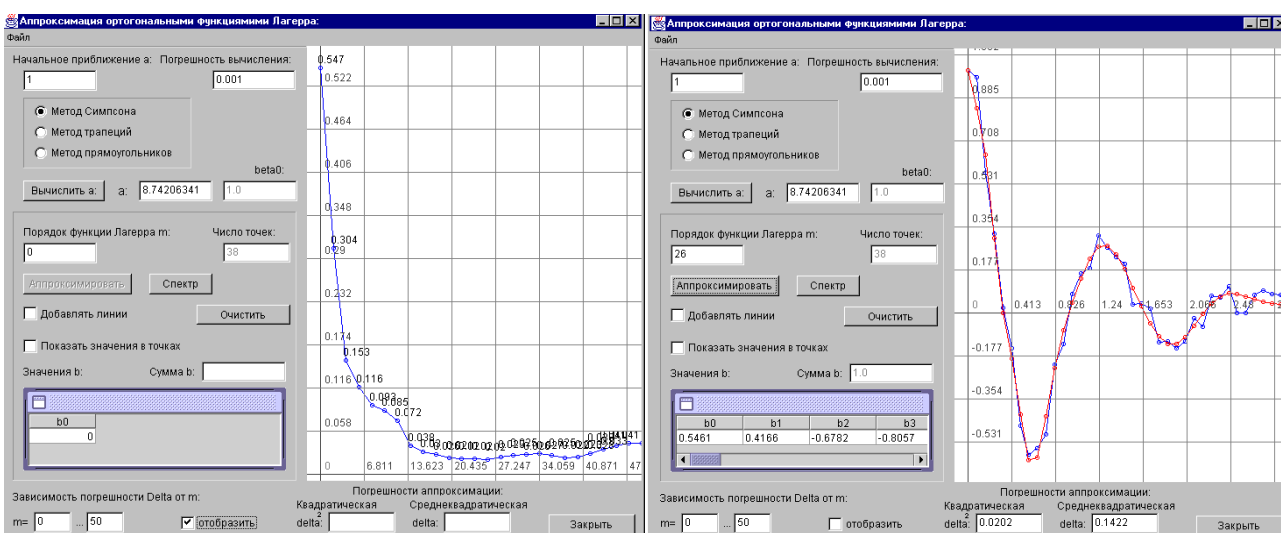


Рисунок 5.17. Результаты аппроксимации  $p=0.15$ ,  $M=10000$

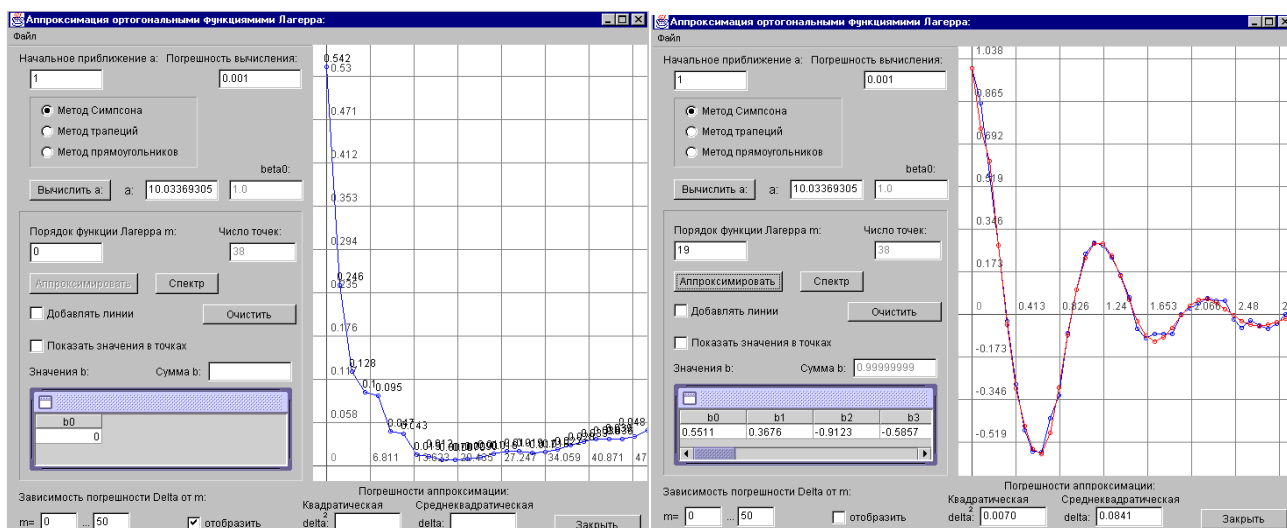


Рисунок 5.18. Результаты аппроксимации  $p=0.45$ ,  $M=3333$

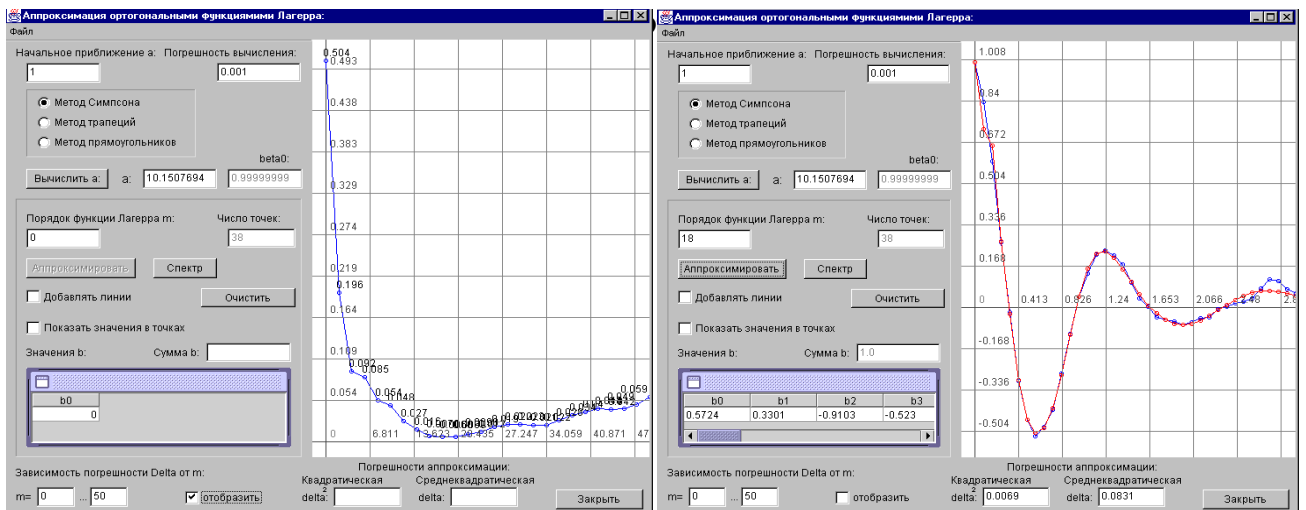
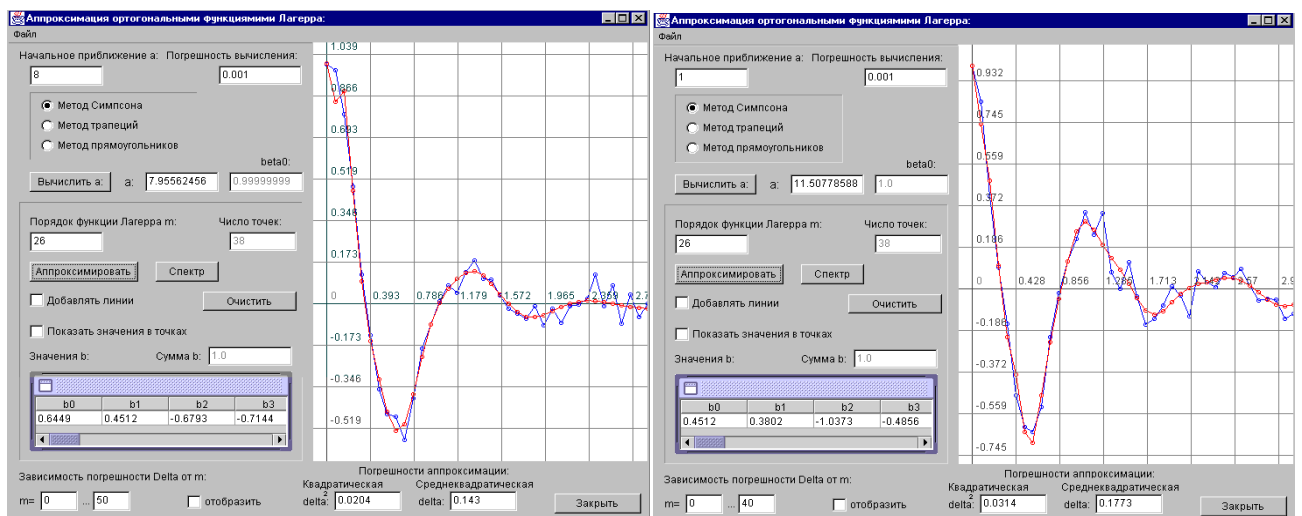


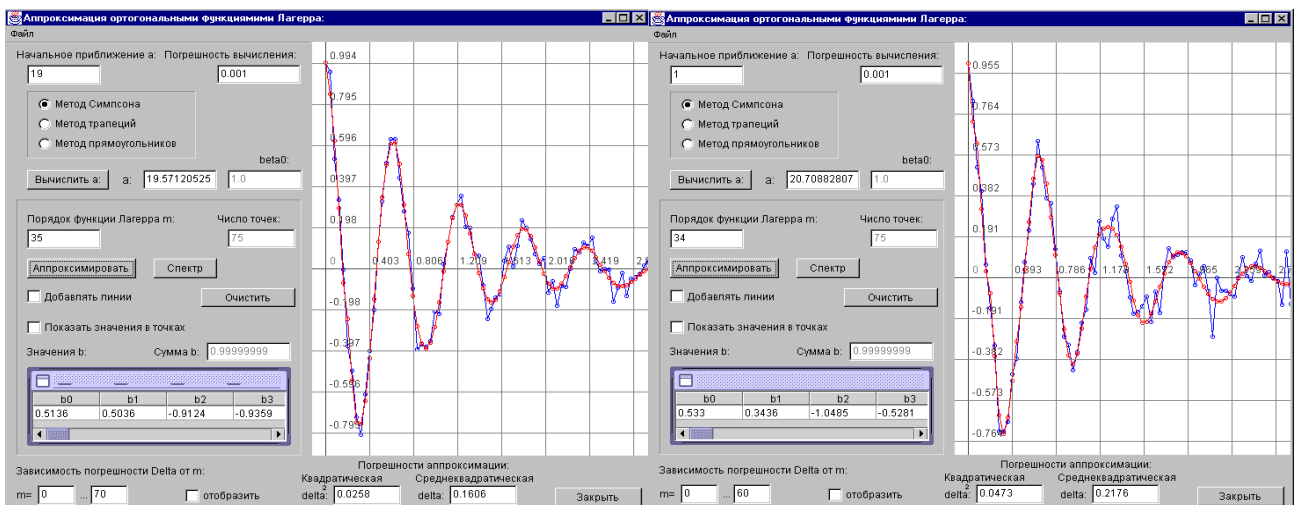
Рисунок 5.19. Результаты аппроксимации  $p=0,75$ ,  $M=2000$



а)  $e^{-\alpha|\tau|}(\cos \omega_0 \tau + \sin \omega_0 |\tau|)$

б)  $e^{-\alpha|\tau|}(\cos \omega_0 \tau + \sin \omega_0 |\tau|)$

Рисунок 5.20. Результаты аппроксимации  $p=0,15$ ,  $M=10000$ ,  $\omega_0=5$



а)  $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

б)  $e^{-\alpha|\tau|}(\cos \omega_0 \tau + \sin \omega_0 |\tau|)$

Рисунок 5.21. Результаты аппроксимации  $p=0,15$ ,  $M=10000$ ,  $\omega_0 = 10$

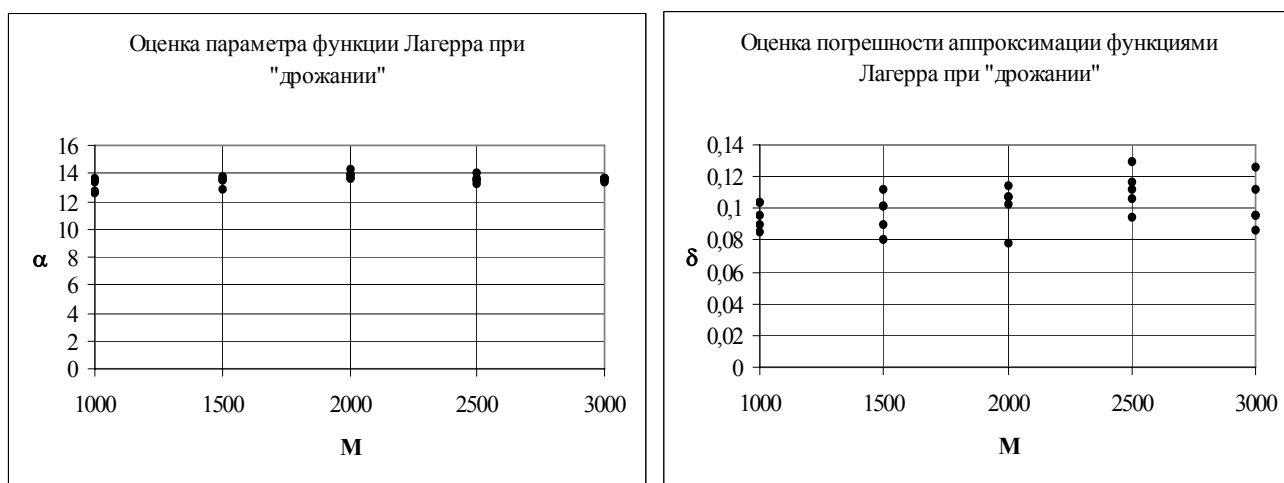
Ниже приведены результаты аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра при «дрожании» временного ряда (см. таблицу 5.12, рис. 5.22-5.23).

Результаты аппроксимации корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  неэквидистантного временного ряда с «дрожанием».

Таблица 5.12

M	$\alpha$	m	$\delta$	M	$\alpha$	m	$\delta$
1000	12,6230	16	0,1042	2000	13,9360	14	0,1074
	13,4440	14	0,0903		13,5993	14	0,0779
	12,7640	16	0,1044		13,5965	15	0,1147
	13,6737	14	0,0851		14,2770	16	0,1073
	13,4274	14	0,0957		13,856	14	0,1028
1500	13,6140	15	0,0801	3000	13,6764	14	0,0864
	12,8356	14	0,1017		13,5061	14	0,0959
	13,4841	14	0,1011		13,3281	14	0,0960
	13,795	15	0,1119		13,6684	14	0,1122
	13,5194	16	0,0898		13,6922	14	0,1259

На рис. 5.22 приведены результаты оценки параметра функции Лагерра и погрешности аппроксимации ортогональными функциями Лагерра.



а)

б)

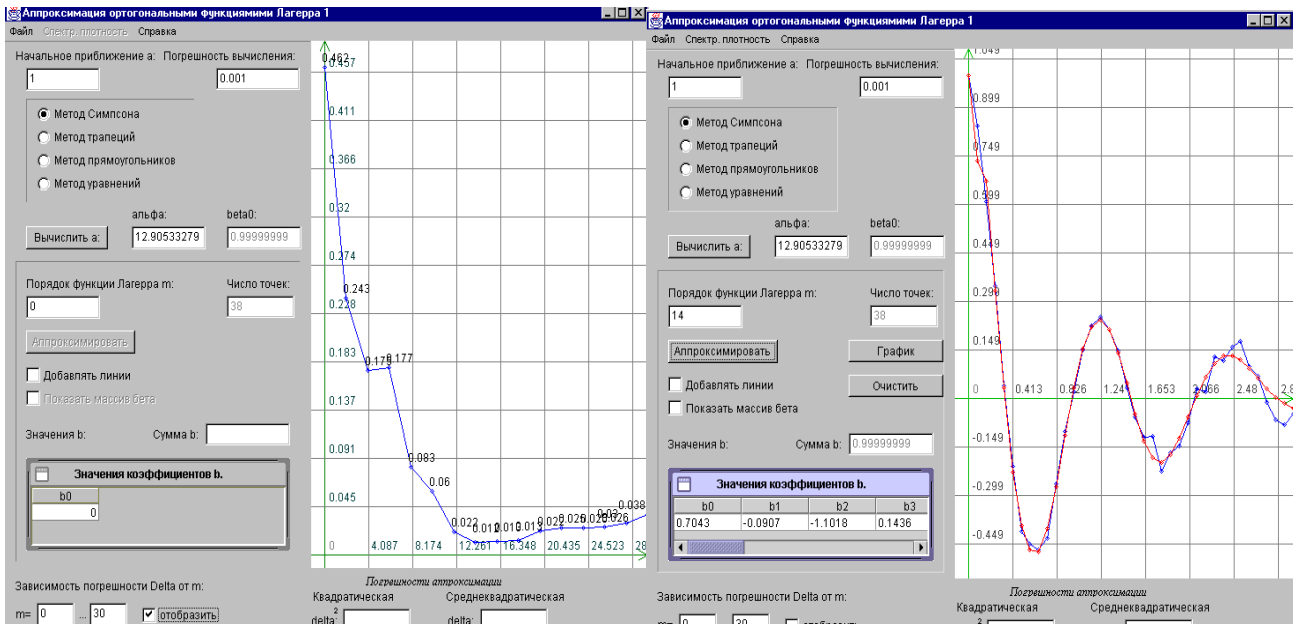
Рисунок 5.22. Результаты аппроксимации

Анализ результатов показывает, что:

1. значение параметра функции Лагерра при изменении объёма выборки в диапазоне 1000-3000 изменяется незначительно;
2. число членов разложения ряда  $m$  в этом же диапазоне тоже изменяется в небольших пределах;
3. диапазон изменения погрешности аппроксимации также изменяется в незначительно.

Отсюда следует вывод, что при аппроксимации корреляционных функций неэквидистантных временных рядов целесообразно применять модель на базе ортогональных функций Лагерра, параметры которой можно определять при эквивалентном объёме выборки больше 1000.

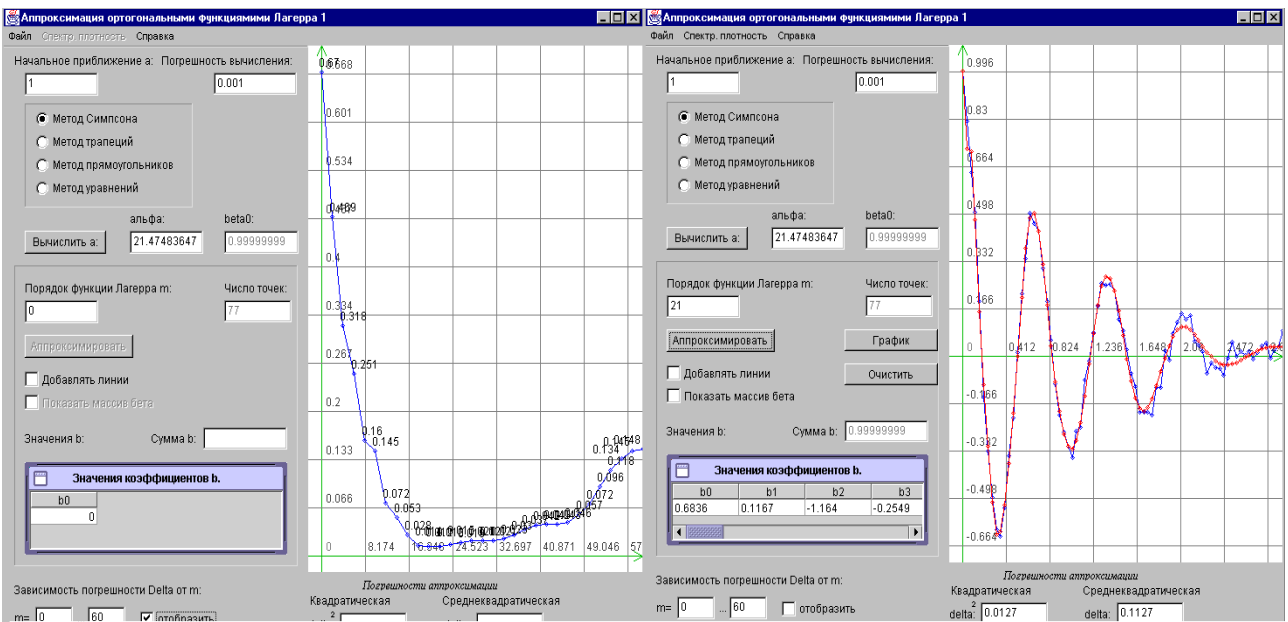
На рис. 5.23 представлены результаты аппроксимации в графическом виде для различных моделей корреляционных функций при  $M=1000$ .



а) Погрешность аппроксимации

б) Аппроксимация функции

$$\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$$



в) Погрешность аппроксимации

г) Аппроксимация функции

$$\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} (\cos 5\tau + 0,2 \sin 5|\tau|)$$

Рисунок 5.23. Результаты аппроксимации

## 6. АППРОКСИМАТИВНЫЙ АНАЛИЗ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

### 6.1. Оценка обобщенных корреляционных характеристик

По найденной корреляционной функции возможно определение обобщенных корреляционных характеристик. К ним относятся [80, 81, 95, 96, 106]:

- показатель колебательности, равный числу пересечения «нуля» корреляционной функции и используемый при оценке интервала дискретизации случайного процесса, метрологическом анализе результатов оценивания вероятностных характеристик;
- интервалы корреляции, определяющие длительность существования корреляционной функции;
- корреляционные моменты, вводимые по аналогии с начальными моментами законов распределения и используемые, например, для идентификации процесса по виду корреляционной функции.

Обобщенные корреляционные характеристики широко применяются при решении разнообразных прикладных задач связанных с:

- определением интервала дискретизации исследуемых процессов при цифровых методах анализа;
- идентификацией случайного процесса по виду корреляционной функции;
- метрологическим анализом результатов измерения вероятностных характеристик с целью получения оценок сверху, инвариантных к виду корреляционной функции исследуемого процесса.

Учитывая важность обобщенных корреляционных характеристик в прикладном анализе случайных процессов, рассмотрим их более подробно.

#### 6.1.1. Оценка показателя колебательности

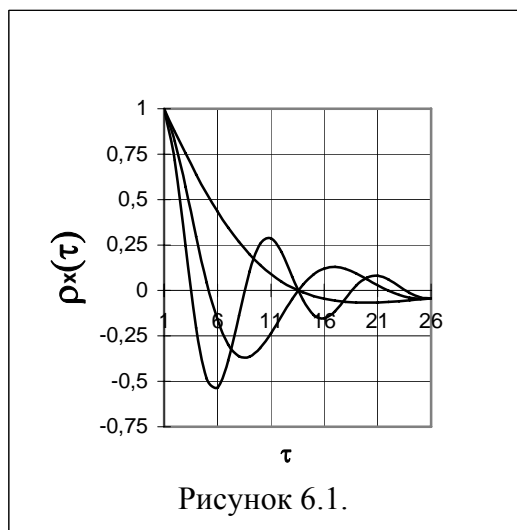


Рисунок 6.1.

Рассмотрим колебательную модель корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ . Введем безразмерную величину  $\mu = \omega_0 / \alpha$ , равную отношению частоты колебания корреляционной функции к показателю затухания и характеризующую число пересечений корреляционной функцией «нуля». Эта характеристика называется **показателем колебательности** корреляционной функции. На рис. 6.1 представлены три нормированные корреляционные функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ , имеющие показатели колебательности 1, 3, 5 соответственно.

Введенный показатель колебательности оказывается очень полезной характеристикой и при исследовании других колебательных моделей корреляционных функций. Показатель колебательности, в общем случае, равен числу пересечения корреляционной функции оси  $\tau$  на максимальном интервале корреляции. Учитывая, что «хвост» корреляционной функции оценивается с большей

погрешностью, показатель колебательности целесообразнее определять по фазовым портретам. На рис. 6.2 приведены примеры оценки показателя колебательности для различных колебательных моделей корреляционных функций. Он равен числу пересечения фазового портрета оси  $\tau$ . Заметим, что для стационарных эргодических процессов  $\rho_x(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Следовательно, фазовый портрет заканчивается в точке с координатами  $(0,0)$ .

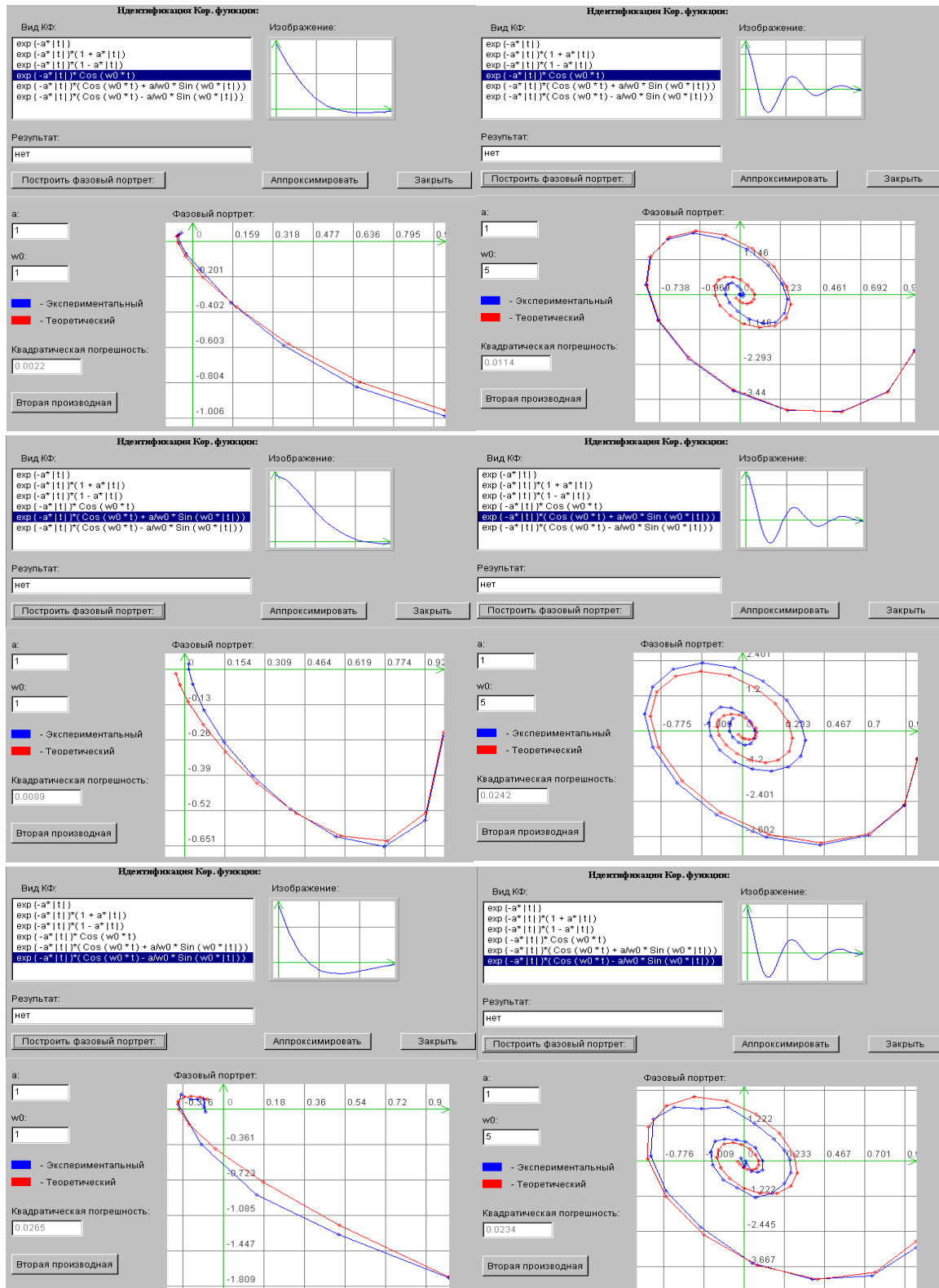
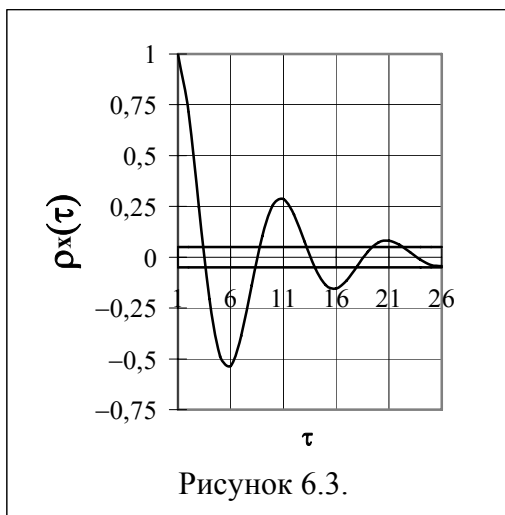


Рисунок 6.2. К определению показателя колебательности

Показатель колебательности входит в аналитические выражения для определения интервалов дискретизации случайных процессов (см. таблицу 4.1), используется при идентификации случайных процессов по виду корреляционной функции, анализе методических погрешностей оценивания вероятностных характеристик и т.д. [86].

### 6.1.2. Оценка интервала корреляции

Существуют различные способы определения интервалов корреляции, имеющие один и тот же физический смысл - **длительность существования корреляционной функции.**



Максимальный интервал корреляции  $\tau_k^{(1)} = \tau_{kmax}$  определяется в результате решения уравнения (см. таблицу 6.1.) [82]:

$$|\rho(\tau \geq \tau_{kmax})| \leq \Delta. \quad (6.1)$$

Т.е. под максимальным интервалом корреляции понимается временной интервал от начала координат до точки пересечения с линиями  $\Delta$  и  $-\Delta$ , после которой нормированная корреляционная функция не выходит из коридора  $[-\Delta, \Delta]$ . На рис. 6.3 поясняется, каким образом определяется максимальный интервал корреляции для колебательной модели корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  при  $\alpha=1, \omega_0=5, \Delta=0,05$ .

Один из вариантов устройства для определения максимального интервала корреляции представлен на рис. 6.4 [16].

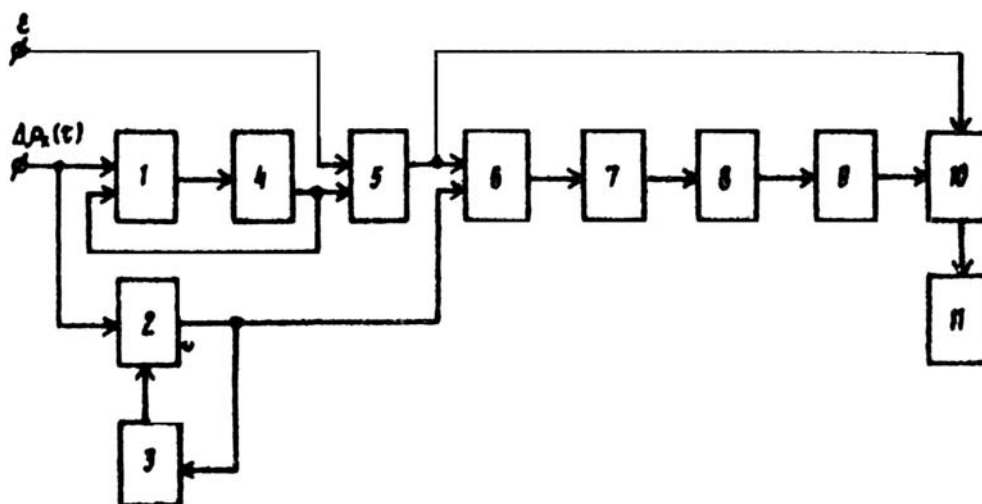


Рисунок 6.4. Устройство для оценки интервала корреляции

Устройство содержит сумматор 1, блок умножения 2, триггеры 3, 7, регистр текущего значения 4, блок сравнения 5, логические элементы 6, 10, генератор импульсов 8, счётчик 9, регистр 11.

Устройство работает следующим образом. Перед началом работы в регистр текущего значения 4 заносится начальное значение нормированной корреляционной

функции  $\rho_x(0) = 1$ . Счётчик импульсов 9 устанавливается в нулевое состояние. С началом работы триггер выключения 7 устанавливается в единичное состояние, т.е. запускает генератор импульсов 8. На первый вход устройства подаётся первое значение приращения нормированной корреляционной функции

$$\Delta_1 \rho_x(\tau) = \rho_x(0) - \rho_x(\tau_1). \quad (6.2)$$

Допустим, что исследуемая нормированная корреляционная функция представляет собой колебательную функцию. На выходе сумматора 1 образуется первое текущее значение нормированной корреляционной функции  $\rho_x(\tau_1)$ , которая поступает на вход регистра текущего значения 4. При поступлении второго значения приращения  $\Delta_2 \rho_x(\tau)$  нормированной корреляционной функции на выходе регистра текущего значения 4 формируется второе текущее значение  $\rho_x(\tau_2)$ , которое также поступает на вход регистра текущего значения 4 и т.д. до  $J_{\max}$  значения приращения.

Блок умножения 2 и триггер 3 анализируют текущие значения нормированной корреляционной функции на экстремум. Текущее значение нормированной корреляционной функции  $\rho_x(\tau_i)$ , где  $i=1, \dots, J_{\max}$ , поступает на второй вход блока сравнения 5, первый вход которого подключен к источника напряжения заданного уровня  $\varepsilon$ . Если текущее значение нормированной корреляционной функции удовлетворяет условию

$$|\rho_x(\tau_i)| > \varepsilon, \quad (6.3)$$

то блок сравнения 5 разрешает прохождение содержимого счётчика импульсов 9, который подсчитывает импульсы с генератора импульсов 8, через элемент И 10 в регистр 11.

Если на вход блока сравнения 5 поступает текущее значение нормированной корреляционной функции, удовлетворяющее условию

$$|\rho_x(\tau_i)| \leq \varepsilon \quad (6.4)$$

(на рис. 6.5 – незаштрихованные области), то блок сравнения 5 сигналом, поступающим на управляющий вход второго элемента И 10, запирает его, тем самым запрещая прохождение содержимого счетчика импульсов 9 в регистр 11, и разрешает прохождение сигнала с выхода блока умножения 2 через логический элемент И 6.

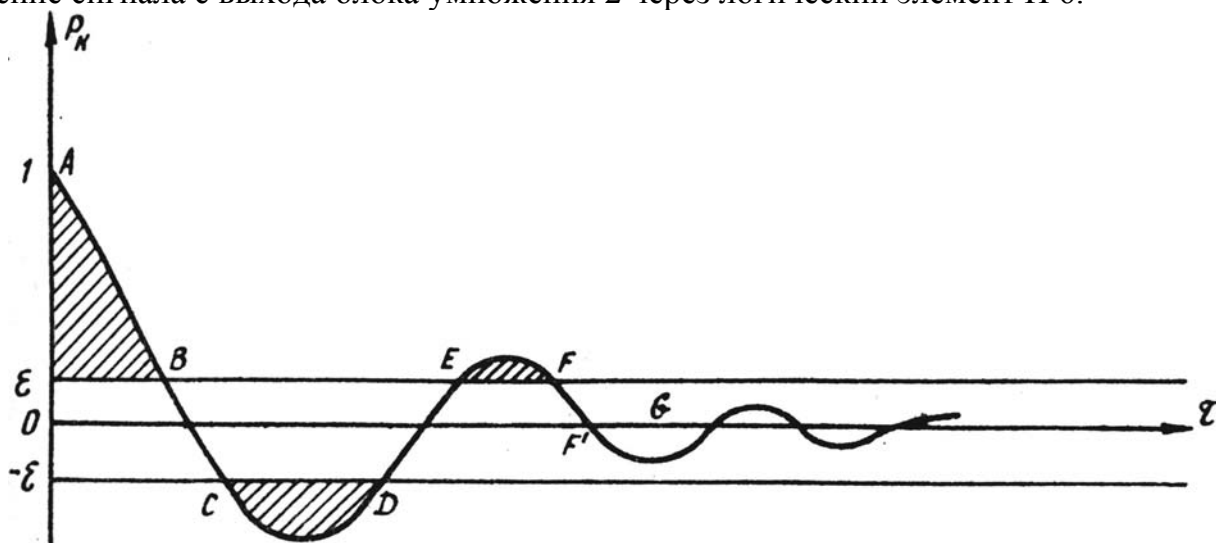


Рисунок 6.5.



Если при выполнении условия (6.4), нормированная корреляционная функция проходит через экстремум, т.е. меняется знак значения приращения текущего значения  $\rho_x(\tau_i)$ , то выходе блока умножения 2 вырабатывается импульсный сигнал, который, проходя через открытый элемент И 6, переключает в нулевое состояние триггер выключения 7, который останавливает генератор импульсов 8. При этом в регистре 11 фиксируется код числа импульсов, пропорционального  $\tau_{kmax}$ .

На рис. 6.5 отрезки кривой  $\rho_x(\tau)$  АВ, CD, EF соответствуют циклу работ устройства при выполнении условия (6.3). Отрезки кривой BC, DE, EG – при выполнении условия (6.4). Точка F' соответствуют  $\tau_{kmax}$ , а G – окончанию работы устройства.

Если исследуемая нормированная корреляционная функция представляет собой монотонно убывающую функцию, то выключение генератора импульсов 8 в устройстве не происходит. Элемент И 10 открыт до тех пор, пока текущее значение нормированной корреляционной функции удовлетворяет условию (6.3), и закрывается в момент выполнения условия (6.4). При этом в регистре 11 фиксируется код числа, пропорционального  $\tau_{kmax}$  (на рис. 6.6 - точка F).

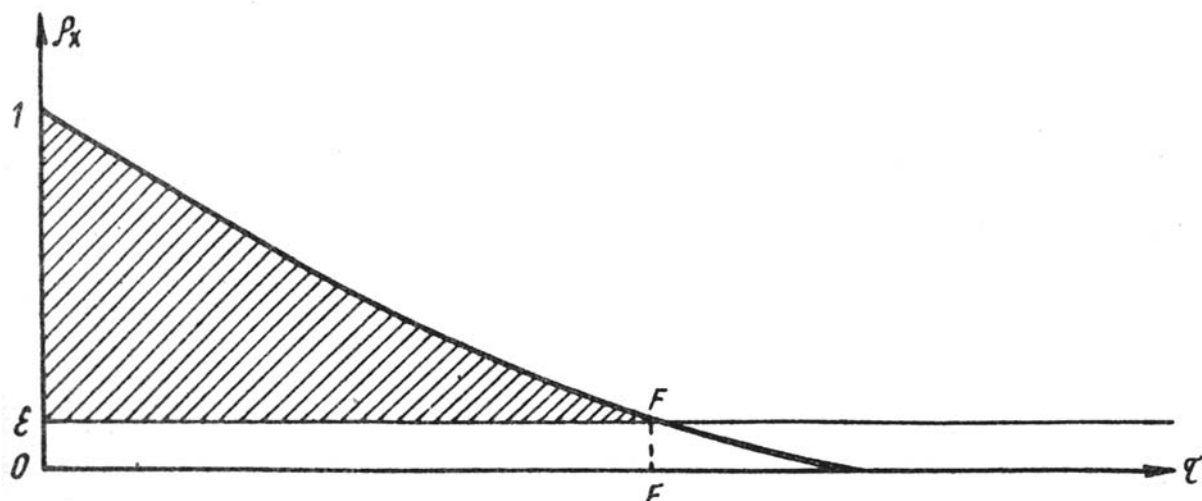


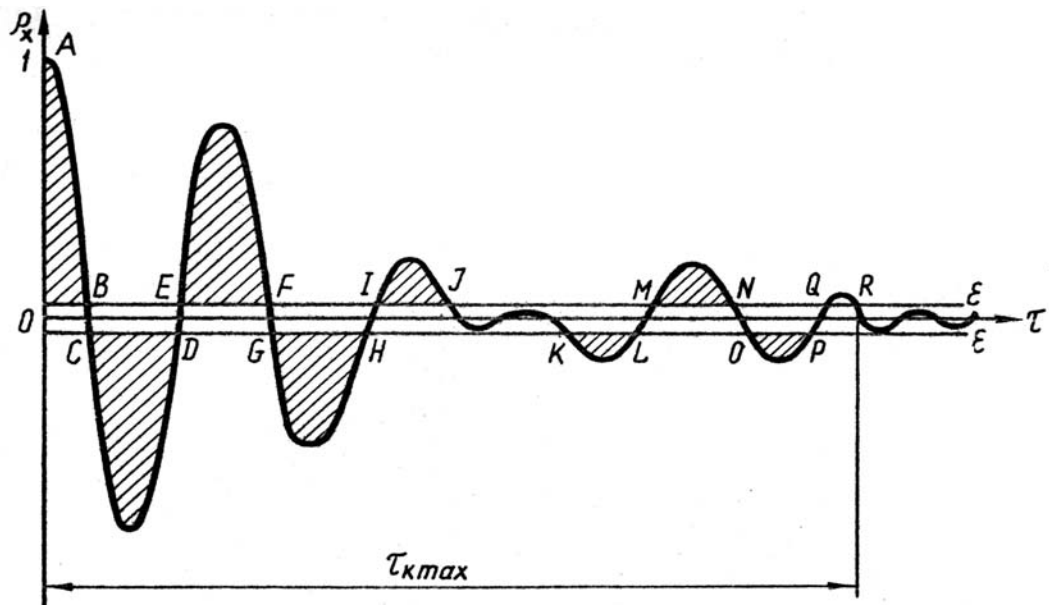
Рисунок 6.6.

Погрешность определения  $\tau_{kmax}$  в предлагаемом устройстве определяется интервалом дискретизации исследуемой нормированной корреляционной функции, а не положением экстремумов функции.

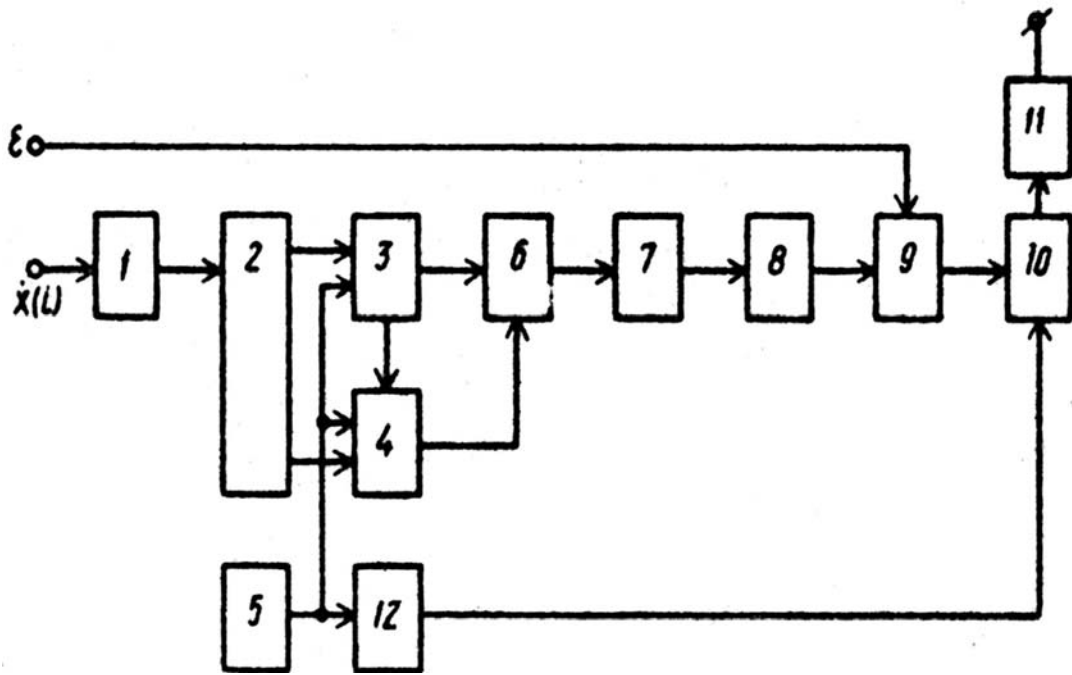
Недостатком предложенного устройства является ограничение на вид корреляционной функции. Так, например, при анализе случайных процессов с нормированной корреляционной функцией  $\rho_x(\tau) = \frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau} \cos \omega_0 \tau$  (см. рис. 6.7 а)) с помощью устройства [16] оценка  $\tau_{kmax}$  производится с большой погрешностью. От этого недостатка свободно следующее устройство (см. рис. 6.7 б)) [22].

Устройство содержит блок записи 1, блок памяти 2, блоки воспроизведения сигналов 3, 4, генератор импульсов 5, блок умножения 6, интегратор 7, блок нормализации по дисперсии 8, блок сравнения 9, элемент И 10, регистр 11, счётчик импульсов 12.

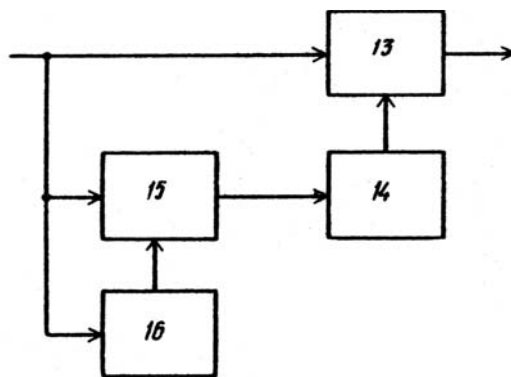
Блок нормализации 8 содержит делитель 13, элемент памяти 14, элемент И 15, триггер 16 (см. рис. 6.7 в)).



a)



б)



в)

Рисунок 6.7.

Устройство работает следующим образом. Перед началом работы счётчик импульсов 12 устанавливается в нулевое состояние. При этом триггер 16 устанавливается в единичное состояние, при котором потенциал на его выходе разрешает прохождение кода с выхода блока нормализации 8 через элемент И 15.

Блок записи 1 обеспечивает дискретизацию входного сигнала и поочередную посылку полученных выборок сигнала в запоминающие ячейки блока памяти статического типа 2.

Блоки воспроизведения 3 и 4 воспроизводят сжатые во времени копии заложенной в блок памяти 2 реализации входного сигнала. При этом после воспроизведения каждой копии с выхода блока воспроизведения 3 подаётся сдвигающий импульс на вход блока воспроизведения 4. Это обеспечивает временной сдвиг между следующими копиями сигнала двух блоков воспроизведения 3 и 4 на величину  $\tau$ . Таким образом  $n$ -ые копии оказываются сдвинутыми на величину  $(n-1)\tau$ . Далее указанные этапы получения задержки от 0 до  $(n-1)$  периодически повторяются.

При каждом цикле воспроизведения в блоке умножения 6 и интеграторе 7 определяется одно значение автокорреляционной функции, поступающее на вход блока нормализации по дисперсии 8. Значение автокорреляционной функции  $K_x(0)$  поступает на первый вход делителя 13, проходит через открытый элемент И 15, записывается в элемент памяти 14 и переключает триггер в нулевое состояние, при котором на его выходе появляется потенциал, запрещающий прохождение кода с входа блока 8 через элемент И 15 в элемент памяти 14, не изменяющееся до конца измерения.

Таким образом, в элементе памяти 14 в процессе всего цикла измерений записан код  $K_x(0)$ , который поступает на второй вход делителя 13, на выходе которого получается нормированное значение автокорреляционной функции  $\rho_x(\tau)$ .

Текущее значение  $\rho_x(\tau)$  поступает на первый вход сравнения 9, второй вход которого подключен к источнику напряжения  $\varepsilon$ . При выполнении условия (6.3) (на рис. 6.7.в) этому соответствуют заштрихованные области) с выхода блока сравнения 9 на вход элемента И 10 поступает сигнал, разрешающий прохождение содержимого счётчика 12, подсчитывающего импульсы с генератора импульсов 5 через элемент И 10 в регистр 11. В нём записывается код пропорциональный текущему значению аргумента нормированной автокорреляционной функции.

При выполнении условия (6.4) блок сравнения 9 сигналом, поступающим на вход элемента И 10, запирает его, запрещая тем самым прохождение содержимого счётчика 12 в регистр 11.

Таким образом, в конце измерения в регистре 11 будет записан код, пропорциональный значению аргумента нормированной корреляционной функции, соответствующий её последнему значению (точка R на рис. 6.7 в)).

В качестве примера рассмотрим определение интервала корреляции  $\tau_{kmax}$  стационарного случайного процесса с  $\rho_x(\tau) = \frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau} \cos \omega_0 \tau$ , наиболее сложной для

анализа. На рис. 6.7 в) отрезки кривой AB, CD, EF, GH, IJ, KL, MN, OP, QR соответствуют циклам работы устройства при выполнении условия (6.3), а отрезки кривой DC, DE, FG, HJ, JK, LM, NQ, PQ – при выполнении условия (6.4).

Погрешность определения  $\tau_{kmax}$  зависит от величины интервала дискретизации  $\rho_x(\tau)$  и не зависит от вида корреляционной функции.

Аналитические выражения  $\tau_{k\max}$  для типовых моделей  $\rho_x(\tau)$  приведены в таблице 6.1.

Максимальные интервалы корреляции типовых моделей корреляционных функций

Таблица 6.1

№	Наименование	$\Delta=0,01$	$\Delta=0,02$	$\Delta=0,05$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau )$	$6,64/\alpha$	$5,84/\alpha$	$4,75/\alpha$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau )$	$6,27/\alpha$	$5,40/\alpha$	$4,14/\alpha$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$8,03/\alpha$	$7,14/\alpha$	$5,92/\alpha$
5	$e^{-\alpha \tau }\text{Cos}\omega_0\tau$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
6	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
7	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$

Часто под интервалом корреляции понимается основание прямоугольника с высотой, равной единице, площадь которого равновелика площади фигуры, определяемой нормированной корреляционной функцией [82]:

$$\tau_k^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau. \quad (6.5)$$

Отметим, что для некоторого класса процессов  $\tau_k^{(2)} = 0$ , что свидетельствует об отсутствии корреляции между сечениями процесса. Однако это не так, корреляция есть, и это подтверждает  $\tau_{k\max} > 0$ .

Следовательно, при оценке длительности существования корреляционной функции  $\tau_k^{(2)}$  целесообразно применять лишь при анализе случайных процессов с монотонными корреляционными функциями.

Для устранения отмеченного недостатка были предложены следующие определения интервалов корреляции:

$$\tau_k^{(3)} = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau; \quad (6.6)$$

$$\tau_k^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau. \quad (6.7)$$

Анализ выражений (6.1) и (6.6) показывает, что аналитическая оценка длительности существования корреляционной функции затруднена, особенно для колебательных моделей корреляционных функций. От этого недостатка свободно определение  $\tau_k^{(4)}$ . Поэтому, несмотря на то, что  $\tau_k^{(4)}$  дает заниженные результаты, в технических приложениях он применяется значительно чаще, чем  $\tau_k^{(3)}$ . Значения интервалов корреляции  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  для типовых моделей корреляционных функций приведены в таблице 6.2.

Интервалы корреляции для типовых моделей корреляционных функций

Таблица 6.2

№	Наименование	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$1/\alpha$	$1/2\alpha$
2	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau )$	$2/\alpha$	$5/4\alpha$
3	$e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau )$	0	$1/4\alpha$
4	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$8/3\alpha$	$7/4\alpha$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{2\alpha^2 + \omega_0^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{5\alpha^2 + \omega_0^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	0	$\frac{1}{4\alpha}$

В таблице 6.3 показано, во сколько раз  $\tau_{k \max}$  больше  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  ( $\Delta = 0,05$ ).

Таблица 6.3

№	Наименование	$\tau_{k \max} / \tau_k^{(2)}$	$\tau_{k \max} / \tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\alpha \tau }$	3	6
2	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau )$	2,375	3,8
3	$e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau )$	$\infty$	16,56
4	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	2,22	3,38
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$3(1+\mu^2)$	$\frac{2(1+\mu^2)}{2+\mu^2}$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$1,5(1+\mu^2)$	$\frac{12(1+\mu^2)}{(5+\mu^2)}$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$\infty$	12

Отсюда видно, что  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  дают сильно заниженный результат по сравнению с  $\tau_{k \max}$ .

В качестве оценки интервалов корреляции предлагается использовать интервалы корреляции экспоненциальной функции  $\rho_a(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}$ , аппроксимирующей нормированную корреляционную функцию по минимуму квадратической погрешности аппроксимации [5].

При этом,

$$\hat{\tau}_x^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha) d\tau \approx 1/\alpha; \quad (6.8)$$

$$\hat{\tau}_x^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_a^2(\tau, \alpha) d\tau \approx 1/2\alpha; \quad (6.9)$$

$$\hat{\tau}_{k\max} \approx \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\Delta}. \quad (6.10)$$

Результаты оценки интервалов корреляции приведены в таблице 6.4.

Таблица 6.4

$\rho_x(\tau)$	$\tau_x^{(2)}$	$\tau_{xa}^{(2)}$	$\tau_x^{(4)}$	$\tau_{xa}^{(4)}$
$e^{-\lambda \tau }$	$1/\lambda$	$1/\lambda$	$1/2\lambda$	$1/2\lambda$
$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$	$2/\lambda$	$2,14/\lambda$	$1,25/\lambda$	$1,07\lambda$
$e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau )$	$0$	$0,364/\lambda$	$0,25/\lambda$	$0,182\lambda$
$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\pi/2 \Delta\omega_3$	$\sqrt{3}/\Delta\omega_3$	$\pi/2 \Delta\omega_3$	$\sqrt{3}/2 \Delta\omega_3$

Исследования показали, что предложенный способ оценки интервала корреляции наиболее целесообразно применять при исследовании широкополосных процессов ( $\mu < 3$ ), спектральная плотность мощности которых обладает следующим свойством  $S_x(0) \neq 0$  [77].

Рассмотрим уравнение для оценки погрешности аппроксимации корреляционной функции параметрической моделью:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [\rho_x(\tau) - \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_m)]^2 d\tau = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau - \left[ 2 \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_m) d\tau - \int_0^{\infty} \rho_a^2(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_m) d\tau \right]. \quad (6.11)$$

Отсюда

$$\tau_k^{(4)} = \Delta + \left[ 2 \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_m) d\tau - \int_0^{\infty} \rho_a^2(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_m) d\tau \right]. \quad (6.12)$$

Выражение

$$\hat{\tau}_k^{(4)} \approx 2 \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_m) d\tau - \int_0^{\infty} \rho_a^2(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_m) d\tau \quad (6.13)$$

можно принять в качестве оценки интервала корреляции. Оценка будет тем точнее, чем меньше квадратическая погрешность аппроксимации.

Если в качестве модели нормированной корреляционной функции выбрать модель  $\rho_a(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}$ , то выражение (6.13) примет вид

$$\hat{\tau}_k^{(4)} \approx 2 \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) e^{-\alpha\tau} d\tau - \frac{1}{2\alpha}. \quad (6.14)$$

На рис. 6.8 структурная схема для оценки интервала корреляции, соответствующего выражению (6.14) [5].

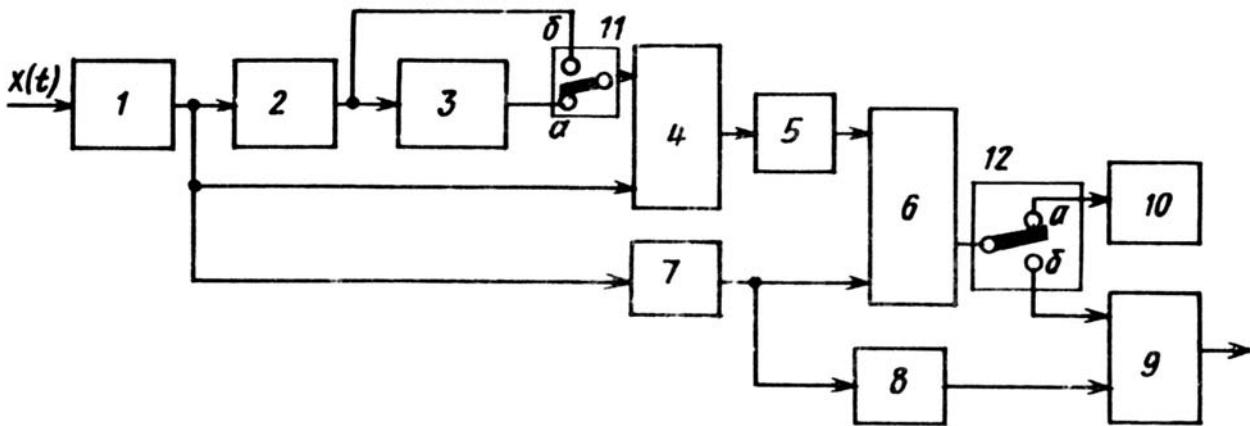


Рисунок 6.8. Устройство для оценки интервала корреляции

Предлагаемое устройство содержит центрирующий фильтр 1, первый 2 и второй аperiodические фильтры 3 с перестраиваемой постоянной времени, блок умножения 4, усредняющий фильтр 5, вычитающий блок 6, дисперсиометр 7, элемент с регулируемым коэффициентом передачи 8, блок деления 9, индикатор 10 и переключатели 11 и 12.

Процесс измерения производится в два этапа. Оставляя переключатели 11 и 12 в положении «а» изменением параметра фильтров 2, 3 и элемента 8 добиваются минимума показания индикатора 10. Затем, переведя переключатели 11 и 12 в положение «б», производят отсчёт величины сигнала на выходе блока деления 9.

Для примера в таблице 6.5 приведены результаты расчёта погрешностей оценки интервалов корреляции для  $\rho_a(\tau, \alpha) = e^{-\alpha|\tau|}$ :

$$\delta_1 = \frac{\tau_k^{(4)} - \tau_a^{(4)}}{\tau_k^{(4)}}; \quad \delta_2 = \frac{\tau_k^{(4)} - \hat{\tau}_k^{(4)}}{\tau_k^{(4)}}, \quad (6.15)$$

где  $\tau_a^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_a^2(\tau, \alpha) d\tau = 1/2\alpha$ ; (6.16)

$$\hat{\tau}_k^{(4)} = 2 \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) e^{-\alpha\tau} d\tau - 1/2\alpha. \quad (6.17)$$

Погрешности оценки  $\tau_k^{(4)}$

Таблица 6.5

$\rho_x(\tau)$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\alpha = f(\lambda)$
$e^{-\lambda \tau }$	0	0	$\alpha = \lambda$
$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$	0,143	0,06	$\alpha = 0,467 \lambda$
$e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau )$	0,27	0,16	$\alpha = 2,75 \lambda$
$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau, \mu=1$	0,215	0,05	$\alpha = 1,7 \lambda$
$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau, \mu=3$	0,58	0,4	$\alpha = 4,3 \lambda$

Анализ результатов таблицы показывает, что  $\epsilon_k^{(4)}$  позволяет с большей точностью, чем  $\tau_a^{(4)}$ , оценивать  $\tau_k^{(4)}$ , особенно для широкополосных процессов.

Определив параметры модели корреляционной функции в виде (3.6) и воспользовавшись определением корреляционных характеристик, можно найти их аналитические выражения, содержащие только параметры модели.

Так выражение для оценки  $\tau_k^{(2)}$  примет вид:

$$\epsilon_k^{(2)} \approx \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{k=0}^m \beta_k \int_0^{\infty} L_k(\tau) d\tau. \quad (6.18)$$

Выполнив все необходимые преобразования, с учётом свойств ортогональных функций Лагерра, получим выражение для оценки интервала корреляции:

$$\epsilon_k^{(2)} \approx \frac{2}{\alpha \sigma_x^2} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k. \quad (6.19)$$

Конечное число членов разложения ряда (3.6)  $m$  приводит к погрешности от смещенности в определении интервала корреляции, которую оценим в соответствии с выражением:

$$\gamma_{см} = \frac{\epsilon_k^{(2)} - \tau_k^{(2)}}{\tau_k^{(2)}}. \quad (6.20)$$

Рассмотрим пример определения интервала корреляции для корреляционной функции  $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|}$ :

$$\epsilon_k^{(2)} = \frac{1 - \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^{m+1}}{\lambda}. \quad (6.21)$$

Отсюда погрешность от смещенности равна:

$$\gamma_{см} = - \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^{m+1}. \quad (6.22)$$

Анализ полученного выражения показывает, что погрешность от смещенности зависит от числа членов разложения ряда  $m$ , величины параметра  $\alpha$ . При произвольной величине параметра  $\alpha$  погрешность от смещенности может принимать достаточно большие значения. Рассмотрим два алгоритма определения параметра  $\alpha$ :

$\beta_0 - \sigma_x^2 = 0$  и  $\beta_{m+1} = 0$ . Решения этих двух уравнений совпадают:  $\alpha = 2\lambda = \frac{2}{\tau_k^{(2)}}$ . Под-

ставив полученное решение в (6.22), увидим, что погрешность от смещенности равна нулю.

Однако в общем случае, погрешность от смещенности имеет место. Так, для корреляционной функции  $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} (1 + \lambda|\tau|)$  и параметра  $\alpha$ , определенного в результате уравнения  $\beta_0 - \sigma_x^2 = 0$ ,



$$\gamma_{\text{см}} = -\frac{(m-1)}{2(\sqrt{2}+1)^{m+1}}(-1)^m. \quad (6.23)$$

Отсюда видно, что погрешность от смещенности равна нулю, если  $m=1$  или  $m \rightarrow \infty$ .

Решение задачи для колебательной модели корреляционной функции:  $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ , - показывает, что выражения для оценки погрешности от смещенности различны для четных  $m=2n$  и нечетных  $m=2n+1$  и, кроме того, зависят от показателя колебательности  $\mu$ . Так для  $m=2n$

$$\gamma_{\text{см}} = (-1)^{n+1} \mu \left( \frac{\mu}{1 + \sqrt{1 + \mu^2}} \right)^{2n+1}, \quad (6.24)$$

а для  $m=2n+1$

$$\gamma_{\text{см}} = (-1)^{n+1} \left( \frac{\mu}{1 + \sqrt{1 + \mu^2}} \right)^{2n+1}. \quad (6.25)$$

Анализ погрешности от смещенности показывает, что для повышения точности оценки интервала корреляции целесообразнее выбирать нечетное число членов разложения ряда.

Аналогичные выводы можно сделать, проанализировав погрешности от смещенности оценки интервалов корреляции других колебательных моделей корреляционных функций.

Таким образом, при оценке интервала корреляции по алгоритму (6.19) для обеспечения допустимых погрешностей от смещенности необходимо выбирать величину параметра функции Лагерра либо в соответствии с алгоритмом  $\beta_0 - \sigma_x^2 = 0$ , либо  $\beta_{m+1} = 0$ . При анализе же корреляционных функций с большим показателем колебательности с точки зрения уменьшения этой погрешности необходимо выбирать нечетное число членов разложения ряда (3.6).

В [4] предлагается устройства для оценки интервала корреляции, соответствующего выражению (6.19) (см. рис. 6.9).

Устройство содержит фильтр Лагерра  $m$ -го порядка I, включающий в себя ячейки нулевого 1 и последующих порядков 2, сумматоры 3, 12, инверторы 4, 13, блоки умножения 5, 10, блоки усреднения 6, 11, блок деления 7, функциональный преобразователь с функцией преобразования  $\frac{\alpha}{2} \sigma_x^2$  8, дисперсиометр 9, блок регулировки параметров фильтров Лагерра I и функционального преобразователя 14.

Блоки 10-14 (обозначены II) образуют систему регулирования параметра фильтра Лагерра I и функционального преобразователя 8.

Сигнал на выходе блока деления 7 принимается в качестве оценки интервала корреляции (6.19).

Как показали исследования [5, 53, 54] в описываемом устройстве в оптимальном случае постоянная времени фильтра Лагерра сравнима с интервалом корреляции. Это, в свою очередь, при той же длительности реализации исследуемого процесса

приводит к уменьшению статистических погрешностей или к уменьшению длительности реализации при той же статистической погрешности.

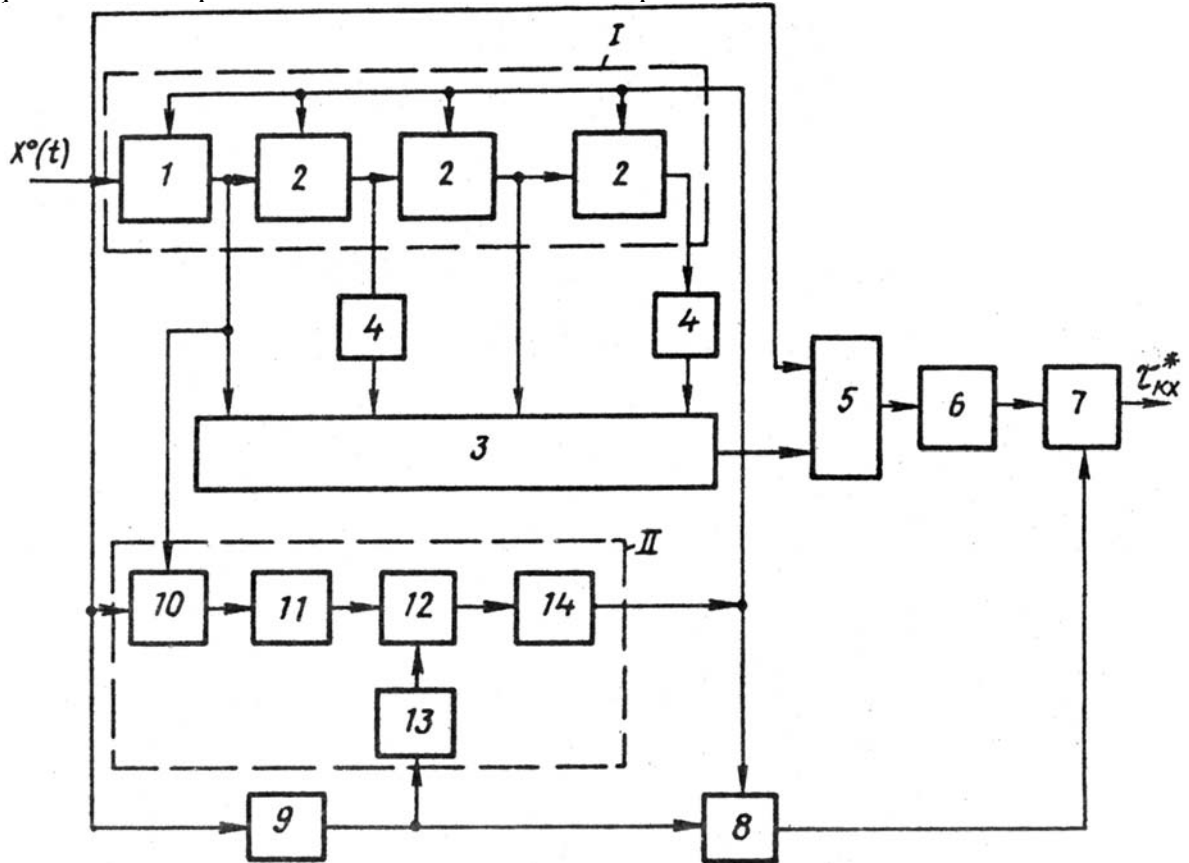


Рисунок 6.9. Устройство для оценки интервала корреляции

Воспользовавшись выражением для определения погрешности аппроксимации корреляционной функции рядом (3.6)

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2, \quad (6.26)$$

можно с абсолютной погрешностью  $\frac{\Delta}{\sigma_x^4}$  в качестве оценки интервала корреляции

принять выражение:

$$\epsilon_k^{(4)} \approx \frac{1}{\alpha \sigma_x^4} \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (6.27)$$

Эта оценка будет тем точнее, чем меньше квадратическая погрешность аппроксимации корреляционной функции моделью вида (3.6). Заметим, что анализ этой погрешности и рекомендации по выбору оптимальных значений параметров модели представлен в разделе 3.

### 6.1.3. Оценка моментов корреляционных функций

Моменты корреляционных функций вводятся по аналогии с моментами законов распределения и используются при решении различных прикладных задач. Определим начальный момент  $k$ -го порядка в виде:

$$\mu_k = \int_0^{\infty} \tau^k \rho_x(\tau) d\tau. \quad (6.28)$$

Знание моментов позволяет решать задачи идентификации случайных процессов по виду корреляционной функции и ввести ещё одно определение длительности существования корреляционной функции [82]:

$$\tau_k^{(5)} = \mu_1 / \mu_0. \quad (6.29)$$

Значение моментов для типовых моделей корреляционных функций приведено в таблице 6.6.

Таблица 6.6

№	Наименование	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$1/\alpha^2$	$2/\alpha^3$	$6/\alpha^4$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau )$	$3/\alpha^2$	$8/\alpha^3$	$30/\alpha^4$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau )$	$-1/\alpha^2$	$-4/\alpha^3$	$-18/\alpha^4$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$5/\alpha^2$	$16/\alpha^3$	$70/\alpha^4$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{\alpha^2 - \omega_0^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$\frac{2(\alpha^3 - 3\alpha\omega_0^2)}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^3}$	$6\frac{\alpha^4 - 6\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$
6	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{3\alpha^2 - \omega_0^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$\frac{8\alpha(\alpha^2 - \omega_0^2)}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^3}$	$6\frac{5\alpha^4 - 10\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$
7	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{1}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$-\frac{4\alpha}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$-6\frac{3\alpha^4 + 2\alpha^2\omega_0^2 - \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$

При аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра можно показать [52], что

$$\mu_n = \varphi_n(\alpha) \sum_{k=0}^m (-1)^k c_{nk} \beta_k. \quad (6.30)$$

Рекомендации по выбору параметров модели  $\alpha$ ,  $m$  и  $\beta_k$  аналогичны рекомендациям при определении интервала корреляции  $\tau_k^{(2)}$ . Выражения для первых четырёх моментов представлены в таблице 6.6.

Таблица 6.7

$\mu_n$	$\varphi_n(\alpha)$	$c_{nk}$
$\mu_0$	$2/\alpha$	1
$\mu_1$	$4/\alpha^2$	$1+2k$
$\mu_2$	$16\alpha^3$	$1+2k+2k^2$
$\mu_3$	$32/\alpha^4$	$3+8k+6k^2+4k^3$

### 6.1.4. Оценка обобщенных характеристик взаимной корреляционной функции

По аналогии с обобщенными характеристиками для автокорреляционных функций введем обобщенные характеристики для взаимных корреляционных характеристик, широко применяемых в практических приложениях:

- максимального интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(1)} = \tau_{k \max xy}$ ; (6.31)

- интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau$ ; (6.32)

- интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(3)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_{xy}(\tau)| d\tau$ ; (6.33)

- интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(4)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}^2(\tau) d\tau$ ; (6.34)

- моменты корреляционных функций  $\mu_{kxy} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^k \rho_{xy}(\tau) d\tau$ , (6.35)

используемые при решении различных прикладных задач, например, идентификации, метрологическом анализе результатов оценивания взаимных корреляционных характеристик и т.д.

Если в качестве модели взаимной корреляционной функции выбрать модель

$$K_{axy}(\tau) = \sigma_x^2 \rho_a(\tau - \tau_m), \quad (6.36)$$

где  $\tau_m$  - значение аргумента корреляционной функции, соответствующее её максимуму, то значения интервалов корреляции равно удвоенному значению результатов, представленных в таблицах 6.1-6.2.

При аппроксимации взаимных корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра моделью

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m1} \beta_{k,\pi} 1(\tau) L_k(\tau, \alpha_1) + \sum_k^{m2} \beta_{k,\lambda} 1(-\tau) L_k(-\tau, \alpha_2) \quad (6.37)$$

выражения для определения интервалов корреляции примут вид:

$$\hat{\tau}_{kxy}^{(2)} \approx \frac{2}{\alpha_1 \sigma_x^2} \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k \beta_{k,\pi} + \frac{2}{\alpha_2 \sigma_x^2} \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k \beta_{k,\lambda}; \quad (6.38)$$

$$\epsilon_{kxy}^{(4)} \approx \frac{1}{\alpha_1 \sigma_x^4} \sum_{k=0}^{m1} \beta_{k,\pi}^2 + \frac{1}{\alpha_2 \sigma_x^4} \sum_{k=0}^{m2} \beta_{k,\lambda}^2. \quad (6.39)$$

Выражения для оценки моментов взаимных корреляционных функций при аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра примут вид:

$$\mu_{nxy} = \varphi_n(\alpha_1) \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k c_{nk} \beta_{k,\pi} + \varphi_n(\alpha_2) \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k c_{nk} \beta_{k,\lambda}. \quad (6.40)$$

На рис. 6.10 представлена структурная схема взаимного коррелятора, позволяющая оценить аппроксимативным способом моменты взаимных корреляционных функций [14].

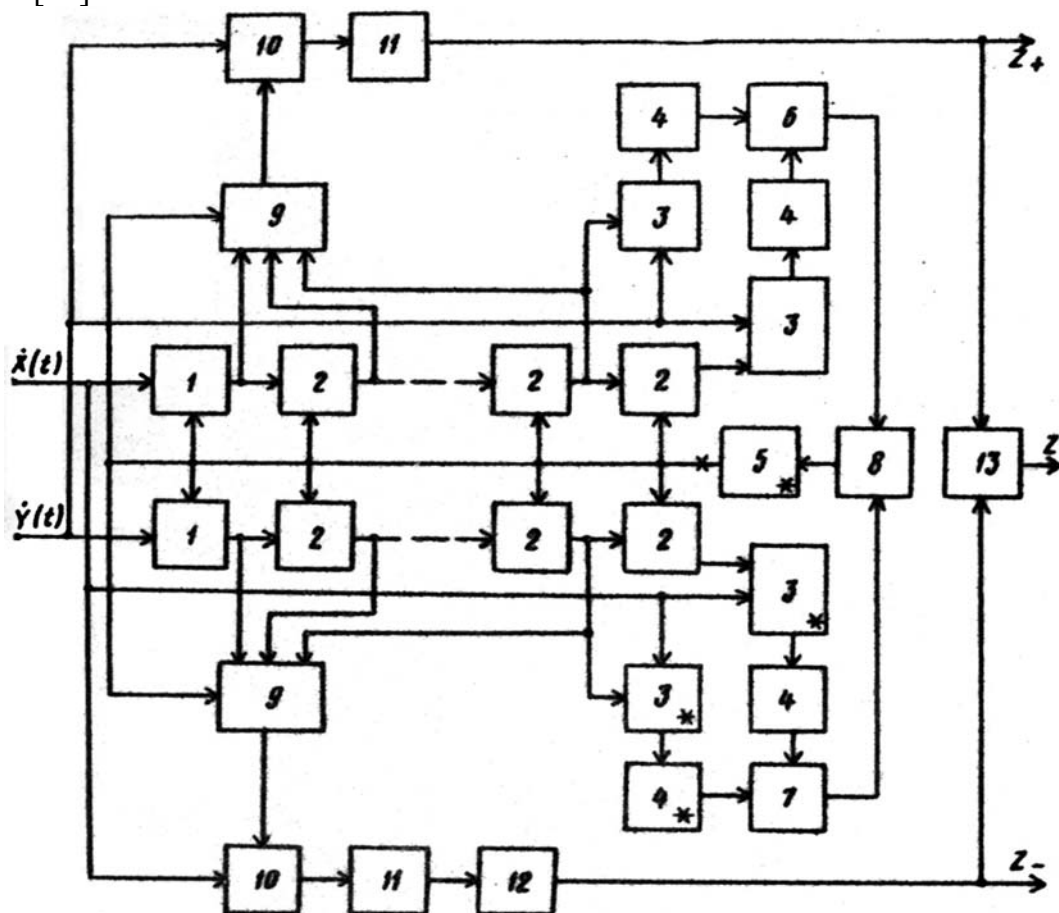


Рисунок 6.10. Взаимный коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра

Устройство содержит два идентичных канала. Каждый канал содержит фильтр Лагерра  $m+1$ -го порядка, включающий в себя ячейку нулевого 1 и ячейки последующих порядков 2, блоки умножения 3, 6, 7, усреднения 4, многовходовой сумматор 9. Кроме этого устройство содержит блок регулировки параметров 5, сумматор 8, блоки умножения 10, усреднения 11, инвертор 12, двухвходовой сумматор 13.

Коэффициенты передачи многовходового сумматора 9 по каждому входу определяются выражением

$$v_{q,k} = \int_0^{\infty} \tau^q L_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (6.41)$$

Коррелометр работает следующим образом. При подаче на его входы двух стационарно связанных случайных процессов  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{y}(t)$  блок регулировки параметра 5 изменяет параметр фильтров Лагерра  $\alpha$  до обнуления выходного сигнала сумматора 8. При этом сигналы на выходах блоков усреднения первого канала 4, определяемые в соответствии с выражением

$$\beta_{k,\pi} = \alpha \int_0^{\infty} K_{xy}(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (6.42)$$

и сигналы на выходах блоков усреднения второго канала 4 -

$$\beta_{k,l} = \alpha \int_0^{\infty} K_{yx}(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (6.43)$$

принимаются в качестве коэффициентов разложения взаимной корреляционной функции  $K_{xy}(\tau)$ .

При этом обеспечивается минимум квадратической погрешности аппроксимации взаимной корреляционной функции, выбранной моделью.

Можно показать, что сигналы на выходе блока усреднения 11 одного канала и выходе инвертора 12 другого канала могут быть приняты в качестве оценок односторонних моментов q-порядка взаимной корреляционной функции

$$\begin{cases} \mu_{q_{xy+}} = \int_0^{\infty} \tau^k K_{xy}(\tau) d\tau; \\ \mu_{q_{yx-}} = \int_0^{\infty} \tau^k K_{yx}(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (6.44)$$

При этом сигнал на выходе сумматора 13 пропорционален оценке двухстороннего момента q-порядка

$$\mu_{q_{xy}} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^k K_{xy}(\tau) d\tau. \quad (6.45)$$

Оценка моментов взаимной корреляционной функции применяется, например, при определении времени задержки одного сигнала по отношению к другому.

На рис. 6.11 представлена структурная схема коррелометра с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра, позволяющего определить отношения моментов взаимной корреляционных функций.

Устройство содержит два идентичных канала, каждый из которых содержит фильтр Лагерра  $m+1$ -го порядка, включающего в себя ячейку фильтра нулевого порядка 1 и ячейки последующих порядков 2, блоки умножения 3, усреднения 4, многовходовой сумматор 7, с коэффициентами передачи по каждому входу, определяемыми выражением (6.41), многовходовой сумматор 8 с коэффициентами передачи по каждому входу  $v_{n,k}$ , где  $n$  - порядок момента-делителя. Кроме этого, коррелометр содержит масштабный преобразователь 9 с регулируемым коэффициентом передачи, инверторы 10, блоки вычитания 11, дополнительные блоки умножения 12, к выходам которых последовательно подключены сумматор 13, блок усреднения 14, блок регулировки коэффициентов масштабных преобразователей 15.

Взаимный коррелометр работает следующим образом. При подаче на его входы двух стационарно связанных случайных процессов  $\overset{\circ}{x}(t)$  и  $\overset{\circ}{y}(t)$  блок регулировки параметра 6 изменяет параметр фильтров Лагерра  $\alpha$  до обнуления выходного сигнала сумматора 5. При этом сигналы на выходах блоков усреднения первого канала 4, определяемые в соответствии с выражением (6.42) и сигналы на выходах блоков усреднения второго канала 4 (см. (6.43)) принимаются в качестве коэффициентов разложения взаимной корреляционной функции  $K_{xy}(\tau)$ .

Блок регулировки коэффициента 15 изменяет коэффициент передачи масштабных преобразователей 9 до обнуления выходного сигнала блока усреднения 14. Установившиеся значения коэффициентов передачи  $k_m$  масштабных преобразователей

принимаются в качестве оценки отношения моментов взаимной корреляционной функции. Отметим, что необходимость в определении отношения моментов взаимной корреляционной функции возникает при решении задач идентификации динамических объектов.

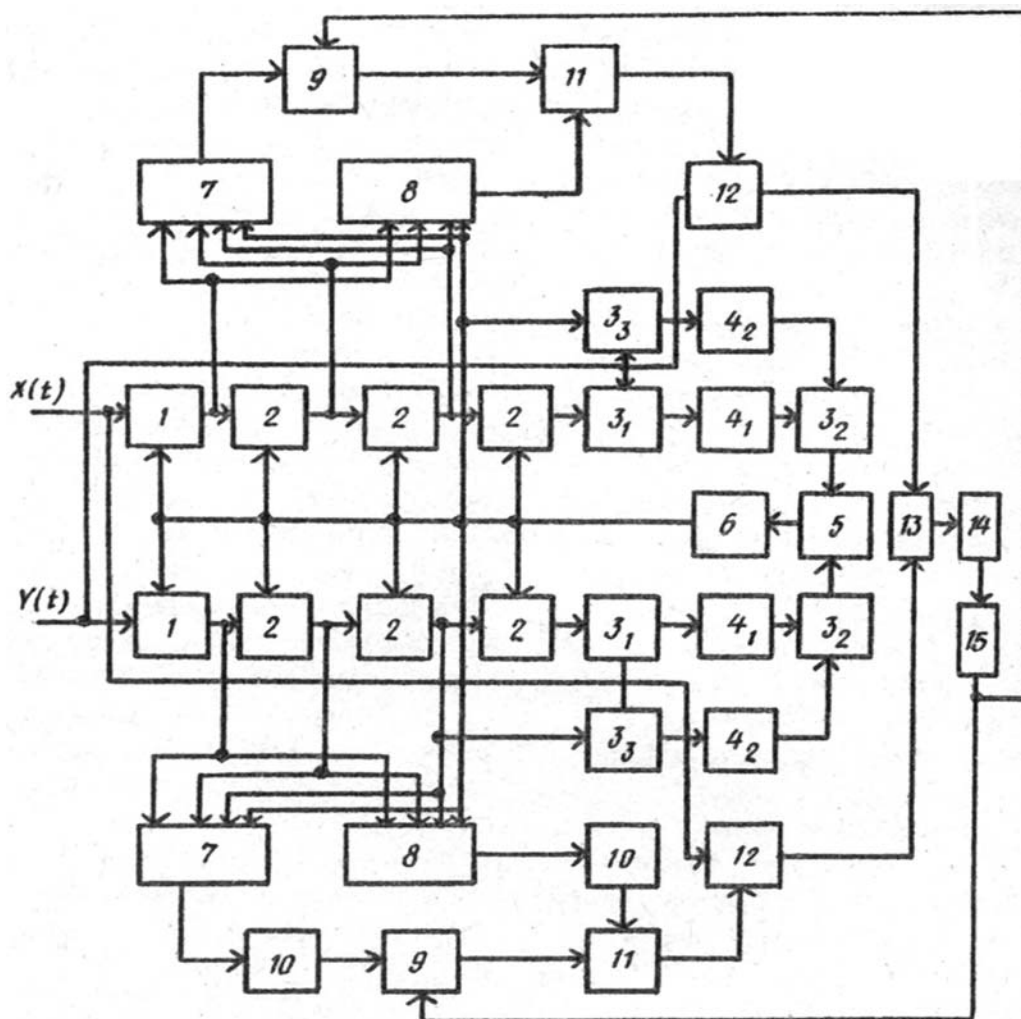


Рисунок 6.11. Взаимный коррелометр ортогональными функциями Лагерра

## 6.2. Аппроксимация спектральных плотностей мощности

Спектральные функции представляют собой частотное распределение энергетических характеристик случайного процесса. Существуют различные способы их определения, например: преобразование Фурье процесса, преобразование Фурье корреляционной функции. Определим спектральную плотность мощности в виде [56, 59]:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (6.46)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Винера-Хинчина, можно установить связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6.47)$$

С учетом четности функций  $K_x(\tau)$  и  $S_x(\omega)$ , воспользовавшись формулой Эйлера, выражения (6.46), (6.47) приведем к виду:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau ; \quad (6.48)$$

$$K_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega . \quad (6.49)$$

Аналитические выражения спектральной плотности мощности для типовых моделей корреляционных функций приведены в таблице 6.8.

Подставив в выражение (6.40)  $\tau = 0$ , получим

$$K_x(0) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega - \quad (6.50)$$

условие нормировки для спектральной плотности мощности.

Подставив в выражение (6.48)  $\omega = 0$ , получим

$$S_x(0) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \tau_k^{(2)} . \quad (6.51)$$

Отсюда видно, что если значение спектральной плотности мощности «в нуле» равно нулю, то  $\tau_k^{(2)} = 0$ . Это свойство случайных процессов ограничивает область применения интервала корреляции  $\tau_k^{(2)}$ .

Спектральная плотность мощности с успехом применяется при анализе линейных динамических систем при случайном входном воздействии.

Пусть на вход линейной динамической системы с частотной характеристикой  $|W(j\omega)|$  поступает случайный процесс  $x(t)$  со спектральной плотностью мощности  $S_x(\omega)$ . Спектральная плотность мощности выходного процесса  $y(t)$  в этом случае равна [56]:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (6.52)$$

где  $|W(j\omega)|^2$  – квадрат модуля частотной характеристики.

Это фундаментальное выражение позволяет определить:

- дисперсию выходного сигнала (см.(6.41));
- найти аналитическое выражение квадрата модуля частотной характеристики и соответствующее ему выражение импульсной переходной характеристики, необходимое для моделирования стационарных случайных процессов с заданным видом спектральной плотности мощности (корреляционной функции) методом фильтрации [94].

При решении некоторых прикладных задач требуется знание аналитического выражения спектральной плотности мощности. Благодаря наличию аналитической связи между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности, вопросы их аппроксимации оказываются взаимосвязанными [77].

Запишем квадратичную погрешность аппроксимации спектральной плотности процесса  $S_x(\omega)$  функцией заданного вида  $S_a(\omega)$ :



$K_X(\tau)$	$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sigma_X^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha^3}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau )$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha\omega^2}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau  + \frac{\alpha^2 \tau^2}{3})$	$\frac{\sigma_X^2 8\alpha^5}{3\pi(\alpha^2 + \omega^2)^3}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{\sigma_X^2 \alpha}{2\pi} \left[ \frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau )$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau )$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha\omega^2}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + C \sin \omega_0  \tau )$	$\frac{\sigma_X^2 [\alpha(\alpha^2 + \omega^2 + \omega_0^2) + C\omega_0(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2)]}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [S_x(\omega) - S_a(\omega)]^2 d\omega. \tag{6.53}$$

Раскрыв квадратные скобки в (6.33), получим:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(\omega) d\omega - 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) S_a(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_a^2(\omega) d\omega. \tag{6.54}$$

Подставим в (6.54) значения  $S_x(\omega)$  и  $S_a(\omega)$ , полученные из корреляционной функции при помощи преобразования Винера-Хинчина [57]:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \\ S_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{cases} \quad (6.55)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Применяя к внутренним интегралам обратное преобразование Винера-Хинчина и учитывая четность корреляционной функции, получим:

$$\Delta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau)]^2 d\tau. \quad (6.57)$$

Из выражения (6.57) видно, что задача аппроксимации спектральной плотности мощности функциями заданного вида сводится к задаче аппроксимации корреляционной функции функциями вида:

$$K_a(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6.58)$$

На рис. 6.12 представлены результаты аппроксимации корреляционных функций и соответствующих им спектральных плотностей мощности для случайного процесса, сгенерированного на ЭВМ (объем выборки  $N=500$ , число отсчетов корреляционной функции  $M=38$ , показатель колебательности  $\mu=5$ ).

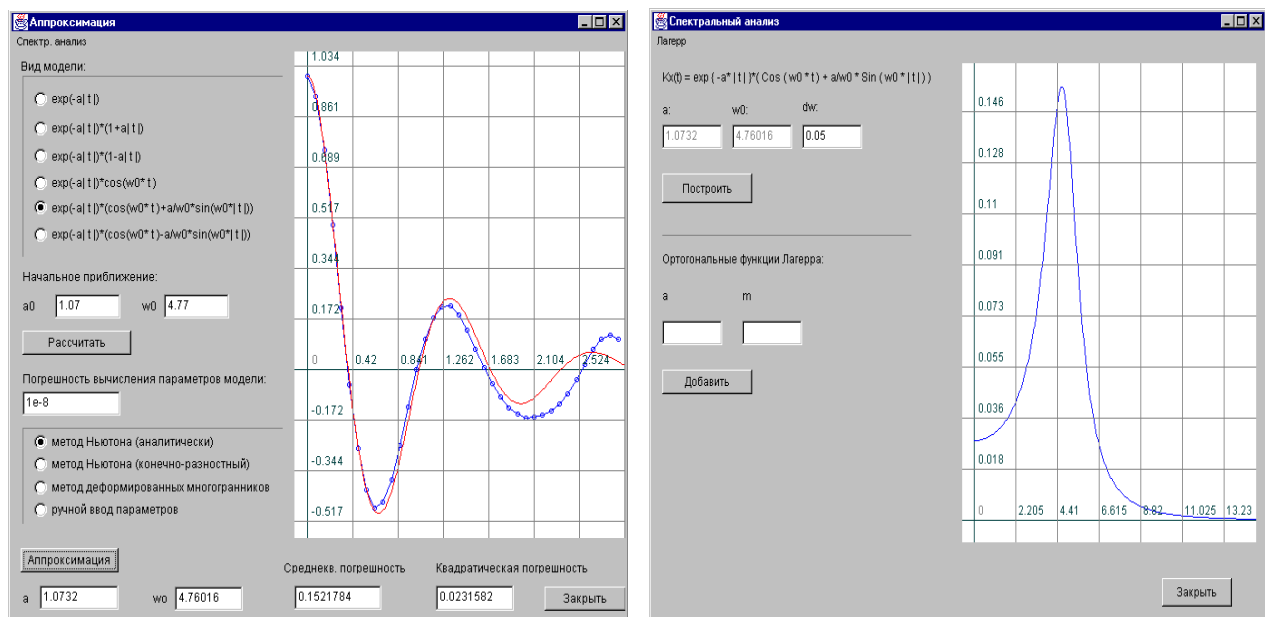


Рисунок 6.12. Аппроксимация корреляционной функции и спектральной плотности мощности

На рис. 6.13 приведен пример аппроксимации корреляционной функции и спектральной плотности мощности неэквидистантного временного ряда со следующими параметрами: объём выборки регулярного ряда  $N=1000$ , число отсчётов корреляционной функции  $M=39$ ,  $\mu=5$ , вероятность оставления отсчёта в потоке  $p=0,15$ .

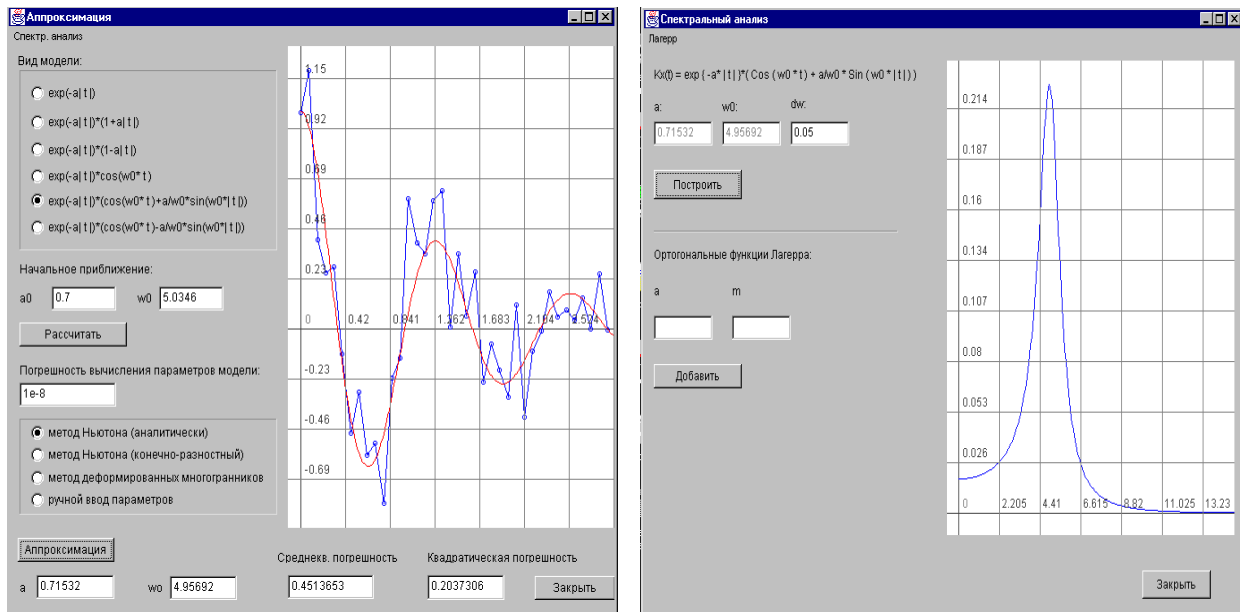


Рисунок 6.13. Аппроксимация корреляционной функции и спектральной плотности мощности неэквидистантного временного ряда

Анализ рисунков показывает, что, даже при небольшом отношении  $\Psi=N/M$ , возможна аппроксимация спектральных плотностей мощности параметрическими моделями.

Все сказанное выше относится и к модели корреляционной функции, представленной в виде ряда по ортогональным функциям Лагерра.

Определив параметры модели корреляционной функции  $\beta_0, \dots, \beta_m, \alpha$

$$K_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau) l(\tau) + \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(-\tau) l(-\tau), \quad (6.59)$$

оценим спектральную плотность мощности случайного процесса.

Для этого, подставив модель (6.59) в выражение для определения спектральной плотности мощности

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau) l(\tau) + \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(-\tau) l(-\tau) \right] e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (6.60)$$

с учётом определения ортогональных функций Лагерра (3.4), получим:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[ \frac{1}{\alpha/2 + j\omega} \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k + \frac{1}{\alpha/2 - j\omega} \left( \frac{j\omega + \alpha/2}{j\omega - \alpha/2} \right)^k \right]. \quad (6.61)$$

Введем обозначение  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\omega}{\alpha}$ . Тогда

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[ \frac{1}{1 + j\operatorname{tg}\varphi} \left( \frac{j\operatorname{tg}\varphi - 1}{j\operatorname{tg}\varphi + 1} \right)^k + \frac{1}{1 - j\operatorname{tg}\varphi} \left( \frac{j\operatorname{tg}\varphi + 1}{j\operatorname{tg}\varphi - 1} \right)^k \right]. \quad (6.62)$$

Или

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[ \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi + j\sin\varphi} \left( \frac{j\sin\varphi - \cos\varphi}{j\sin\varphi + \cos\varphi} \right)^k + \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi - j\sin\varphi} \left( \frac{j\sin\varphi + \cos\varphi}{j\sin\varphi - \cos\varphi} \right)^k \right]. \quad (6.63)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера, выражение (6.63) приведем к виду:

$$S_x(\omega) = \frac{\cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \left[ \frac{1}{e^{j\varphi}} \left( \frac{-e^{-j\varphi}}{e^{j\varphi}} \right)^k + \frac{1}{e^{-j\varphi}} \left( \frac{e^{j\varphi}}{-e^{-j\varphi}} \right)^k \right] =$$

$$= \frac{\cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \left[ e^{-(2k+1)\varphi} + e^{(2k+1)\varphi} \right] = \frac{2\cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi, \quad (6.64)$$

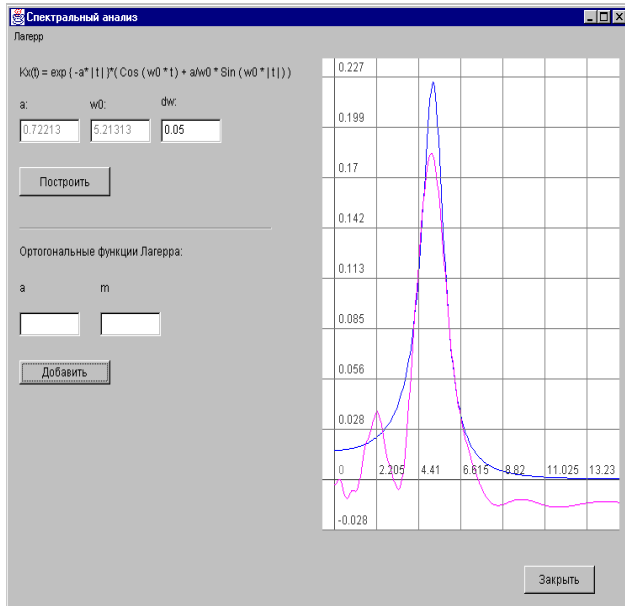


Рисунок 6.14. Результаты аппроксимации

где  $\varphi = \arctg \frac{2\omega}{\alpha}$ .

Рассмотрим пример оценки  $S_x(\omega)$  узкополосного случайного процесса с

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos\omega_0\tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin\omega_0|\tau| \right),$$

параметры которой равны:  $\sigma_x^2 = 1$ ,  $\lambda = 0,722 \text{ сек}^{-1}$  и  $\omega_0 = 5,213 \text{ сек}^{-1}$ .

Параметры модели (6.59):  $\alpha = 9,229 \text{ сек}^{-1}$ ,  $m = 23$ .

На рис.6.14 приведены графики спектральной плотности мощности, построенной по параметрам модели (нижний график), и спектральной плотности, построенной по параметрам модели, соответствующей рассматриваемой корреляционной

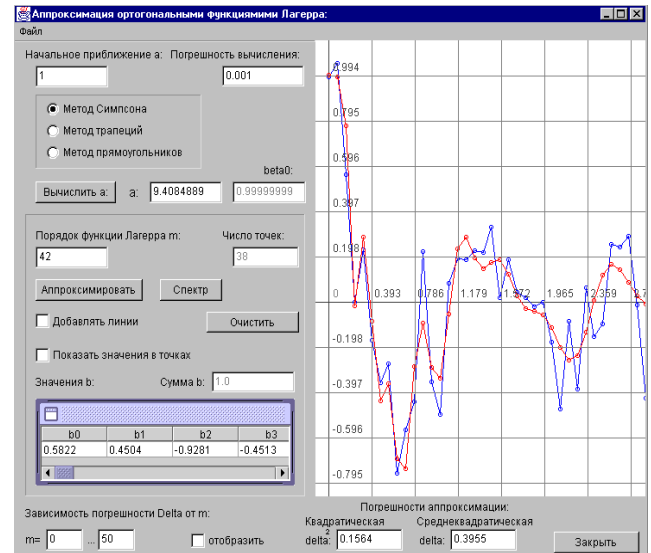
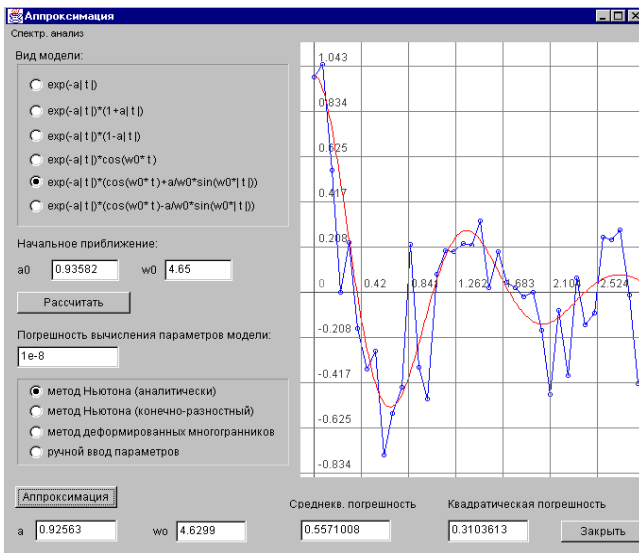
функции (верхний график).

Из анализа графиков можно сделать следующий вывод, что модель спектральной плотности достаточно хорошо приближает спектральную плотность мощности анализируемого процесса, позволяя выделить частоту, соответствующую максимуму спектральной плотности мощности.

На рис. 6.15 в) приведены результаты определения модели спектральной плотности мощности неэквидистантного временного ряда, полученного после р-преобразования псевдослучайной последовательности с  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (\cos\omega_0\tau +$

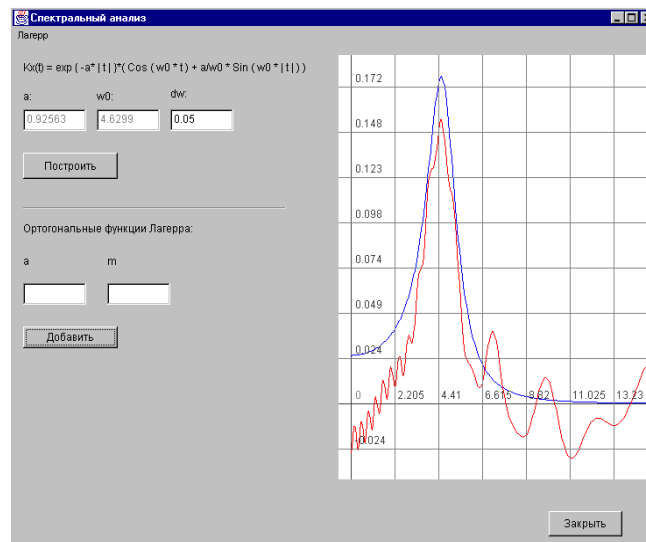
$$+ \frac{\lambda}{\omega_0} \sin\omega_0|\tau|),$$

сгенерированной на ЭВМ, с параметрами  $N=1000$ ,  $M=38$ ,  $p=0,15$ ,  $\sigma_x^2 = 1$ ,  $\lambda = 0,926 \text{ сек}^{-1}$  и  $\omega_0 = 4,630 \text{ сек}^{-1}$ . Верхний график соответствует аппроксимации спектральной плотности мощности функцией заданного вида (рис. 6.6 а), - нижний - аппроксимации ортогональными функциями Лагерра с параметрами  $\alpha = 9,408 \text{ сек}^{-1}$   $m = 42$  (рис. 6.15 б)).



а)

б)



в)

Рисунок 6.15. Результаты аппроксимации

Аналогичным образом, воспользовавшись преобразованием Винера-Хинчина, можно определить взаимную спектральную плотность мощности исследуемых процессов:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (6.65)$$

Отсюда

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6.66)$$

Поскольку взаимная корреляционная функция не является четной, взаимная спектральная плотность мощности в общем случае является комплексной:

$$S_{xy}(\omega) = \text{Re } S_{xy}(\omega) - j \text{Im } S_{xy}(\omega). \quad (6.67)$$

Отсюда очевидно, что

$$S_{yx}(\omega) = \text{Re } S_{xy}(\omega) + j \text{Im } S_{xy}(\omega). \quad (6.68)$$

Воспользовавшись соотношениями (6.67)-(6.68), получим:

$$C_{xy}(\omega) = 2 \operatorname{Re} S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)] \cos \omega \tau \, d\tau, \quad (6.69)$$

а

$$Q_{xy}(\omega) = 2 \operatorname{Im} S_{xy}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau)] \sin \omega \tau \, d\tau. \quad (6.70)$$

Функция  $C_{xy}(\omega)$  является четной, а  $Q_{xy}(\omega)$  - нечетной. Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получим:

$$K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} C_{xy}(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega; \quad (6.71)$$

$$K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} Q_{xy}(\omega) \sin \omega \tau \, d\omega. \quad (6.72)$$

Для стационарно связанных процессов часто вводят нормированную меру взаимной когерентности, являющуюся функцией частоты [60]:

$$\operatorname{Coh}_{xy}(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)}. \quad (6.73)$$

Эта функция равна 0 для независимых процессов, 1 для линейно связанных процессов и находится в пределах от 0 до 1 во всех прочих случаях.

Знание спектральной плотности мощности позволяет решать самые разные прикладные задачи в различных предметных областях:

- выделение полезного сигнала на фоне шумов;
- идентификации объектов и т.д.

Представив модель взаимной корреляционной функции в виде

$$K_{axy}(\tau) = K_{ax}(\tau - \tau_m), \quad (6.74)$$

определим взаимную спектральную плотность мощности

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ax}(\tau - \tau_m) e^{-j\omega\tau} \, d\omega = \exp(-j\omega\tau_m) S_x(\omega). \quad (6.75)$$

Воспользовавшись выражением (6.75) и результатами, представленными в таблице 6.8, можно определить аналитические выражения взаимной спектральной плотности мощности для типовых моделей корреляционных функций.

Из выражения (6.75) видно, что

$$\operatorname{Re} S_{axy}(\omega) = \cos \omega \tau_m S_x(\omega), \quad (6.76)$$

а

$$\operatorname{Im} S_{axy}(\omega) = -\sin \omega \tau_m S_x(\omega). \quad (6.77)$$

Если аналитическую модель взаимной корреляционной функции представить в общем виде

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m1} \beta_{k,p} 1(\tau - \tau_m) L_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_k^{m2} \beta_{k,l} 1(\tau_m - \tau) L_k(\tau_m - \tau, \alpha_2), \quad (6.78)$$

то аналитическое выражение взаимной спектральной плотности мощности с учётом (6.65) и свойств ортогональных функций Лагерра примет вид:

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{\pi} \left[ \frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k \beta_{k,\pi} \exp[-j(2k+1)\varphi_1] + \right. \\ \left. + \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k \beta_{k,\lambda} \exp[j(2k+1)\varphi_2] \right], \quad (6.79)$$

где  $\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\alpha_1}$ ,  $\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\alpha_2}$ .

С учётом (6.79), выражения для оценки действительной и мнимой частей взаимной спектральной плотности мощности примут вид:

$$\operatorname{Re}S_{axy}(j\omega) = \frac{\cos\omega\tau_m}{\pi} \left[ \frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k \beta_{k,\pi} \cos(2k+1)\varphi_1 + \right. \\ \left. + \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k \beta_{k,\lambda} \cos(2k+1)\varphi_2 \right] - \frac{\sin\omega\tau_m}{\pi} \left[ \frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k \beta_{k,\pi} \sin(2k+1)\varphi_1 - \right. \\ \left. - \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k \beta_{k,\lambda} \sin(2k+1)\varphi_2 \right]; \quad (6.80)$$

$$\operatorname{Im}S_{axy}(j\omega) = \frac{\cos\omega\tau_m}{\pi} \left[ \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k \beta_{k,\lambda} \cos(2k+1)\varphi_2 - \right. \\ \left. - \frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k \beta_{k,\pi} \cos(2k+1)\varphi_1 \right] - \frac{\sin\omega\tau_m}{\pi} \left[ \frac{\cos\varphi_1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{m1} (-1)^k \beta_{k,\pi} \cos(2k+1)\varphi_1 + \right. \\ \left. + \frac{\cos\varphi_2}{\alpha_2} \sum_{k=0}^{m2} (-1)^k \beta_{k,\lambda} \cos(2k+1)\varphi_2 \right]. \quad (6.81)$$

С целью упрощения модели взаимной корреляционной функции, представим её в виде:

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_{k,\pi} l(\tau - \tau_m) L_k(\tau - \tau_m, \alpha) + \sum_k \beta_{k,\lambda} l(\tau_m - \tau) L_k(\tau_m - \tau, \alpha). \quad (6.82)$$

Тогда модель взаимной спектральной плотности мощности будет равна:

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{\pi} \left[ \frac{\cos\varphi}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_{k,\pi} \exp[-j(2k+1)\varphi] + \right. \\ \left. + \frac{\cos\varphi_2}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_{k,\lambda} \exp[j(2k+1)\varphi] \right]. \quad (6.83)$$

С учётом (6.83), выражения для оценки вещественной и мнимой частей взаимной спектральной плотности мощности примут вид:

$$\operatorname{Re}S_{axy}(j\omega) = \frac{\cos\varphi}{\alpha\pi} \left[ \cos\omega\tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,\pi} + \beta_{k,\lambda}) \cos(2k+1)\varphi - \right. \\ \left. - \sin\omega\tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,\pi} - \beta_{k,\lambda}) \sin(2k+1)\varphi \right]; \quad (6.84)$$

$$\operatorname{Im} S_{axy}(j\omega) = \frac{\cos \varphi}{\alpha \pi} \left[ \cos \omega \tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,l} - \beta_{k,n}) \cos(2k+1)\varphi - \right. \\ \left. - \sin \omega \tau_m \sum_{k=0}^m (-1)^k (\beta_{k,n} - \beta_{k,l}) \sin(2k+1)\varphi \right]. \quad (6.85)$$

В [13] разработана структурная схема спектрального анализатора с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра, представленная на рис. 6.16.

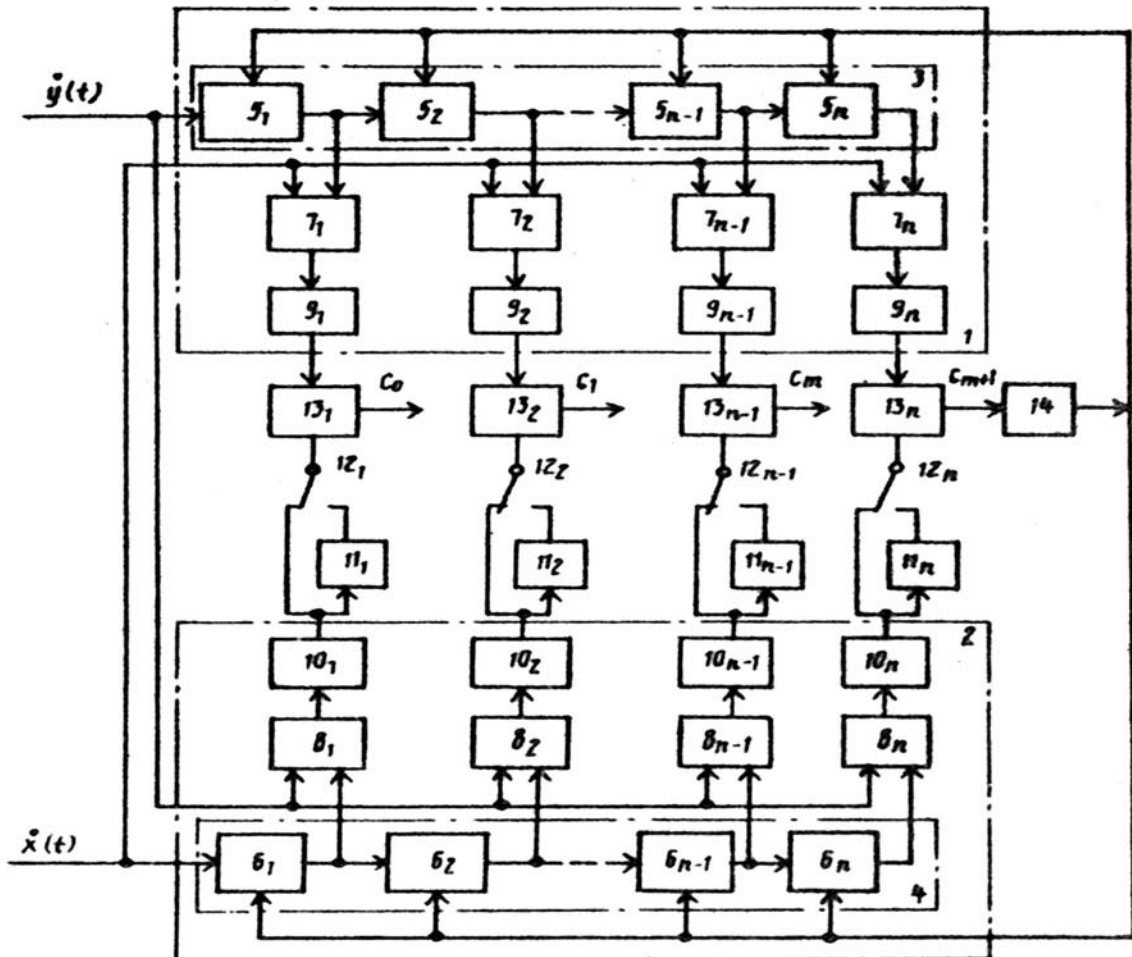


Рисунок 6.16. Спектральный анализатор взаимной спектральной плотности мощности в ортогональном базисе Лагерра

Анализатор содержит два канала измерения 1 и 2, каждый из которых содержит по одному многорезонансному управляемому фильтру Лагерра 3, 4, состоящему из последовательно соединенных ячеек  $5_1-5_n$  и  $6_1-6_n$  соответственно. Выход каждой ячейки  $5_k$ ,  $6_k$  последовательно подключен к соответствующим блокам умножения  $7_k$ ,  $8_k$  и блокам усреднения  $9_k$ ,  $10_k$ . Кроме того, устройство содержит фазоинверторы  $11_k$ , переключатели  $12_k$ , сумматоры 13, а также блок управления 14.

Анализатор работает следующим образом.

С выходов сумматоров  $13_k$  снимаются сигналы, пропорциональные коэффициентам разложения вещественно составляющей  $c_{1k}$  и мнимой составляющей  $c_{2k}$  взаимной спектральной плотности, причём коэффициенты  $c_{1k}$  получаются при переключении переключателей  $12_k$  в одно положение, а коэффициенты  $c_{2k}$  - при пере-



ключении в другое положение. В качестве оценок вещественной и мнимой составляющих взаимной спектральной плотности используются модели вида

$$\operatorname{Re} S_{axy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m c_{1k} \operatorname{Re} W_k(j\omega); \quad (6.86)$$

$$\operatorname{Im} S_{axy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m c_{2k} \operatorname{Re} W_k(j\omega), \quad (6.87)$$

где  $W_k(j\omega)$  – частотная характеристика фильтра Лагерра  $k$ -го порядка.

Модель же взаимной спектральной плотности запишется в виде (6.67).

При подаче на входы устройства двух стационарно-связанных случайных процессов  $\overset{\circ}{x}(t)$  и  $\overset{\circ}{y}(t)$  на выходах сумматоров  $13_k$ , если переключатели  $12_k$  установлены в одно положение, будут устанавливаться сигналы, определяемые в соответствии со следующим выражением:

$$c_{1k} = \beta_{1k} + \beta_{2k} = \alpha \int_0^{\infty} K_{xy}(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau + \alpha \int_0^{\infty} K_{yx}(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (6.88)$$

где  $\beta_{1k}$  и  $\beta_{2k}$  – выходные сигналы  $k$ -го блока усреднения соответственно первого и второго каналов.

Если переключатели  $12_k$  установлены в другое положение, то

$$c_{2k} = \beta_{1k} - \beta_{2k} = \alpha \int_0^{\infty} K_{xy}(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau - \alpha \int_0^{\infty} K_{yx}(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (6.89)$$

Блок управления 14 и в том, и в другом случае изменяет параметр  $\alpha$  фильтров Лагерра до обнуления сигналов на выходе последнего сумматора  $13_n$ , т.е. при этом обеспечивается выполнение условия:

$$c_{1,m+1} = 0; \quad (6.90)$$

$$c_{2,m+1} = 0. \quad (6.91)$$

Коэффициенты  $c_{1k}$  и  $c_{2k}$ , полученные при значении параметра фильтров Лагерра, обеспечивающем выполнение условий (6.90) и (6.91) принимаются в качестве параметров выбранных моделей (6.86) и (6.87).

Если модель взаимной корреляционной функции выбрана в базисе ортогональных функций Лагерра в виде

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_{1k} L_k(\tau, \alpha) l(\tau) + \sum_{k=0}^m \beta_{2k} L_k(-\tau, \alpha) l(-\tau), \quad (6.92)$$

то модель взаимной спектральной плотности, определенная в соответствии с выражением (6.65) будет иметь вид:

$$S_{axy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \beta_{1k} W_k(j\omega) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \beta_{2k} W_k(-j\omega). \quad (6.93)$$

Запишем это выражение с учётом (6.65), выделив вещественную и мнимую части:

$$\begin{aligned}
S_{axy}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m (\beta_{1k} + \beta_{2k}) \operatorname{Re} W_k(j\omega) - j \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m (\beta_{1k} - \beta_{2k}) \operatorname{Im} W_k(j\omega) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m c_{1k} \operatorname{Re} W_k(j\omega) - j \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m c_{2k} \operatorname{Im} W_k(j\omega).
\end{aligned} \tag{6.94}$$

Можно показать, что выбором параметра  $\alpha$  фильтров Лагерра в соответствии с условием (6.90) обеспечивается минимум квадратической погрешности аппроксимации вещественной составляющей взаимной спектральной плотности мощности моделью (6.86)

$$\Delta_B = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{Re} S_{xy}(\omega) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m c_{1k} \operatorname{Re} W_k(j\omega) \right]^2 d\omega, \tag{6.95}$$

а выбор параметров в соответствии с условием (6.91) обеспечивает минимум квадратической погрешности аппроксимации мнимой составляющей взаимной спектральной плотности мощности моделью (6.87):

$$\Delta_M = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{Im} S_{xy}(\omega) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m c_{2k} \operatorname{Im} W_k(j\omega) \right]^2 d\omega. \tag{6.96}$$

В самом деле, выражение (6.95) с учётом равенства (6.88) может быть преобразовано к виду

$$\Delta_B = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}^2 S_{xy}(\omega) d\omega - \frac{1}{4\pi\alpha} \sum_{k=0}^m c_{1k}^2. \tag{6.97}$$

В этом случае условие минимума погрешности (6.97) по параметру  $\alpha$  имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \Delta_B}{\partial \alpha} = \frac{1}{4\pi\alpha^2} \sum_{k=0}^m c_{1k}^2 - \frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{k=0}^m c_k \frac{\partial c_{1k}}{\partial \alpha} = 0. \tag{6.98}$$

С учётом свойств ортогональных функций Лагерра

$$\frac{\partial c_k}{\partial \alpha} = \frac{1}{2\alpha} [c_k - kc_{k-1} + (k+1)c_k + 1]. \tag{6.99}$$

Подставляя последнее выражение в формулу (6.98), после преобразований получим:

$$\frac{\partial \Delta_B}{\partial \alpha} = -\frac{m+1}{4\pi\alpha^2} c_{1m} c_{1,m+1}. \tag{6.100}$$

Так как  $\frac{m+1}{4\pi\alpha^2} \neq 0$ ,  $c_{1m} \neq 0$ , то условие (6.98) может быть выполнено при выполнении условия (6.90), т.е. при обнулении сигнала на выходе последнего сумматора.

Условие (6.91) выполняется аналогично, что позволит обеспечить минимум погрешности  $\Delta_M$ .

### 6.3. Оценка обобщенных спектральных характеристик

К обобщенным спектральным характеристикам, широко применяемым в приложениях, относятся: эквивалентная ширина спектра мощности, частота, соответствующая максимуму спектральной плотности мощности, значение максимума и т.д.

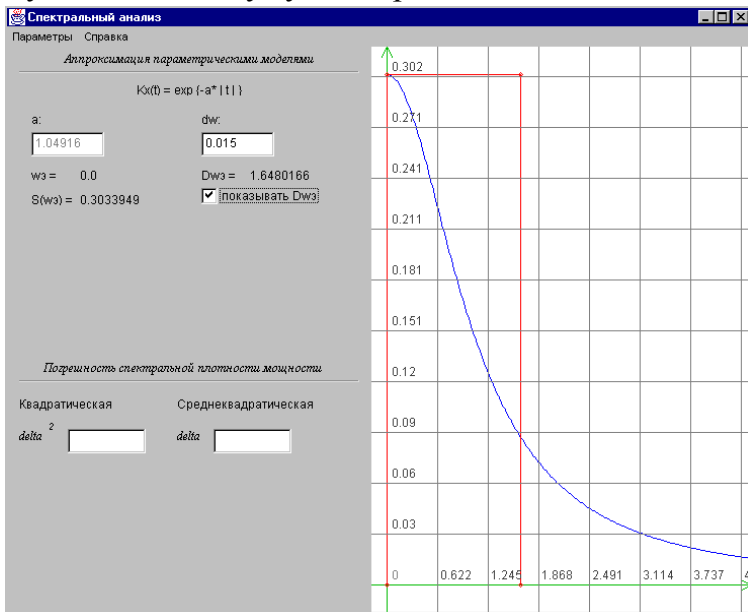


Рисунок 6.17. Эквивалентная ширина спектра широкополосного процесса

Если основная мощность процесса сосредоточена вблизи экстремальной частоты спектральной плотности мощности  $\omega_3$  (рис. 6.18), а не в нуле, выражение для оценки эквивалентной ширины примет вид:

$$\Delta\omega'_3 = \omega_3 + \Delta\omega_3 / 2. (6.102)$$

В приложении 15 приведены выражения эквивалентной ширины спектра мощности случайных процессов для типовых моделей.

Воспользовавшись понятием  $\Delta\omega_3$ , можно получить аналитическое выражение оценки сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы, без знания конкретного аналитического выражения спектральной плотности мощности. Дисперсия выходного сигнала линейной динамической системы равна:

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \leq 2S_x(\omega)_{\max} \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega \leq \frac{\sigma_x^2 \Delta\omega_c}{\Delta\omega_3} |W(j\omega)|_{\max}^2, (6.103)$$

Знание спектральной плотности мощности позволяет определить полосу частот, где сосредоточена основная мощность процесса. Эта характеристика называется **эквивалентной шириной спектра мощности случайного процесса** -  $\Delta\omega_3$ . Существуют различные способы определения  $\Delta\omega_3$ , приведенные, например, в [82].

Наиболее часто для процессов, у которых спектральная плотность мощности сосредоточена вблизи нулевой частоты (рис. 6.17),  $\Delta\omega_3$  определяют в виде:

$$\Delta\omega_3 = \frac{\sigma_x^2}{2S_x(\omega)_{\max}}. (6.101)$$

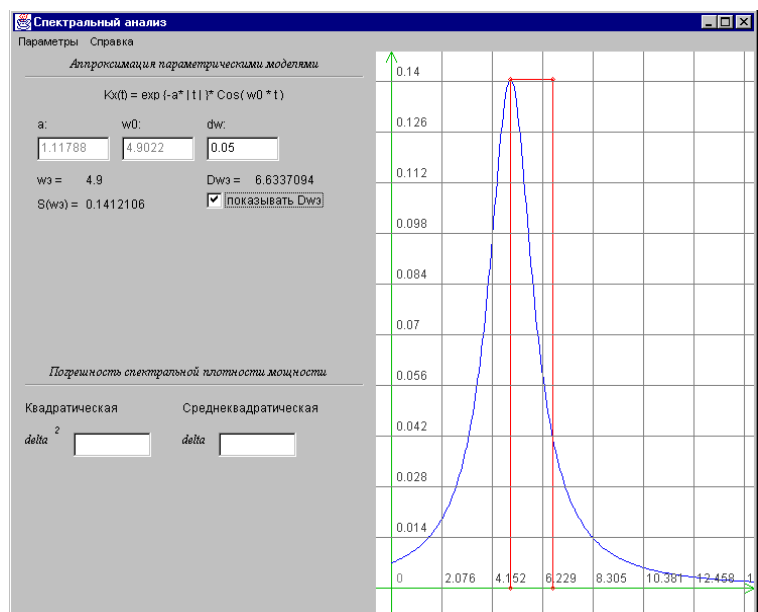


Рисунок 6.18. Эквивалентная ширина спектра узкополосного процесса

где  $\Delta\omega_c = \frac{\int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega}{|W(j\omega)|_{\max}^2}$  - полоса пропускания линейной динамической системы.

Из выражения (1.103) видно, что дисперсия выходного сигнала, независимо от вида спектральной плотности мощности случайного процесса, пропорциональна отношению эквивалентной полосы пропускания линейной динамической системы к эквивалентной ширине спектра мощности случайного процесса.

Исследования показали, что

$$\begin{cases} \Delta\omega_s \tau_k^{(2)} = \pi / 2; \\ \Delta\omega_c \tau_{и}^{(2)} = \pi / 2, \end{cases} \quad (6.104)$$

где  $\tau_{и}^{(2)} = \frac{\int_0^{\infty} h(\tau) d\tau}{h(\tau)_{\max}}$  - длительность импульсной характеристики линейной динамической системы.

Эти выражения называются **соотношениями неопределённости** для сигнала и для системы.

Воспользовавшись соотношениями неопределённости, выражение (6.103) преобразуем к виду:

$$D_y \leq \sigma_x^2 |W(j\omega)|_{\max}^2 \frac{\tau_k^{(2)}}{\tau_{и}^{(2)}}. \quad (6.105)$$

Отсюда видно, что дисперсия выходного процесса линейной динамической системы, независимо от вида спектральной плотности мощности, не превышает величины, пропорциональной отношению интервала корреляции к длительности импульсной характеристики.

Таким образом, возможна оценка сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы с использованием обобщенных характеристик, определенных как во временной, так и в частотных областях. Это обстоятельство значительно упрощает теоретические исследования и позволяет определить требования к системе, гарантирующие обеспечение допустимых погрешностей.

Понятие эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса позволяет разбить случайные процессы на два класса: узкополосные и широкополосные.

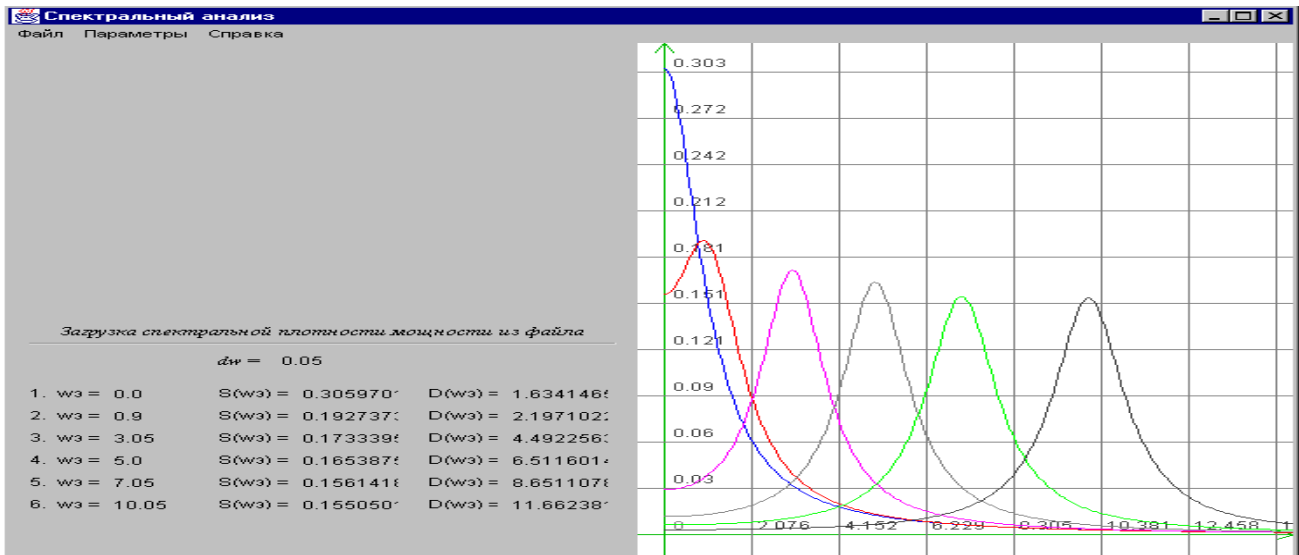
**Узкополосным случайным процессом** называется процесс, основная мощность которого сосредоточена вблизи какой-либо частоты  $\omega_0$ . Условие узкополосности записывается в виде:  $\Delta\omega_s / 2 \ll \omega_0$ .

Процессы, не удовлетворяющие этому условию, называются **широкополосными**.

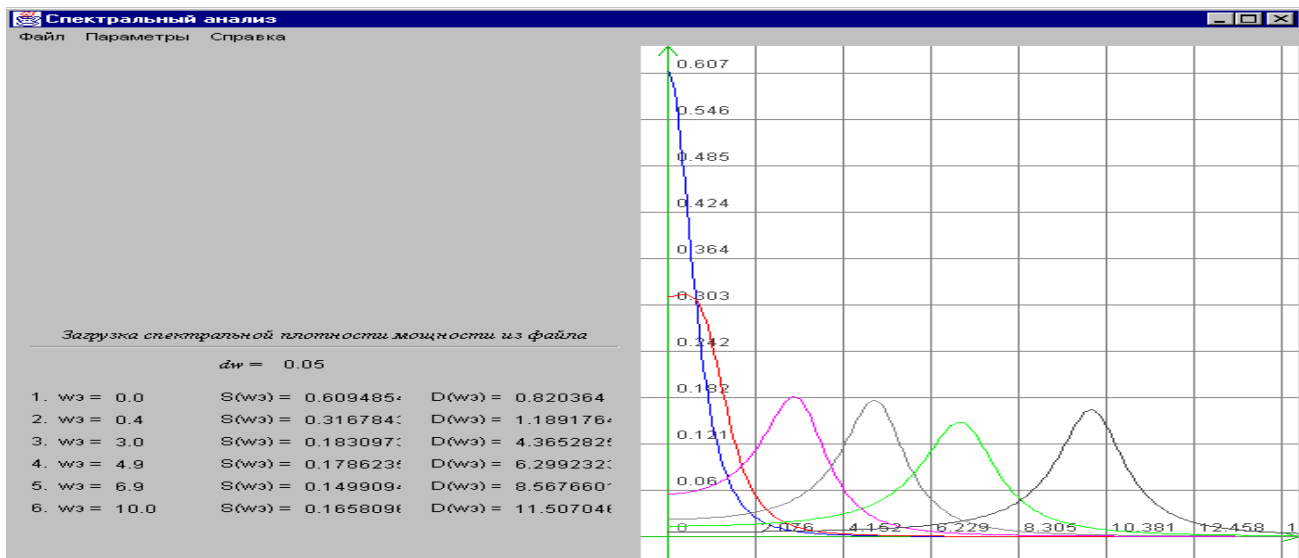
К узкополосным процессам относятся процессы, имеющие колебательную корреляционную функцию с показателем колебательности  $\mu > 5$  (см. таблицу 6.8, модели 4-7).

К широкополосным процессам относятся все модели, представленные в таблице 6.8, причем, для моделей 4-7  $\mu < 5$ .

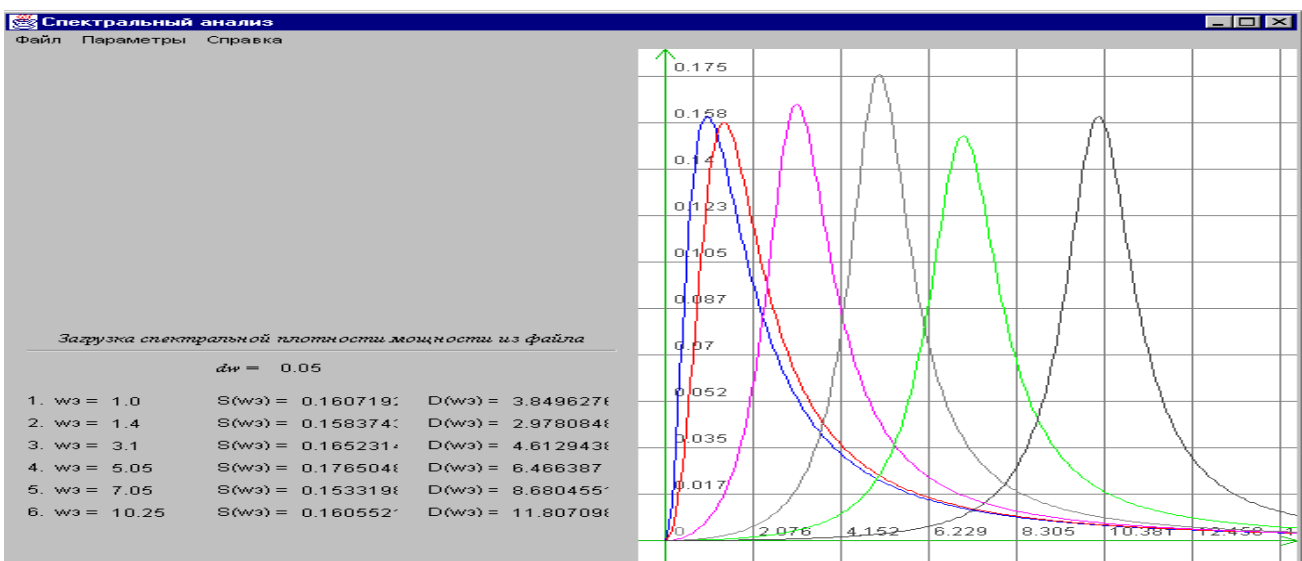
Спектральные плотности мощности колебательных моделей представлены на рис. 6.19.



а)  $\rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)\cos\omega_0\tau, \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$



а)  $\rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)(\cos\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \sin\omega_0|\tau|), \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$



а)  $\rho_x(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)(\cos\omega_0\tau - \alpha/\omega_0 \sin\omega_0|\tau|), \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$

Рисунок 6.19. Спектральные плотности мощности колебательных моделей

При решении ряда прикладных задач возникает необходимость оценки частоты, соответствующей максимуму спектральной плотности мощности  $\omega_3$ . Её можно определить в результате решения уравнения:

$$S'_x(\omega) = 0. \quad (6.106)$$

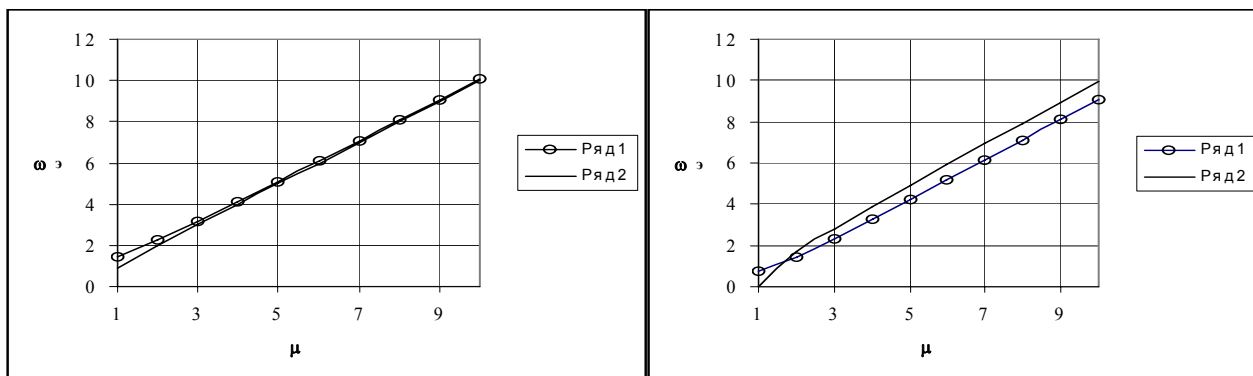
Результаты решения этого уравнения и  $S_x(\omega_3)$ , в виду громоздкости таблицы, представлены в приложении П.15.

Следует отметить, что, при аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра, значение параметра  $\alpha/2$ , определенного в результате решения уравнения (3.48) (ряд 1), близко к значению экстремальной частоты  $\omega_3$  (ряд 2). Результаты представлены в таблице 6.9 и на рис. 6.20.

Значения параметра функций Лагерра и частоты, соответствующей максимуму спектральной плотности мощности

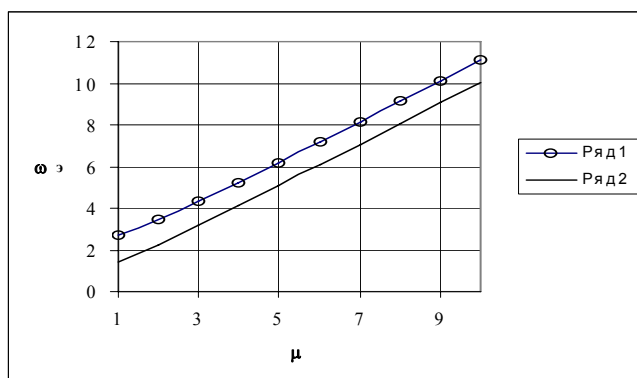
Таблица 6.9

№	$\rho_x(\tau)$	$\alpha/2$	$\omega_3$
1	$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$	$\sqrt{2\omega_0 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} - (\lambda^2 + \omega_0^2)}$
2	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} - \lambda)$	$\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$
3	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} + \lambda)$	$\sqrt{\omega_0^2 + \lambda^2}$



а)

б)



в)

Рисунок 6. 20. Значение параметра функций Лагерра и частоты, соответствующей максимуму спектральной плотности мощности

## 7. АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ АППРОКСИМАТИВНОГО КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

### 7.1. Аппроксимативный анализ авто корреляционно-спектральных характеристик

Для проведения аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа под руководством автора была разработана автоматизированная система [38, 73, 83, 109], структурная схема которой представлена на рис.7.1.

Автоматизированная система состоит из следующих подсистем:

- задания входных воздействий;
- генерирования неэквидистантных временных рядов (НВР);
- первичной и вторичной статистической обработки;
- идентификации КФ;
- аппроксимативного корреляционного анализа;
- аппроксимативного спектрального анализа.

Рассмотрим функции каждой подсистемы в отдельности.

**Подсистема задания входных воздействий** состоит из двух частей: генерирования псевдослучайной последовательности (ПСП) с заданным видом КФ [2] и ввода данных из файла.

Данные, получаемые в первой подсистеме, поступают на вход подсистемы генерирования НВР, а также на вход подсистемы первичной статистической обработки. В обоих случаях передается объем выборки  $M$ , интервал дискретизации  $\Delta t_0$  и массив отсчетов СП.

**Подсистема генерирования НВР** включает в себя следующие способы получения НВР:  $p$ -преобразование, адаптивно-временная дискретизация, дискретизация с «дрожанием» и их комбинации [3]. А на выход поступают два массива: массив времен (меток времени) и массив соответствующих им отсчетов СП, а также объем выборки  $N$  и интервал дискретизации  $\Delta t_0$ .

**Подсистема первичной статистической обработки** включает в себя оценку числовых характеристик, центрирование и нормирование СП и оценку КФ. В данную подсистему передаются массивы меток времени и соответствующих им отсчетов СП, объем выборки  $N$  и интервал дискретизации  $\Delta t_0$ . При регулярной дискретизации оценка КФ производится с помощью мультипликативного алгоритма, а при обработке НВР - с помощью интервальной корреляционной функции (ИКФ) [3]. Выходными данными данной подсистемы являются количество отсчетов КФ, интервал дискретизации  $\Delta t_0$  и массив отсчетов КФ. Эти данные поступают на входы подсистем идентификации КФ и аппроксимации КФ.

**Подсистема идентификации КФ** состоит из двух частей: построения и анализа фазовых портретов и проверки качества идентификации. Данные в эту подсистему поступают из подсистемы первичной статистической обработки.

Используя переданные значения отсчетов КФ, в данной подсистеме производится построение фазового портрета данной КФ, а затем его последовательное сравнение с фазовыми портретами типовых КФ, используемых в системе. На основании результатов сравнения выбирается одна из типовых моделей КФ, при помощи которой в следующей подсистеме производится аппроксимация исходной КФ. Проверка качества идентификации производится на основании расчета квадратической погрешности фазового портрета.

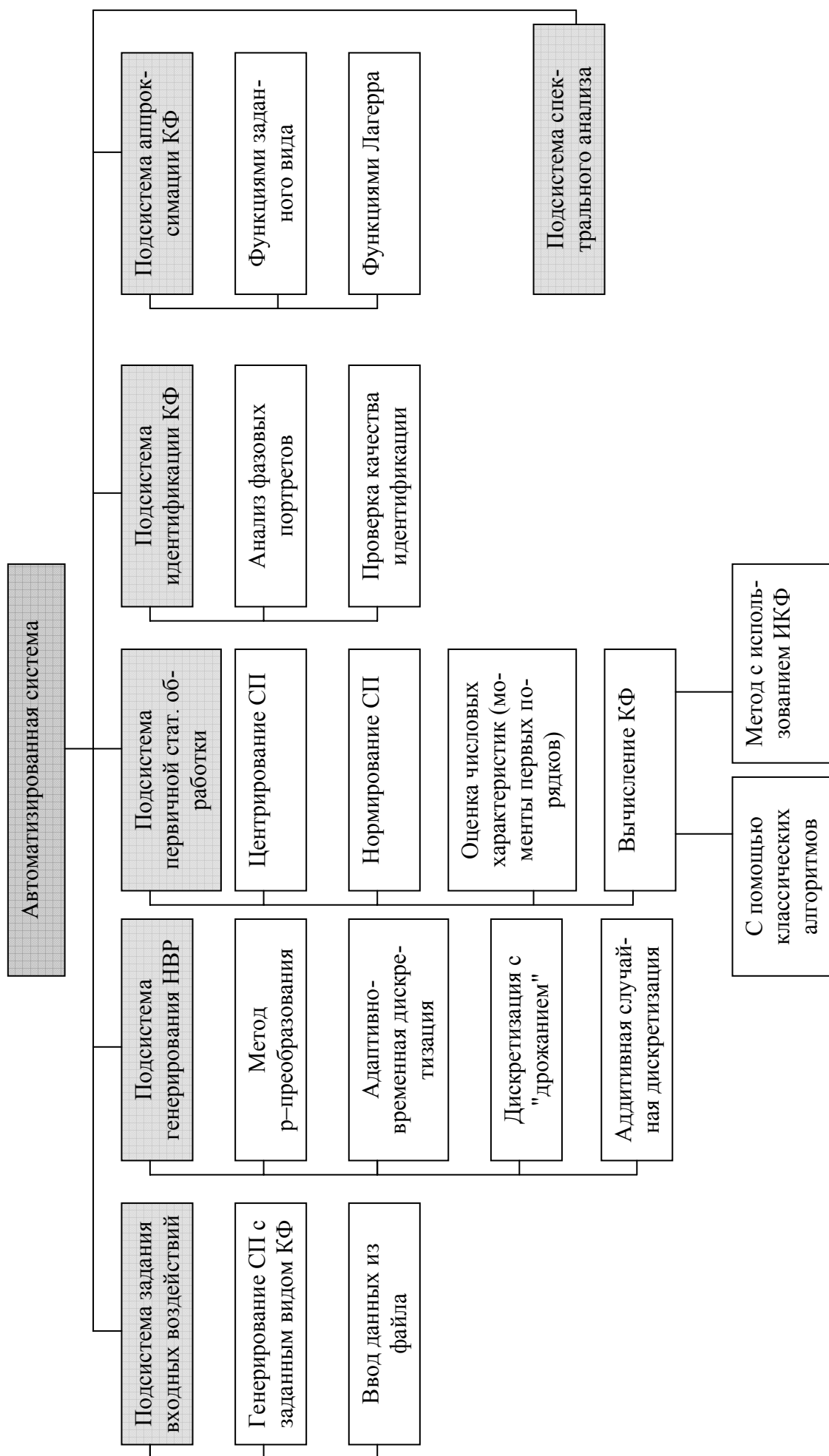


Рисунок 7.1. Структура автоматизированной системы



**Подсистема аппроксимативного анализа** состоит из двух частей: аппроксимация КФ функциями заданного вида и функциями Лагерра с возможностью построения спектральной плотности мощности по параметрам модели.

На вход подсистемы аппроксимативного анализа поступают отсчеты КФ и вид аппроксимирующей функции (для случая аппроксимации функциями заданного вида) или количество членов разложения (при аппроксимации функциями Лагерра).

Используя переданные значения, в данной подсистеме вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующих выражений и среднеквадратическая погрешность аппроксимации. Затем, по желанию исследователя, возможно построение спектральной плотности мощности по параметрам модели.

Благодаря такому блочному построению структуры программы в систему можно добавлять новые возможности, не видоизменяя ее принципиально. Схема алгоритма приведена в приложении П.16.

**Программные требования системы:** Microsoft Windows'98-2000; необходимые библиотеки поддержки Java.

**Аппаратные требования системы:** Процессор Pentium-166-MMX и выше; ОЗУ 32Мб; свободное место на диске 50Мб, разрешение монитора 1024×768 точек.

## Программная реализация

### Начало работы

При запуске программы на экране появляется форма, изображенная на рис. 7.2. В первую очередь следует выбрать тип дискретизации СП (регулярная или нерегулярная) и нажать кнопку «Новая модель» для генерирования случайного процесса. Или же нажать кнопку «Загрузить КФ из файла» и выбрать нужный файл с данными.



Рисунок 7.2. Вид формы начала работы в системе

## Генерирование СП с заданным видом КФ

На рис.7.3 можно увидеть вид формы генерирования СП с заданным видом КФ при регулярной дискретизации.

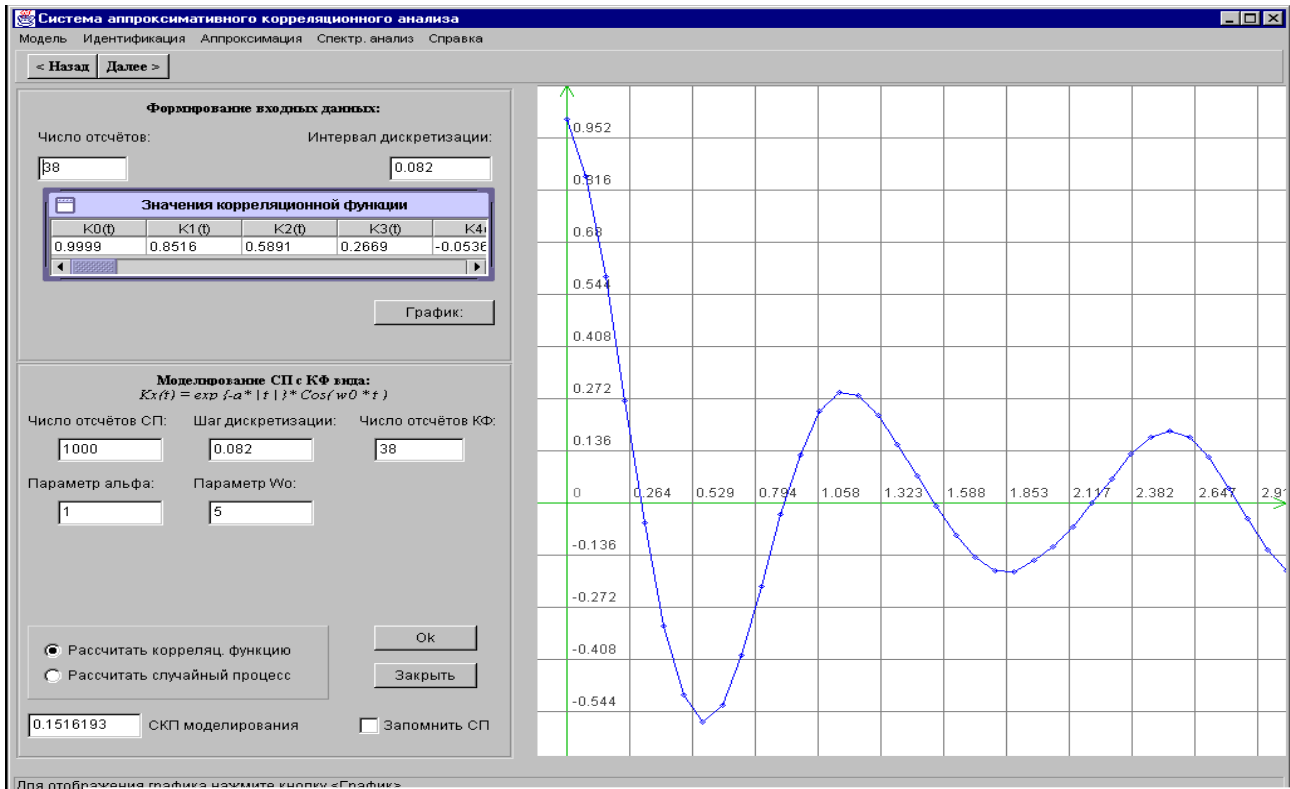


Рисунок 7.3. Вид формы генерирования СП с заданным видом КФ

Данная форма появляется на экране после того, как пользователь выберет регулярную дискретизацию в форме начала работы в системе.

Основными элементами формы расчета КФ при регулярной дискретизации СП являются:

- панель главного меню,
- кнопки движения по программе,
- панель данных,
- панель задания параметров моделируемого СП,
- панель графиков функций.

Перечислим функции, которые выполняют нижеследующие пункты главного меню:

**Модель** – выбор вида КФ моделируемого СП (один из шести), работа с файлами (запись в файл и открытие файла), завершение работы с программой;

**Идентификация** – выбор способа идентификации (автоматическая – позволяет строить фазовые портреты КФ и на основании их схожести с фазовыми портретами стандартных КФ выбирать вид аппроксимирующей модели, аналитическая – позволяет выбирать вид КФ на основании визуальных представлений стандартных КФ);

**Аппроксимация** – выбор способа аппроксимации (функциями заданного вида – при схожести исследуемой КФ с одним из стандартных ее видов, функциями Лагерра – в случае, если КФ не похожа ни на один из предложенных ее видов);

**Справка** – предоставление справки о программе.

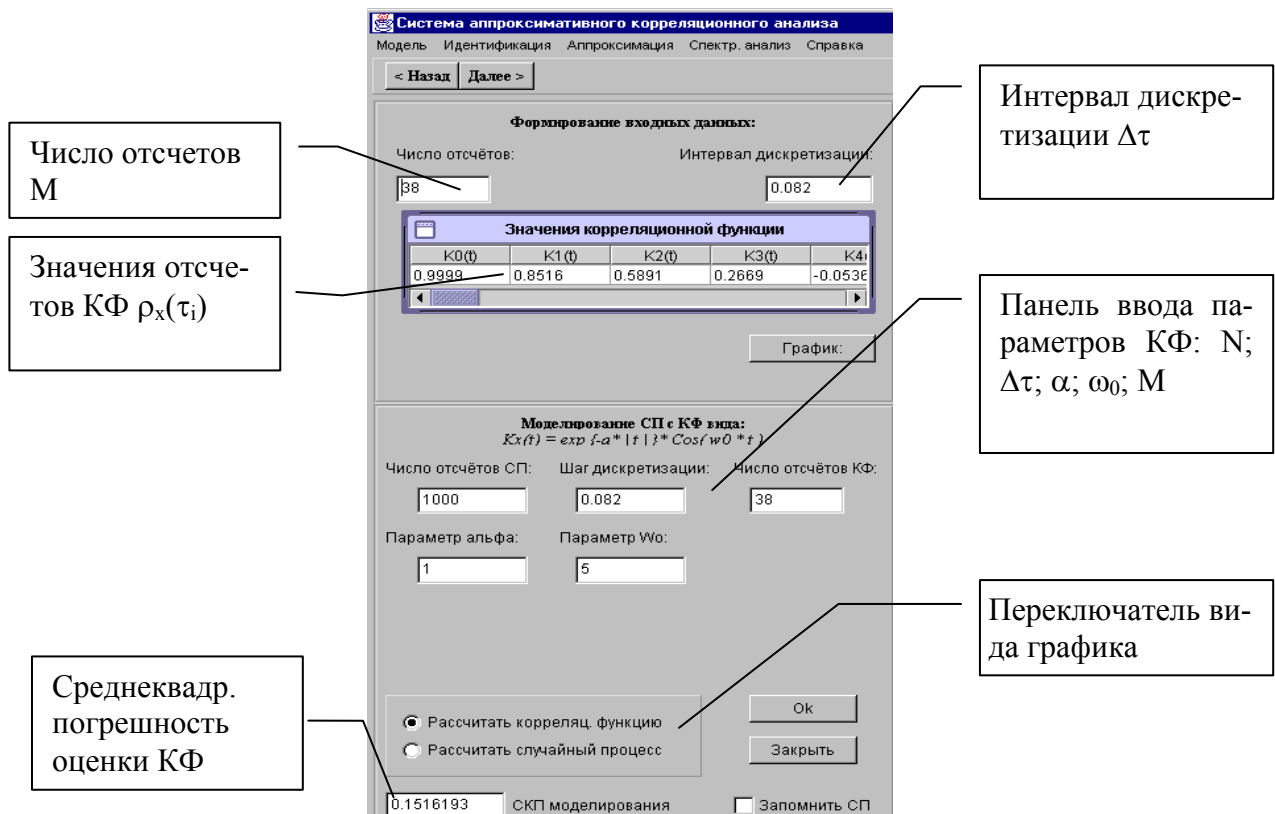


Рисунок 7.4. Описание основной формы

Кнопки движения по программе играют роль «гида», то есть позволяют пользователю, не знакомому с программой, двигаться в нужном направлении, которое соответствует последовательности действий, приведенных в схеме алгоритма (см. приложение П.16).

Панель данных предназначена для ввода и хранения отсчетов СП или отсчетов КФ (в зависимости от того, в каком положении находится переключатель вида графика). Отсчеты КФ (или СП) хранятся в таблице на панели данных (см. рис. 7.4). Данные в эту таблицу заносятся автоматически после того, как выбран вид КФ и смоделирован СП. В этом случае график КФ (или СП) строится автоматически. При желании пользователь может вручную задать значения отсчетов, тогда ему придется нажать на кнопку «График» для того, чтобы отобразить график функции, построенный по введенным отсчетам.

На панели задания параметров моделируемого СП находятся поля ввода следующих параметров:

- число отсчетов СП,
- шаг дискретизации,
- число отсчетов КФ,
- параметр  $\alpha$ ,
- параметр  $\omega_0$ .

Для корректного расчета шага дискретизации и минимального числа отсчетов КФ необходимо щелкнуть по панели задания параметров правой клавишей «мыши» и после появления всплывающего меню выбрать нужную погрешность моделирования, после чего вышеуказанные параметры автоматически будут пересчитаны для конкретного случая.

Итак, для начала работы в данной форме необходимо выбрать в пункте меню «Модель» (подменю «Моделировать СП с КФ заданного вида:») нужный вид СП.

Затем, задав необходимые параметры модели и скорректировав шаг дискретизации и число отсчетов КФ, моделировать СП. Для этого нужно нажать кнопку «ОК».

После окончания моделирования на панели графиков появится изображение СП или соответствующей ему КФ, в таблице на панели данных будут занесены отсчеты СП (или КФ), а в поле вывода погрешности занесется среднеквадратическая погрешность моделирования.

### Генерирование НВР с заданным видом КФ

Общий вид формы генерирования неэквидистантных временных рядов (НВР) с заданным видом КФ дан на рис. 7.5. Данная форма появляется на экране после того, как пользователь выберет нерегулярную дискретизацию в форме начала работы системы.

Для начала работы в данной форме необходимо сначала выбрать вид КФ моделируемого СП (пункт меню «**Модель**»). Задать параметры модели ( $\alpha$ ,  $\omega_0$ ), число отсчетов СП, интервал дискретизации и число отсчетов КФ. Далее выбрать модель и параметры нерегулярной дискретизации, например, значение вероятности  $p$  – преобразования. После данных приготовлений следует нажать кнопку «ОК» для моделирования СП с заданным видом КФ.

### Идентификация вида КФ

Форму для идентификации КФ можно вызвать из пункта «**Идентификация**» – «**Автоматически**» главного меню любой из основных форм. Общий вид формы идентификации КФ на основе анализа фазовых портретов представлен на рис. 7.19. Для идентификации КФ, необходимо сравнивать саму КФ (в простейшем случае) с шестью основными видами КФ, приведенными в списке, и ее фазовый портрет с типовыми фазовыми портретами. При выборе одной из КФ списка (щелчком мыши), появляется ее схематическое изображение. Затем, после нажатия кнопки «**Построить фазовый портрет:**», в области построения отобразятся портреты исходной (экспериментальной) и выбранной из списка (теоретической) КФ, **синим** и **красным** цветами соответственно. В поле «**Погрешность**» отобразится квадратическая погрешность сравнения фазовых портретов.

Определив примерный вид КФ, можно провести его уточнение. Задавая параметры  $\alpha$  и  $\omega_0$  для теоретической модели КФ в полях «**a:**» и «**w0:**», можно подобрать их таким образом, чтобы квадратическая погрешность была минимальной. В этом случае будет определен не только вид экспериментальной КФ, но и ее параметры, что особенно важно при аппроксимации параметрическими моделями.

Если результаты идентификации удовлетворительны, и вид КФ определен однозначно, то, нажав кнопку «**Аппроксимировать**», мы перейдем в форму аппроксимации КФ параметрическими моделями, где будет производиться аппроксимация КФ моделью, выбранной при идентификации.

Отметим, что по найденным параметрам модели корреляционной функции можно более точно построить теоретический фазовый портрет. Это, в свою очередь, даст возможность наглядно убедиться в качестве аппроксимации.

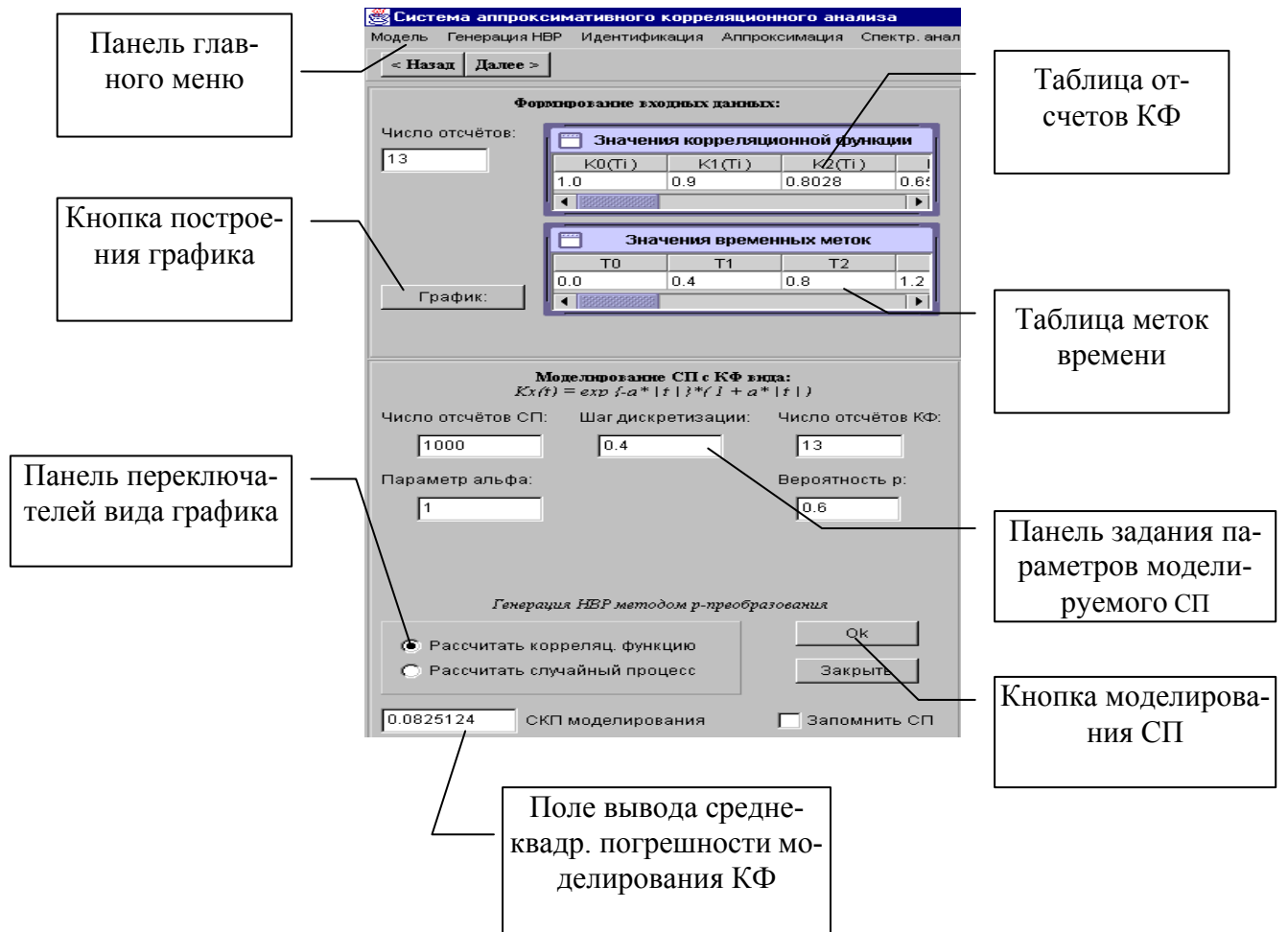
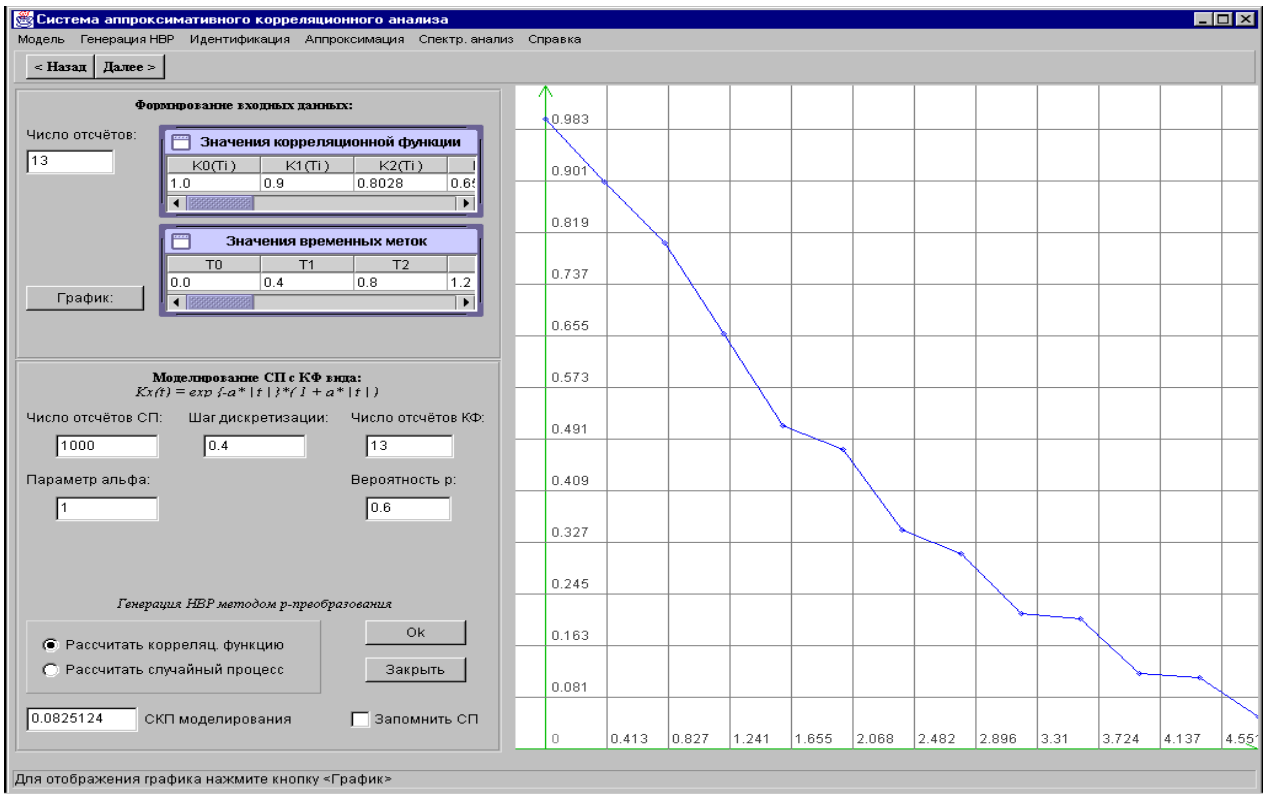


Рисунок 7.5. Вид формы генерирования НВР с заданным видом КФ



Рисунок 7.6. Окно идентификации КФ при помощи анализа фазовых портретов

В случае, если идентифицировать КФ не удалось, необходимо закрыть форму и производить аппроксимацию КФ ортогональными функциями Лагерра.

### Аппроксимация КФ функциями заданного вида

В том случае, когда вид КФ известен или его удалось идентифицировать, следует аппроксимировать КФ функциями заданного вида.

Форму для аппроксимации КФ функциями заданного вида можно вызвать из пункта «Аппроксимация» главного меню, а также нажатием кнопки «Аппроксимация» на панели идентификации КФ после выбора вида аппроксимирующей функции.

Общий вид формы аппроксимации КФ функциями заданного вида представлен на рис 7.7.

При работе в данной форме в первую очередь нужно задать вид аппроксимирующей функции при помощи переключателей на панели выбора вида аппроксимирующей модели (рис. 7.8). Затем рассчитать начальные приближения параметров модели автоматически или задать вручную. Для автоматического расчета начальных приближений необходимо нажать кнопку «Рассчитать» на панели управления ходом аппроксимации. В некоторых случаях, особенно при аппроксимации методом Ньютона, процесс может не сойтись из данных точек. В таком случае следует вручную подкорректировать начальные приближения в их полях ввода (рис.7.8).

Иногда эту процедуру приходится выполнять многократно.

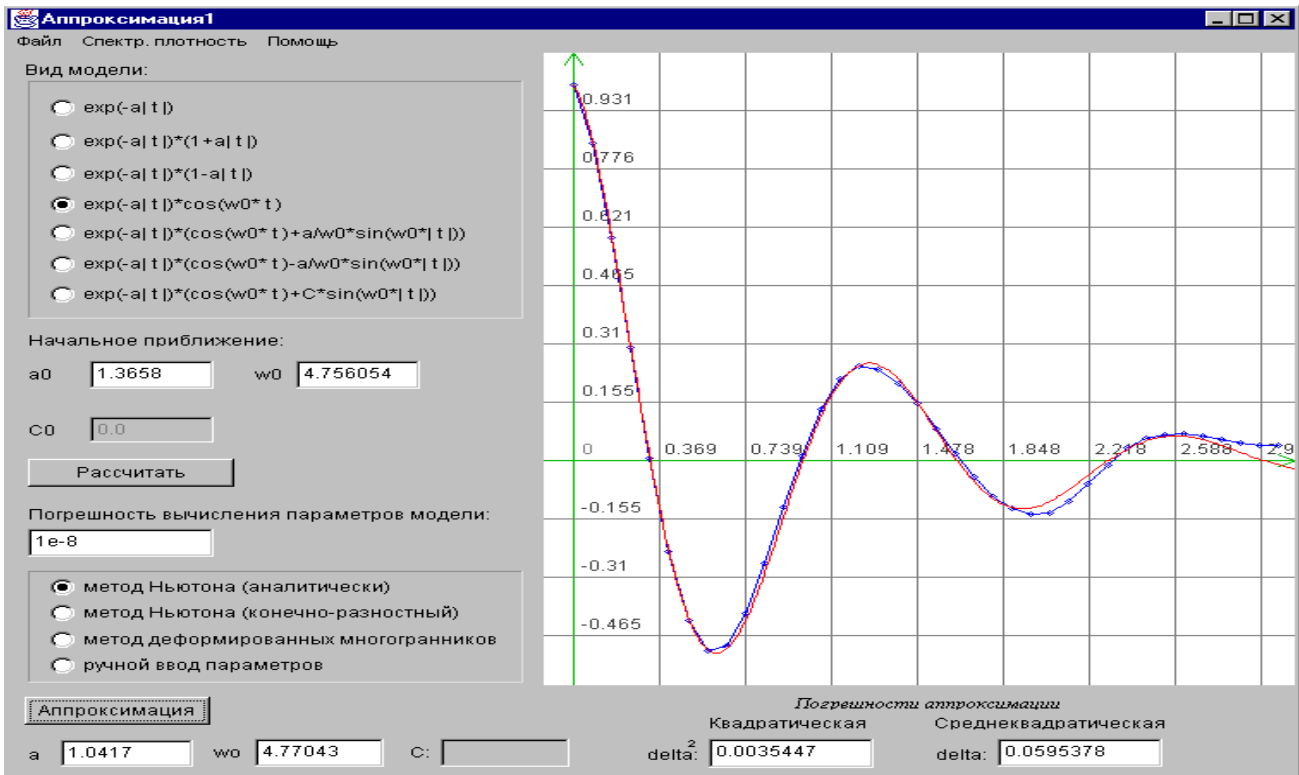


Рисунок 7.7 Вид формы аппроксимации КФ функциями заданного вида

Далее следует задать значение погрешности вычислений параметров модели (критерия сходимости) в соответствующем поле (рис. 7.8). Данное значение используется как критерий окончания вычислений при аппроксимации –  $\varepsilon$ .

После задания всех вышеуказанных числовых параметров следует выбрать метод аппроксимации на соответствующей панели. На панели выбора метода аппроксимации присутствуют следующие опции:

- метод Ньютона (аналитический),
- метод Ньютона (конечно-разностный),
- метод деформированного многогранника,
- ручной ввод параметров.

При выборе опции ручного ввода параметров после нажатия кнопки «**Аппроксимация**» происходит простой перенос значений полей ввода начальных приближений в поля вывода рассчитанных параметров и строится соответствующий график аппроксимирующей функции. Таким образом, предоставляется возможность пользователю самостоятельно подбирать значения параметров аппроксимирующего выражения.

При нажатии кнопки «**Аппроксимация**» (рис. 7.9 или 7.6) производится запуск алгоритма аппроксимации. В поля вывода рассчитанных параметров модели заносятся значения  $\alpha$  и  $\omega_0$ , которые были вычислены одним из методов. В поля вывода погрешности аппроксимации заносятся значения среднеквадратической и квадратической погрешности.

Отметим, что по «умолчанию» система выбирает метод деформированного многогранника, обладающий лучшей сходимостью. Выбрав в качестве начального приближения параметров найденные значения модели указанным методом, возможно дальнейшее уточнение параметров модели. Для этого необходимо воспользоваться одним из методов Ньютона.

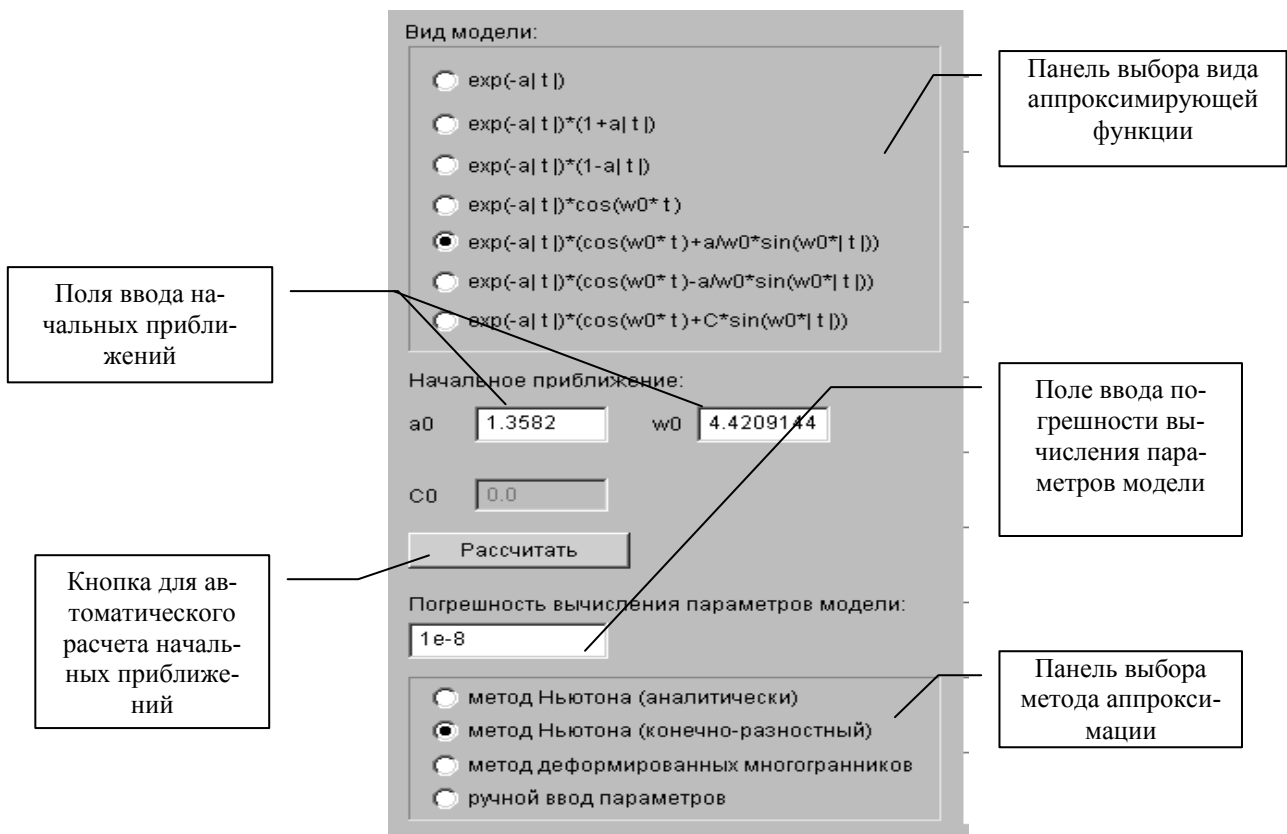


Рисунок 7.8. Панель управления параметрами аппроксимации

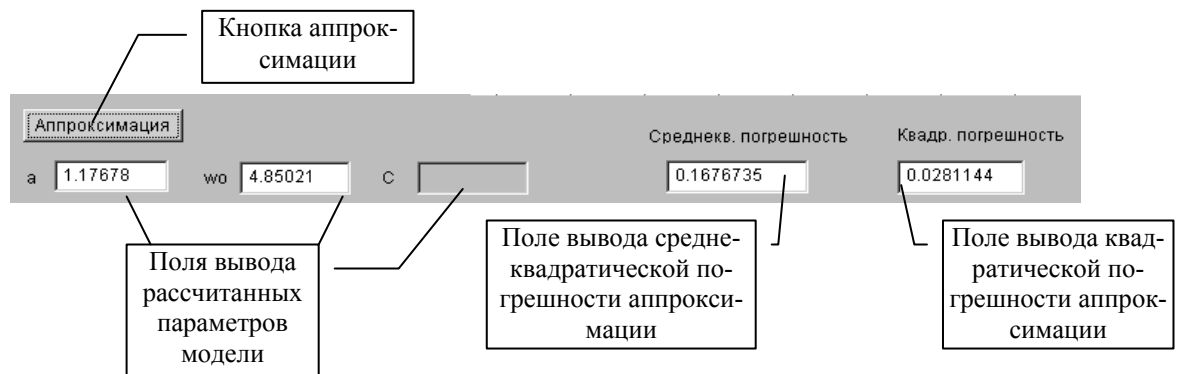


Рисунок 7.9. Панель вывода результатов аппроксимации

### Аппроксимация КФ ортогональными функциями Лагерра

После получения массива отсчетов КФ, производится ее аппроксимация. Форму для аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра можно вызвать из пункта «Аппроксимация» - «Ортогональными ф-ми Лагерра» главного меню любой из основных форм. Общий вид формы аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра представлен на рис. 7.10.

Для проведения аппроксимации необходимо вычислить параметр  $\alpha$  функции Лагерра (рис. 7.11.) Для этого требуется задать начальное приближение параметра  $\alpha$  (по умолчанию оно равно 1), которое необходимо для реализации расчета методом Ньютона, точность вычисления этого параметра (по умолчанию она равна 0.001) и выбрать один из методов численного интегрирования (метод Симпсона, трапеций или прямоугольников). После этого, нажав кнопку «Вычислить  $\alpha$ », получим значение вычисленного параметра в поле « $\alpha$ » (в это поле можно занести произвольное значе



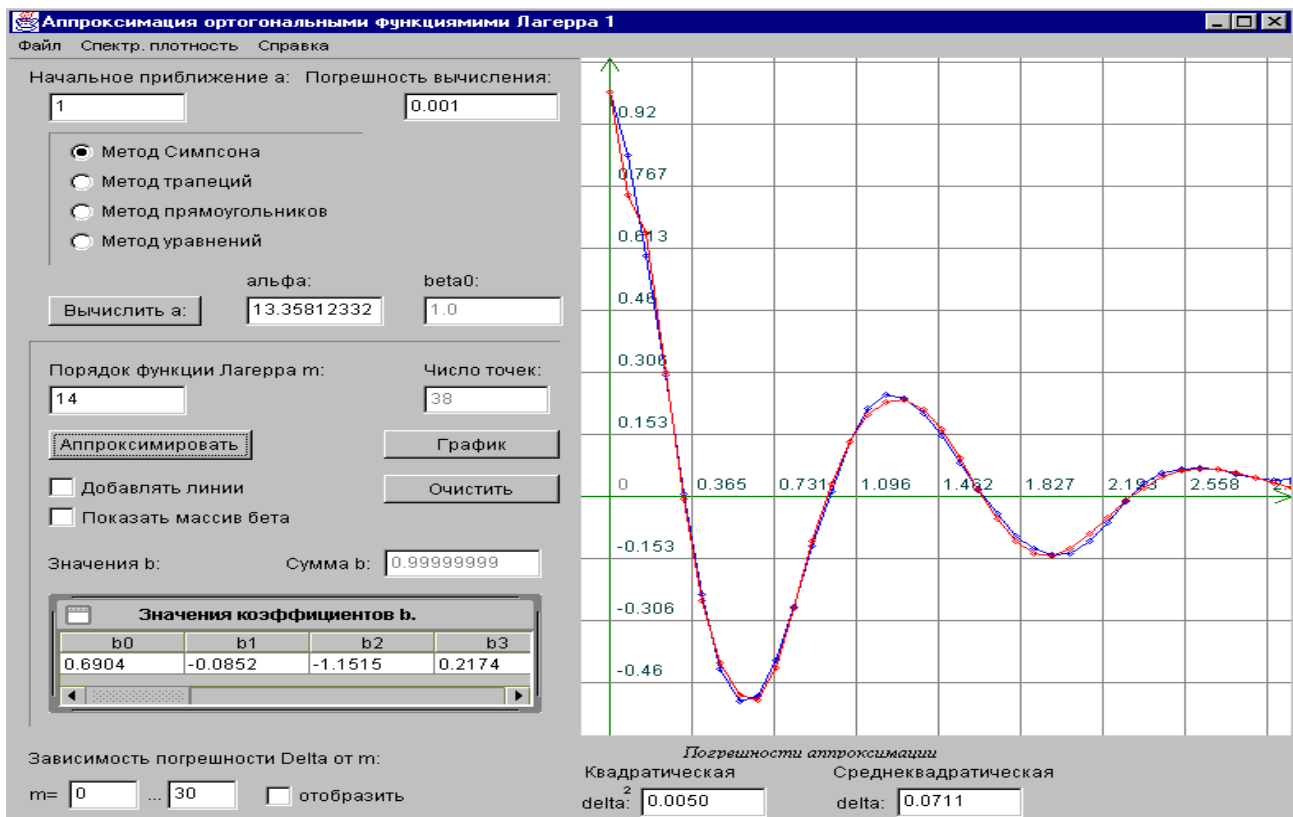


Рисунок 7.10. Окно аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра

Методы численного интегрирования для расчета параметров  $\alpha$  и  $\beta$

Погрешность вычисления параметра  $\alpha$

Разрешить / Отменить наложение линий на графике

Проверка выполнения условия  $\beta_0=1$

Показывать массив  $b$  /  $\beta$

Проверка выполнения условия  $\sum b=1$

Значения коэффициентов  $b$  полинома Лагерра

Рисунок 7.11. Описание параметров окна аппроксимации

ние вручную), а в поле «**beta0:**» появится значение коэффициента  $b_0$  которое должно быть равно 1 и является проверкой качества расчета  $\alpha$ .

После того, как параметр  $\alpha$  будет вычислен (либо установлен вручную), необходимо установить порядок аппроксимирующей функции Лагерра  $m$ . (В соседнем поле указывается число точек, по которым будет проводиться аппроксимация - оно равно числу отсчетов поступившей на вход КФ). После нажатия кнопки «**Аппроксимировать**», в таблицу «**Значения b:**» будут занесены вычисленные значения коэффициентов функции, в поле для построения графика к исходной КФ (она рисуется **синим цветом**) добавится график аппроксимирующей функции, а так же будут вычислены и отображены в специальном поле (рис. 7.10) квадратическая и среднеквадратическая погрешности аппроксимации  $\delta^2$  и  $\delta$ . Так же отобразится значение суммы коэффициентов  $\mathbf{b}$ , которая должна быть равной 1.

Расставляя или убирая соответствующие флажки, пользователь может либо наслаивать графики один на другой, сравнивая результаты аппроксимации несколькими функциями не только по значению погрешности  $\delta$ , но и визуально, либо отображать только одну функцию, а так же показывать либо скрывать значения аппроксимирующей функции в каждой точке.

Задавая начальное и конечное значение  $m$  (рис. 7.12) и устанавливая флажок «**отобразить**», пользователь может построить график зависимости квадратической погрешности аппроксимации  $\delta^2$  от порядка  $m$  функции Лагерра для данной КФ. Анализ этого графика позволит найти оптимальное значение  $m$ , при котором  $\delta^2 \rightarrow \min$ . (График строится с шагом по  $m$ , равным 2).

Завершение работы с формой производится ее стандартным закрытием или с помощью кнопки «**Закреть**».

По определенной модели корреляционной функции исследователь может построить график спектральной плотности мощности. Для этого необходимо нажать кнопку «**Спектр. анализ**» в форме «**Аппроксимация**» при аппроксимации параметрическими моделями (см. рис 7.20), а при аппроксимации ортогональными функциями Лагерра - в соответствующем окне (см. рис.7.24) кнопку «**Спектр**», а в окне «**Спектральный анализ**» - кнопку «**Добавить**».

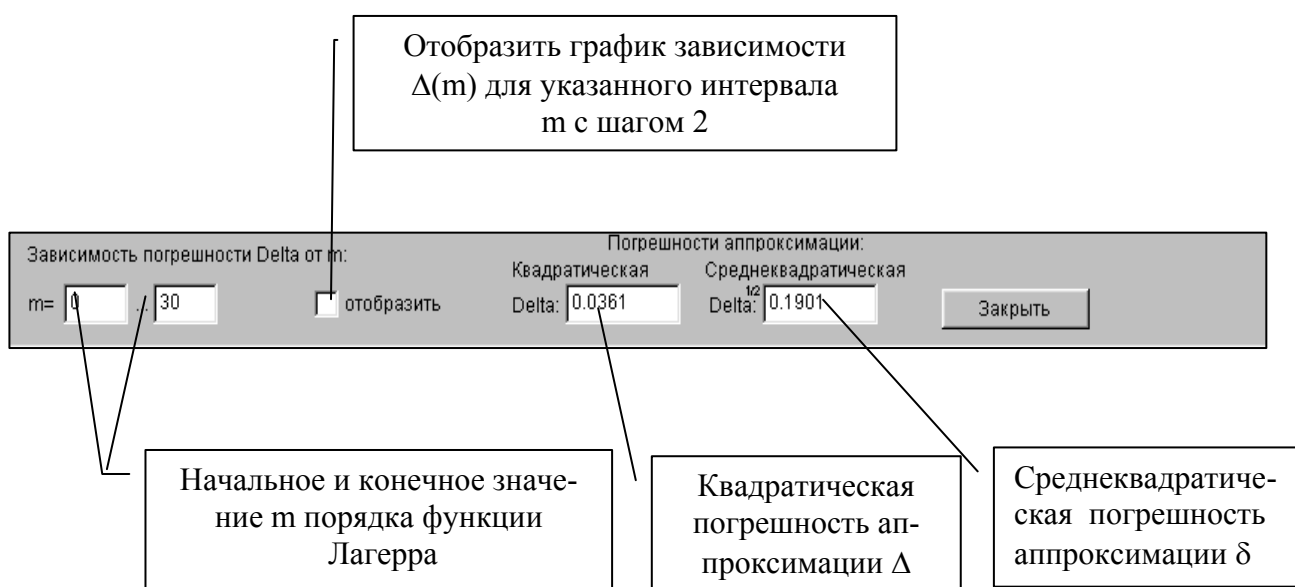


Рисунок 7.12. Окно аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра

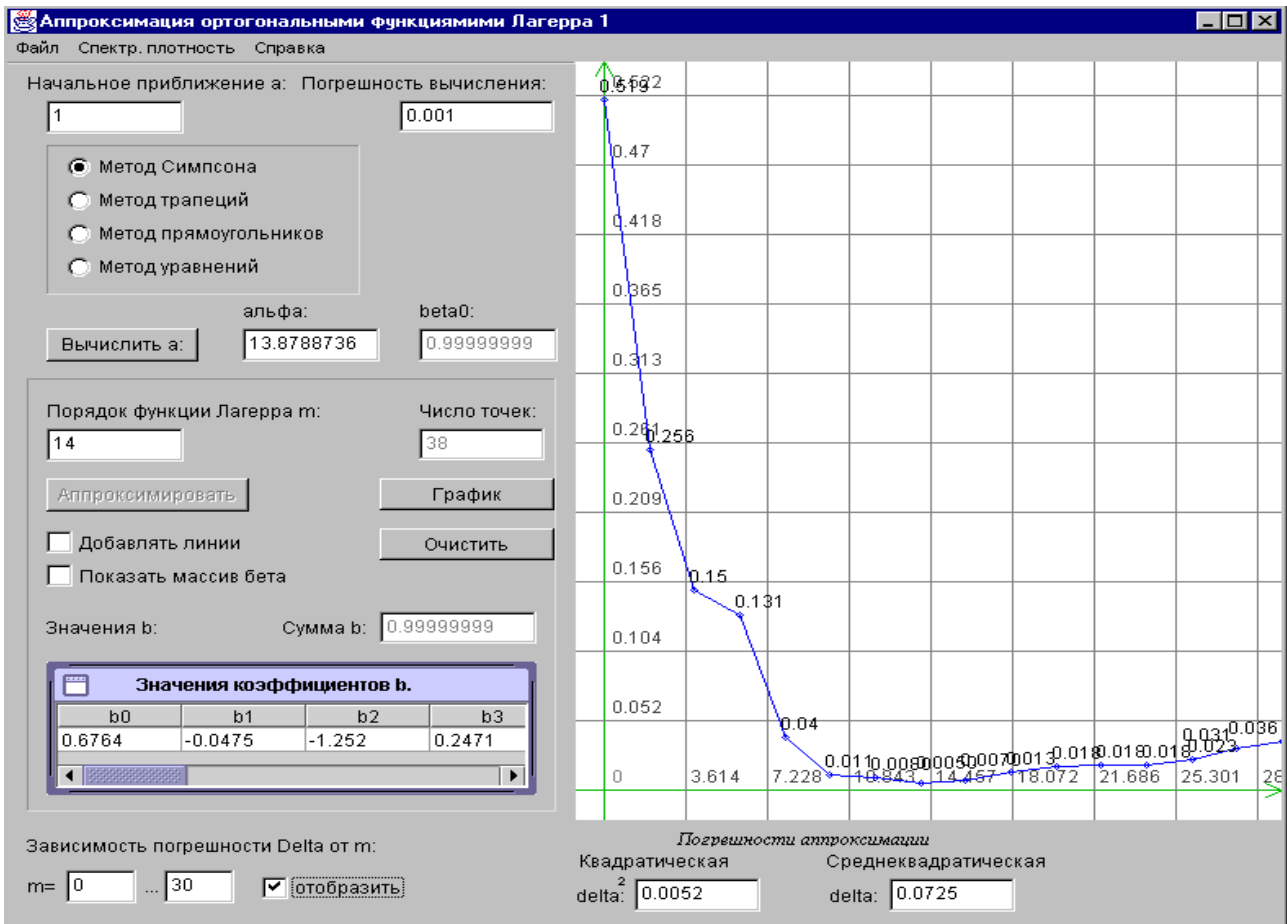


Рисунок 7.13. Поиск оптимального числа членов разложения ряда

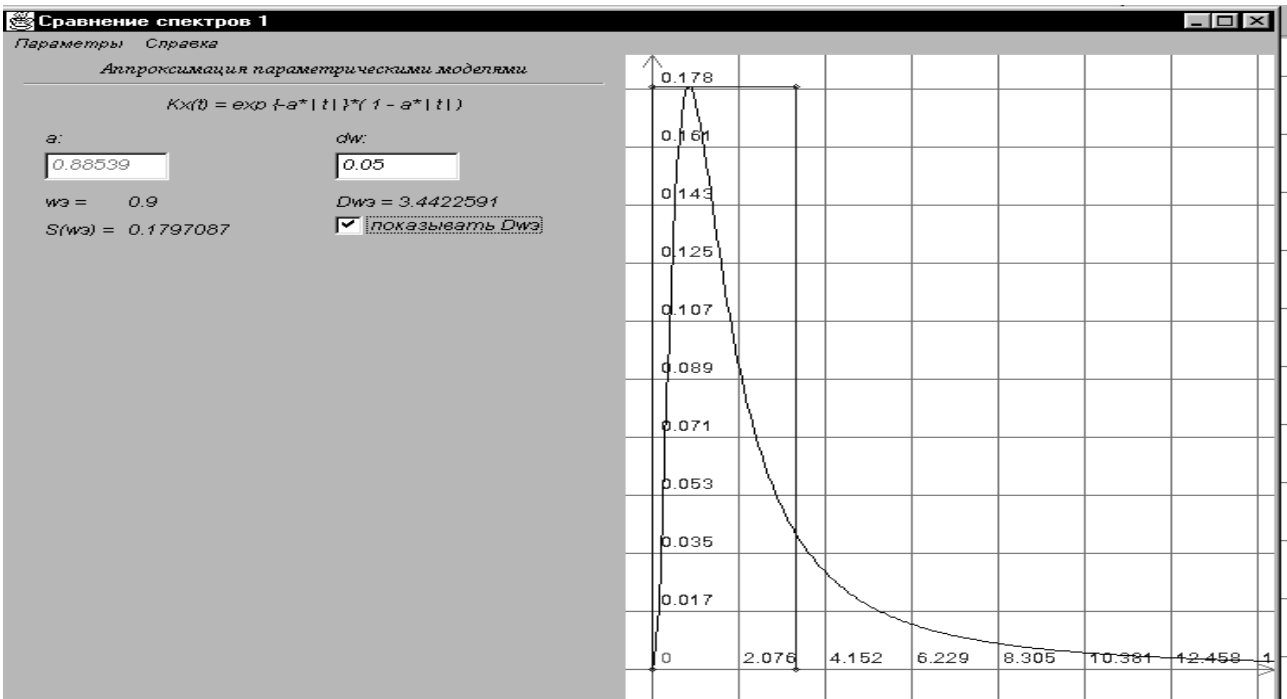


Рисунок 7.14. Форма окна спектрального анализа

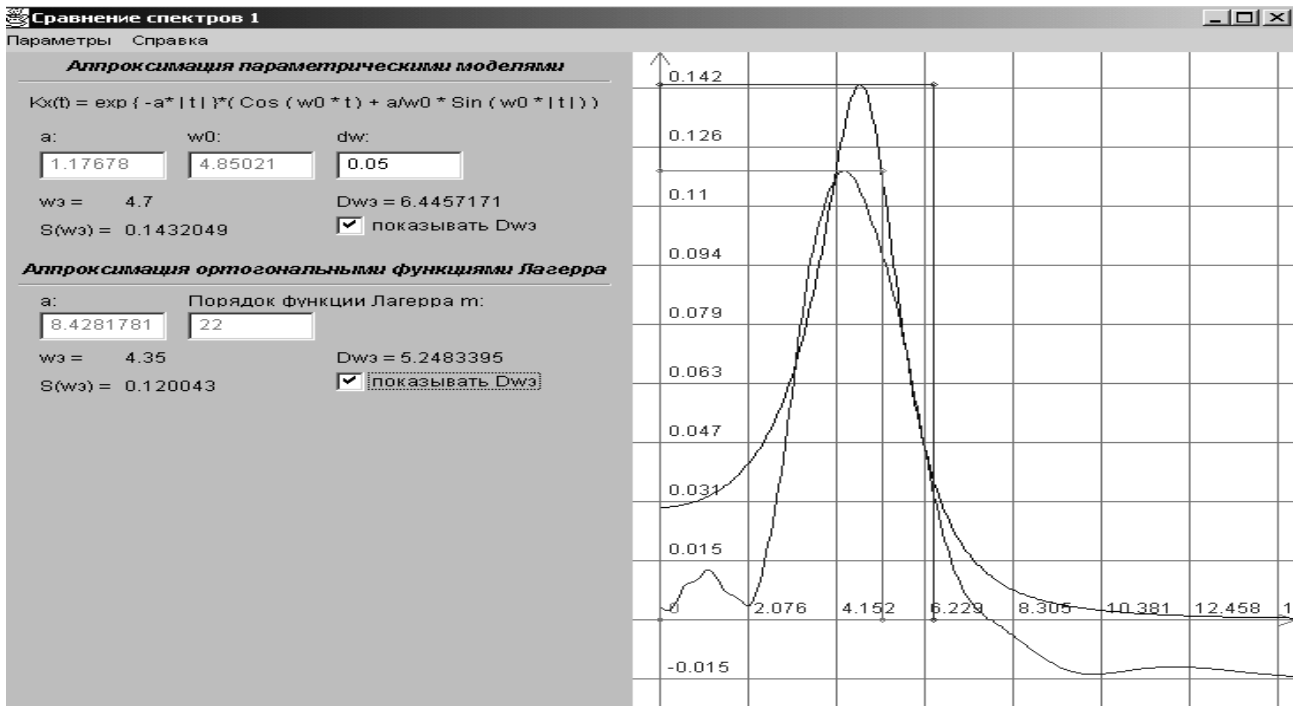
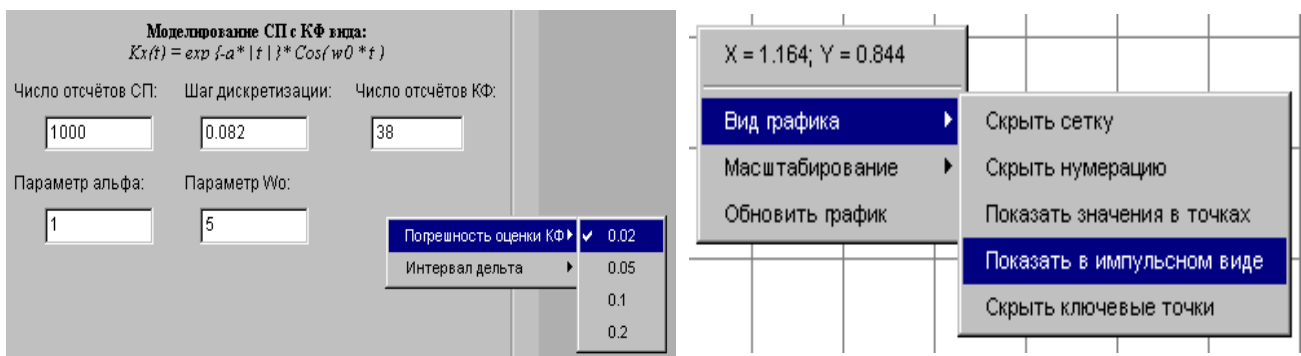


Рисунок 7.15. Форма окна спектрального анализа при аппроксимации спектра ортогональными функциями Лагерра

Отметим, что для удобства пользователей в системе предусмотрены следующие возможности:

1. при моделировании СП возможно изменение интервала дискретизации, обеспечивающего восстановление корреляционной функции с заданной погрешностью (см. рис. 7.16 а).
2. При отображении графической информации возможно изменение формы представления результатов (см. рис. 7.16 б).

Для этого необходимо нажать правую кнопку «мыши», поместив курсор в соответствующее окно.



а) б)

Рисунок 7.16. Дополнительные окна

Пример результатов обработки представлен на рис. 7.17, где последовательно представлены: процесс, результаты идентификации и аппроксимации параметрической моделью, уточнение идентификации, аппроксимация ортогональными функциями Лагерра и построение спектральной плотности мощности по параметрической модели и в ортогональном базисе Лагерра.

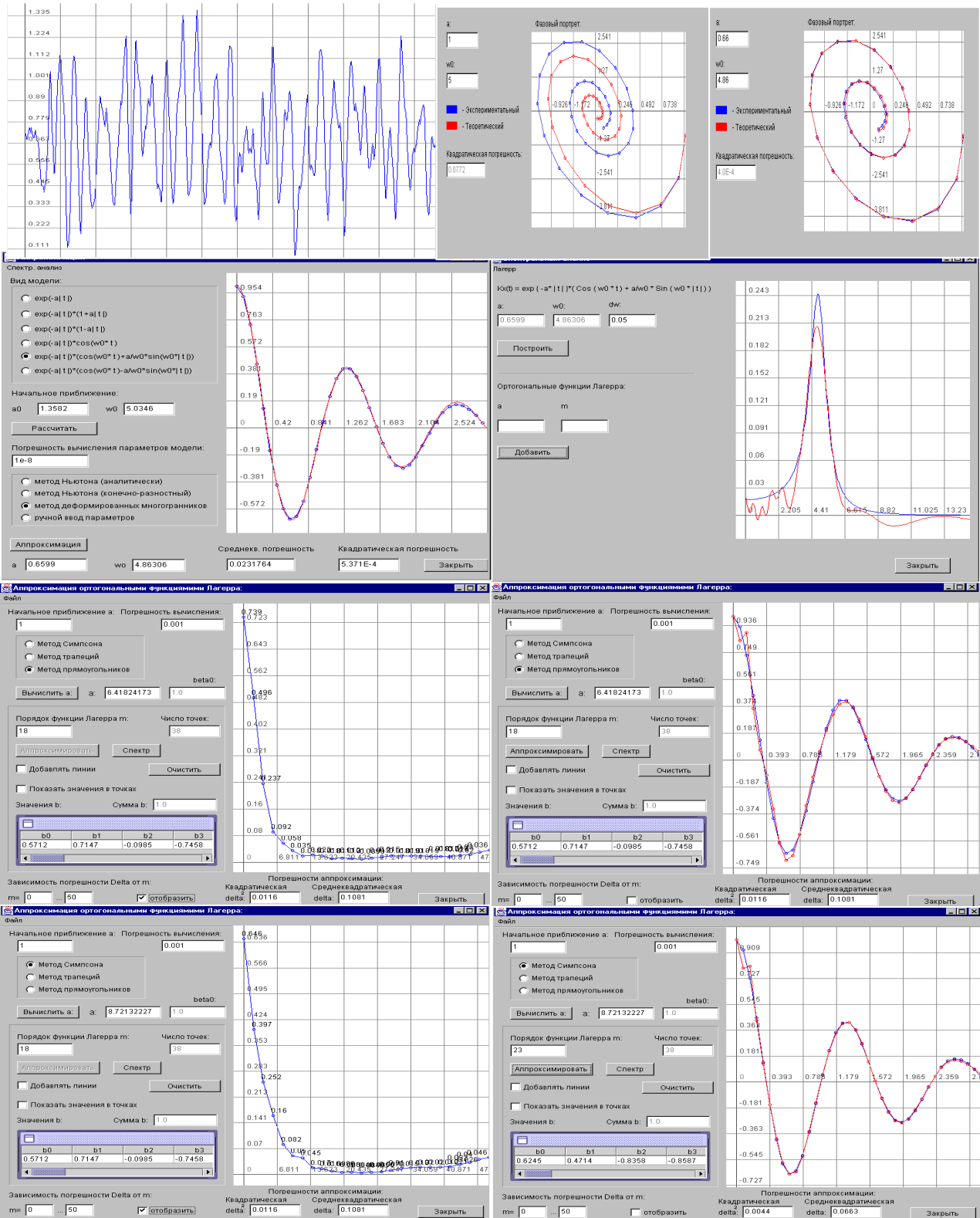


Рисунок 7.17. Результаты обработки

Пример результатов обработки неэквилидистантного временного ряда представлен на рис. 7.18-7.21, где последовательно представлены: неэквилидистантный временной ряд, результаты идентификации и аппроксимации параметрической моделью, аппроксимация ортогональными функциями Лагерра и построение спектральной плотности мощности по параметрической модели и в ортогональном базисе Лагерра.

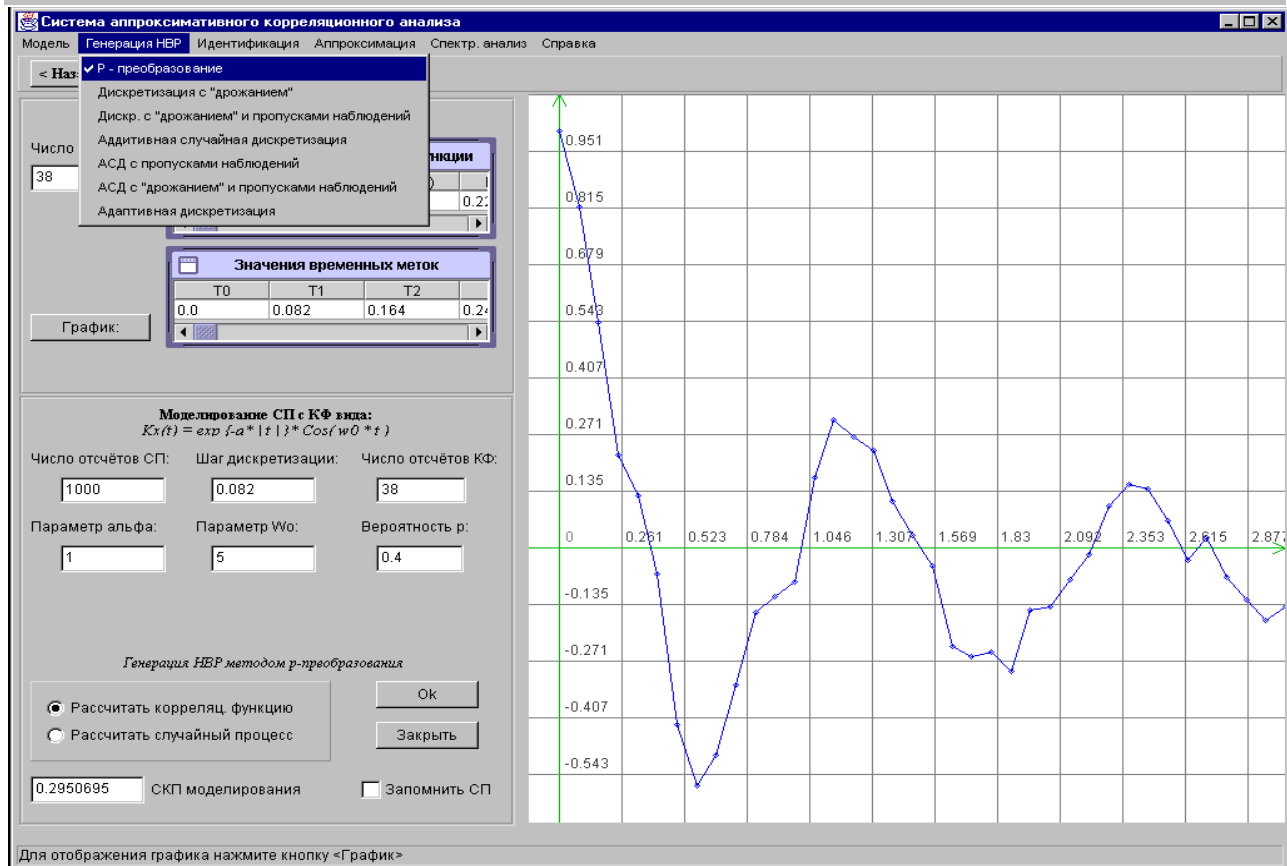
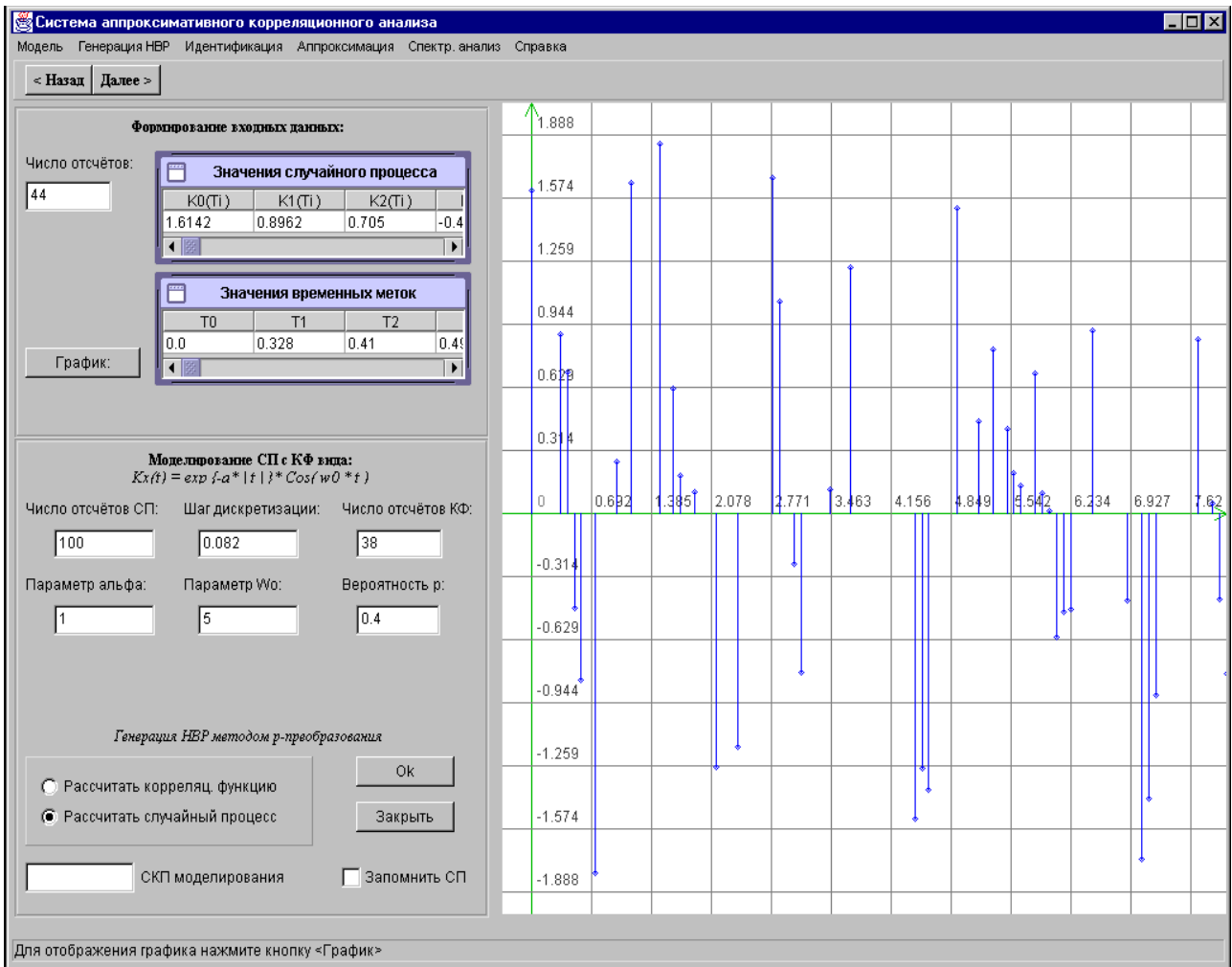


Рисунок 7.18. Пример НВР и корреляционной функции

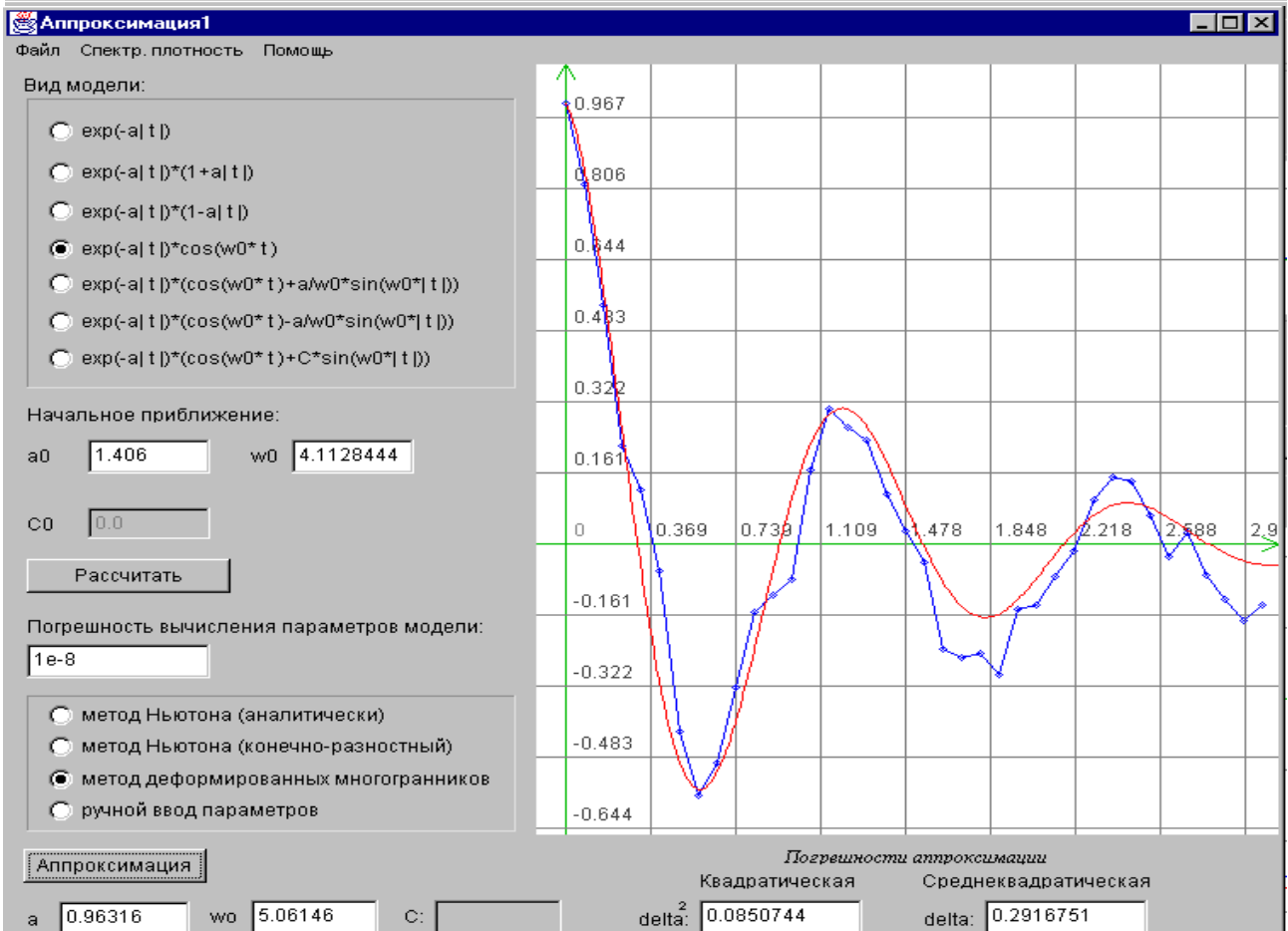
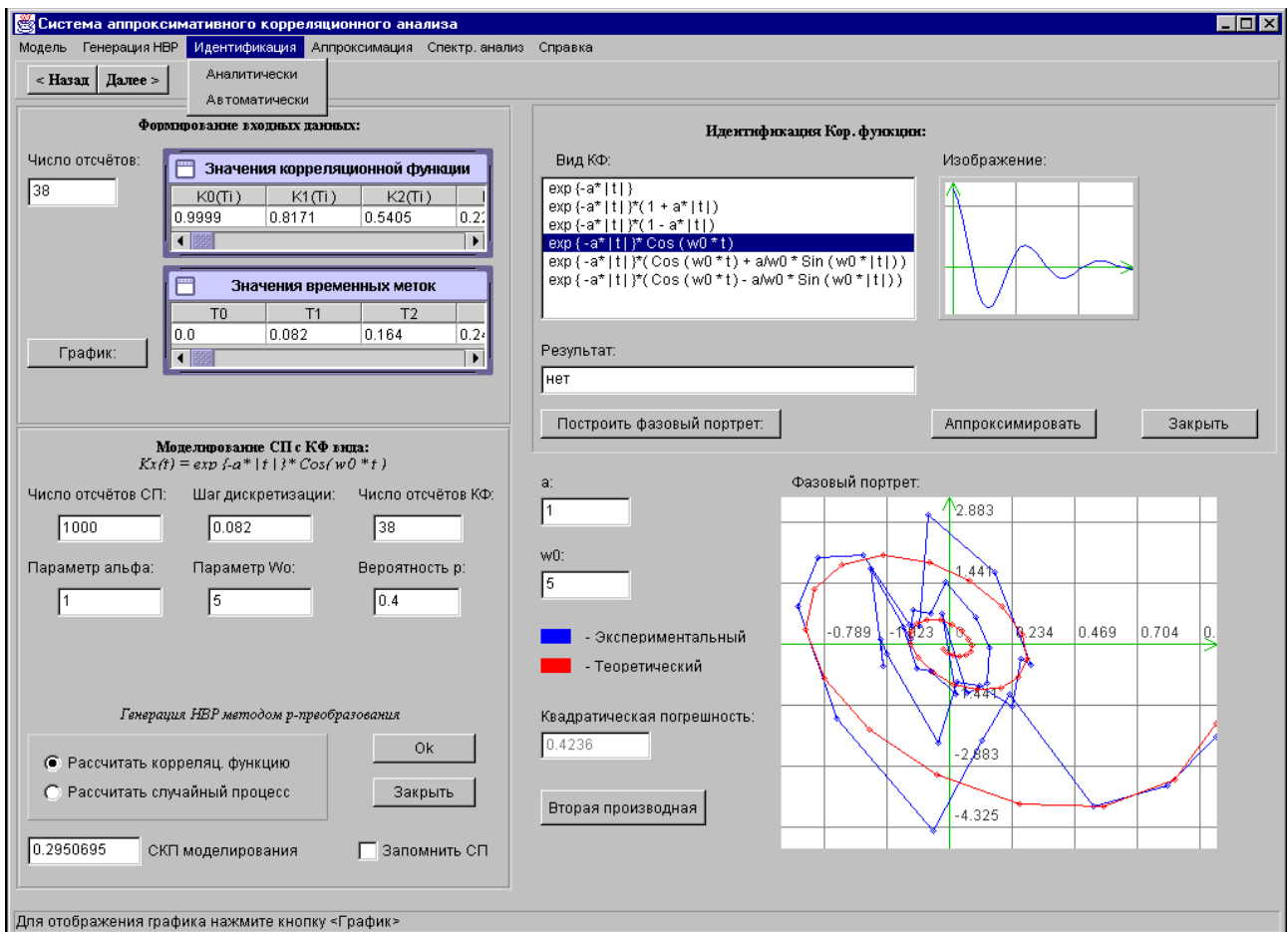


Рисунок 7.19. Результат аппроксимации корреляционной функции

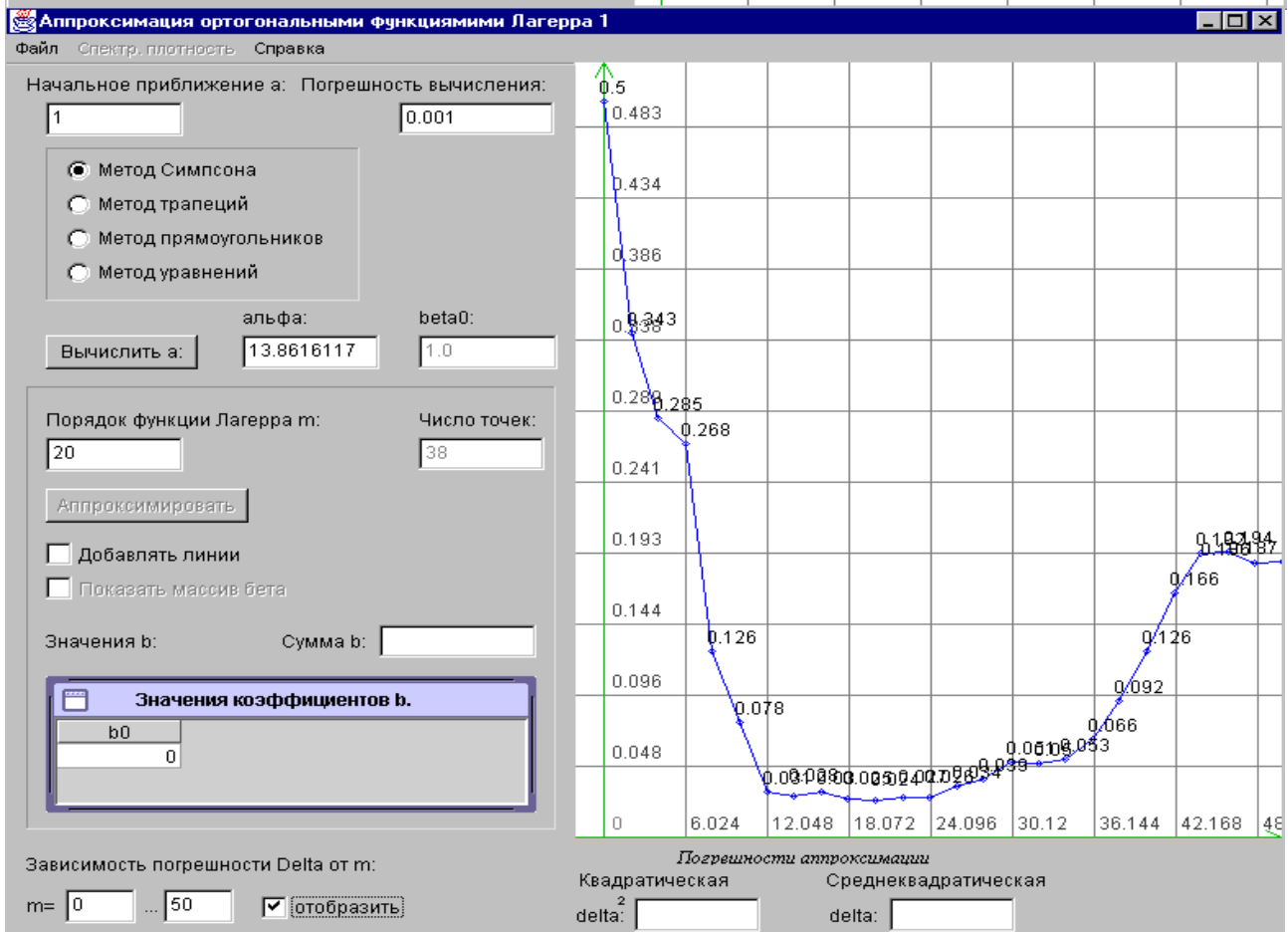
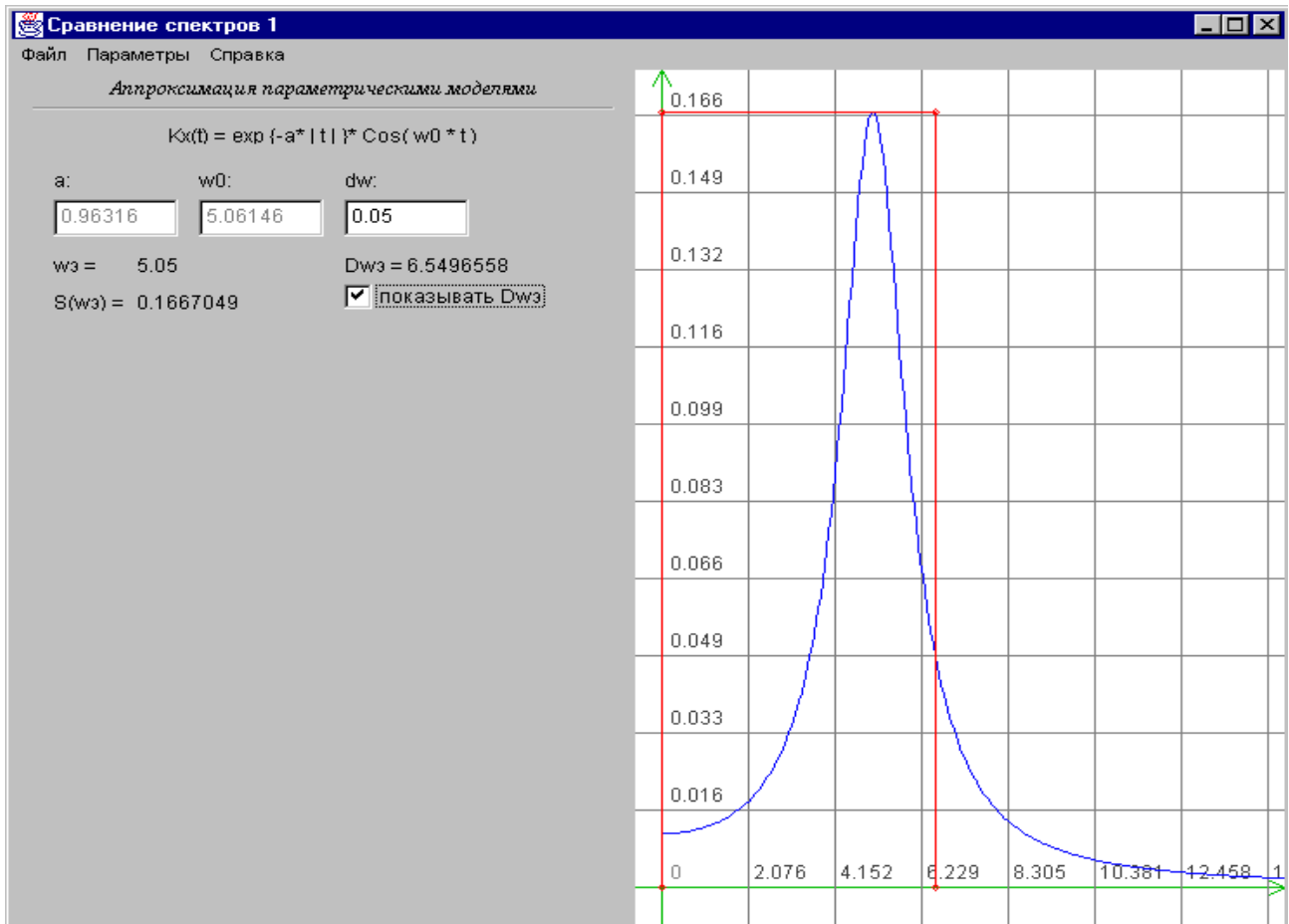


Рисунок 7.20. Аппроксимация спектра и поиск оптимального числа m



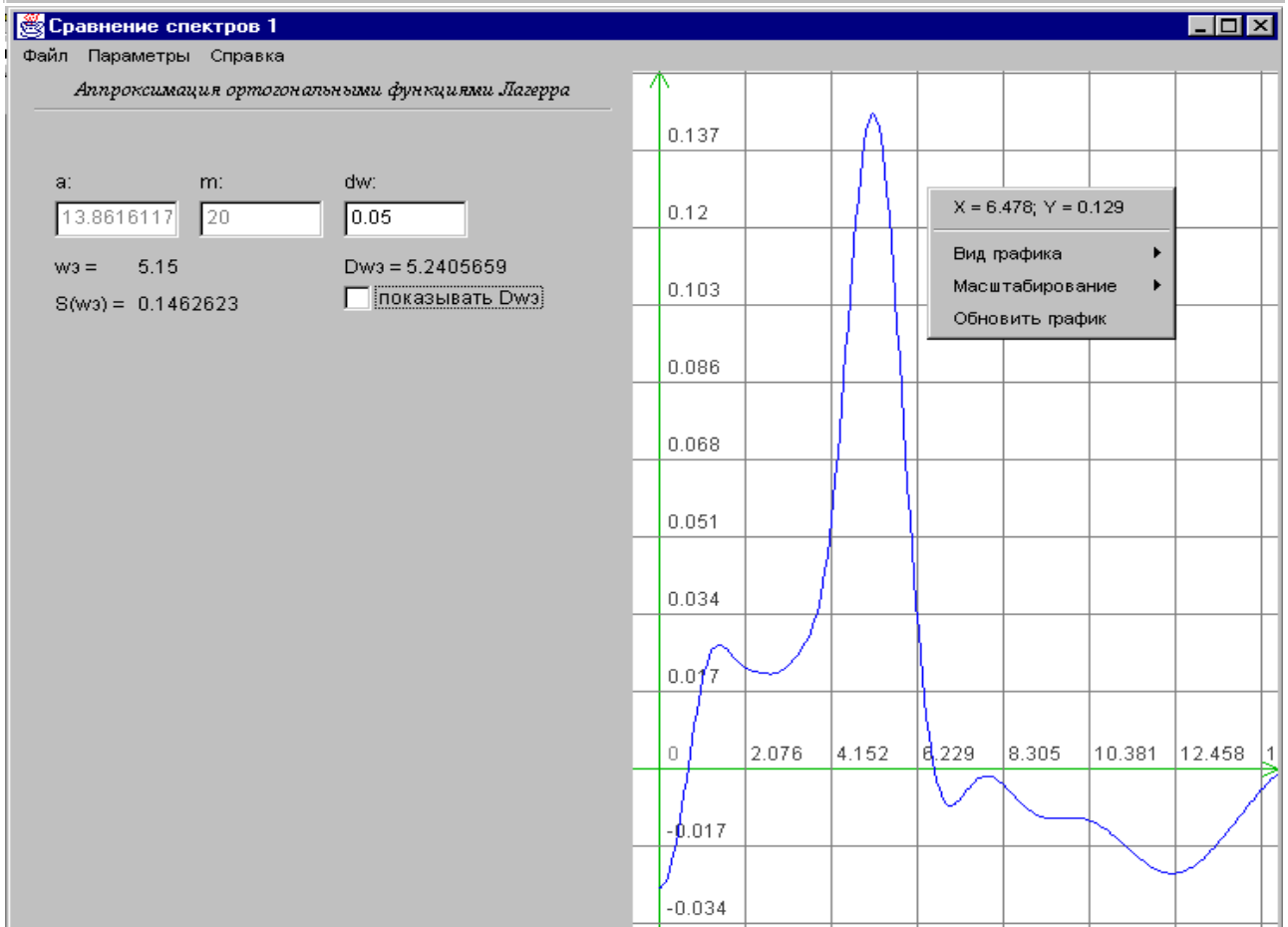
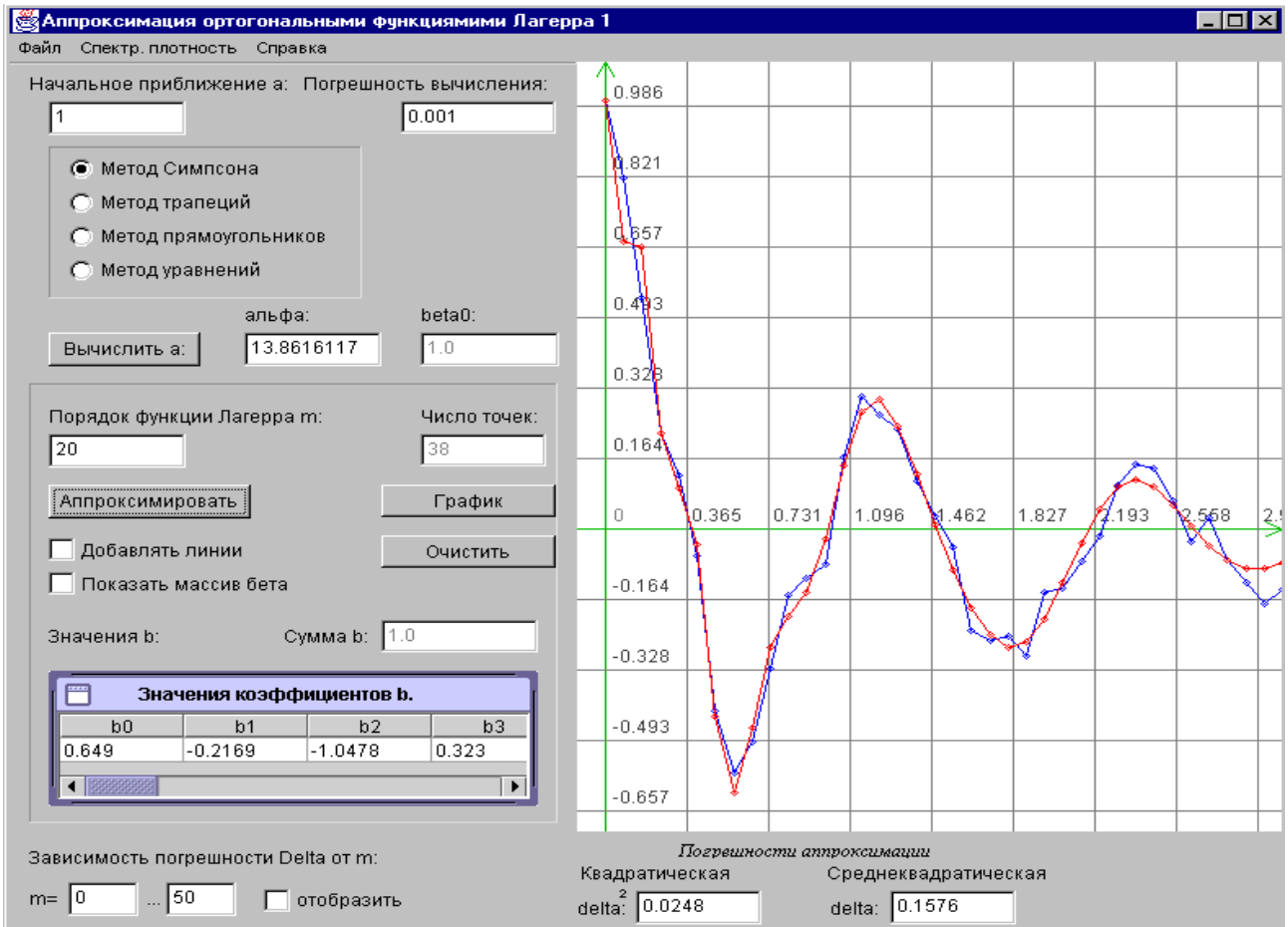


Рисунок 7.21. Результат аппроксимации ортогональными функциями Лагерра

## 7.2. Аппроксимативный анализ взаимных корреляционно-спектральных характеристик

Разработанная система служит для проведения аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов [37]. Структурная схема системы приведена на рис 7.22. В соответствии с выполняемыми функциями можно выделить следующие подсистемы:

1. задания входных воздействий и генерирования НВР;
2. первичной статистической обработки;
3. аппроксимации взаимной корреляционной функции;
4. аппроксимации спектральной плотности мощности.

**Подсистема задания входных воздействий и генерирования НВР** состоит из двух модулей.

В первом модуле производится генерирование псевдослучайной последовательности с заданным видом корреляционной функции (КФ) и получение НВР. Полученные данные: массив меток времени и соответствующие им отсчеты СП, объем выборки  $M$  и интервал дискретизации  $\Delta t_0$ , - поступают на вход подсистемы первичной статистической обработки, могут служить для получения второго СП и являются входными данными для подсистемы аппроксимации взаимной корреляционной функции.

Во втором модуле производится генерирование новой псевдослучайной последовательности с заданным видом КФ или обработка первого СП.

Получаемые в результате работы первой подсистемы данные поступают на вход следующих двух подсистем.

**Подсистема первичной статистической обработки** производит оценку числовых характеристик, центрирование, нормирование случайных процессов, оценку и построение фазового портрета КФ. При регулярной дискретизации оценка КФ производится с помощью мультипликативного алгоритма, а при обработке НВР - с помощью интервальной корреляционной функции.

**Подсистема аппроксимации взаимной корреляционной функции** состоит из двух частей: оценки ВКФ и аппроксимации ВКФ функциями Лагерра или типовыми параметрическими моделями. На вход этой подсистемы кроме данных, полученных в подсистеме 1, поступает число членов разложения и интервал, на котором производится оценка ВКФ, или начальные значения параметров параметрической модели. Затем вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующих выражений и среднеквадратическая погрешность аппроксимации как для положительной, так и отрицательной областей определения ВКФ. Полученные аппроксимирующие выражения поступают в подсистему 4.

**Подсистема аппроксимации спектральной плотности мощности.** На основе данных, полученных в подсистеме 3, производится построение взаимной спектральной плотности мощности как в ортогональном базисе Лагерра, так и с использованием параметрических моделей.

При запуске программы на экране появляется форма, изображенная на рис 7.23.

Основными элементами формы является панель главного меню и страницы, выбирая которые пользователь переходит между частями программы.

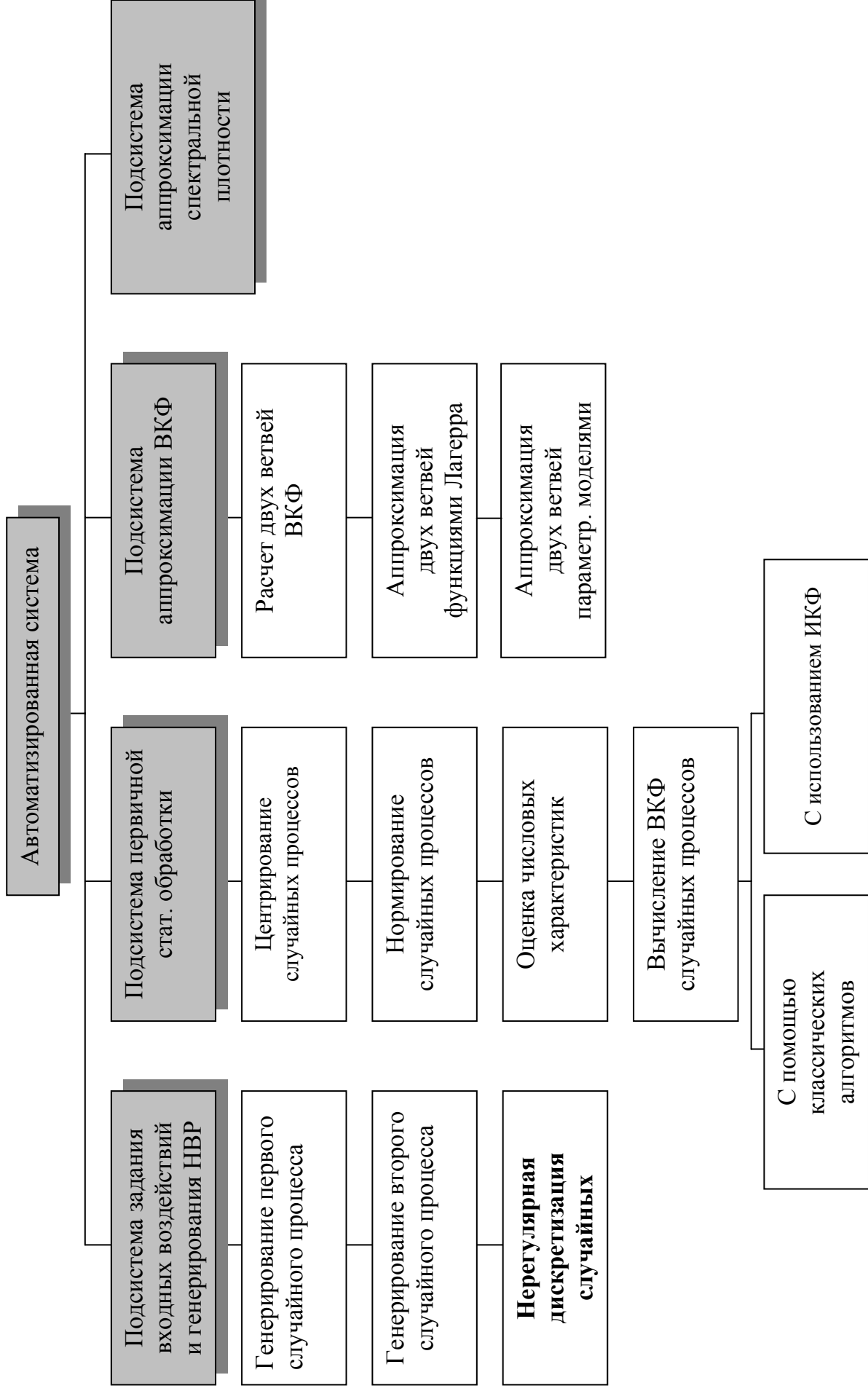


Рисунок 7.22. Структура автоматизированной системы

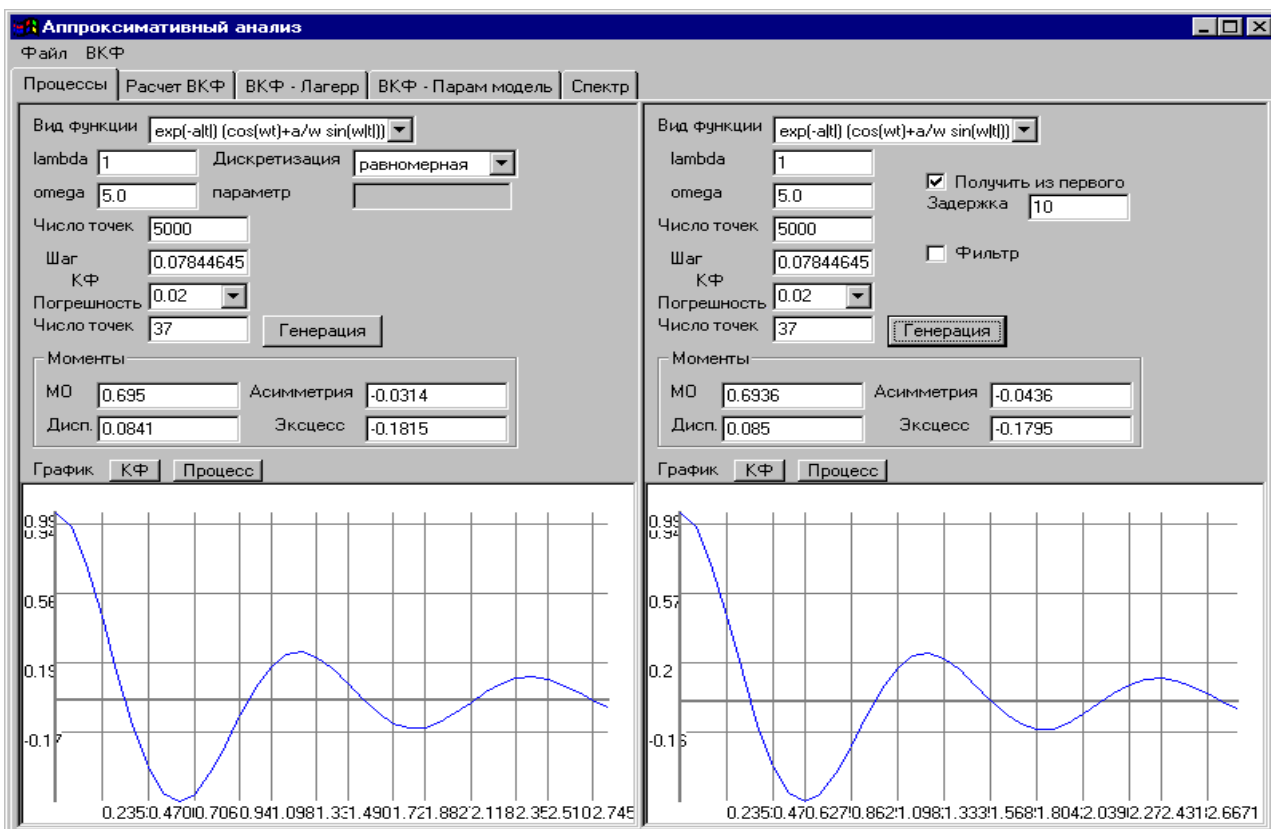


Рисунок 7.23.

### Задание входных воздействий и генерирование НВР

С помощью первой страницы осуществляется задание входных воздействий, генерирование НВР и первичная статистическая обработка. Она содержит две панели: **левую** - для генерирования и первичной обработки первого процесса и **правую** - для генерирования и первичной обработки второго процесса. На левой панели необходимо ввести следующие параметры:

- число отсчетов СП;
- шаг дискретизации;
- параметры  $\alpha$ ,  $\omega_0$ ;
- погрешность моделирования.

В случае генерирования НВР необходимо ввести параметры нерегулярной дискретизации.

После нажатия на кнопку «Генерация» СП будет смоделирован. Сразу же будут рассчитаны математическое ожидание, дисперсия, коэффициент асимметрии, эксцесс и КФ процесса и отображены на панели. Предусмотрена возможность отображения КФ и самого СП. Для этого нужно нажать на соответствующие кнопки над графиком.

Генерирование второго процесса производится на правой панели. Для этого необходимо сгенерировать СП с заданным видом КФ аналогично рассмотренному выше или установить флаг «получить из первого». При этом второй процесс будет получен из первого с помощью задержки на указанное число отсчетов.

Характеристики процесса расположены в нижней половине панели.

После генерирования двух процессов можно перейти на страницу 2, выбрав закладку «ВКФ» в левом верхнем углу формы.

Для расчета ВКФ двух сгенерированных процессов необходимо ввести количество точек левой и правой ветвей и нажать на кнопку «Рассчитать» (см. рис. 7.24).

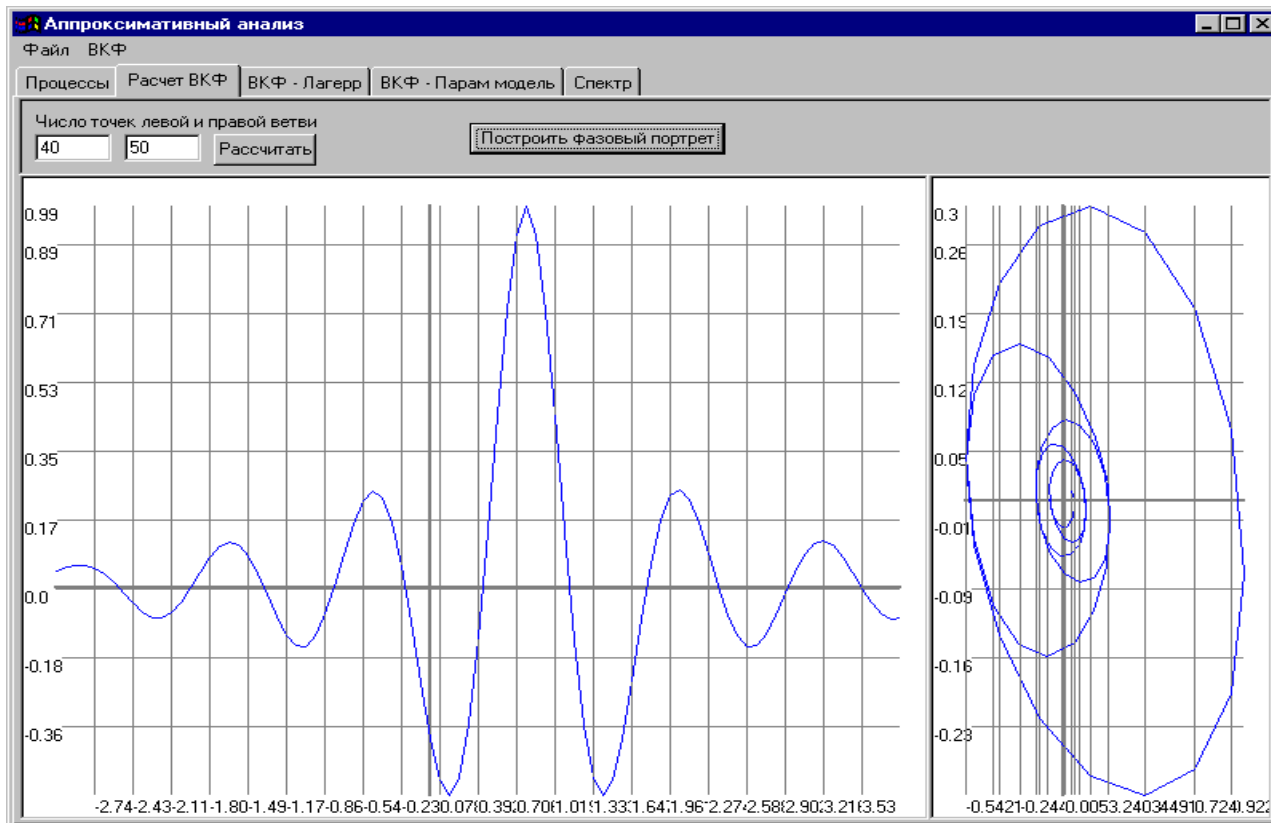


Рисунок 7.24.

Исследователь по своему усмотрению в ручном режиме может установить требуемое количество точек правой и левой ветвей взаимной корреляционной функции. Кроме этого возможно построение её фазового портрета.

После определения вида модели возможен переход либо на третью, либо четвертую страницы.

### Аппроксимация ВКФ ортогональными функциями Лагерра

Страница 3 состоит из двух панелей. Левая служит для ввода параметров, правая - для отображения построенных графиков. Эта страница приведена на рис. 7.25.

Для проведения аппроксимации рассчитанной ВКФ необходимо вычислить параметр  $\alpha$  функции Лагерра. Для этого требуется задать начальное приближение параметра  $\alpha$ , которое необходимо для расчета методом Ньютона, точность вычисления этого параметра, выбрать один из методов численного интегрирования (прямоугольников, трапеций или Симпсона) и нажать кнопку « $b1=0$ » или задать параметр  $\alpha$  вручную в поле «*alfa*». Затем необходимо установить порядок аппроксимирующей функции Лагерра в поле «**Число членов ряда**». Эту операцию необходимо выполнить для правой и левой ветви. После нажатия кнопки

«Аппроксимировать» в список «beta» будут занесены вычисленные значения коэффициентов функции, причем вид этих коэффициентов ( $\beta$  или  $b$ ) зависит от состояния флажка «beta/be», а в поле графика будут отображены синим цветом ВКФ и красным аппроксимирующая функция. В поле «СрКв» будет отображена среднеквадратическая погрешность аппроксимации.

Установив максимальное значение порядка аппроксимирующей функции в поле «Число членов ряда» и нажав на кнопку «Погрешность» справа или слева в поле графика можно получить зависимость среднеквадратической погрешности аппроксимации для правой или левой ветви. Анализ этого графика позволяет найти оптимальное значение порядка аппроксимирующей функции. Пример графика приведен на рис 7.26.

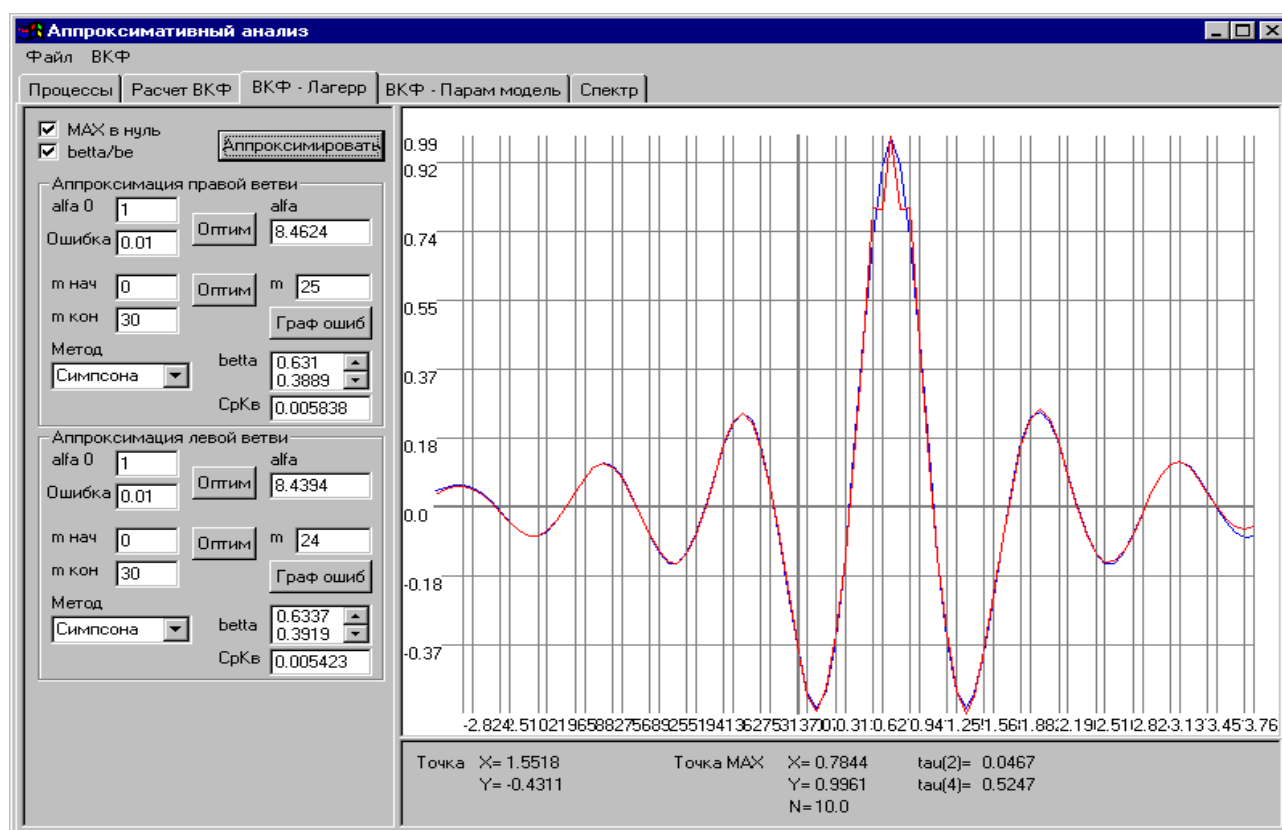


Рисунок 7.25.

### Аппроксимация ВКФ параметрическими моделями

Если модель взаимной корреляционной функции в результате идентификации по фазовому портрету определена, наиболее целесообразно использовать метод аппроксимации ВКФ параметрическими моделями. Для этого необходимо вызвать на экран четвертую страницу (см. рис. 7.27).

При аппроксимации ВКФ необходимо:

1. выбрать вид модели;
2. задать начальные значения её параметров (отдельно для правой и левой ветвей ВКФ);
3. установить значения погрешности оценки параметров модели;
4. если для заданных начальных значений уточнить параметры модели не удалось, необходимо ввести новые начальные значения.

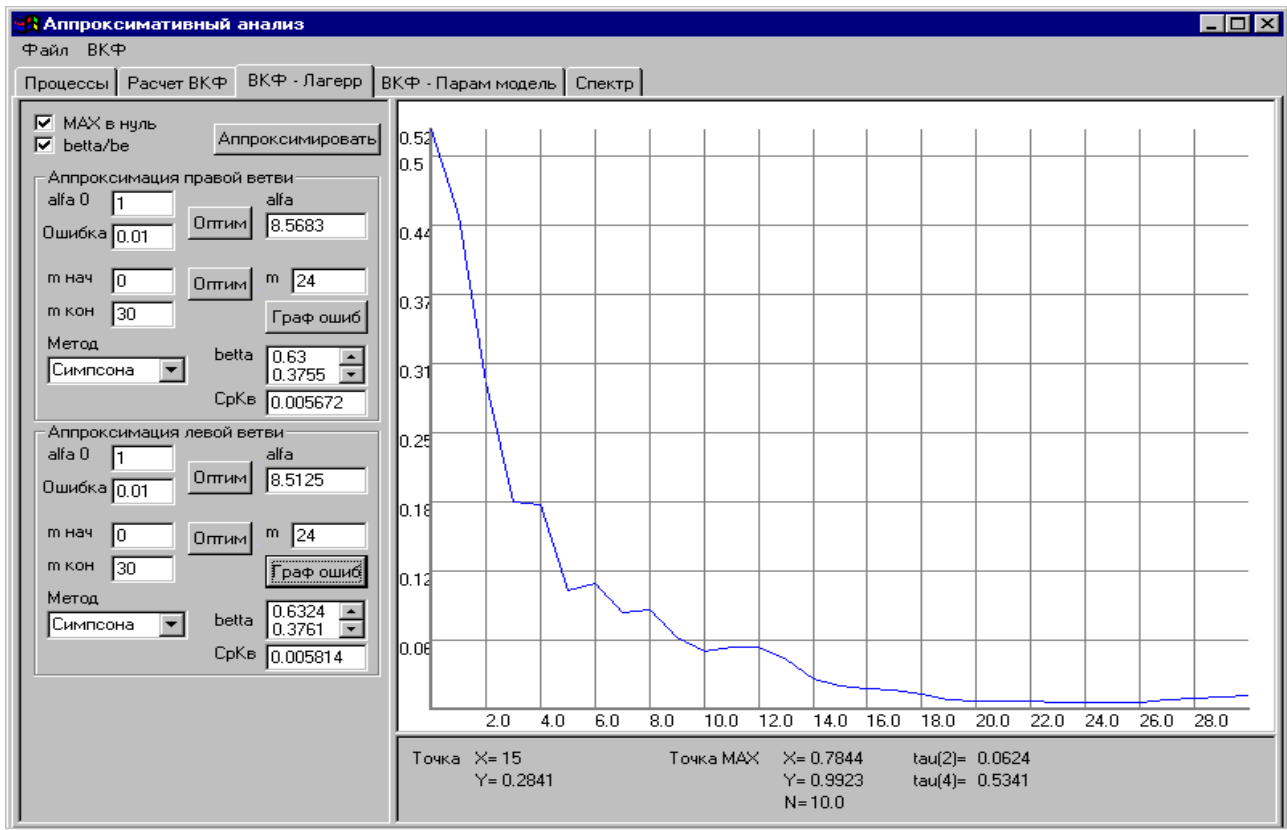


Рисунок 7.26.

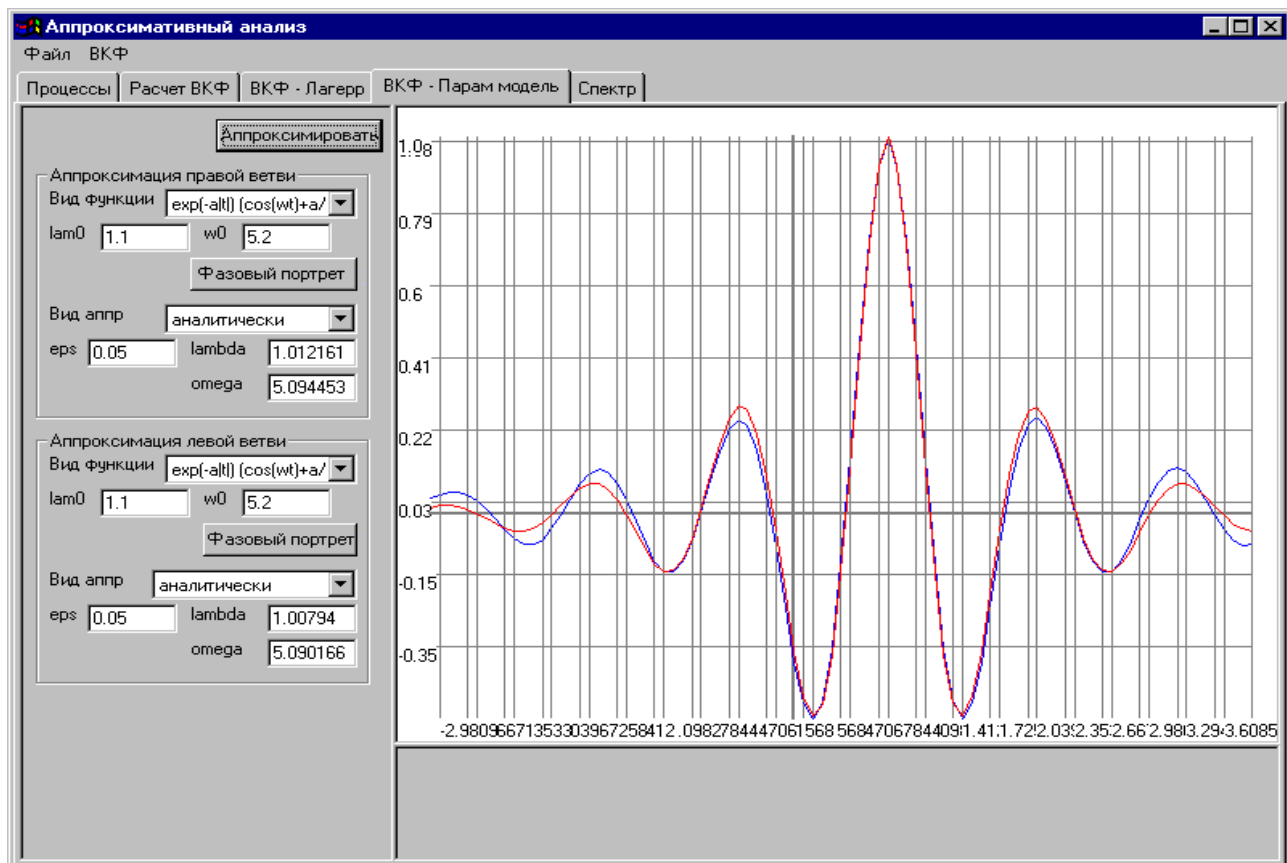


Рисунок 7.27.

В случае необходимости, после аппроксимации ВКФ с помощью этой страницы можно уточнить фазовые портреты правой (см. рис. 7.27) и левой ветвей ВКФ (см. рис.7.28).

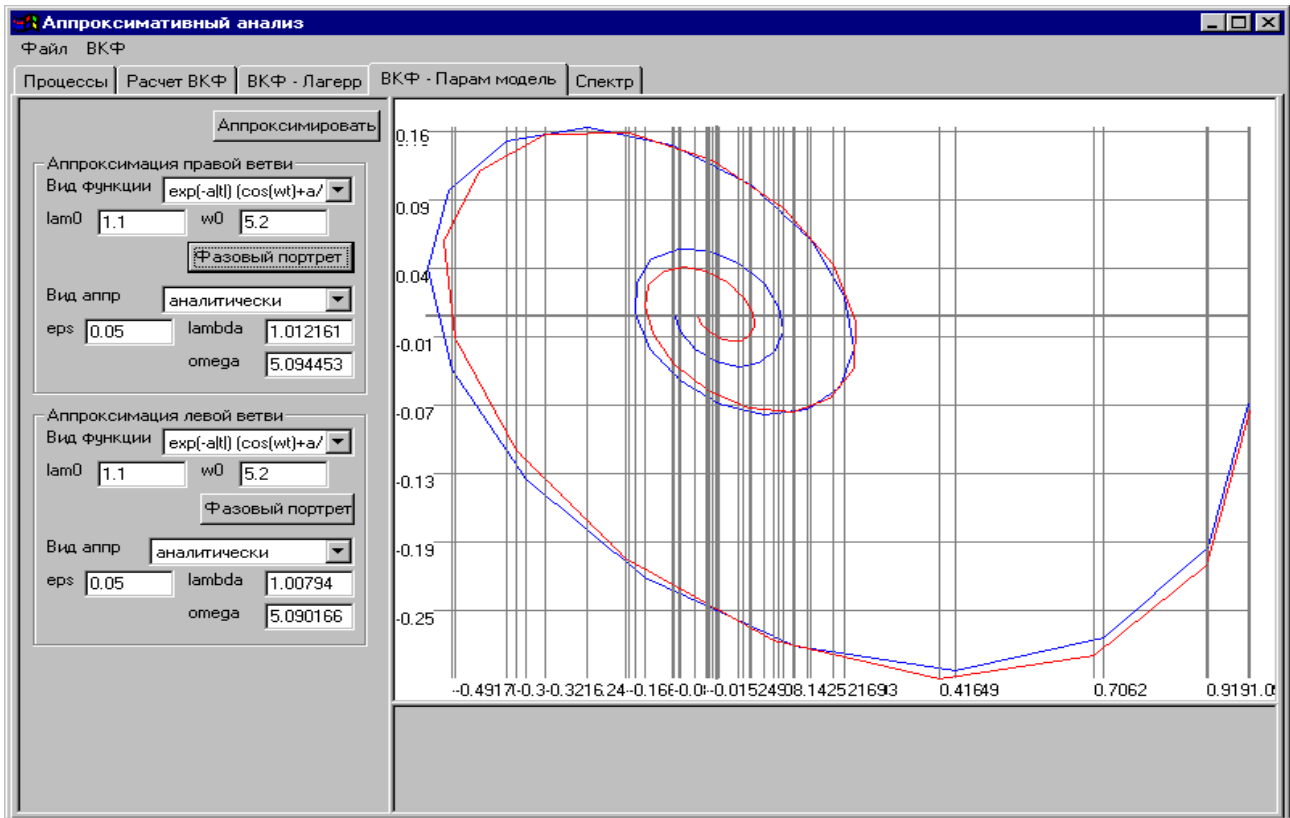


Рисунок 7.27. Фазовый портрет правой ветви ВКФ

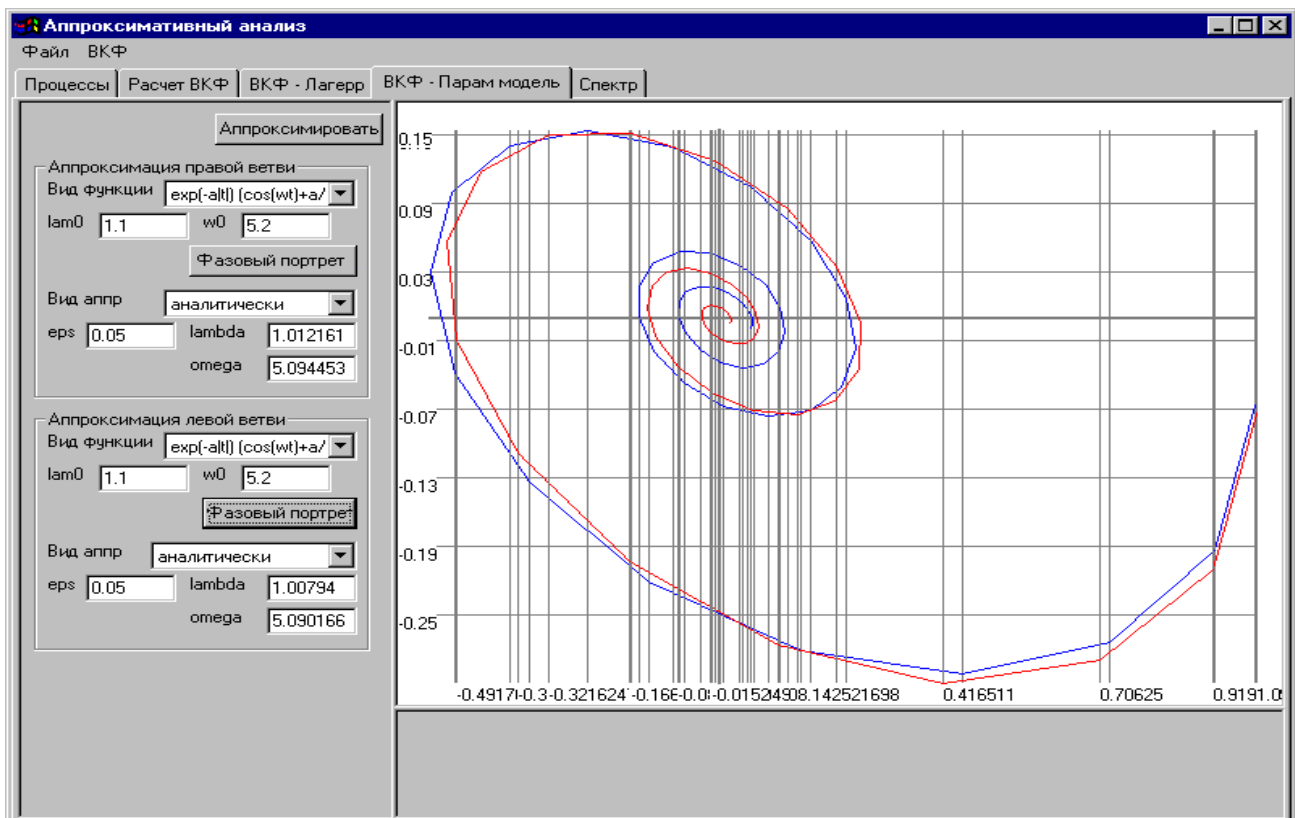


Рисунок 7.28. Фазовый портрет левой ветви ВКФ



## Аппроксимация взаимной спектральной плотности мощности

На странице 5 по параметрам ортогональной функции Лагерра или параметрической модели может быть построена спектральная плотности мощности. Для этого необходимо перейти на эту страницу, выбрав закладку «**Вспектр**» и нажать на кнопку «**Спектр**» (см. рис. 7.29-7.30).

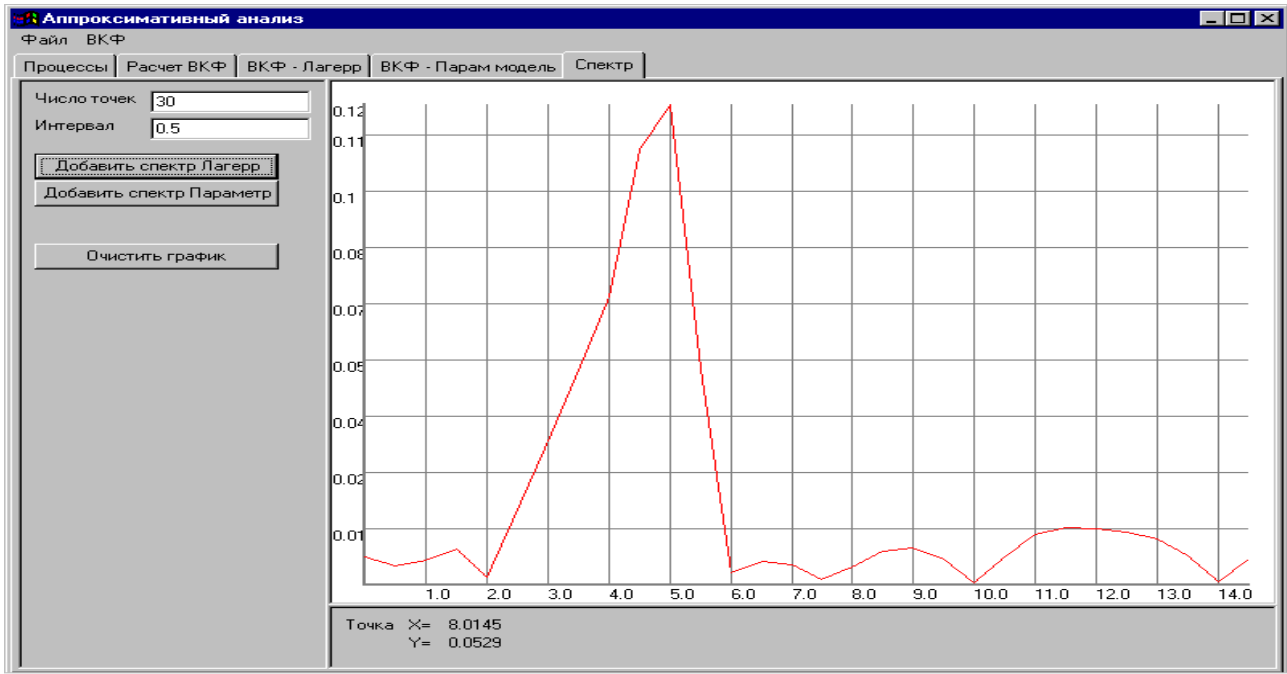


Рисунок 7.29. Модель взаимной спектральной плотности мощности в ортогональном базисе Лагерра

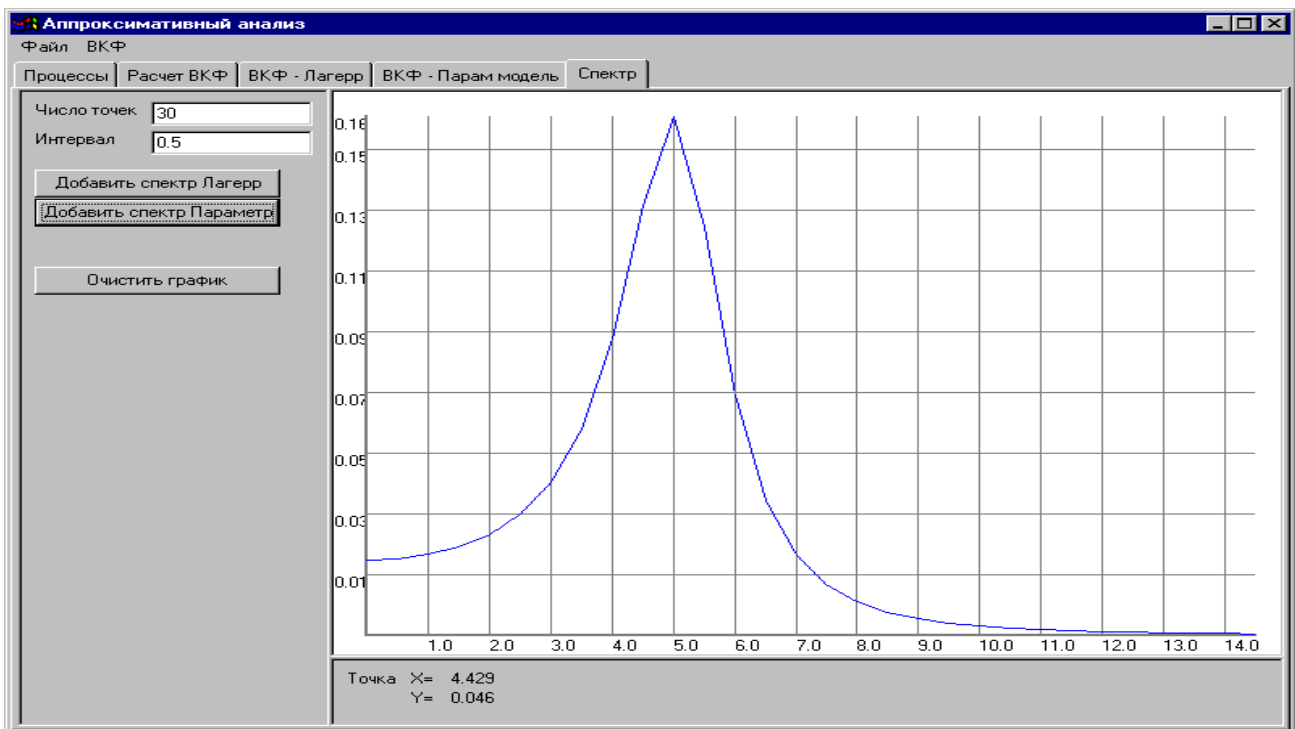


Рисунок 7.30. Параметрическая модель взаимной спектральной плотности мощности

**Минимальные аппаратные требования:** Процессор Pentium 100, ОЗУ 16 Мб, разрешение монитора 600x800, HighColor, Microsoft Windows 95.

### 7.3. Сравнительный анализ алгоритмов аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями

Разработанная в подразделе 7.1 автоматизированная система позволяет провести сравнительный анализ алгоритмов аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями методом имитационного моделирования. В качестве анализируемых временных рядов выберем временные ряды с типовыми моделями корреляционных функций с объемом выборки равным  $M = k \text{ ent}[\tau_{k \max} / \Delta\tau]$ , где  $k=25, 50, 100$ . Число ординат корреляционных функций и интервалы дискретизации выберем в соответствии с рекомендациями таблицы 4.1.

Результаты моделирования для временного ряда с  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0^{(1)}\tau$  с параметрами  $\mu = 1, J_{\max} = 12, \Delta\tau = 0,3$

Таблица 7.1

M	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
150	0,8488	1,3103	0,0431	0,8488	1,3103	0,0431	0,8488	1,3103	0,0431
300	0,5581	0,9686	0,0522	0,5581	0,9686	0,0522	0,5580	0,9686	0,0522
600	1,0109	0,9667	0,0457	1,0109	0,9667	0,0455	1,0110	0,9664	0,0455
1200	0,9639	1,0448	0,0403	0,9639	1,0448	0,0403	0,9639	1,0448	0,0403

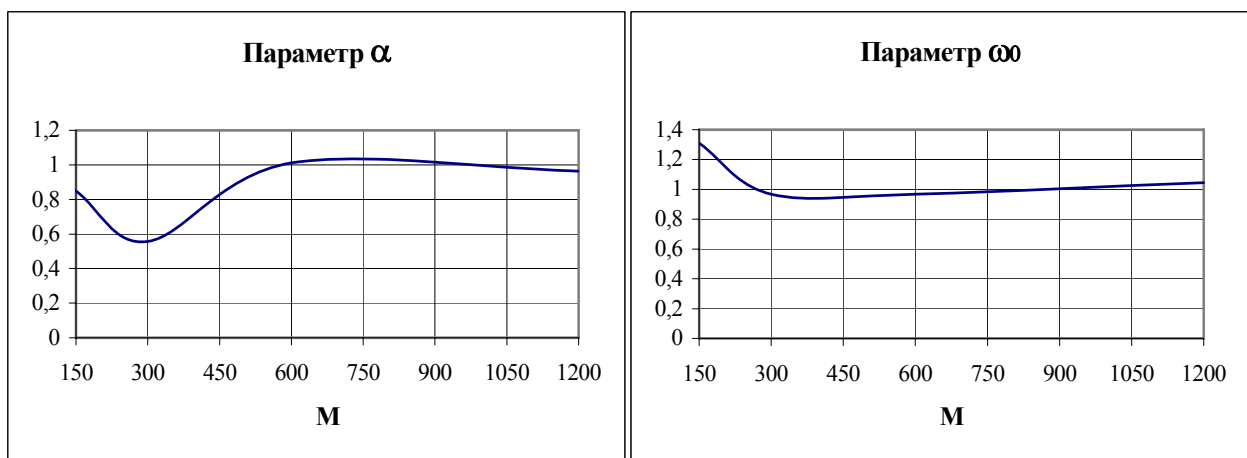


Рисунок 7.31. Параметры аппроксимирующего выражения

Результаты моделирования для временного ряда с  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0^{(1)}\tau$  с параметрами  $\mu = 3, J_{\max} = 23, \Delta\tau = 0,1414$

Таблица 7.2

M	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
287	0,9392	3,5793	0,1381	0,9392	3,5793	0,1381	0,9391	3,5792	0,1381
575	1,1286	3,083	0,0944	1,1287	3,083	0,0944	1,1285	3,0831	0,0944
1150	1,5539	3,133	0,1288	1,5538	3,1331	0,1288	1,5539	3,1331	0,1288
2300	0,9664	2,8995	0,053	0,9665	2,8995	0,053	0,9665	2,8994	0,053

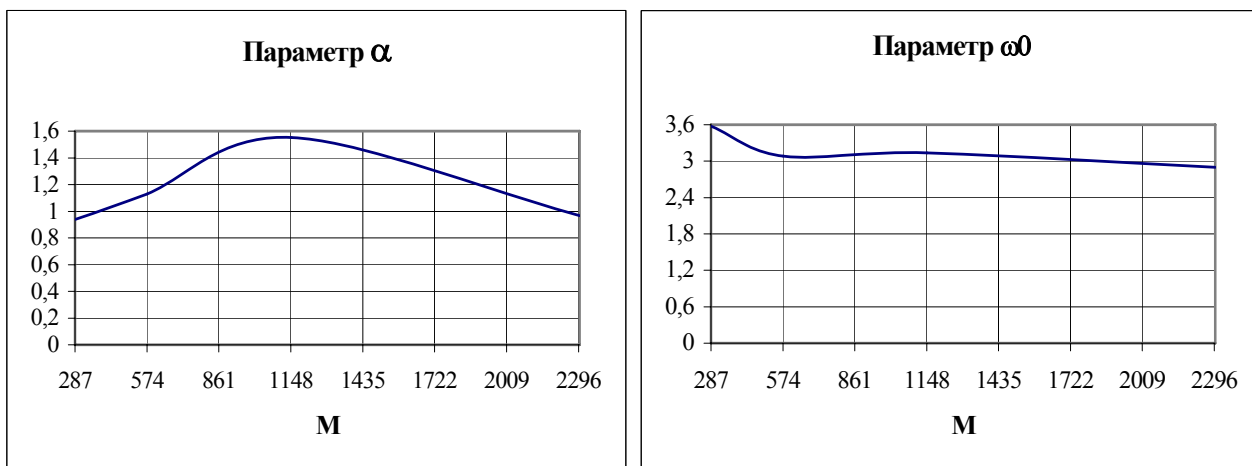


Рисунок 7.32. Параметры аппроксимирующего выражения

Результаты моделирования для временного ряда с  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0^{(1)}\tau$   
с параметрами  $\mu = 5$ ,  $J_{\max} = 38$ ,  $\Delta\tau = 0,082$

Таблица 7.3

M	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
475	0,8881	4,9225	0,1317	0,8881	4,9225	0,1317	0,8882	4,9225	0,1317
950	0,8305	5,1102	0,1	0,8305	5,1102	0,1	0,8305	5,1102	0,1
1900	1,0322	5,3253	0,0755	1,0321	5,3254	0,0755	1,0322	5,3254	0,076
3800	0,9888	5,062	0,0422	0,9888	5,062	0,0422	0,9888	5,062	0,0422

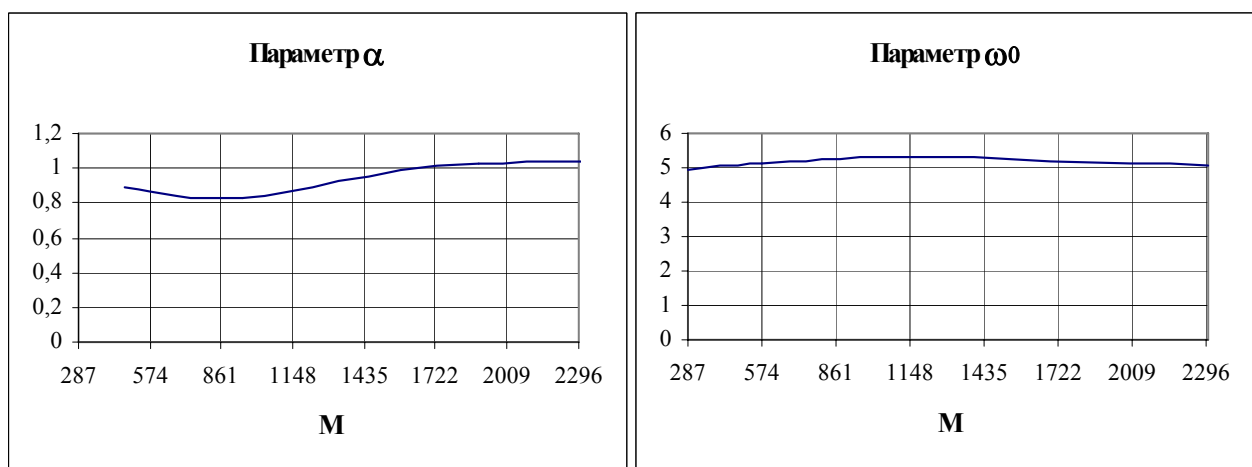


Рисунок 7.33. Параметры аппроксимирующего выражения

Результаты моделирования для временного ряда с  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0^{(1)}\tau$   
с параметрами  $\mu = 7$ ,  $J_{\max} = 53$ ,  $\Delta\tau = 0,0577$

Таблица 7.4

M	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
662	1,4948	7,1431	0,1068	1,4945	7,1431	0,1068	1,4946	7,1431	0,1068
1325	1,0383	6,7533	0,1392	1,0384	6,7532	0,1392	1,0384	6,7532	0,1392
2650	1,1609	7,1240	0,0672	1,1609	7,1240	0,0672	1,1610	7,1238	0,0672
5300	1,0682	6,9942	0,0408	1,0682	6,9942	0,0408	1,0683	6,9943	0,0408

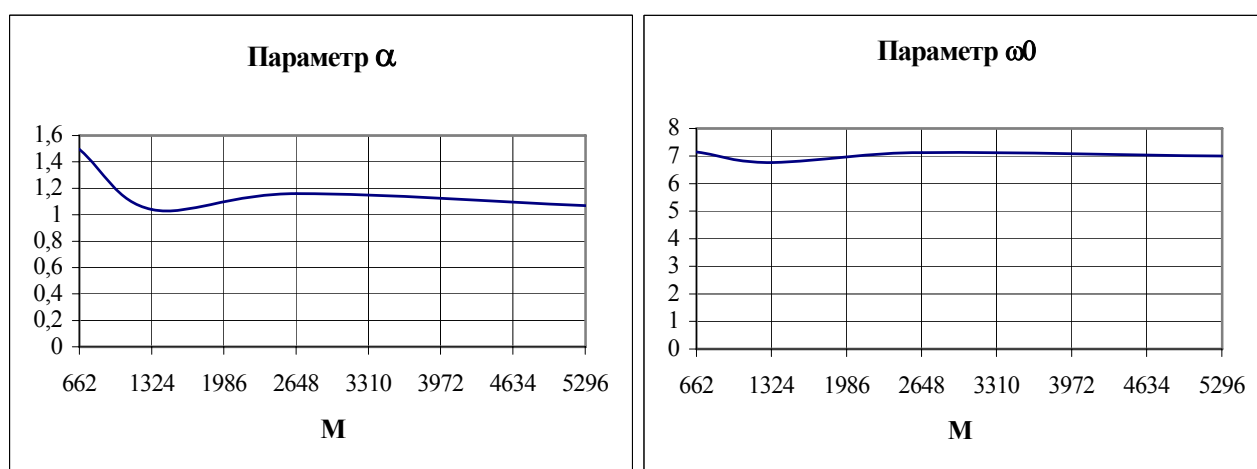


Рисунок 7.34. Параметры аппроксимирующего выражения

Результаты моделирования для временного ряда с  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0^{(1)}\tau$   
с параметрами  $\mu = 10$ ,  $J_{\max} = 76$ ,  $\Delta\tau = 0,04$

Таблица 7.5

M	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
950	0,9891	10,1704	0,0883	0,9891	10,1704	0,0883	0,9891	10,1704	0,0883
1900	0,8711	10,0883	0,0542	0,8171	10,0883	0,0542	0,8171	10,0884	0,0542
3800	0,7585	10,0438	0,0978	0,7585	10,0438	0,0978	0,7585	10,0438	0,0977
7600	0,9942	10,0510	0,0430	0,9942	10,0510	0,0430	0,9941	10,0510	0,0430

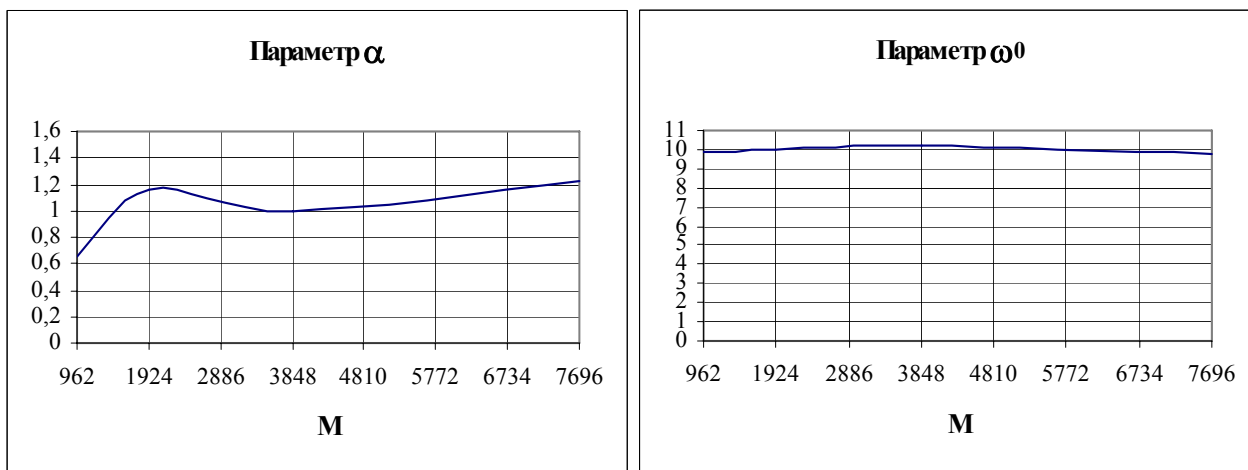


Рисунок 7.35. Параметры аппроксимирующего выражения

Результаты моделирования для временного ряда с  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (\cos \omega_0^{(1)}\tau + \frac{\lambda}{\omega_0^{(1)}} \sin \omega_0^{(1)}|\tau|)$ , с параметрами  $\mu = 1$ ,  $J_{\max} = 12$ ,  $\Delta\tau = 0,2828$

Таблица 7.6

M	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
150	Не сходится			1,3170	1,1364	0,0225	1,317	1,1400	0,0226
300	0,5320	1,1918	0,1226	0,5741	1,2425	0,1138	0,5741	1,2425	0,1138
600	1,1239	0,7986	0,0456	0,9882	0,8616	0,0402	0,9980	0,8617	0,0402
1200	0,8138	1,0556	0,0154	0,8191	1,0669	0,0122	0,8192	1,0669	0,0122

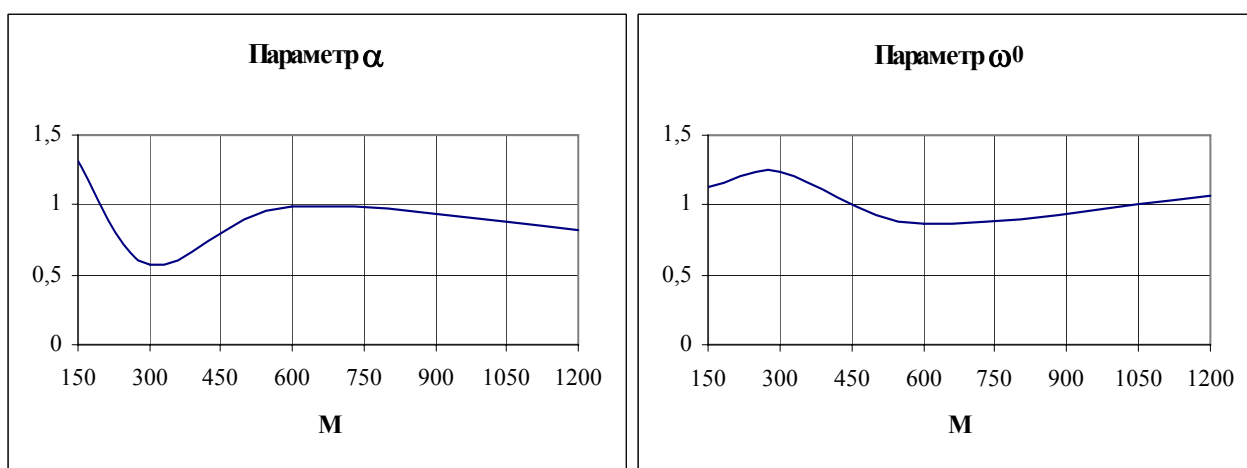


Рисунок 7.36. Параметры аппроксимирующего выражения

Результаты моделирования для временного ряда с

$$\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0^{(1)}\tau + \frac{\lambda}{\omega_0^{(1)}} \sin \omega_0^{(1)}|\tau| \right), \mu = 3, J_{\max} = 25, \Delta\tau = 0,1265$$

Таблица 7.7

M	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
312	0,6918	3,4351	0,2602	0,6909	3,4305	0,2602	0,6908	3,4306	0,2602
625	1,2338	2,9356	0,0812	1,2342	2,9364	0,0812	1,2342	2,9364	0,0812
1250	1,0840	3,1083	0,0943	1,0809	3,0991	0,0942	1,0810	3,0991	0,0942
2500	1,0387	2,9698	0,0957	1,0416	2,9768	0,0956	1,0417	2,9768	0,0956

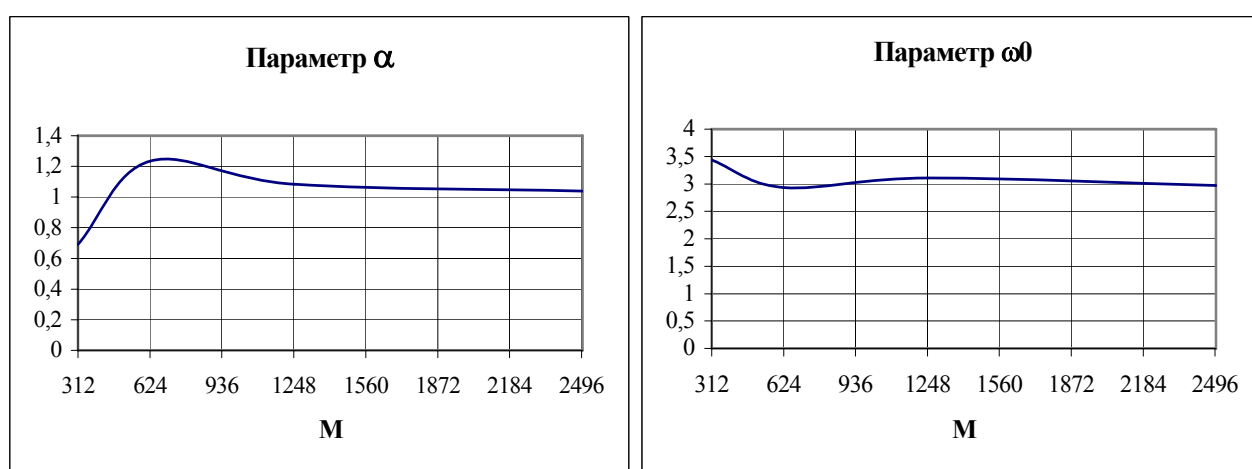


Рисунок 7.37. Параметры аппроксимирующего выражения

Результаты моделирования для временного ряда с

$$\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0^{(1)}\tau + \frac{\lambda}{\omega_0^{(1)}} \sin \omega_0^{(1)}|\tau| \right), \mu = 5, J_{\max} = 40, \Delta\tau = 0,078$$

Таблица 7.8

M	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
500	1,2106	4,9599	0,0611	1,2097	4,9562	0,0611	1,2097	4,9561	0,0611
1000	1,0708	5,3248	0,0625	1,0708	5,3251	0,0625	1,0709	5,3251	0,0625
2000	0,9652	4,8360	0,1726	0,9665	4,8398	0,1726	0,9643	4,8399	0,1726
4000	0,8395	4,7616	0,0577	0,8403	4,7647	0,0577	0,8402	4,7647	0,0577

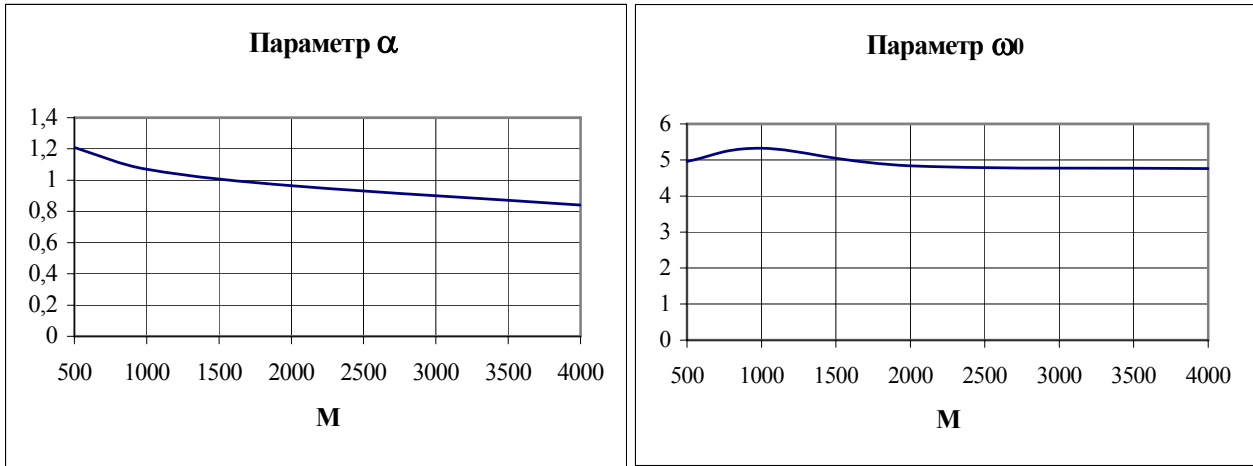


Рисунок 7.38. Параметры аппроксимирующего выражения

Результаты моделирования для временного ряда с

$$\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0^{(1)}\tau + \frac{\lambda}{\omega_0^{(1)}} \sin \omega_0^{(1)}|\tau| \right), \mu = 7, J_{\max} = 55, \Delta\tau = 0,0566$$

Таблица 7.9

M	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
687	1,0761	7,3743	0,1800	1,0758	7,3715	0,1800	1,0759	7,3714	0,1800
1375	0,8862	7,2633	0,1138	0,8860	7,2621	0,1138	0,8860	7,2622	0,1138
2750	0,9321	6,9276	0,0679	0,9322	6,9285	0,0679	0,9322	6,9285	0,0679
5500	0,8826	7,1282	0,0763	0,8827	7,1285	0,0763	0,8827	7,1285	0,0760

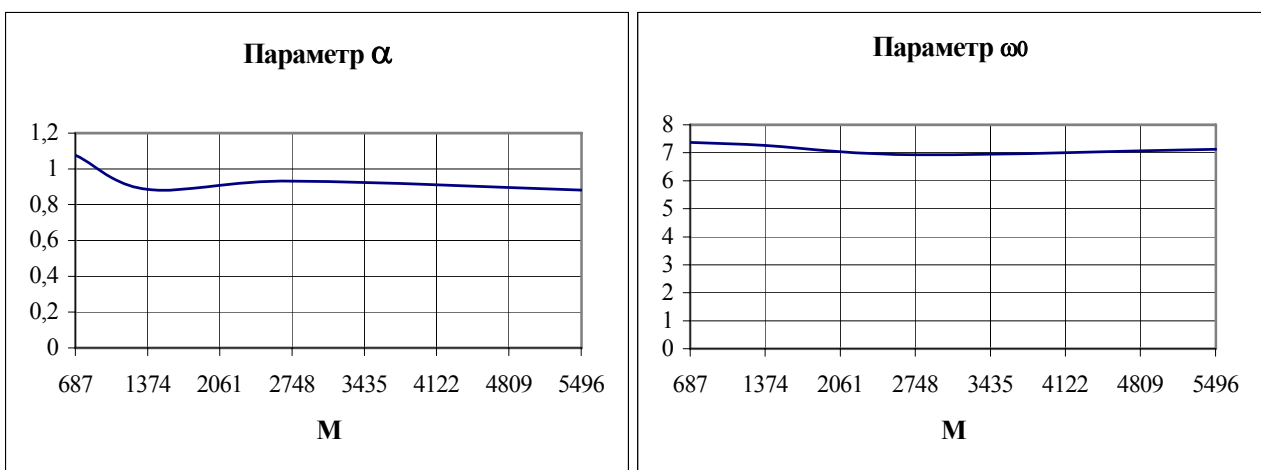


Рисунок 7.39. Параметры аппроксимирующего выражения

Результаты моделирования для временного ряда с

$$\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0^{(1)}\tau + \frac{\lambda}{\omega_0^{(1)}} \sin \omega_0^{(1)}|\tau| \right), \mu = 10, J_{\max} = 77, \Delta\tau = 0,0398$$

Таблица 7.10

M	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
962	0,6502	9,8819	0,0690	0,6502	9,8822	0,0690	0,6502	9,8822	0,0690
1925	1,1517	9,9765	0,1809	1,1517	9,9759	0,1809	1,1517	9,9760	0,1809
3850	0,9932	10,1873	0,1225	0,9932	10,1859	0,1225	0,9931	10,1860	0,1225
7700	1,2182	9,8006	0,1116	1,2189	9,8042	0,1116	1,2189	9,8041	0,1116

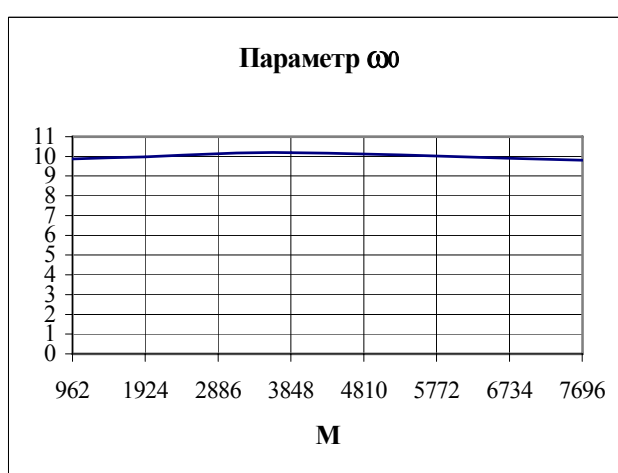
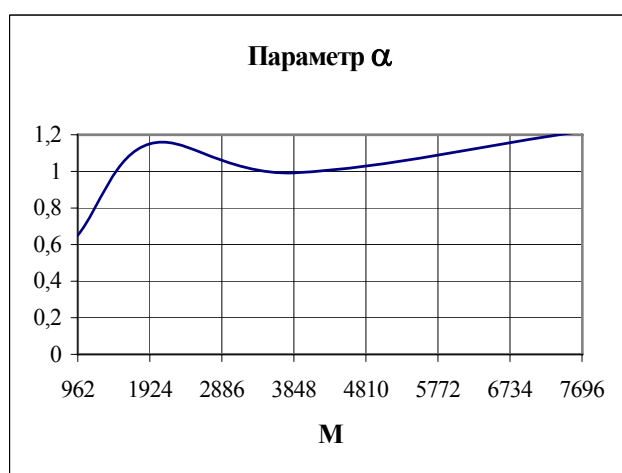


Рисунок 7.40. Параметры аппроксимирующего выражения

Результаты моделирования для временного ряда с

$$\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0^{(1)}\tau - \frac{\lambda}{\omega_0^{(1)}} \sin \omega_0^{(1)}|\tau| \right), \mu = 1, J_{\max} = 12, \Delta\tau = 0,2828$$

Таблица 7.11

M	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
150	1,0734	1,0339	0,0799	1,0734	1,0340	0,0799	1,0450	1,6677	0,2317
300	1,0861	0,8763	0,0723	1,0861	0,8761	0,0723	1,0582	1,5608	0,2498
600	1,0060	0,9442	0,0434	1,0059	0,9442	0,0434	0,9522	1,5272	0,2222
1200	1,0561	0,8113	0,0483	1,0561	0,8112	0,0483	1,0233	1,5088	0,2435



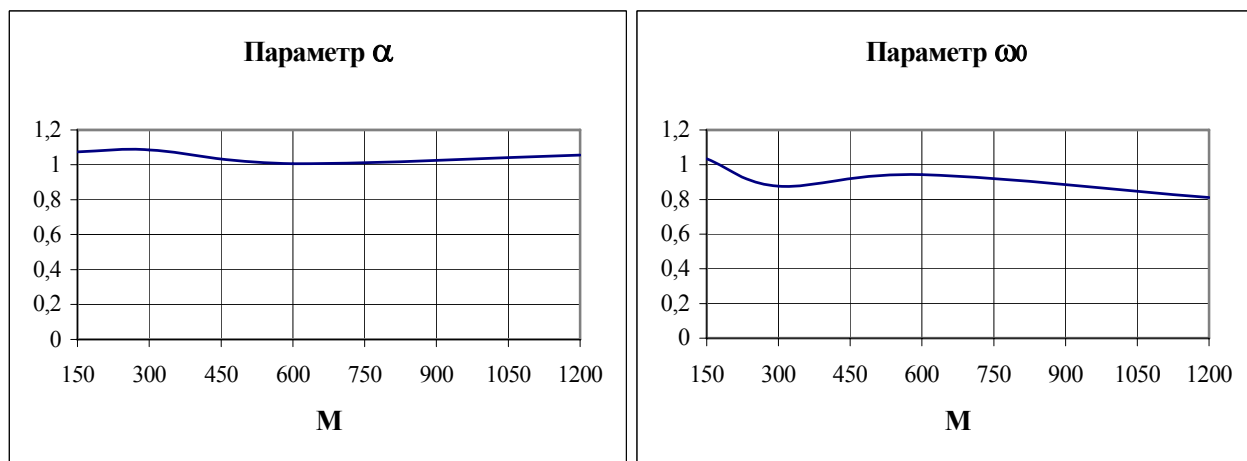


Рисунок 7.41. Параметры аппроксимирующего выражения

Результаты моделирования для временного ряда с  

$$\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0^{(1)}\tau - \frac{\lambda}{\omega_0^{(1)}} \sin \omega_0^{(1)}|\tau| \right), \mu = 3, J_{\max} = 20, \Delta\tau = 0,15$$

Таблица 7.12

M	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
250	0,6941	3,0126	0,0801	0,6941	3,0125	0,0801	0,6827	3,1081	0,1125
500	1,0904	2,7562	0,0654	1,0905	2,7562	0,0654	1,0551	3,0034	0,1399
1000	1,1275	3,2255	0,0949	1,1276	3,2255	0,0949	1,1048	3,4432	0,1449
2000	1,0327	2,976	0,0627	1,0327	2,9786	0,0627	1,0130	3,1880	0,1280

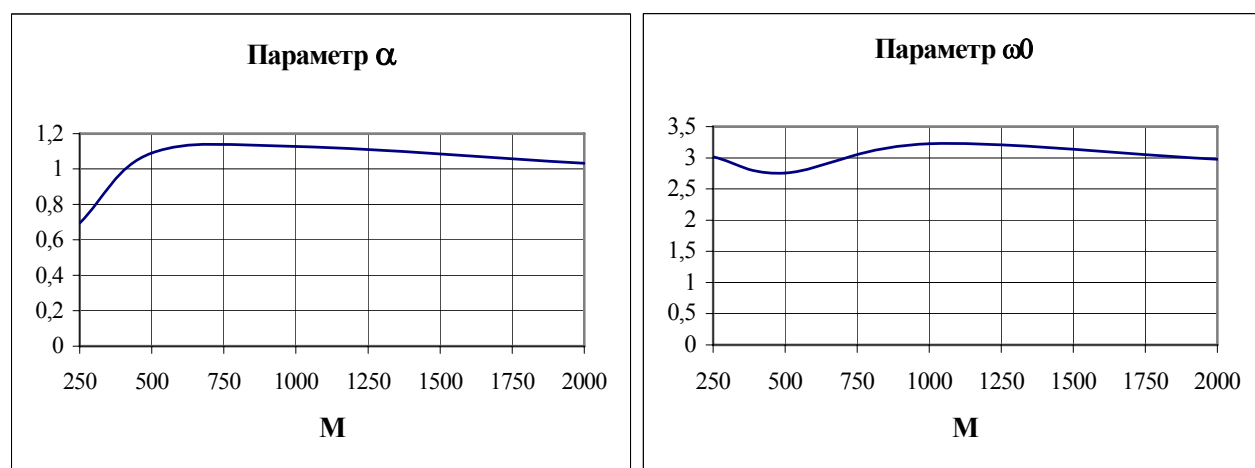


Рисунок 7.42. Параметры аппроксимирующего выражения

Результаты моделирования для временного ряда с

$$\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0^{(1)}\tau - \frac{\lambda}{\omega_0^{(1)}} \sin \omega_0^{(1)}|\tau| \right), \mu = 5, J_{\max} = 37, \Delta\tau = 0,0853$$

Таблица 7.13

M	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
462	1,1096	5,1968	0,1427	1,1096	5,1968	0,1427	1,1008	5,3198	0,1584
925	0,8317	5,2132	0,1228	0,8318	5,2131	0,1228	0,8245	5,2817	0,1341
1850	1,2294	5,1964	0,0547	1,2294	5,1964	0,0547	1,2155	5,3618	0,0960
3700	0,9966	5,0762	0,1077	0,9966	5,0762	0,1077	0,9855	5,1957	0,1274

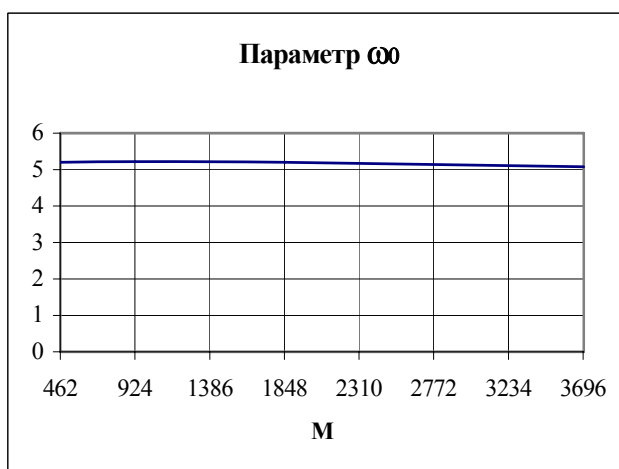
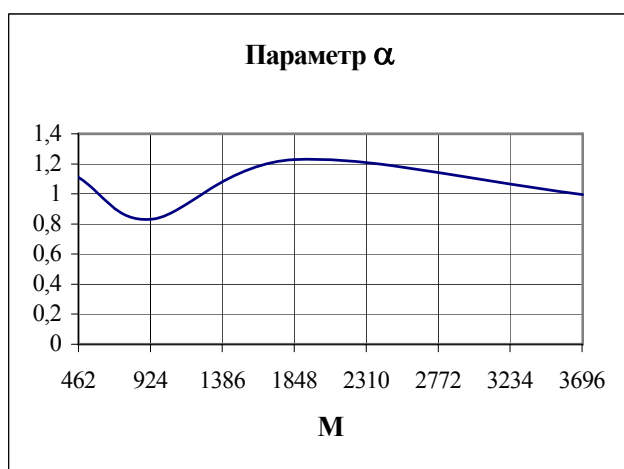


Рисунок 7.43. Параметры аппроксимирующего выражения

Результаты моделирования для временного ряда с

$$\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0^{(1)}\tau - \frac{\lambda}{\omega_0^{(1)}} \sin \omega_0^{(1)}|\tau| \right), \mu = 7, J_{\max} = 52, \Delta\tau = 0,0590$$

Таблица 7.14

M	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
650	0,8740	6,9976	0,1837	0,8741	6,9975	0,1837	0,8685	7,0514	0,1884
1300	1,1144	6,6715	0,1230	1,1144	6,6715	0,1230	1,1094	6,7766	0,1355
2600	0,9827	7,1754	0,0576	0,9827	7,1754	0,0576	0,9782	7,2502	0,0747
5200	1,0243	7,0256	0,0539	1,0243	7,0256	0,0539	1,0185	7,1027	0,0734

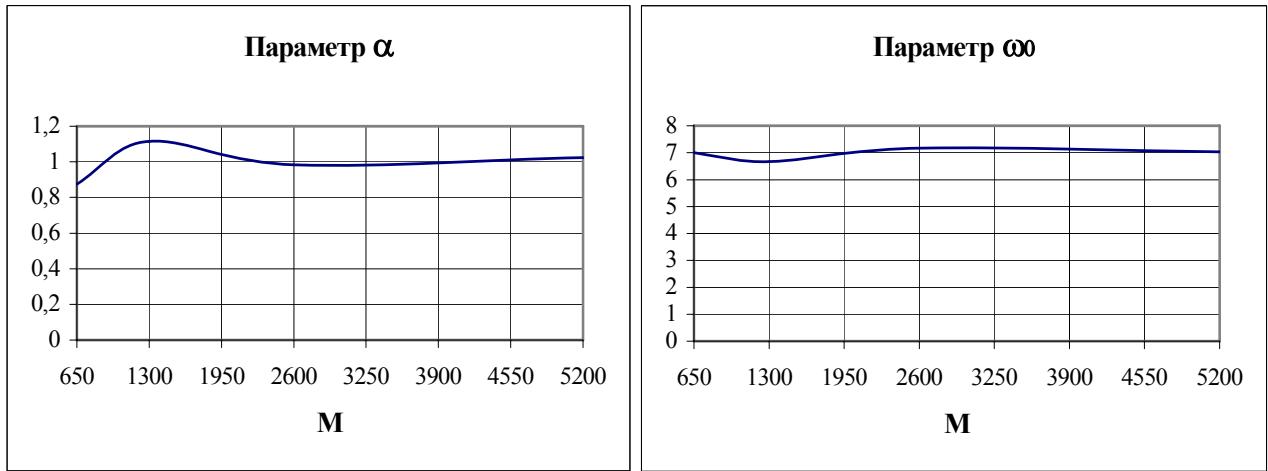


Рисунок 7.44. Параметры аппроксимирующего выражения

Результаты моделирования для временного ряда с

$$\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0^{(1)}\tau - \frac{\lambda}{\omega_0^{(1)}} \sin \omega_0^{(1)}|\tau| \right), \mu = 10, J_{\max} = 75, \Delta\tau = 0,0406$$

Таблица 7.15

M	Метод Ньютона (аналитический)			Метод Ньютона (конечно-разностный)			Метод деформированного многогранника		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
937	0,9441	9,9860	0,0847	0,9441	9,9861	0,0847	0,9420	10,0370	0,0909
1875	1,2445	10,2509	0,1129	1,2445	10,2509	0,1129	1,2378	10,3283	0,1199
3750	1,0767	9,8834	0,0478	1,0767	9,8834	0,0478	1,0729	9,9461	0,0609
7500	0,8902	10,1534	0,0733	0,8902	10,1554	0,0733	0,8873	10,1974	0,0794

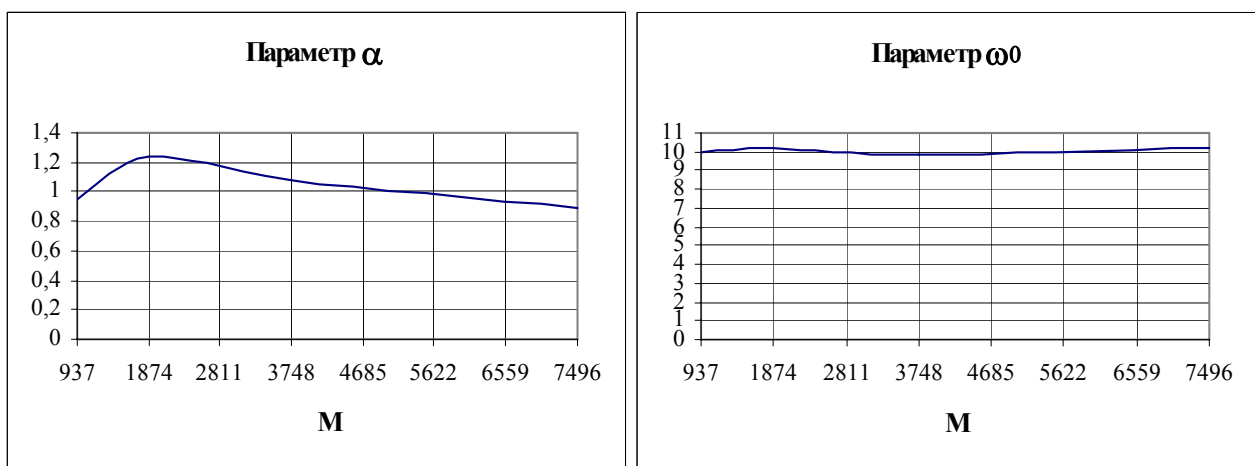


Рисунок 7.45. Параметры аппроксимирующего выражения

Анализ результатов моделирования позволяет сделать следующие выводы:

1. в большинстве экспериментов рассмотренные методы аппроксимации для одинаковых параметров корреляционной функции обеспечивают одинаковые погрешности аппроксимации;
2. погрешность аппроксимации уменьшается с увеличением объема выборки и увеличением показателя колебательности;
3. погрешность аппроксимации при  $M=100 \text{ ent}[\tau_{k\text{max}} / \Delta\tau]$  в большинстве случаев обеспечивает допустимую погрешность аппроксимации;
4. частота колебания корреляционных функций оценивается точнее, чем показатель затухания.

Качество аппроксимации для многократных выборок можно косвенно определить по результатам аппроксимации спектральных плотностей мощности параметрическими моделями (см. рис. 7.46-7.50).

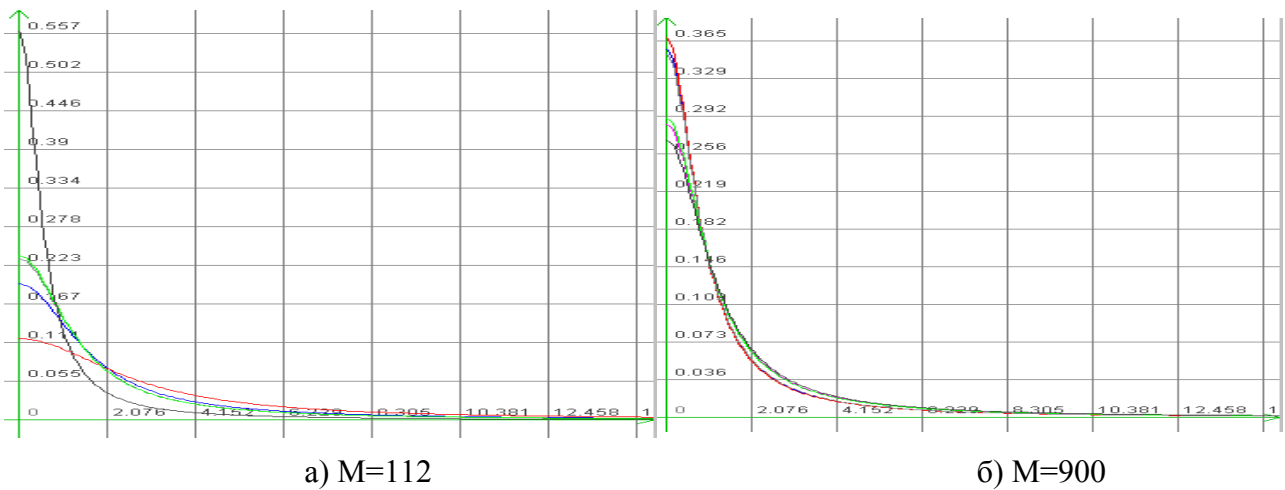


Рисунок 7.46. Спектры случайных процессов с  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ ,  $J_{\text{max}} = 9$

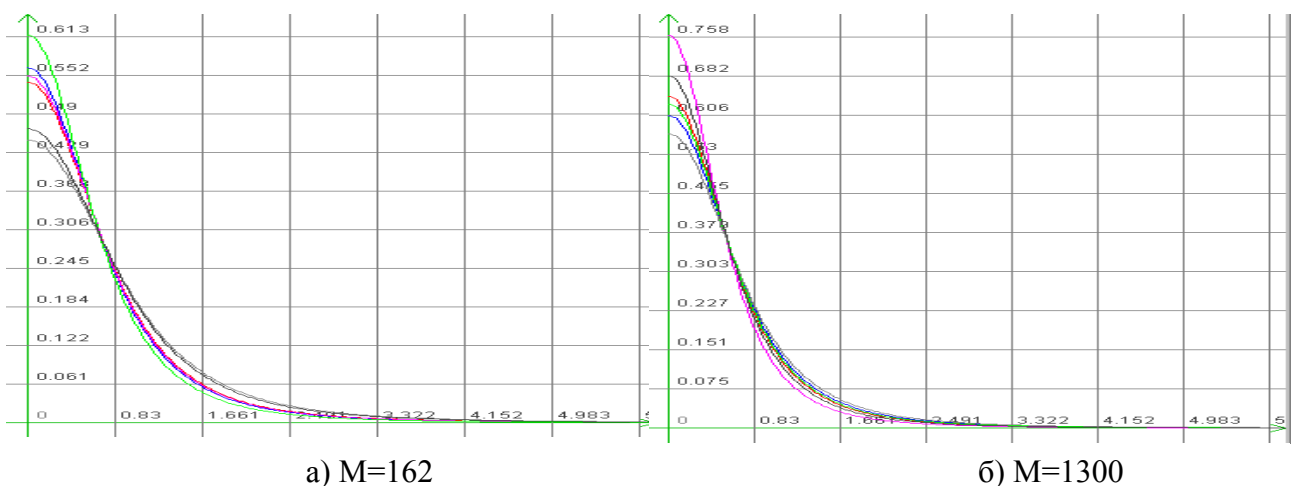
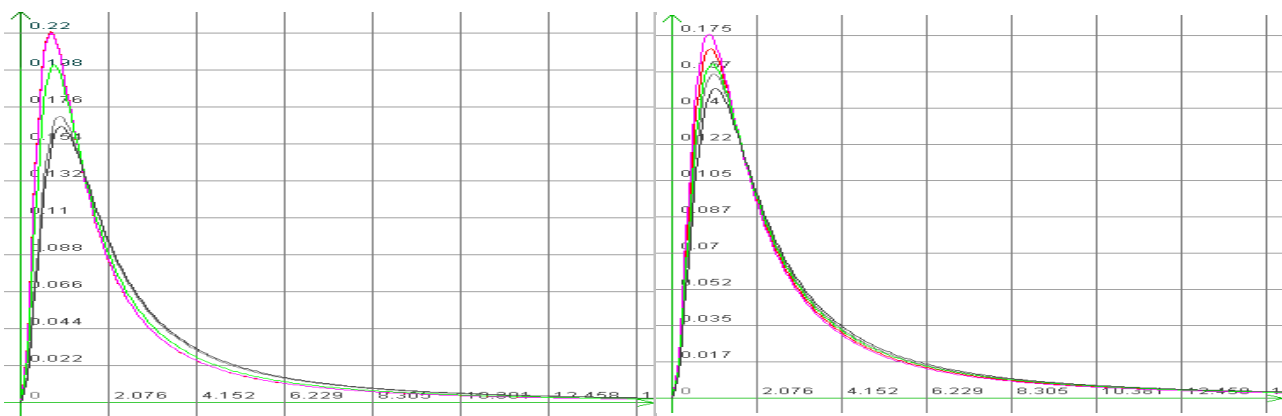


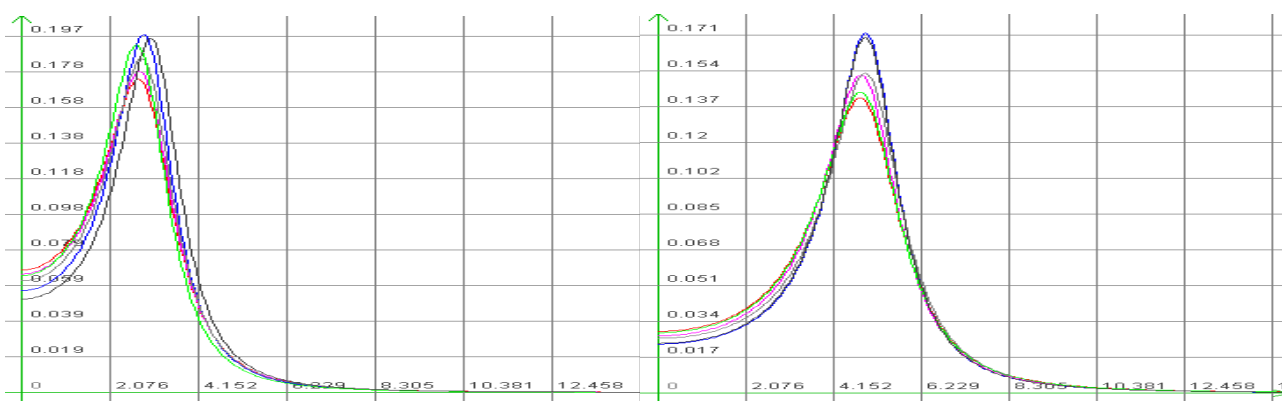
Рисунок 7.47. Спектры случайных процессов с  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$ ,  $J_{\text{max}} = 13$



а)  $M=238$

б)  $M=1900$

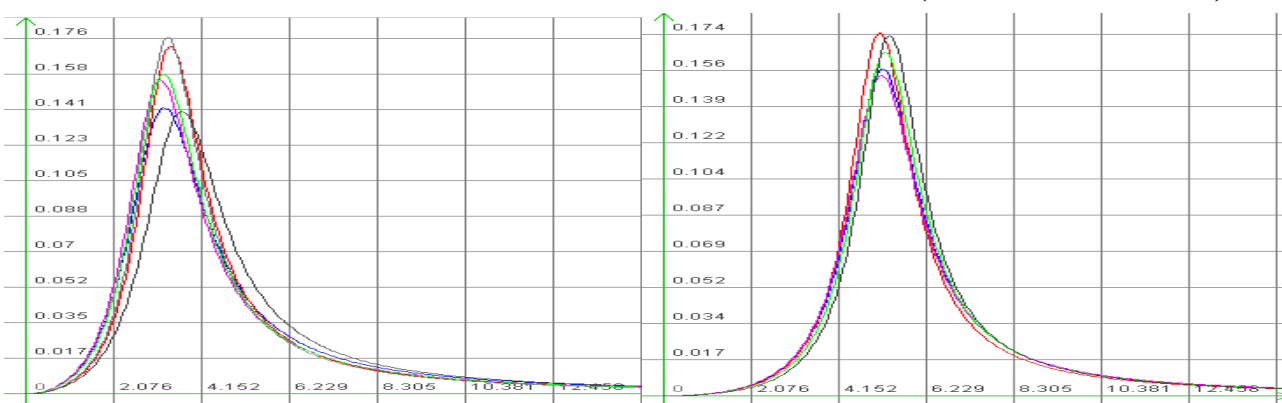
Рисунок 7.48. Спектры случайных процессов с  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$ ,  $J_{\max} = 19$



а)  $\mu = 3$ ,  $M=2500$ ,  $J_{\max} = 25$

б)  $\mu = 5$ ,  $M=4000$ ,  $J_{\max} = 40$

Рисунок 7.49. Спектры случайных процессов с  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \sin \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$



а)  $\mu = 3$ ,  $M=2500$ ,  $J_{\max} = 25$

б)  $\mu = 5$ ,  $M=3700$ ,  $J_{\max} = 37$

Рисунок 7.50. Спектры случайных процессов с  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \sin \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$

Анализ рисунков 7.46-7.50 показывает хорошую повторяемость кривых спектральных плотностей мощности для объёма выборки  $N = 100 J_{\max}$ . Разброс кривых объясняется разбросом параметров генератора псевдослучайных временных рядов, т.е. качеством генератора.

#### 7.4. Анализ алгоритмов аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра

Проанализируем зависимость погрешности аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра от объёма выборки. Параметры модели определяются в соответствии с рекомендациями подразделов 4.1 и 4.6.

Зависимость погрешности аппроксимации от объёма выборки для

$$\text{корреляционной функции } \rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0^{(1)}\tau$$

Таблица 7.16

$\mu$	1				3			
№\M	150	300	600	1200	287	575	1150	2300
1	0,1097	0,0844	0,0661	0,0651	0,0828	0,095	0,0702	0,0753
2	0,0831	0,0746	0,0639	0,0665	0,0882	0,0852	0,0816	0,0888
3	0,0825	0,0822	0,0621	0,0624	0,0803	0,0936	0,0786	0,0729
4	0,0955	0,0761	0,0635	0,0622	0,0939	0,0976	0,0748	0,0748
5	0,0657	0,0822	0,0713	0,0601	0,0778	0,128	0,0792	0,0713
6	0,1009	0,0715	0,0689	0,0631	0,0705	0,0863	0,0773	0,0836
7	0,0966	0,0759	0,0661	0,0654	0,1012	0,0904	0,0885	0,0734
8	0,0921	0,0649	0,0533	0,066	0,1635	0,0975	0,0793	0,0748
9	0,0853	0,0753	0,0744	0,0683	0,1195	0,086	0,0997	0,09
10	0,0717	0,0694	0,076	0,0617	0,0834	0,0907	0,0745	0,0755
11	0,1063	0,0671	0,0838	0,0591	0,1469	0,0695	0,0753	0,0936
12	0,0714	0,0852	0,0733	0,0604	0,0953	0,0828	0,0873	0,0757
13	0,0808	0,0776	0,0717	0,0669	0,0813	0,1024	0,0806	0,0779
14	0,1075	0,0772	0,0736	0,0737	0,0785	0,0794	0,0795	0,0803
15	0,0634	0,0617	0,062	0,0613	0,1201	0,0834	0,0696	0,0901
16	0,1053	0,1106	0,0693	0,0792	0,0764	0,0869	0,0847	0,0823
17	0,0602	0,0643	0,0735	0,0783	0,0989	0,0777	0,0779	0,076
18	0,0806	0,0565	0,0702	0,079	0,0774	0,0866	0,0734	0,0834
19	0,0747	0,1098	0,0714	0,0657	0,0778	0,0756	0,0777	0,0861
20	0,064	0,0893	0,06	0,0628	0,1316	0,0859	0,0817	0,0775
21	0,0842	0,0616	0,0721	0,0606	0,1278	0,0708	0,0858	0,073
22	0,068	0,0904	0,0856	0,0594	0,0845	0,0742	0,0871	0,0758
23	0,0906	0,0865	0,0623	0,0643	0,1423	0,0847	0,0865	0,0796
24	0,0707	0,0768	0,0807	0,0677	0,1142	0,0732	0,0849	0,0909
25	0,0884	0,0875	0,0673	0,0771	0,0982	0,0846	0,0873	0,0882
26	0,0904	0,0707	0,0752	0,066	0,0846	0,0781	0,0783	0,0758
27	0,0847	0,0791	0,0576	0,0602	0,0636	0,0928	0,0908	0,0721
28	0,1177	0,0673	0,0756	0,0694	0,0812	0,0746	0,0858	0,0892
29	0,0986	0,0947	0,0776	0,0627	0,0977	0,0866	0,0776	0,0824
$m_\delta$	<b>0,0859</b>	<b>0,0783</b>	<b>0,0699</b>	<b>0,0660</b>	<b>0,0979</b>	<b>0,0862</b>	<b>0,0812</b>	<b>0,0804</b>
$\sigma_\delta^2$	<b>0,0002</b>	<b>0,0002</b>	<b>5,7E-05</b>	<b>3,6E-05</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0001</b>	<b>4,3E-05</b>	<b>4,5E-05</b>
$\sigma_\delta$	<b>0,0155</b>	<b>0,0130</b>	<b>7,6E-03</b>	<b>6,0E-03</b>	<b>0,0252</b>	<b>0,0116</b>	<b>6,6E-03</b>	<b>6,7E-03</b>

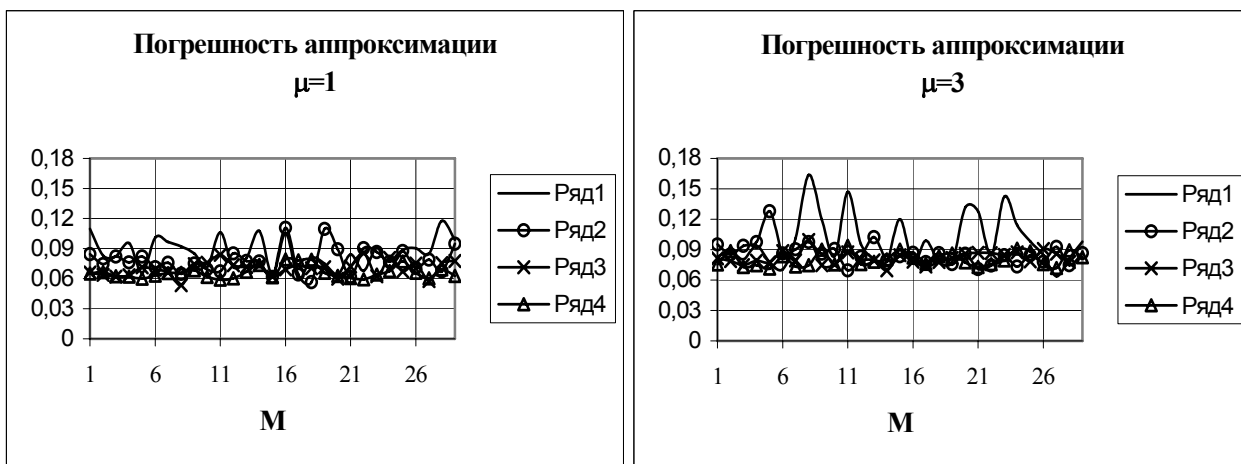


Рисунок 7.51

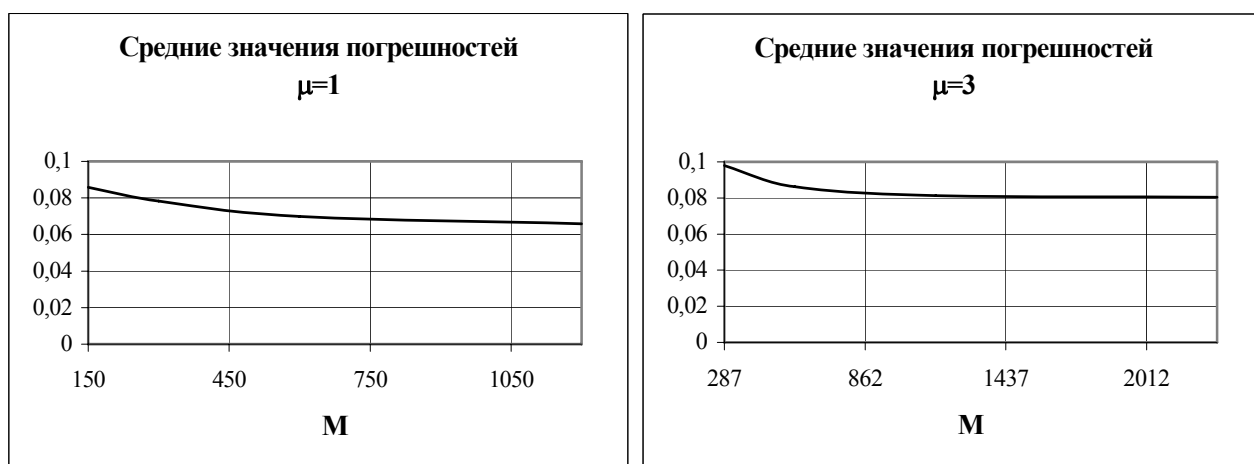


Рисунок 7.52

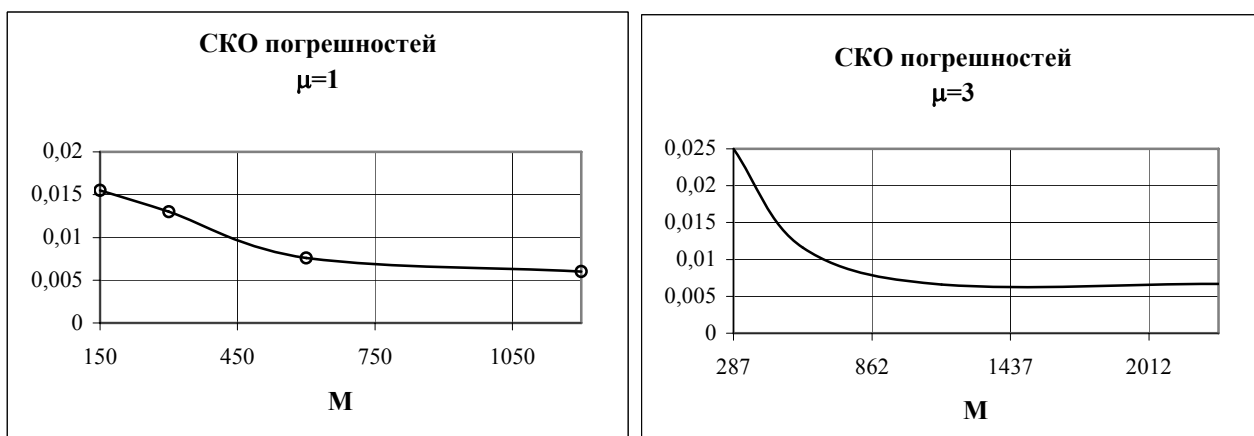


Рисунок 7.53

Анализ результатов моделирования (см. рис. 7.51-7-53) позволяет сделать следующие выводы:

1. погрешность аппроксимации уменьшается с увеличением объёма выборки;
2. погрешность аппроксимации при прочих равных условиях увеличивается с увеличением показателя колебательности;
3. зависимость погрешности аппроксимации от объёма выборки при аппроксимации ортогональными функциями Лагерра меньше, чем при аппроксимации параметрическими моделями.

Проанализируем изменение погрешности аппроксимации ортогональными функциями Лагерра и параметрическими моделями от объёма выборки (см. таблицу 7.17 и рис. 7.54-7.55). На рисунках ряд 1 соответствует аппроксимации корреляционных функций  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ , ряд 2 – ортогональными функциями Лагерра.

Сравнительный анализ результатов аппроксимации корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0^{(1)} \tau$  параметрической моделью  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  и ортогональными функциями Лагерра  $\mu = 5$ ,  $J_{\max} = 38$ .

Таблица 7.17

Вид модели	$\rho_a(\tau) = e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$				$\rho_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha)$			
	№\M	475	950	1900	3800	475	950	1900
1	0,3385	0,1446	0,1267	0,0237	0,1004	0,106	0,1273	0,0757
2	0,3126	0,071	0,0844	0,0535	0,172	0,0932	0,0723	0,0784
3	0,147	0,0666	0,1364	0,0544	0,1214	0,0924	0,081	0,0671
4	0,2336	0,1037	0,0983	0,0376	0,09	0,1161	0,1074	0,0897
5	0,1649	0,0982	0,1684	0,0483	0,122	0,0989	0,1352	0,0893
6	0,3311	0,1395	0,1087	0,0868	0,1378	0,0913	0,0902	0,0667
7	0,1726	0,1558	0,0933	0,0364	0,0902	0,145	0,1204	0,0825
8	0,0856	0,1639	0,0596	0,0397	0,1021	0,0983	0,0833	0,0864
9	0,0775	0,2444	0,116	0,0318	0,0667	0,1471	0,08	0,0903
10	0,1418	0,1202	0,1071	0,0301	0,0918	0,0761	0,0806	0,0725
11	0,1328	0,0842	0,107	0,0306	0,12	0,0891	0,087	0,0796
12	0,1185	0,0895	0,0584	0,0589	0,0941	0,1218	0,0729	0,0701
13	0,2611	0,1032	0,1016	0,0237	0,1239	0,0803	0,0739	0,0711
14	0,2489	0,1203	0,0797	0,0529	0,1416	0,0718	0,103	0,0723
15	0,1285	0,0911	0,1541	0,0455	0,0825	0,1065	0,0905	0,0939
16	0,2531	0,1043	0,079	0,039	0,1441	0,1135	0,0749	0,0762
17	0,2808	0,1241	0,0992	0,0684	0,1378	0,1445	0,0793	0,079
18	0,2671	0,1395	0,0696	0,0661	0,1418	0,1193	0,0755	0,0731
19	0,1847	0,0922	0,045	0,0363	0,1172	0,1169	0,0976	0,0772
20	0,0784	0,0936	0,0936	0,0396	0,0803	0,0974	0,1125	0,0784
21	0,169	0,063	0,075	0,0535	0,1243	0,086	0,0841	0,0707
22	0,2058	0,0716	0,0648	0,039	0,1053	0,0858	0,1172	0,0852
23	0,1687	0,0916	0,0873	0,071	0,0932	0,0803	0,0988	0,0904
24	0,1743	0,1743	0,0719	0,068	0,1278	0,1341	0,0731	0,0873
25	0,096	0,1753	0,0967	0,057	0,11	0,1018	0,087	0,073
26	0,1657	0,13	0,0571	0,0642	0,1026	0,1064	0,0737	0,0731
27	0,0976	0,0876	0,0839	0,0501	0,1052	0,0835	0,0932	0,0687
28	0,1724	0,1825	0,081	0,0437	0,1126	0,1554	0,1052	0,0731
29	0,2547	0,111	0,0567	0,0448	0,1363	0,083	0,065	0,0756
$m_\delta$	<b>0,1884</b>	<b>0,1185</b>	<b>0,0917</b>	<b>0,0481</b>	<b>0,1136</b>	<b>0,1049</b>	<b>0,0911</b>	<b>0,0782</b>
$\sigma_\delta^2$	<b>0,0058</b>	<b>0,0017</b>	<b>0,0008</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0005</b>	<b>0,0003</b>	<b>6E-05</b>
$\sigma_\delta$	<b>0,0762</b>	<b>0,0417</b>	<b>0,0291</b>	<b>0,0153</b>	<b>0,0235</b>	<b>0,0230</b>	<b>0,0183</b>	<b>8E-03</b>



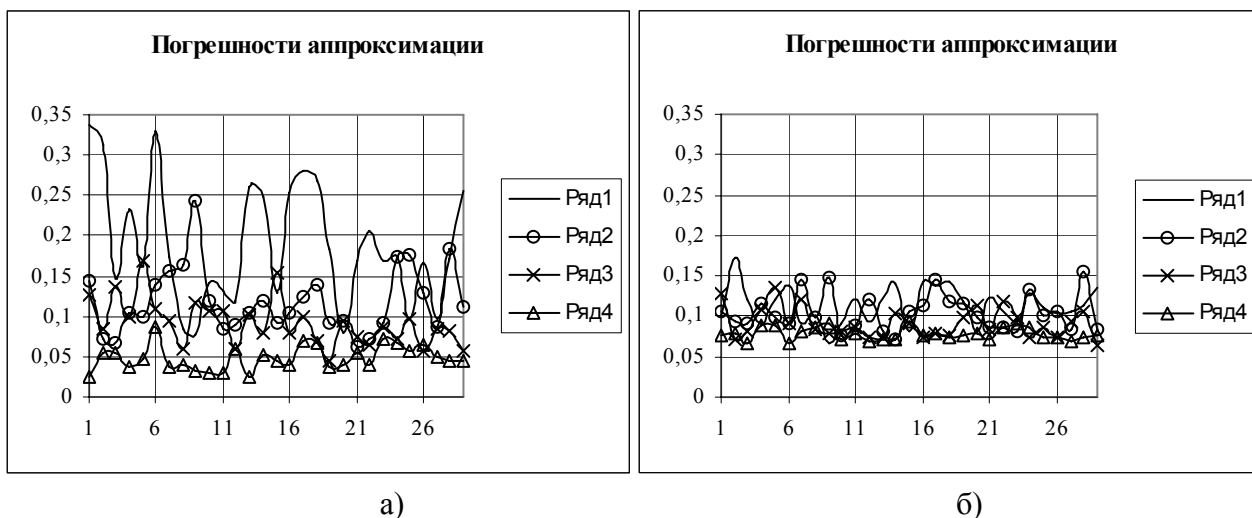


Рисунок 7.54

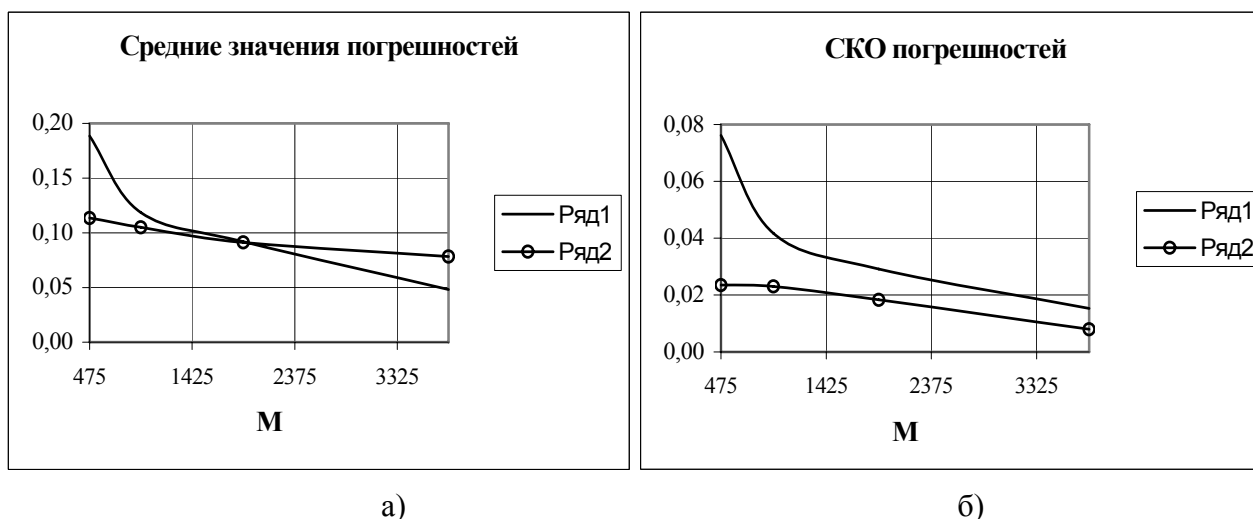


Рисунок 7.55

Анализ результатов моделирования позволяет сделать следующие выводы:

1. СКО оценки погрешностей аппроксимации больше при аппроксимации параметрическими моделями (см. рис. 7.54 б) и 7.55 б));
2. средние значения погрешностей аппроксимации при малых объёмах выборки меньше при аппроксимации ортогональными функциями Лагерра, при больших – при аппроксимации параметрическими моделями;
3. визуальный контроль за качеством аппроксимации показывает, что увеличение погрешности аппроксимации даёт «хвост» корреляционной функции (см. рис. 7.56);
4. отсюда представляет практический интерес анализ погрешности аппроксимации при малых объёмах выборки при «усечении хвоста» корреляционной функции, т.е. уменьшении числа отсчётов корреляционной функции  $J_{\max} < J_{\max_{\text{opt}}}$ , где  $J_{\max_{\text{opt}}}$  определяется по таблице 4.1 (см. рис.7.57).

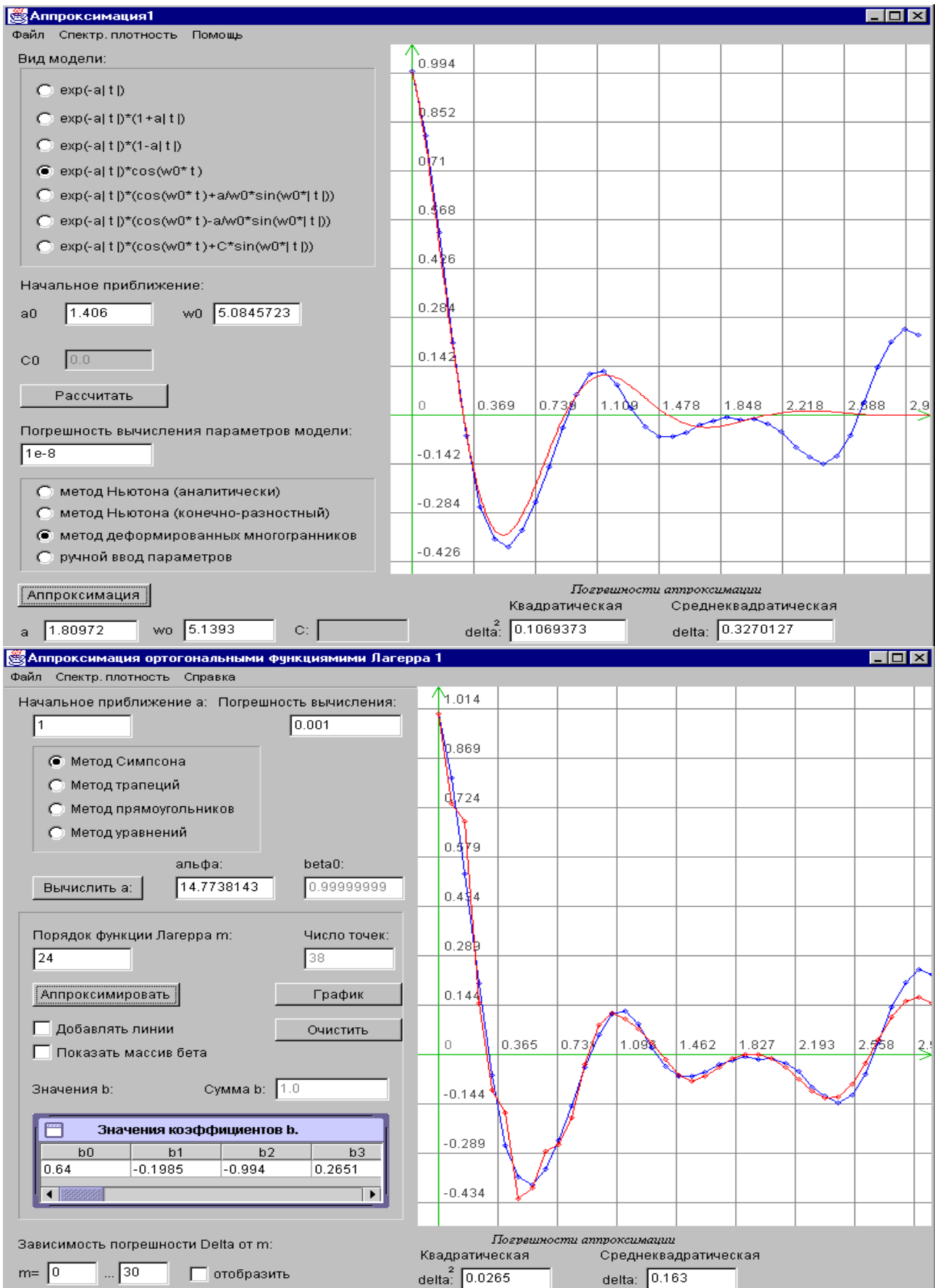


Рисунок 7.56. Результаты аппроксимации для  $M=475$ ,  $J_{\max}=38$

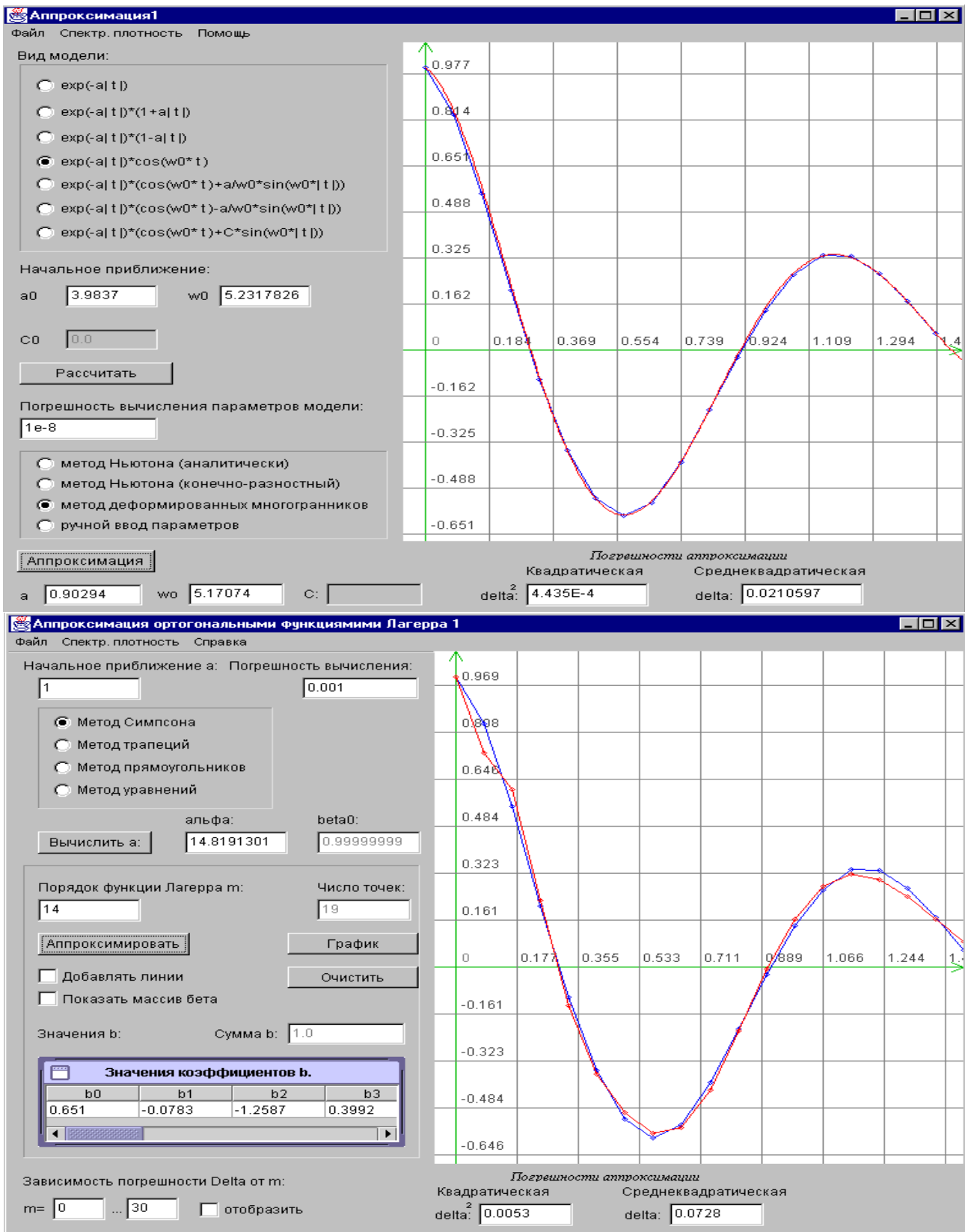


Рисунок 7.57. Результаты аппроксимации для  $M=475$ ,  $J_{\max}=19$

Результаты аппроксимации корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0^{(1)}\tau$  параметрической моделью  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0\tau$  и ортогональными функциями Лаггерра для  $\mu = 5$ ,  $M=475$ ,  $J_{\max} = 19 < J_{\max\text{opt}}$  представлены в таблице 7.18 и на рис. 7.58.

Таблица 7.18

Вид модели	$\rho_a(\tau) = e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0\tau$				$\rho_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha)$			
	№\M	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\omega_3$	$\alpha$	m	$\delta$
1	1,0791	4,6686	0,0943	4,65	13,7012	14	0,122	4,8
2	1,0505	5,0368	0,0877	5,05	14,9473	14	0,0796	5,15
3	1,1626	4,9071	0,0945	4,9	13,6299	14	0,0725	4,95
4	1,4437	4,6461	0,0714	4,65	13,7055	14	0,0813	4,75
5	0,8348	4,9625	0,0135	4,95	13,8886	14	0,0781	5
6	1,3797	5,3485	0,0566	5,35	15,6731	12	0,0729	5,25
7	1,6044	5,4389	0,0953	5,45	15,2209	12	0,074	5,6
8	1,2238	4,856	0,0644	4,85	14,4938	14	0,0864	5
9	0,9732	5,2644	0,0366	5,25	14,9792	12	0,0769	5,2
10	1,04	4,8036	0,0372	4,8	13,661	14	0,0905	4,9
11	1,051	5,4815	0,0809	5,5	14,4515	12	0,089	5,55
12	0,607	5,0723	0,0092	5,05	13,7651	14	0,0756	5,05
13	0,7814	5,1484	0,0546	5,15	14,5206	14	0,0738	5,15
14	1,1697	4,4088	0,0667	4,4	13,268	16	0,0944	4,3
15	1,4488	5,1055	0,0578	5,1	14,1127	14	0,0732	5,1
16	1,2546	5,0728	0,0689	5,05	14,2155	12	0,0789	5,1
17	1,2385	4,8689	0,0719	4,85	13,5615	14	0,0786	4,9
18	0,6479	4,542	0,0372	4,55	12,6356	16	0,1189	4,45
19	0,7264	4,6997	0,0346	4,7	12,9746	16	0,1147	4,6
20	0,8089	4,9368	0,0575	4,95	14,1371	14	0,0868	5
21	0,94	5,1085	0,0486	5,1	14,962	14	0,0723	5,2
22	1,2775	5,1217	0,0471	5,1	15,316	12	0,0775	5
23	0,8019	5,0634	0,0407	5,05	14,6641	14	0,0729	5,1
24	1,5189	5,1957	0,0838	5,15	14,7771	12	0,0708	5,2
25	1,104	4,913	0,0375	4,9	14,0392	14	0,072	5
26	1,2014	5,3392	0,1076	5,35	14,6925	12	0,1079	5,35
27	0,8357	5,1363	0,029	5,15	14,1001	14	0,0706	5,1
28	0,9029	5,1707	0,0004	5,15	14,8110	14	0,0728	5,2
29	0,8338	4,9583	0,0344	4,95	14,1977	14	0,08	5
$m_x$	<b>1,0670</b>	<b>5,0095</b>	<b>0,0559</b>	<b>5,0379</b>	<b>14,2449</b>	<b>13,6552</b>	<b>0,0833</b>	<b>5,0328</b>
$\sigma_x^2$	<b>0,0710</b>	<b>0,0669</b>	<b>0,0007</b>	<b>0,0949</b>	<b>0,5082</b>	<b>1,4483</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0765</b>
$\sigma_x$	<b>0,2664</b>	<b>0,2587</b>	<b>0,0273</b>	<b>0,3081</b>	<b>0,7129</b>	<b>1,2034</b>	<b>0,0148</b>	<b>0,2765</b>

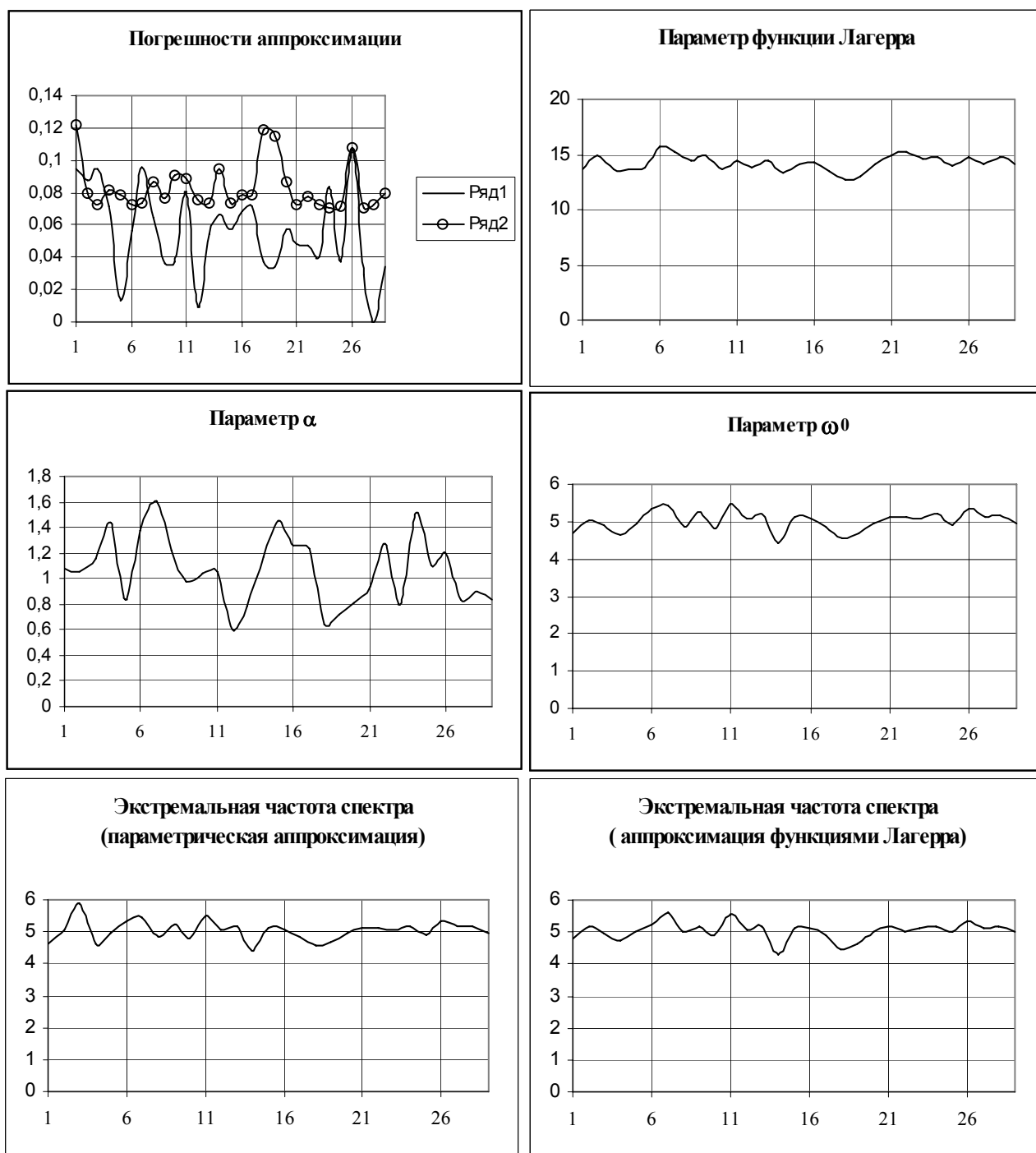


Рисунок 7.58

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. погрешность аппроксимации при одинаковых параметрах аппроксимируемой корреляционной функции меньше при аппроксимации параметрическими моделями;
2. СКО погрешности меньше при аппроксимации ортогональными функциями Лагерра, чем при аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями;
3. параметр функций Лагерра и частота колебания корреляционной функции при аппроксимации параметрическими моделями оцениваются с большей точностью, чем показатель затухания корреляционной функции;

4. экстремальные частоты спектральной плотности мощности для разных моделей оцениваются с одинаковой точностью (СКО совпадают с точностью до третьего знака).

Проанализируем результаты аппроксимации корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0^{(1)}\tau$  параметрической моделью  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0\tau$  и ортогональными функциями Лагерра для  $\mu = 7$ ,  $M=662$ . В таблице 7.19 и на рис. 7.60 приведены результаты для  $J_{\max} = 53$ , в таблице 7.20 и на рис. 7.61 – для  $J_{\max} = 18$ .

Таблица 7.19

Вид модели	$\rho_a(\tau) = e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0\tau$				$\rho_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha)$			
	№\M	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\omega_3$	$\alpha$	m	$\delta$
1	0,5616	6,9589	0,1407	6,95	19,4363	26	0,1328	6,95
2	0,8807	6,6557	0,1373	6,65	17,9272	20	0,109	6,55
3	0,7907	7,0322	0,0879	7,05	18,2964	16	0,0808	7
4	1,0874	7,2373	0,0635	7,25	19,7493	16	0,1204	7,2
5	0,8909	6,8346	0,2277	6,85	19,9722	24	0,1483	6,75
6	1,0069	7,2705	0,1452	7,25	19,7647	24	0,1274	7,45
7	0,7072	6,9988	0,0877	7	19,0499	26	0,1376	7
8	0,8695	6,9532	0,1238	6,95	18,6067	16	0,0815	6,9
9	1,092	6,6656	0,1619	6,65	19,0571	16	0,1072	6,5
10	1,2093	6,6893	0,094	6,7	18,025	14	0,0827	6,6
11	1,1282	6,0581	0,3517	6,05	18,1774	24	0,1407	5,75
12	1,1724	7,0035	0,213	7	18,9264	18	0,1002	7,2
13	1,0651	7,5515	0,3277	7,55	19,9022	26	0,135	7,6
14	1,0957	7,2782	0,1979	7,3	19,3474	26	0,1422	7,35
15	0,6033	6,8	0,1634	6,8	18,3789	26	0,1178	6,8
16	0,643	7,1869	0,1783	7,2	19,1189	26	0,144	7,15
17	1,2187	6,9671	0,1675	6,95	19,0049	16	0,0922	6,85
18	1,0395	6,9159	0,1569	6,9	18,7789	16	0,0767	6,8
19	0,7906	6,6956	0,1134	6,7	17,5178	20	0,1054	6,65
20	0,7848	6,6216	0,0959	6,6	17,8746	20	0,1081	6,55
21	1,1574	7,0313	0,3072	7,05	19,665	24	0,1327	6,6
22	0,8068	6,637	0,0871	6,65	18,36	18	0,1107	6,6
23	0,6782	6,9765	0,2408	7	19,5996	26	0,1459	7
24	0,8383	7,348	0,1138	7,35	19,083	24	0,1229	7,4
25	0,8272	7,0945	0,1517	7,1	19,5479	22	0,1266	7,1
26	1,3766	7,1507	0,2805	7,15	20,1396	24	0,1544	6,8
27	1,3159	6,859	0,2407	6,85	19,2199	16	0,1034	6,4
28	1,1415	6,7537	0,214	6,75	18,216	26	0,1667	6,95
29	0,4326	6,6589	0,0988	6,65	18,6607	26	0,1041	6,65
$m_\delta$	<b>0,9383</b>	<b>6,9270</b>	<b>0,1714</b>	<b>6,9276</b>	<b>18,9450</b>	<b>21,4483</b>	<b>0,1192</b>	<b>6,8655</b>
$\sigma_\delta^2$	<b>0,0573</b>	<b>0,0859</b>	<b>0,0059</b>	<b>0,0880</b>	<b>0,5027</b>	<b>18,5419</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,1413</b>
$\sigma_\delta$	<b>0,2393</b>	<b>0,2931</b>	<b>0,0771</b>	<b>0,2966</b>	<b>0,7090</b>	<b>4,3060</b>	<b>0,0239</b>	<b>0,3759</b>

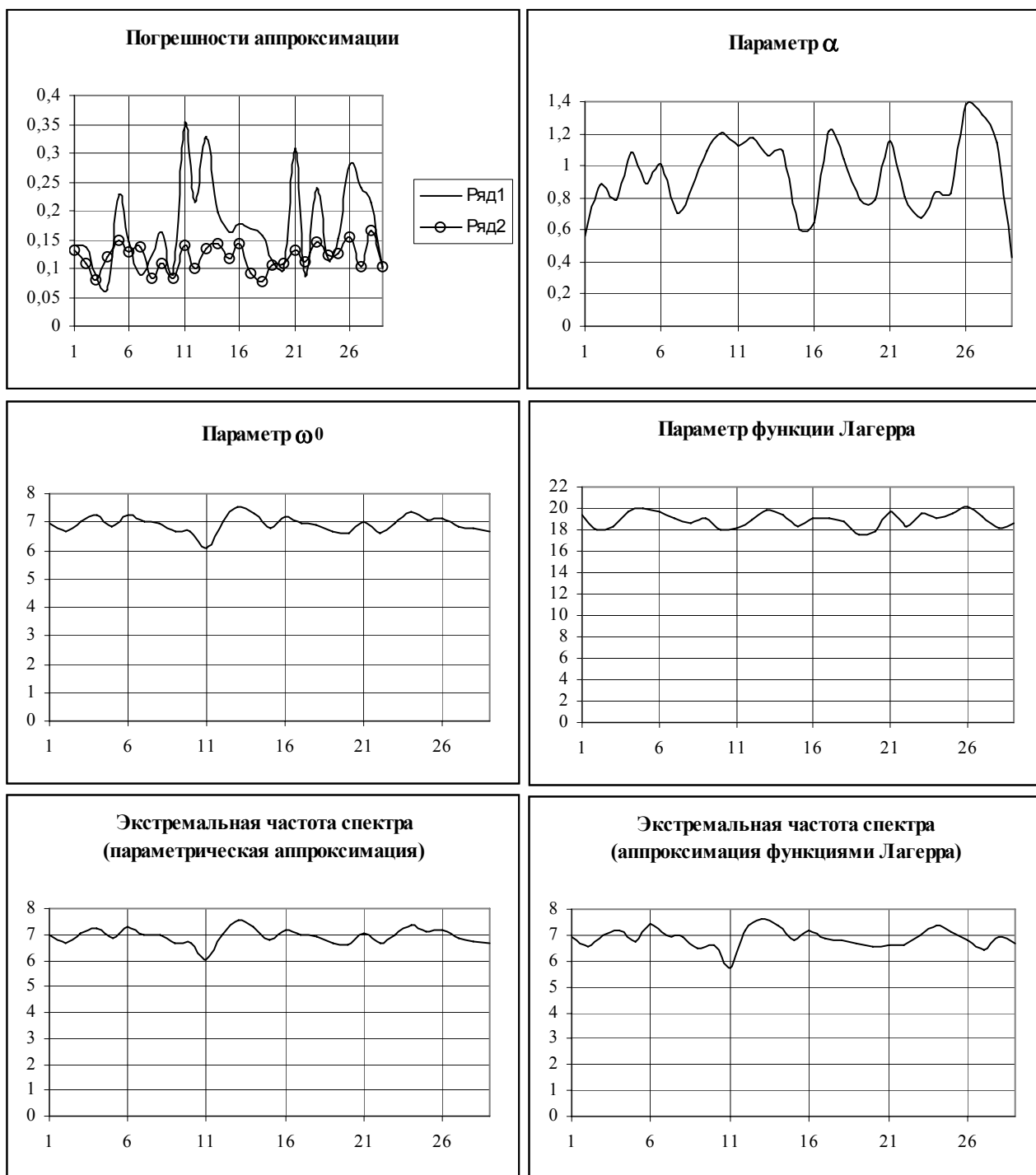


Рисунок 7.60

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. погрешности аппроксимации и СКО параметрическими моделями и ортогональными функциями Лагерра с увеличением  $\mu$  увеличились;
2. погрешности аппроксимации ортогональными функциями Лагерра меньше, чем при аппроксимации параметрическими моделями;
3. частота колебания корреляционной функции и параметр функций Лагерра оцениваются точнее, чем показатель затухания корреляционной функции.

Сравнительный анализ результатов аппроксимации корреляционной функции  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0^{(1)} \tau$  параметрической моделью  $\rho_a(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  и ортогональными функциями Лагерра  $\mu = 7$ ,  $M=662$ ,  $J_{\max}=18$ .

Таблица 7.20

Вид модели	$\rho_a(\tau) = e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$				$\rho_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha)$			
	№\M	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\omega_3$	$\alpha$	m	$\delta$
1	0,8566	7,3797	0,0295	7,4	20,0157	14	0,0755	7,4
2	0,8547	6,9215	0,0193	6,9	19,0527	16	0,1049	6,75
3	0,9369	6,8991	0,014	6,9	18,582	16	0,0955	6,8
4	1,06	7,1436	0,0353	7,15	19,3527	16	0,0809	6,95
5	0,7573	7,0594	0,0206	7,05	19,1812	16	0,1003	6,9
6	0,8199	6,9037	0,0191	6,9	18,6991	16	0,0999	6,8
7	1,109	6,8597	0,0325	6,85	18,5011	16	0,0865	6,75
8	0,9002	6,6084	0,02787	6,6	18,2483	16	0,1143	6,45
9	1,0727	7,2114	0,0307	7,2	20,2672	14	0,0771	7,3
10	1,1904	6,8489	0,031	6,85	18,2616	16	0,0831	6,9
11	1,3191	7,3339	0,047	7,35	20,1553	12	0,0703	7,4
12	0,9195	7,1288	0,0084	7,15	19,2147	16	0,084	6,95
13	0,9408	6,9794	0,0356	7	19,3205	16	0,0835	6,75
14	1,0702	7,2101	0,0354	7,2	19,7167	16	0,0895	6,95
15	0,9729	7,1085	0,0386	7,1	19,0731	16	0,0789	7
16	0,7984	7,0965	0,0102	7,1	19,114	16	0,0875	6,95
17	1,2175	7,0238	0,0349	7	18,7146	16	0,0788	7
18	1,3206	6,4224	0,0661	6,4	18,6067	16	0,1041	6,2
19	1,0757	7,1207	0,0282	7,1	19,4264	16	0,0933	6,9
20	1,06	7,307	0,0029	7,3	20,1208	14	0,0805	7,35
21	0,8983	6,9381	0,0236	6,95	19,1011	16	0,0905	6,75
22	0,7482	7,0843	0,0195	7,1	19,3577	16	0,0999	6,9
23	1,0243	6,9356	0,0193	6,95	18,6528	16	0,0924	6,85
24	1,0532	6,873	0,0274	6,85	18,2022	16	0,0954	7
25	1,0101	7,0933	0,0293	7,1	19,5021	16	0,0988	6,85
26	1,1713	7,4575	0,0464	7,45	20,6105	14	0,0703	7,45
27	0,8366	7,3281	0,0214	7,35	19,8496	16	0,0819	7,1
28	1,0452	7,417	0,0443	7,4	19,93	14	0,0794	7,4
29	0,8679	7,1704	0,015	7,15	19,6075	16	0,0949	6,95
$m_\delta$	<b>0,9968</b>	<b>7,0643</b>	<b>0,0280</b>	<b>7,0621</b>	<b>19,2565</b>	<b>15,5172</b>	<b>0,0887</b>	<b>6,9552</b>
$\sigma_\delta^2$	<b>0,0241</b>	<b>0,0540</b>	<b>0,0002</b>	<b>0,0560</b>	<b>0,4250</b>	<b>1,0443</b>	<b>0,0001</b>	<b>0,0792</b>
$\sigma_\delta$	<b>0,1552</b>	<b>0,2323</b>	<b>0,0132</b>	<b>0,2367</b>	<b>0,6519</b>	<b>1,0219</b>	<b>0,0109</b>	<b>0,2814</b>



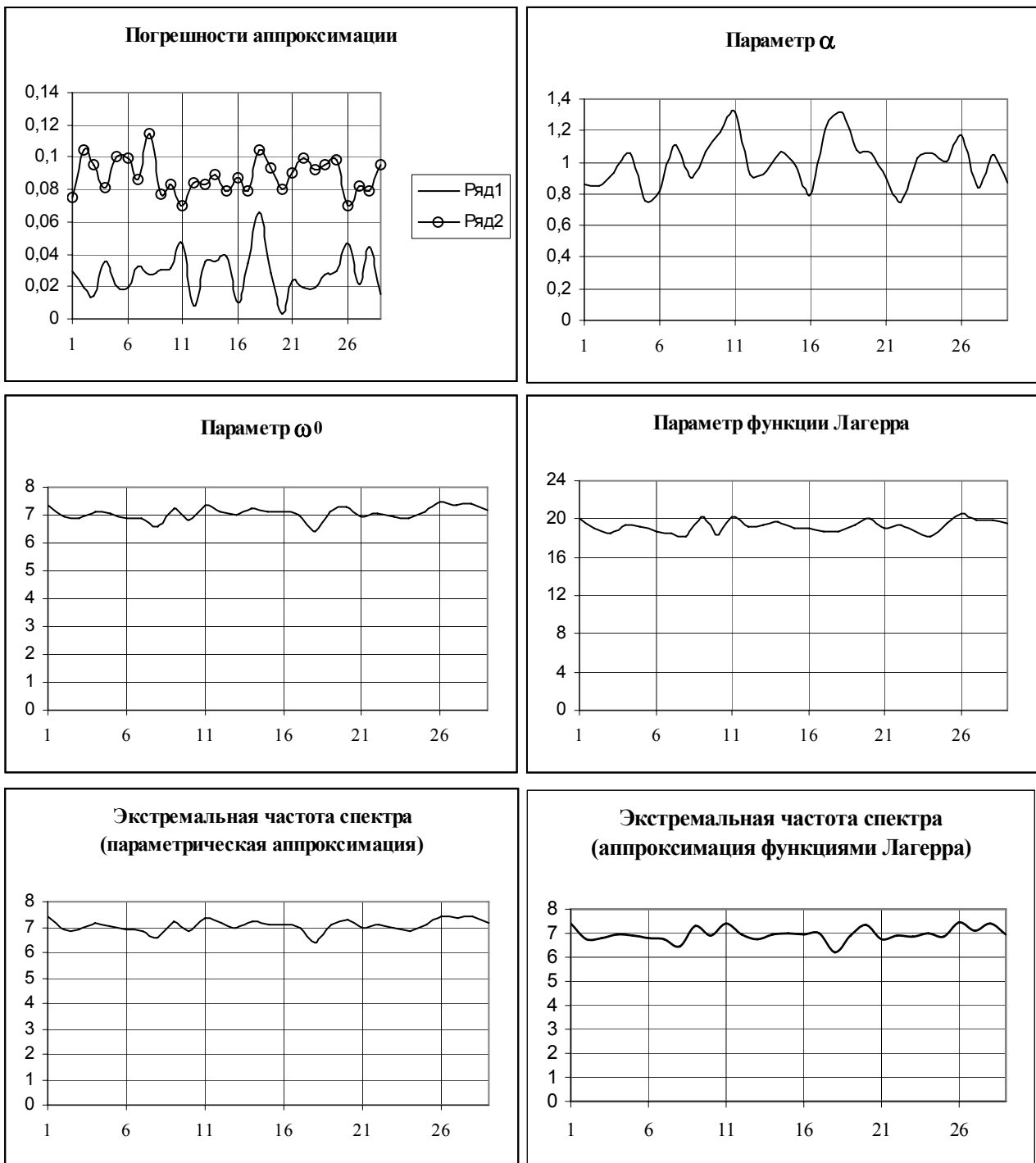


Рисунок 7.61

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. погрешности аппроксимации параметрическими моделями меньше, чем при аппроксимации ортогональными функциями Лагерра;
2. частота колебания корреляционной функции и параметр функций Лагерра оцениваются точнее, чем показатель затухания корреляционной функции;
3. экстремальные частоты спектральной плотности мощности при аппроксимации параметрическими моделями оцениваются точнее;

Таким образом, напрашивается вывод, что «усечение хвоста» корреляционной функции в общем случае уменьшает погрешность аппроксимации, позволяет определить с достаточной для практики точностью экстремальную частоту спектральной плотности мощности. Определим как в подразделе 7.3 качество аппроксимации для многократных выборок по результатам аппроксимации спектральных плотностей мощности для  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0^{(1)}\tau$  (см. рис. 7.62-7.63).

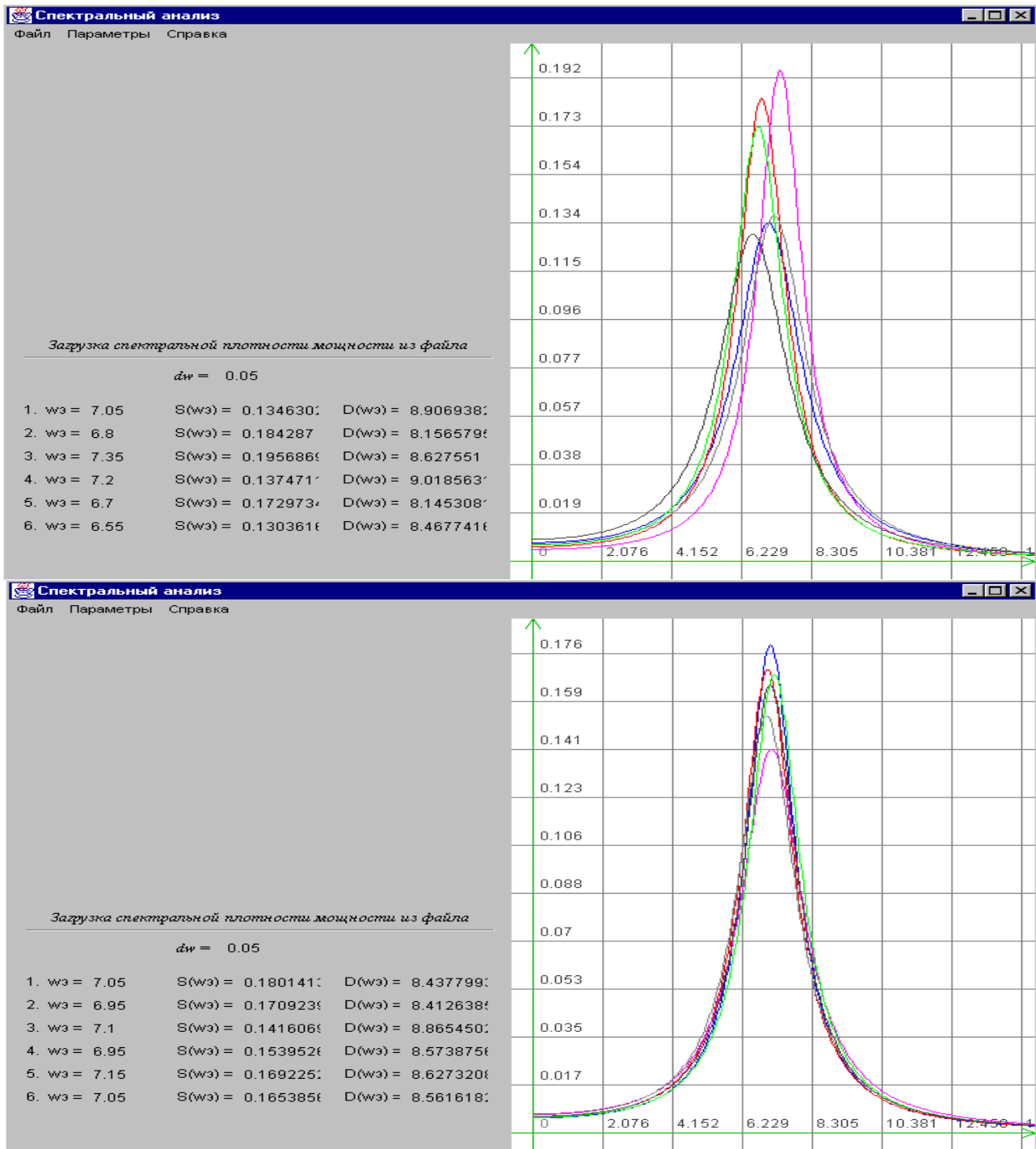


Рисунок 7.62. Аппроксимация спектральной плотности мощности параметрической моделью для  $\mu = 7$ ,  $M=662$ ,  $J_{\max}=53$  (верхний рисунок),  $J_{\max}=18$  (нижний рисунок)

Анализ рисунка 7.62 показывает, что для аппроксимации параметрическими моделями это справедливо.

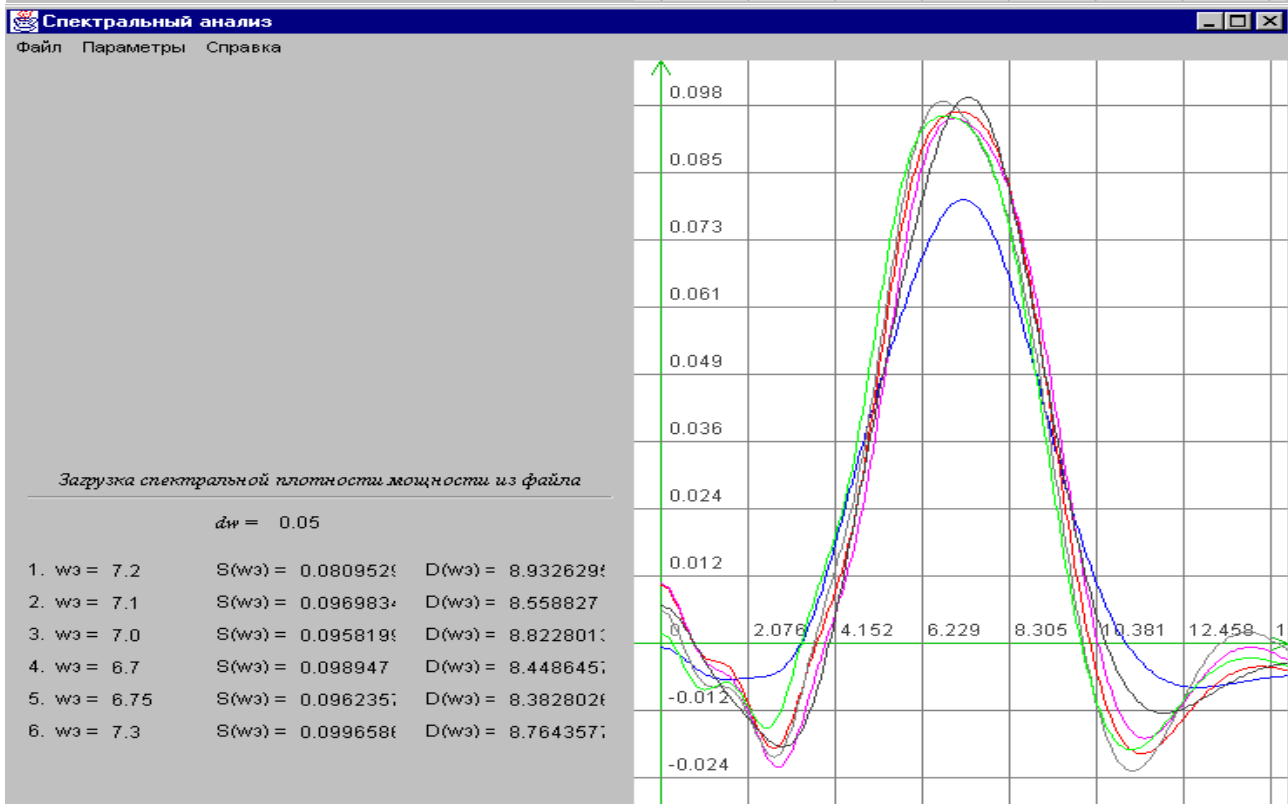
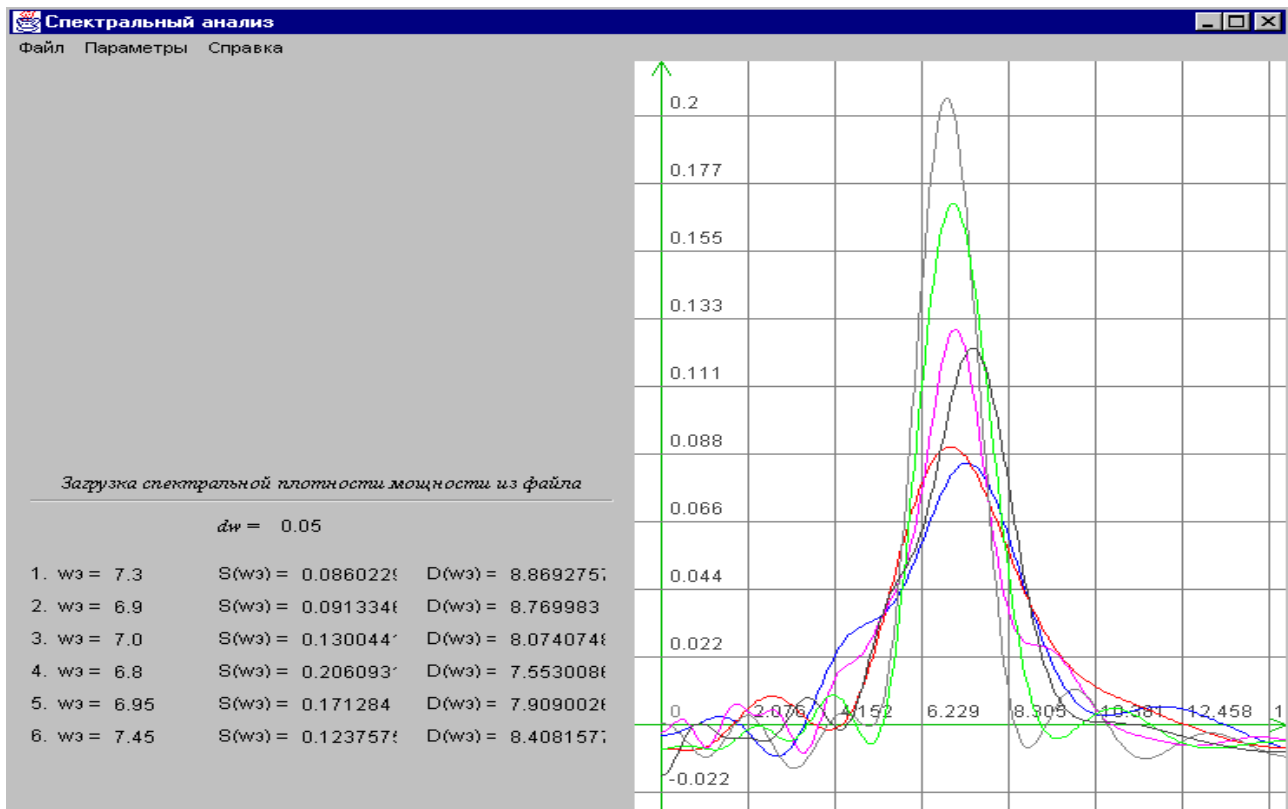


Рисунок 7.63. Аппроксимация спектральной плотности мощности ортогональными функциями Лагерра  $N=662$ ,  $\mu = 7$ ,  $J_{\max}=53$  (верхний рисунок),  $J_{\max}=18$

Отметим, что при уменьшении  $M$  происходит увеличение эквивалентной ширины спектра мощности.

Приведем аналогичные исследования для других моделей корреляционных функций.

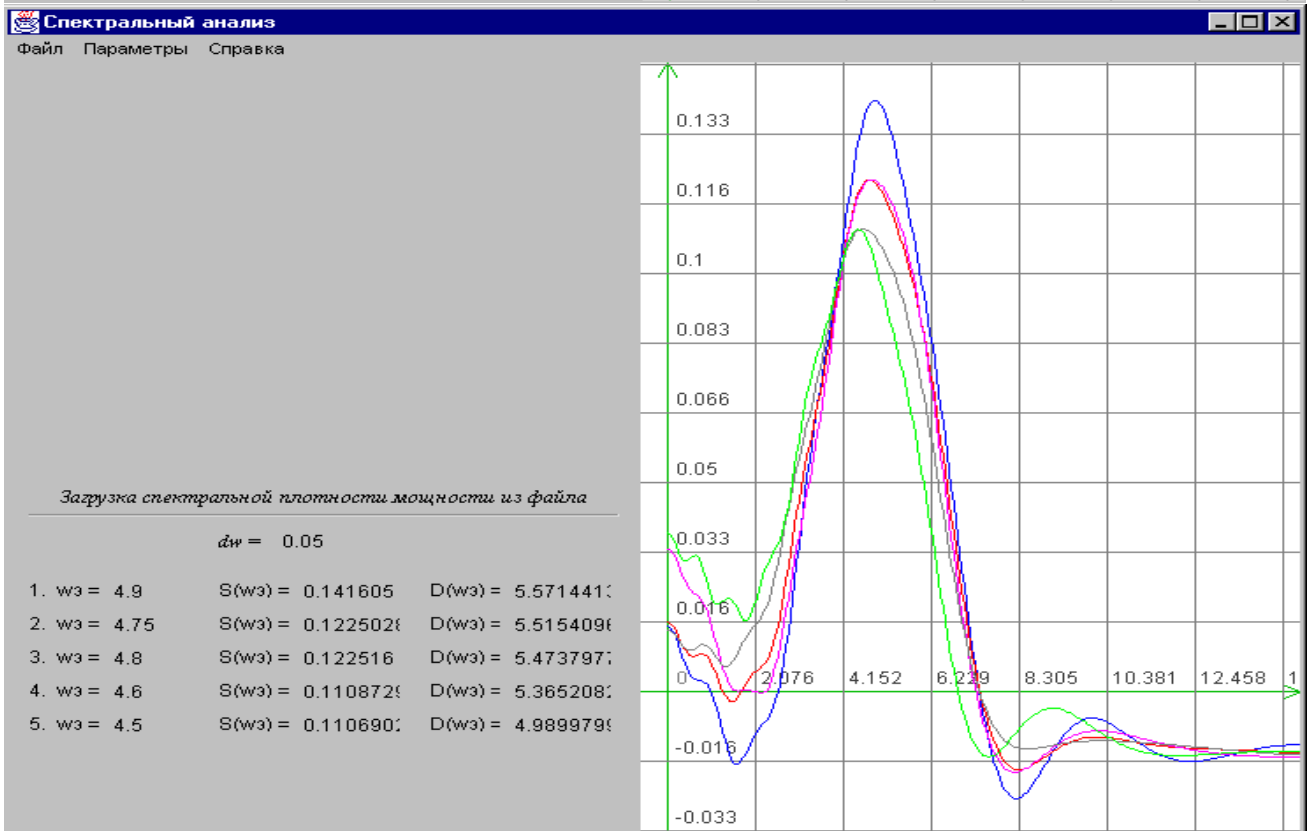
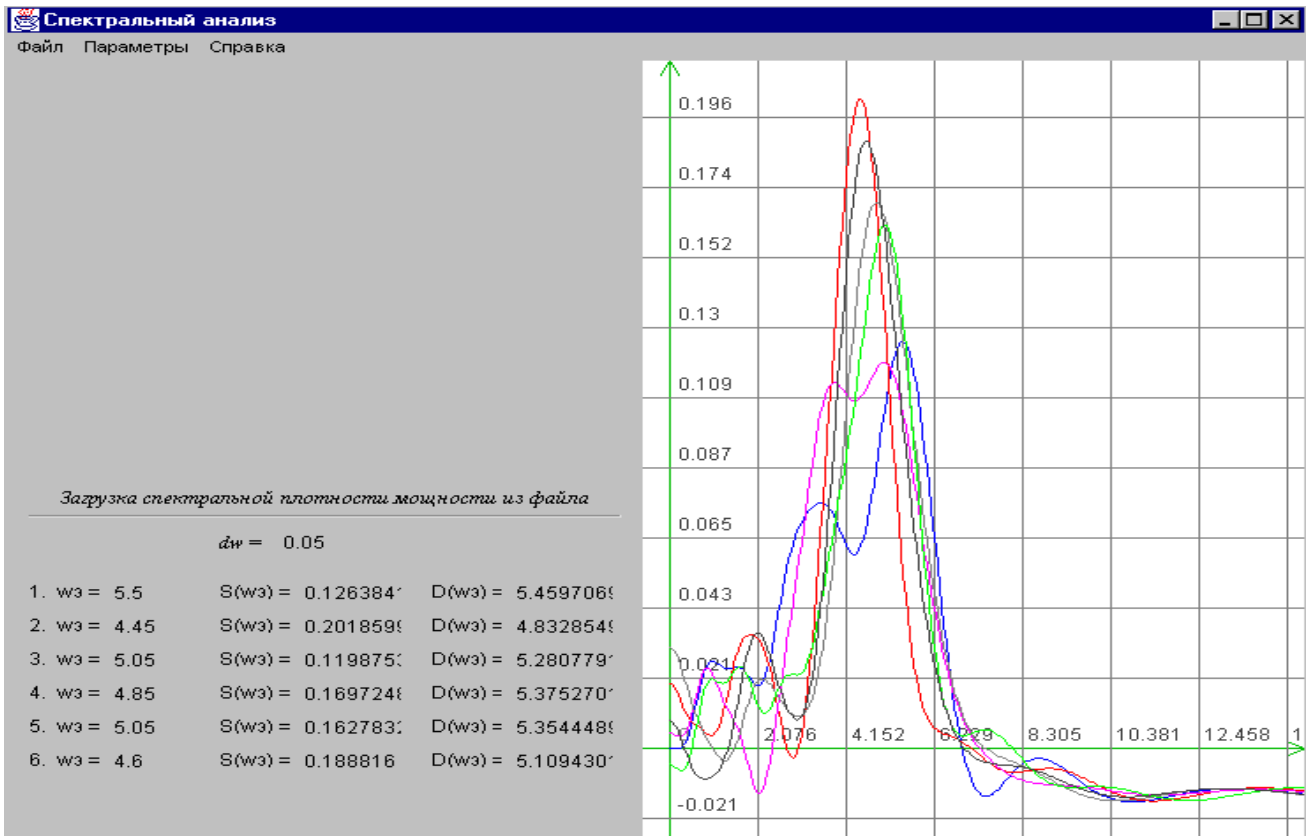
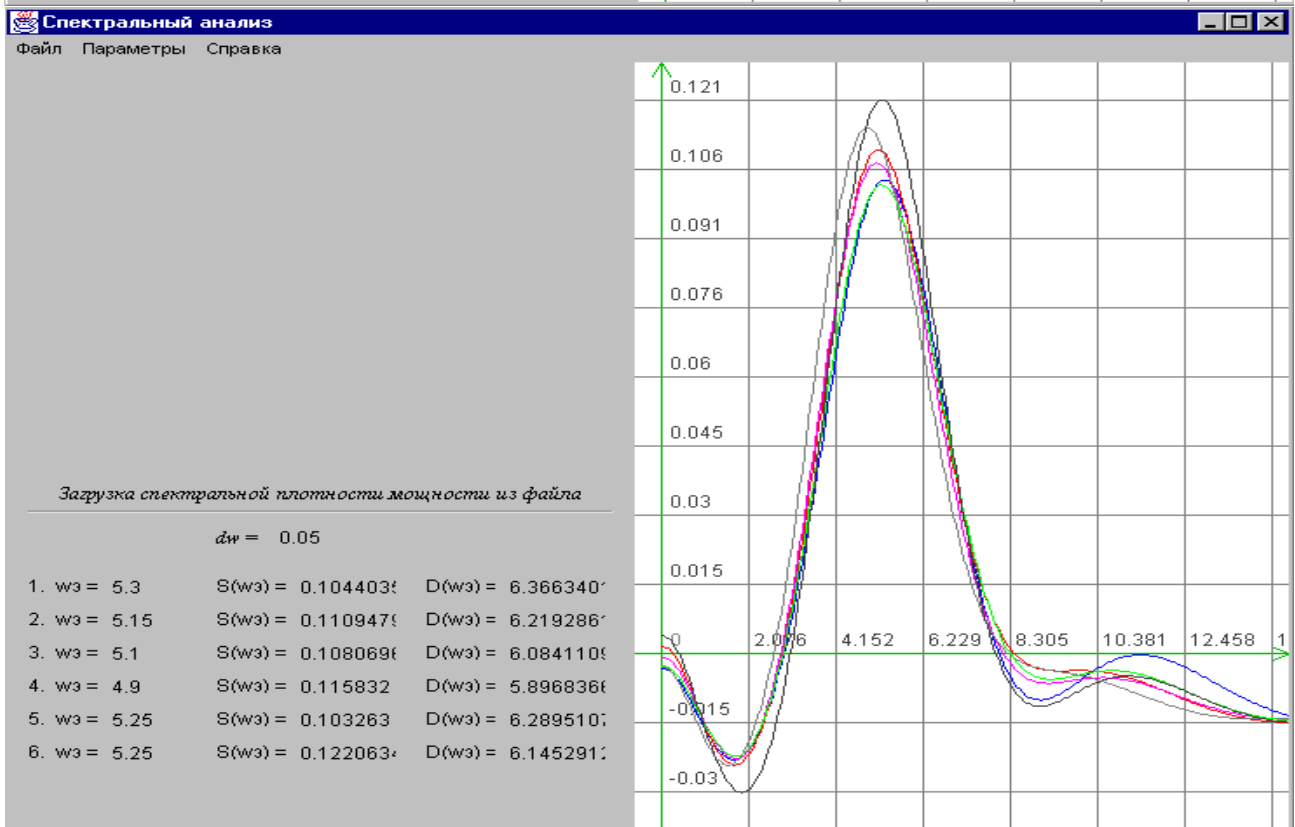
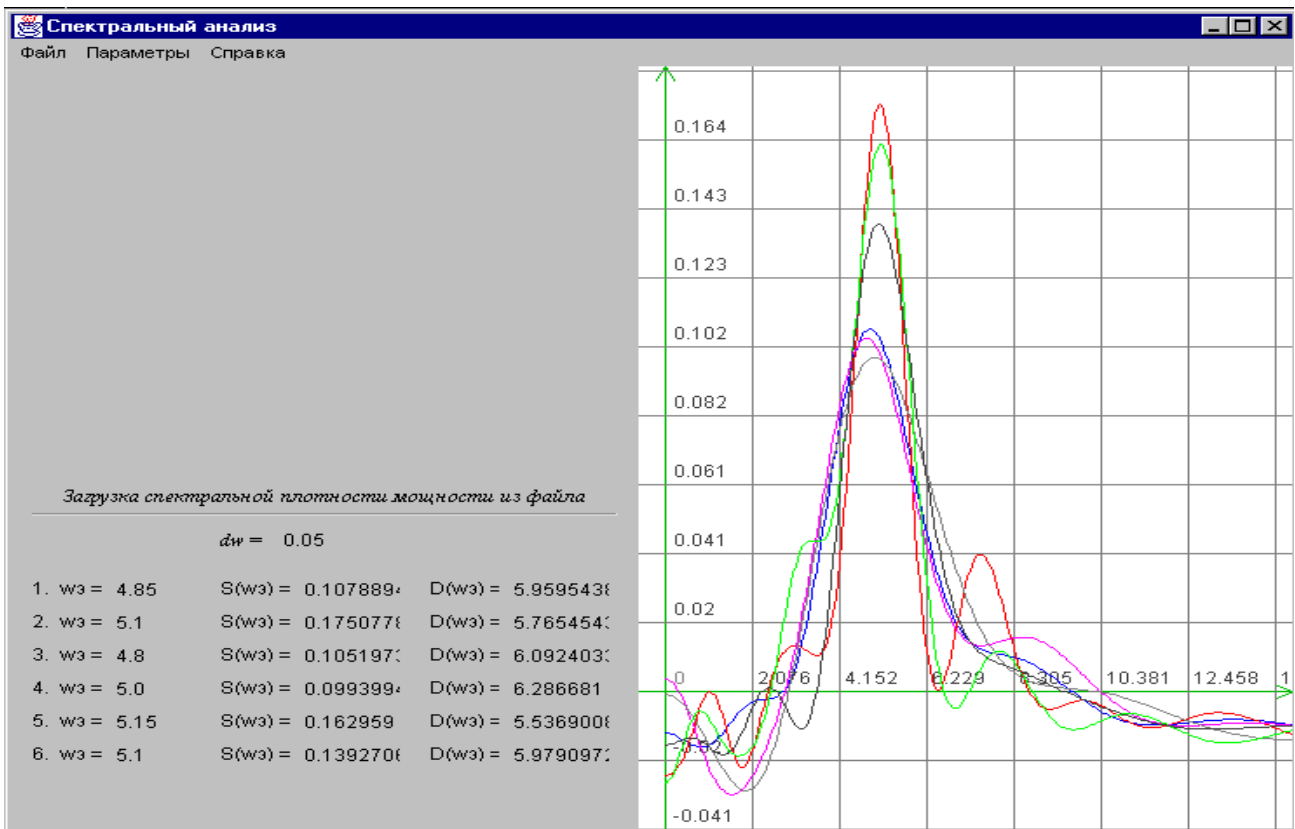


Рисунок 7.64.  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0^{(1)}\tau + \frac{\lambda}{\omega_0^{(1)}} \sin \omega_0^{(1)}|\tau| \right)$ ,  
 $\mu = 5$ ,  $M=500$ ,  $J_{\max}=40$  (нижний рисунок),  $J_{\max}=20$



$$\text{Рисунок 7.65. } \rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0^{(1)} \tau - \frac{\lambda}{\omega_0^{(1)}} \sin \omega_0^{(1)} |\tau| \right),$$

$\mu = 5$ ,  $M=500$ ,  $J_{\max}=38$  (нижний рисунок),  $J_{\max}=19$

Отметим, что практически все эксперименты проводились на сравнительно небольших объёмах выборок. В заключении, для иллюстрации приведем примеры аппроксимации спектральных плотностей мощности для  $M=5000$ .

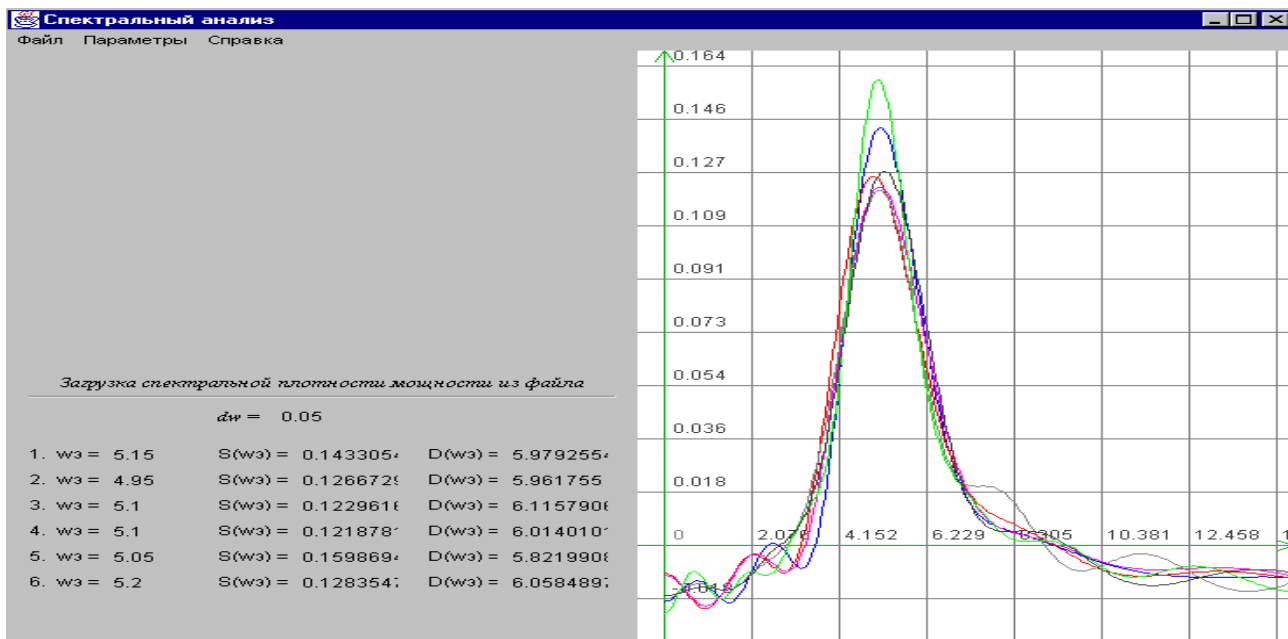


Рисунок 7.66.  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0^{(1)} \tau$ ,  $\mu = 5$ ,  $M=5000$ ,  $J_{\max}=38$

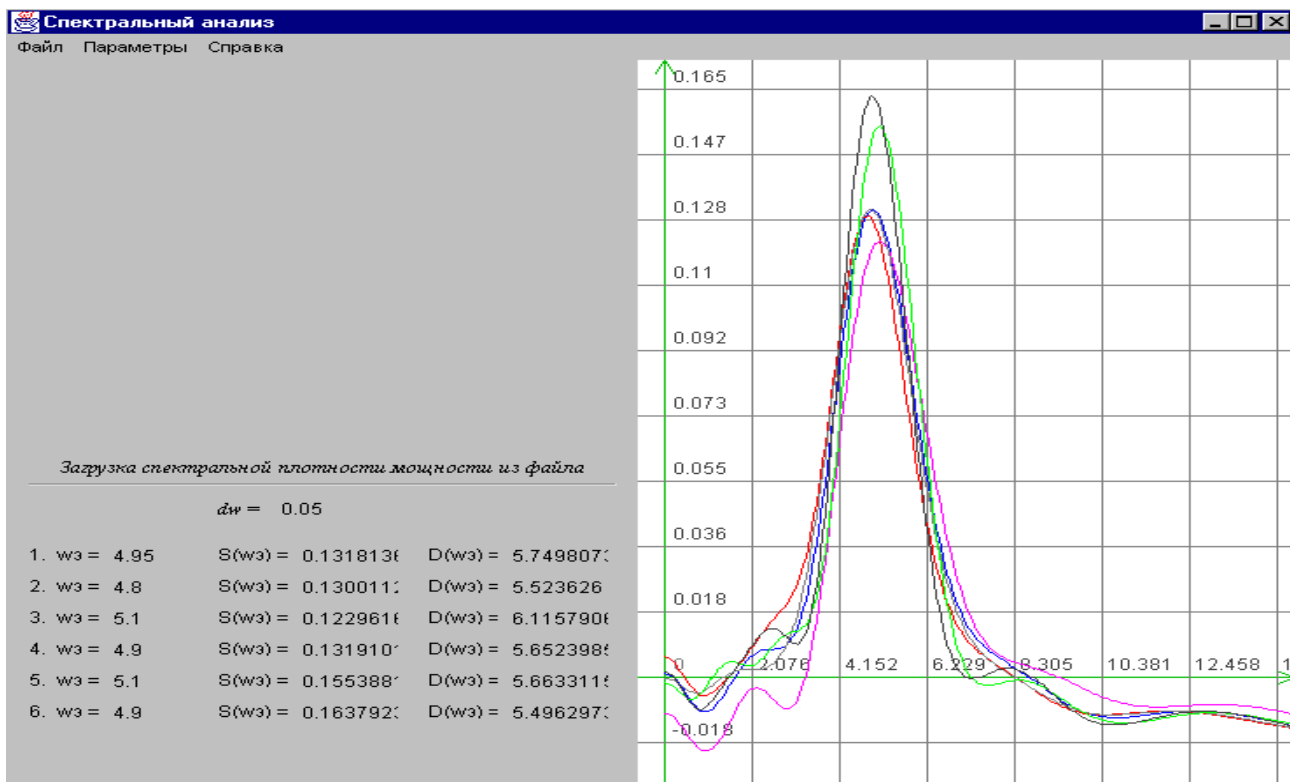


Рисунок 7.67.  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0^{(1)} \tau - \frac{\lambda}{\omega_0^{(1)}} \sin \omega_0^{(1)} |\tau| \right)$ ,  $\mu = 5$ ,  $M=5000$ ,  $J_{\max}=38$

Представленные рисунки показывают достаточно хорошую «кучность» результатов аппроксимации спектральной плотности мощности.

## 7.5. Анализ гидрологических параметров в открытой части Балтийского моря

Получение гидрологической и гидрохимической информации по акватории Балтийского моря производится на достаточно разветвленной наблюдательной сети, объединяющей стандартные океанографические станции и разрезы, рейдовые и береговые станции и посты, плавмаяки и эпизодические станции [94, 97]. Эта информация собирается как с равномерной, так и неравномерной дискретностью. Если для первой категории наблюдений методы обработки и анализа гидрометеорологической и гидрохимической информации достаточно хорошо разработаны [97], то для второй - требуется применение специализированных методов расчёта вероятностных характеристик. Разработанные методы вероятностного анализа по данным с неравномерной дискретизацией (см. раздел 5) открывают широкие возможности изучения гидрологического режима в открытой части Балтийского моря.

Рассмотрим пример обработки данных эпизодических наблюдений на международной станции ВУ-5, расположенной в Борнхольмском бассейне, для анализа характерных особенностей годовой цикличности временных рядов поверхностной температуры воды, солёности, плотности и содержания кислорода.

Поверхностный горизонт был выбран потому, что именно в верхнем слое наиболее ярко прослеживается годовая ритмика, обусловленная солнечной радиацией для температуры воды, процессами ледотаяния и годовой ритмикой стока рек для солёности, а следовательно и для плотности, и тепловым режимом вод для кислорода.

В качестве исходных данных использованы все имеющиеся наблюдения, выполненные в период с 1909 по 1983 г.г. и опубликованные в различных литературных источниках, каталогах и рейсовых отчётах (см. таблицу 5.3). Данные наблюдений сформированы по следующему принципу. В информационный массив включены все эпизодические наблюдения, дополненные выборкой из данных многосуточных станций. Из многосуточных наблюдений бралось только по одному наблюдению в каждые сутки, например, в срок, когда выполняется полный комплекс гидрологических и гидрохимических наблюдений. Если в течение суток наблюдения проводились дважды по разным судам, то использовались оба наблюдения. Так как время наблюдений внутри суток не различалось, все наблюдения были отнесены к середине суток.

Таким образом, для исследования годовой ритмики гидрологических и гидрохимических параметров в качестве основного интервала дискретности были выбраны 1 сутки, что могло бы дать 365 наблюдений в год при условии ежесуточных наблюдений всем научно-исследовательским флотом прибалтийских стран, что, естественно, нереально.

В соответствии с изложенным принципом формирования временных рядов к расчёту было принято 464 значения по температуре ( $t^0$  C) и солёности (S), 340 – по кислороду ( $O_2$ ) и 257 – по плотности ( $\sigma$ ). Некоторое различие в количестве значений температуры, солёности и плотности связано с тем, что обычно в литературных источниках приводятся только первые две характеристики, а плотность, как их функция, рассчитывается по специальным таблицам. Мы не стали приводить недостающие расчёты, так как предлагаемая методика предназначена для расчёта вероятностных характеристик с неравномерной дискретностью.

Как правило, выводы о характере годовой ритмики гидрологических элементов по данным эпизодических наблюдений на сети станций открытого моря исследователь проводит по оценкам математического ожидания и дисперсии годового хода.

Для этой цели ансамбль значений элементов сводится на годовой период, образуя «облако» точек, по которому тем или иным методом проводится кривая математического ожидания. Аналогично образуется «облако» квадратов значений, по которому вычисляется дисперсия годового хода.

Анализ видов графиков годового хода математического ожидания температуры и кислорода, опубликованных в различных источниках, свидетельствует о наличии ярко выраженной годовой ритмики, поэтому оценки среднего образа этих элементов, вычисленные различными авторами, близки между собой. Для плотности воды полной ясности о характере годовой ритмики из-за многофакторности механизма формирования годового хода и методических погрешностей расчёта вероятностных характеристик этого элемента нет. Так, встречающиеся в научной литературе оценки характеристик годового хода плотности воды рассчитываются, исходя из среднемесячных значений температуры и солёности, что даёт искаженное представление о режиме этого элемента. Существенные расхождения в оценках математического ожидания отмечается и в солёности. Здесь точки зрения на наличие годовой ритмики в колебаниях этого элемента порой принципиально различаются. Следует отметить, что все вышесказанное относится к открытой части Балтийского моря. В прибрежной зоне моря, где влияние режимобразующих факторов прослеживается четко, оценки среднего образа гидрологических и гидрологических элементов достаточно однотипны.

Наиболее показательными характеристиками, свидетельствующими о наличии годовой ритмики в изменениях исследуемых элементов, является корреляционная функция  $K_x(\tau)$  и спектральная плотность мощности  $S_x(\tau)$ . С учётом нерегулярности входных данных оценка корреляционной функции определялась с использованием интервальной корреляционной функции в соответствии с выражением (5.12), а спектральная плотность мощности – в соответствии с выражением (6.37) после аппроксимации корреляционной функции параметрической моделью.

Так как процесс идентификации корреляционных функций затруднен, в таблице 7.21 приведены результаты аппроксимации корреляционных функций  $t^0$ ,  $\sigma$  и  $O_2$  различными колебательными моделями.

#### Результаты аппроксимации

Таблица 7.21

	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0  \tau )$			$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0  \tau )$		
	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$	$\alpha$	$\omega_0$	$\delta$
$t^0$ C	$9 \cdot 10^{-4}$	0,0159	0,2522	$9,3 \cdot 10^{-4}$	0,0160	0,2335	$8,7 \cdot 10^{-4}$	0,0158	0,2743
$\sigma$	0,0030	0,0159	0,4638	0,0035	0,0165	0,4252	0,0029	0,0157	0,5323
$O_2$	0,0011	0,0155	0,3132	0,0012	0,0157	0,2871	0,0011	0,0154	0,3427

Анализ результатов, представленных в таблице 7.21, показывает, что:

1. как и следовало ожидать, погрешности аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями принимают большие значения, что объясняется малым объёмом выборки и непредсказуемым характером дискретизации;

2. погрешности аппроксимации принимают меньшие значения для  $t^0$  C (M=464), большие - для  $O_2$  (M=341) и самые большие – для  $\sigma$  (M=257);



3. несмотря на небольшой объем выборки, разброс параметров  $\alpha$  и  $\omega_0$  у разных моделей небольшой, особенно у частоты колебания  $\omega_0$ , что объясняется большим значением показателя колебательности  $\mu$  (см. таблицу 7.22);

4. из рассмотренных моделей корреляционных функций с точки зрения минимизации квадратической погрешности аппроксимации наиболее целесообразно выбирать модель в виде  $e^{-\alpha|\tau|}(\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|)$ ;

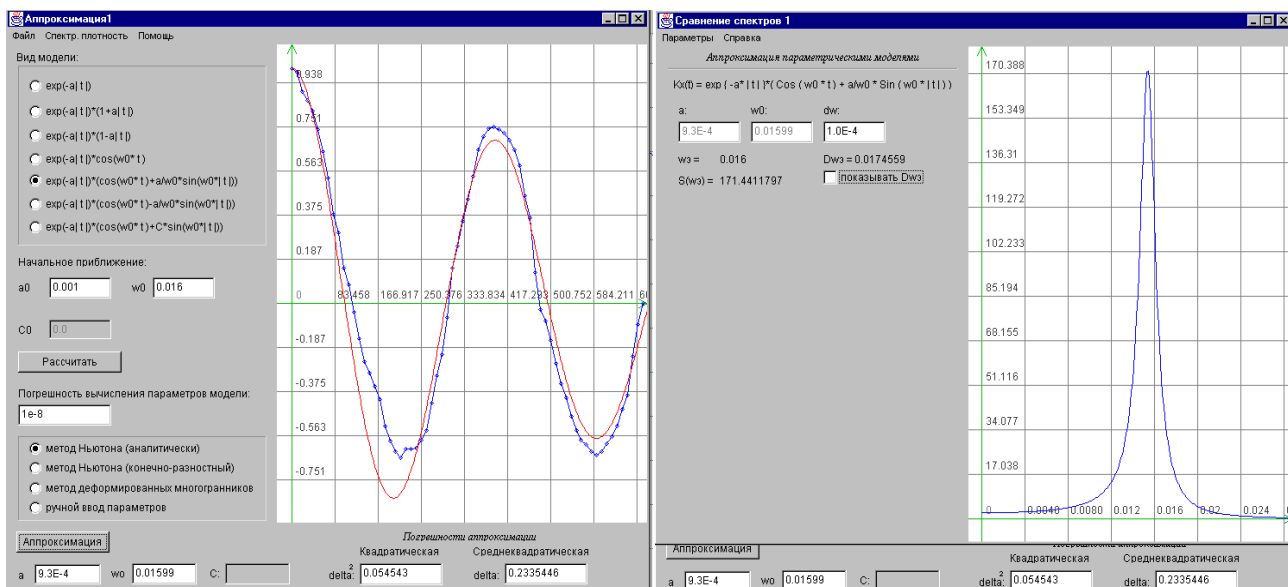
5. для рассмотренных гидрологических параметров характерна сезонная изменчивость (КФ имеет колебательный характер, т.е. присутствует косинусоидальная составляющая).

Значения показателя колебательности для гидрологических параметров

Таблица 7.22

	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$e^{-\alpha \tau }(\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0  \tau )$	$e^{-\alpha \tau }(\cos \omega_0 \tau - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0  \tau )$
$t^0$ C	17,667	17,194	18,161
$\sigma$	5,233	5,232	5,422
$O_2$	13,946	13,494	14,538

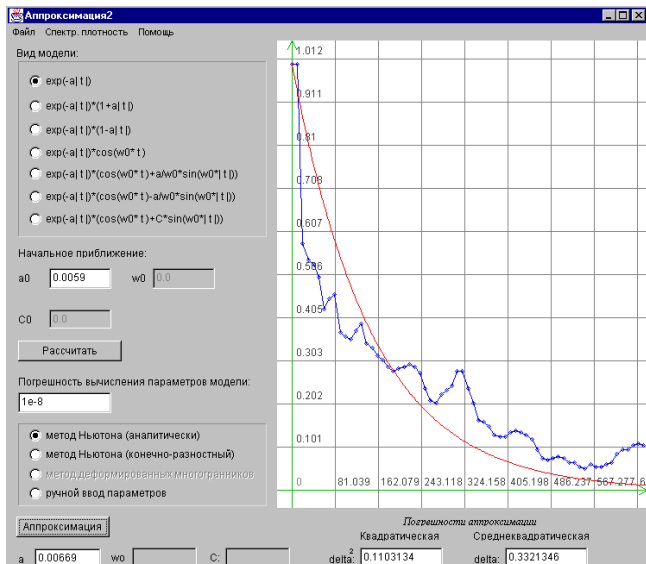
На рис. 7.68-7.69 приведены результаты аппроксимации нормированных корреляционных функций и спектральных плотностей мощности температуры плотности воды и содержания кислорода моделью вида  $e^{-\alpha|\tau|}(\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|)$  и солёности -  $e^{-\alpha|\tau|}$ .



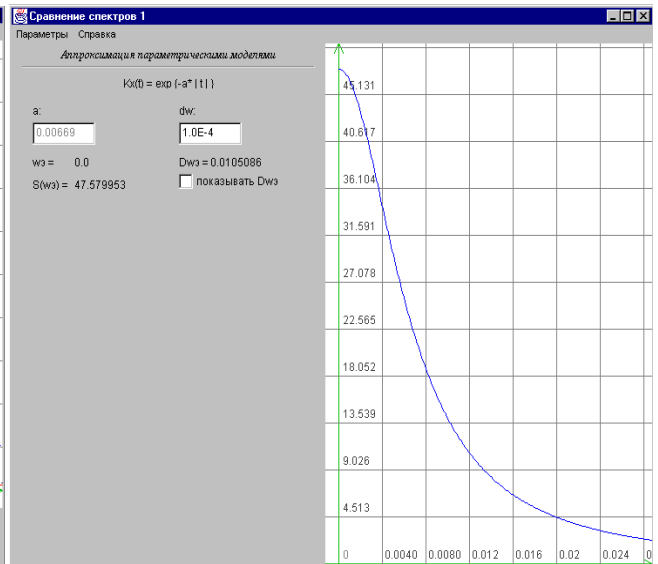
а) Корреляционная функция  $t^0$  C

б) Спектральная плотность мощности  $t^0$  C

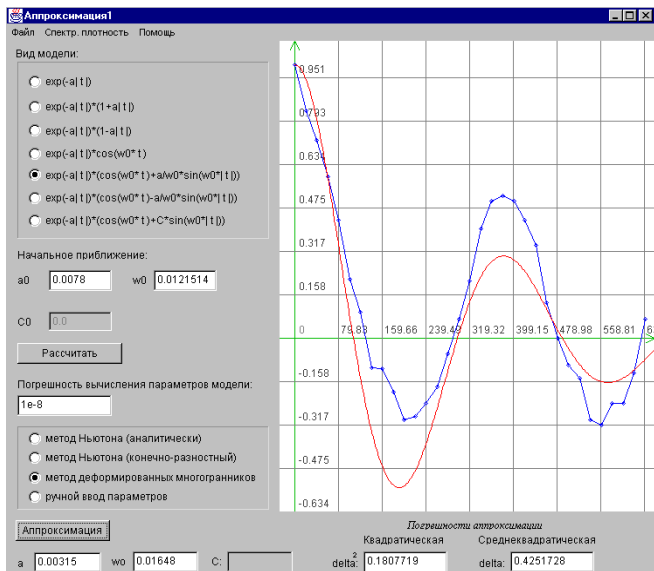
Рисунок 7.68. Результаты обработки временного ряда  $t^0$  C



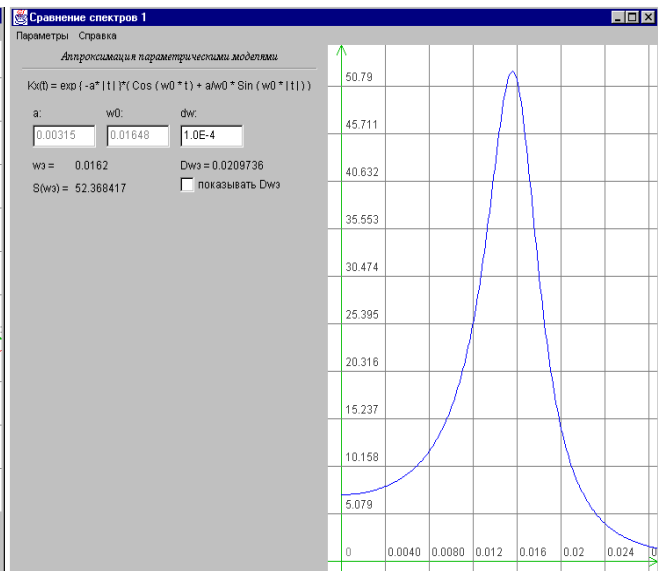
а) Корреляционная функция S



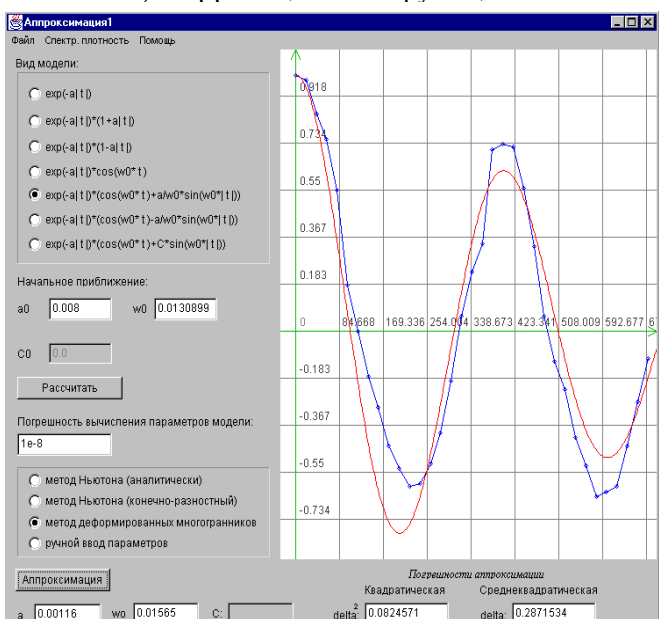
б) Спектральная плотность мощности S



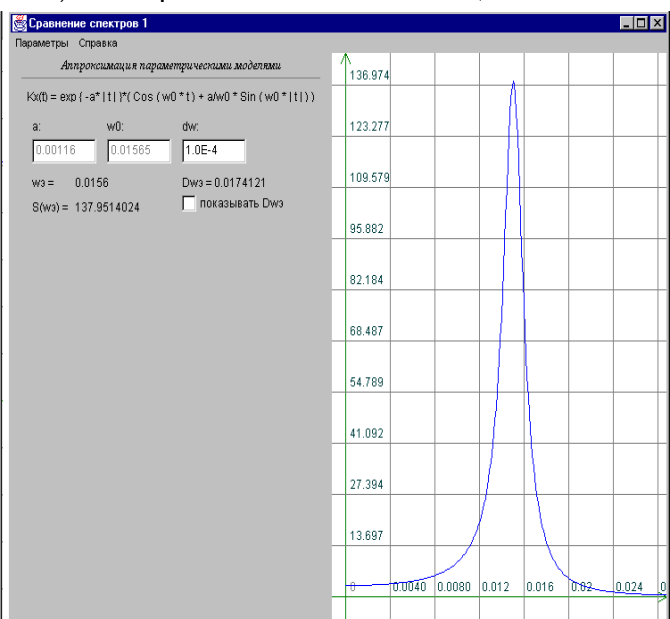
в) Корреляционная функция  $\sigma$



г) Спектральная плотность мощности  $\sigma$



д) Корреляционная функция  $O_2$



е) Спектральная плотность мощности  $O_2$

Рисунок 7.69. Результаты обработки гидрологических параметров

Из представленных на рис. 7.68-7.69 графиков (особенно для спектральных плотностей мощности) видно, что для температуры воды и содержания кислорода достаточно ярко выражен годовой период. Спектры температуры и содержания кислорода имеют острый пик на частоте годового периода ( $T=1$  год), который свидетельствует о принадлежности этих процессов к классу периодически коррелированных и необходимости применения к исследованию этих элементов методов анализа периодически коррелированных случайных процессов ПКСП анализа [70].

Корреляционная функция солености затухает без ярко выраженных биений с периодом 1 год, а спектр не имеет всплеска на частоте  $\omega = 2\pi/1$  год. Если аппроксимировать корреляционную функцию солености воды затухающей экспонентой  $e^{-\alpha|\tau|}$ , то  $\alpha = 0,007$ . Т.е. для солености воды нет периодичности, называемой годовым ходом, но тем не менее масштаб изменчивости, равный одному году, существует. Такой вид корреляционной функции свидетельствует о перемодулированности годовой ритмики. Отсутствие пика на спектре солености подтверждает интерпретацию о том, что изменчивость с годовым масштабом существует, но процесс нельзя отнести к классу периодически коррелированных. Поэтому применение методов ПКСП анализа к солености воды в открытых районах Балтийского моря, удаленных от влияния режимобразующих факторов, имеющих годовую ритмику, не дадут физически правильной информации.

Относительно плотности морской воды следует отметить, что корреляционная функция и спектральная плотность мощности занимают промежуточное положение между температурой и солености ( $\mu = 5,232$ ) с наличием периода коррелированности  $T=1$  год. Это связано с тем, что на формирование изменчивости плотности в поверхностном слое оказывает влияние температура воды, для которой характерна годовая ритмика.

Вместе с тем, географическое положение анализируемой станции ВУ-5 указывает и на влияние подтока соленых североморских вод, что и накладывает свой отпечаток на характер этих функций.

Рассматриваемую задачу можно решить, воспользовавшись аппроксимацией корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Лагерра. На рис. 7.70 представлены результаты аппроксимации корреляционных функций и спектральной плотности ортогональными функциями Лагерра.

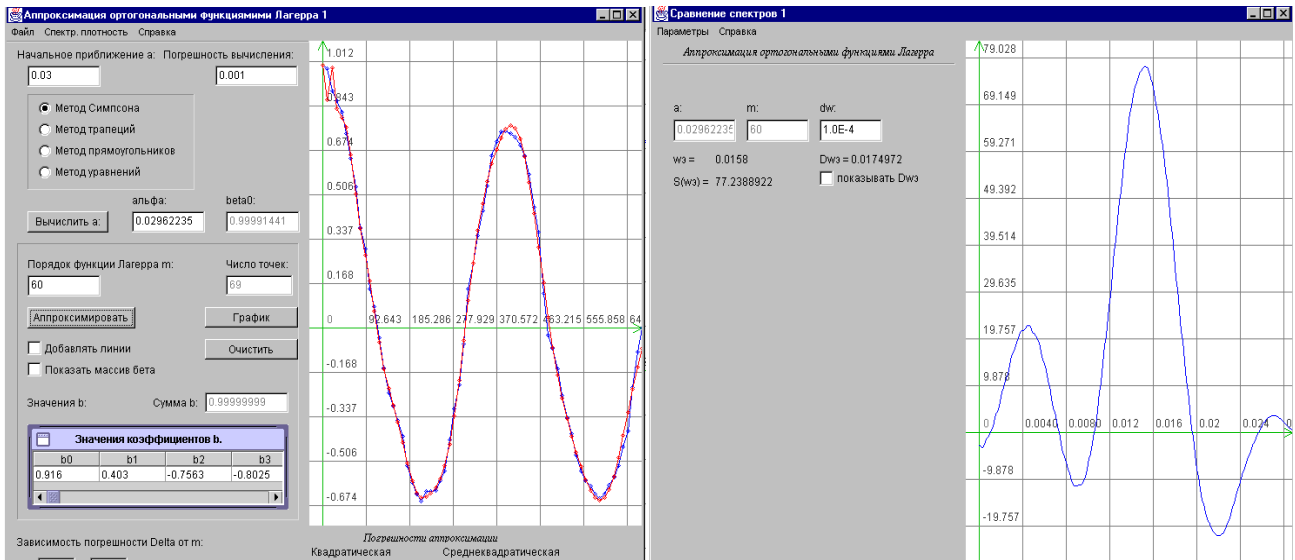
Анализ результатов показывает, что:

1. погрешность аппроксимации корреляционной функции меньше у ортогонального разложения;
2. ширина спектра меньше у параметрической модели;
3. частоты, соответствующие максимуму спектральной плотности мощности, практически совпадают (см. таблицу 7.23).

Экстремальные частоты спектральной плотности мощности

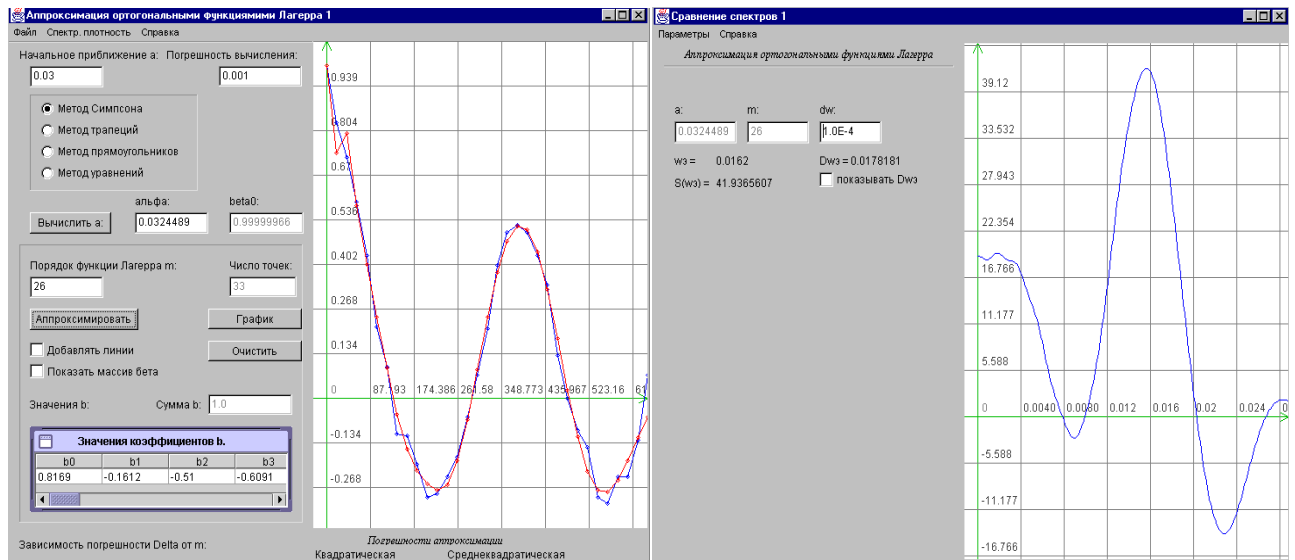
Таблица 7.23

$\rho_x(\tau)$	$e^{-\alpha \tau }(\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0  \tau )$		$\sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau)$	
	$\omega_3$	$\delta$	$\omega_3$	$\delta$
$t^0$ C	0,0160	0,2522	0,0157	0,0600
$\sigma$	0,0162	0,4638	0,0158	0,1082
$O_2$	0,0156	0,3132	0,0154	0,0984



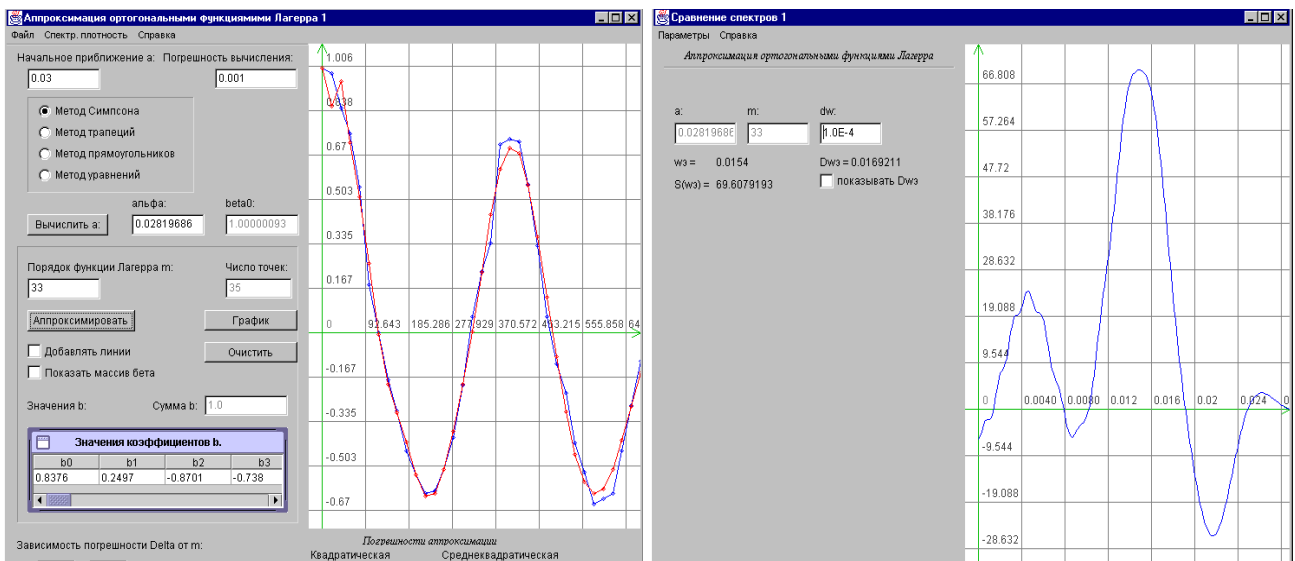
а) Корреляционная функция  $t^0 C$

б) Спектральная плотность мощности  $t^0 C$



в) Корреляционная функция  $\sigma$

г) Спектральная плотность мощности  $\sigma$



д) Корреляционная функция  $O_2$

е) Спектральная плотность мощности  $O_2$

Рисунок 7.70. Результаты обработки временных рядов

Рассмотрим задачу определения сезонной изменчивости указанных параметров в зависимости от глубины. Исходными данными (см. табл. 5.3) являются неэквидистантные временные ряды, представляющие собой результаты измерений параметров на различных глубинах (0-90 м) с 1909 по 1983 г. Средние коэффициенты сжатия для измеряемых параметров равны:

- кислорода - 67,13;
- температуры - 63,15;
- солености - 63,26;
- плотности - 106,64.

Отсюда видно, что большая часть информации об измеряемых параметрах безвозвратно потеряна.

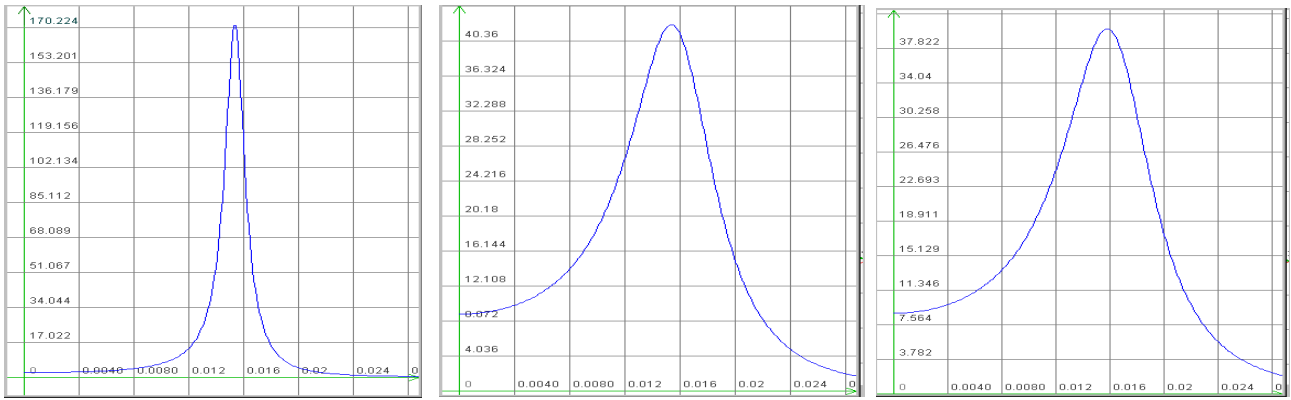
Характер неравномерности, обусловленный случайными моментами измерений, позволяет отнести модель потока к модели аддитивной случайной дискретизации. Так как алгоритм восстановления процесса на интервале дискретизации неизвестен, то, как и в предыдущем случае, наиболее целесообразно применять АИИКФ (см. подраздел 2.3) с усреднением по времени (располагаем для каждого параметра на определенной глубине одной реализацией). Следует отметить, что минимальный интервал дискретизации  $\Delta t_{\min}=1$  день. Поэтому, учитывая ограниченный набор выборочных данных, и что для выявления сезонной изменчивости диапазон изменения аргумента КФ должен быть больше 2-3 лет, ширина дифференциального окна  $\Delta \gg \Delta t_{\min}$ . В случае сезонной изменчивости КФ имеет колебательный характер, т.е. присутствует косинусоидальная составляющая, а у спектральной плотности мощности наблюдается пик на частоте, соответствующей периоду в один год. Тогда, с учетом рекомендаций [86] для обеспечения методической погрешности интерполяции КФ 2% число отсчетов КФ на периоде колебаний  $n=16$ ,  $\Delta=20 \div 25$ .

Результаты оценки параметров корреляционных функций  $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|)$  и спектральных характеристик представлены в таблице 7.24, а соответствующие графики спектральных плотностей мощности – на рис. 7.71-7.33.

Параметры аппроксимирующих выражений корреляционных функций и спектральные характеристики

Таблица 7.24

	h м	$\alpha$	$\omega_0$	$\mu = \omega_0 / \alpha$	$\omega_3$	$S(\omega_3)$	$\Delta \omega_3$
$t^0$ C	0	0,00093	0,01598	17,1828	0,016	171,28	0,0175
	40	0,00399	0,01645	4,1228	0,016	42,23	0,0219
	50	0,00423	0,01694	4,0047	0,0164	39,97	0,0237
	90	0,00409	0	0	0	77,83	0,0064
$\sigma$	0	0,00315	0,01648	5,2317	0,0162	52,37	0,02097
	20	0,00262	0,01547	5,9046	0,0152	62,47	0,0192
	30	0,00715	0	0	0	44,52	0,0112
$O_2$	0	0,00116	0,01565	13,4914	0,0156	68,54	0,0200
	20	0,00237	0,01644	6,9367	0,0163	36,04	0,0233
	50	0,00475	0,01707	0	0,0164	30,64	0,0163

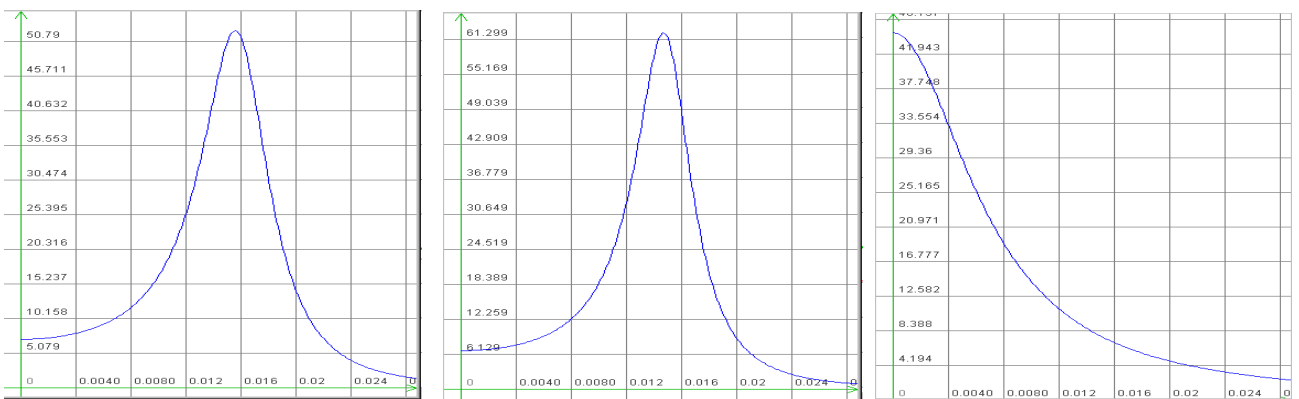


а) 0 м

б) 40 м

в) 50 м

Рисунок 7.71. Спектральные плотности мощности температуры

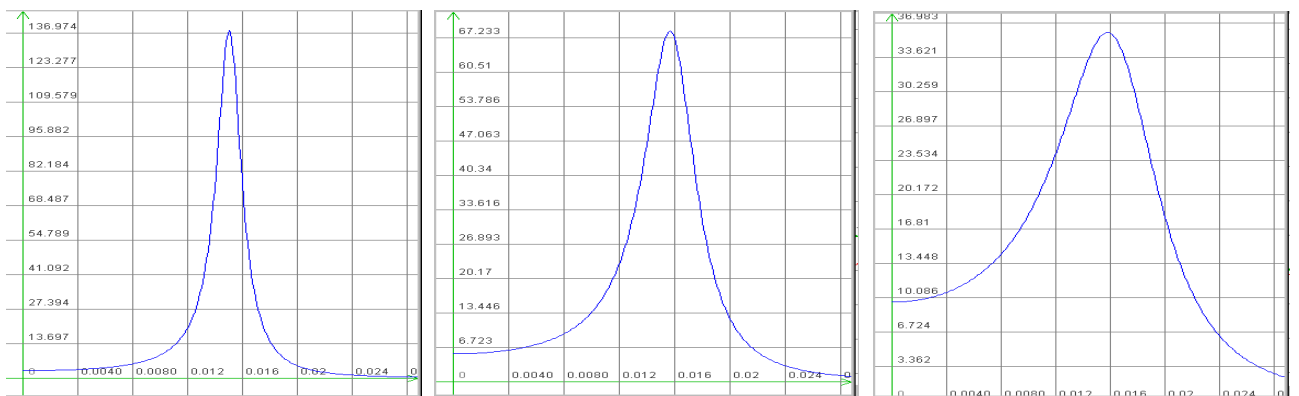


а) 0 м

б) 20 м

в) 30 м

Рисунок 7.72. Спектральные плотности мощности  $\sigma$



а) 0 м

б) 20 м

в) 50 м

Рисунок 7.73. Спектральные плотности мощности кислорода

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

- сезонная изменчивость наблюдается у всех параметров, кроме солёности;
- с увеличением глубины мощность колебательной составляющей уменьшается, что свидетельствует об уменьшении сезонной изменчивости;
  - переходные глубины (где еще наблюдается сезонная изменчивость) для: кислорода - 50 м, температуры - 50 м, плотности - 30 м.

На рис. 7.74-7.76 для большей наглядности приведены результаты наложения спектров.

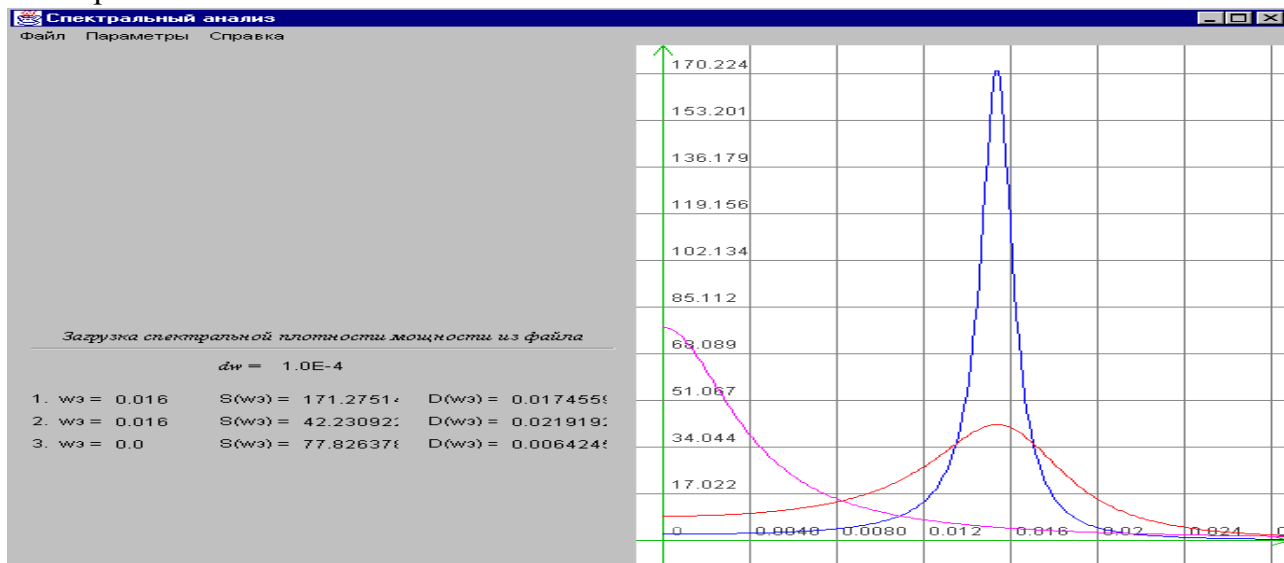


Рисунок 7.74. Спектральные плотности температуры

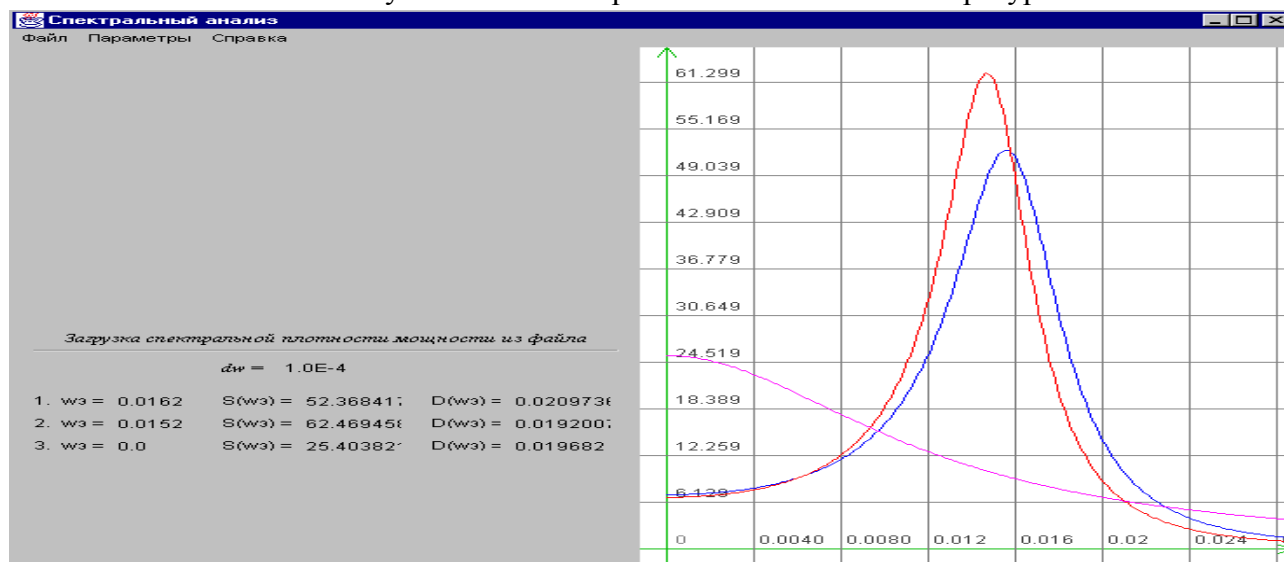


Рисунок 7.75. Спектральные плотности  $\sigma$

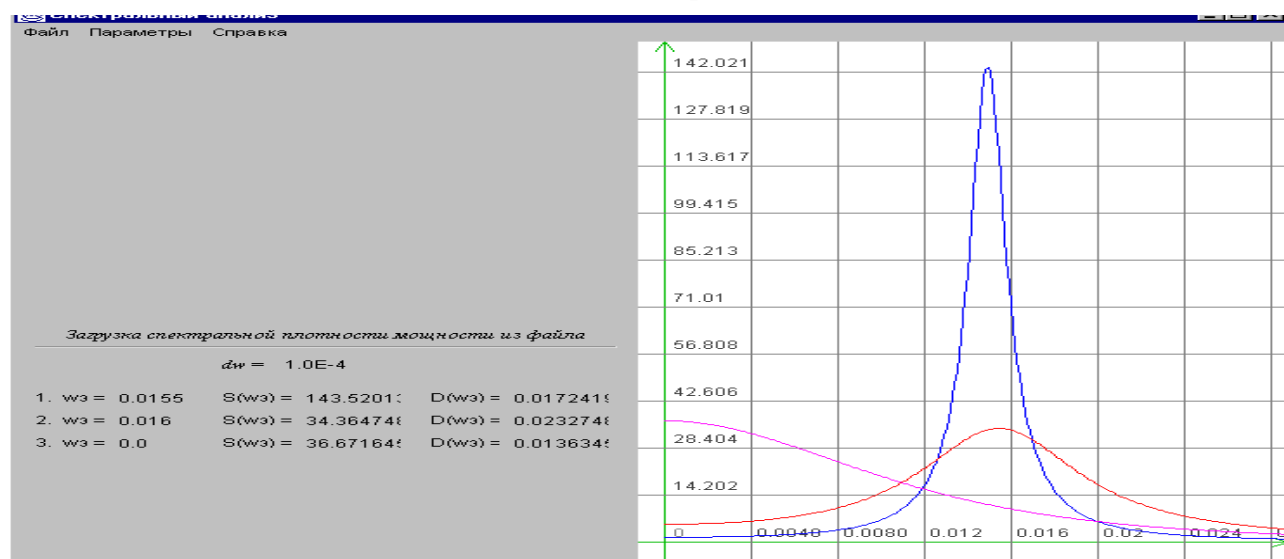


Рисунок 7.76. Спектральные плотности кислорода

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено решение задач аппроксимативного анализа основных функциональных характеристик случайных процессов: законов распределения, корреляционных функций, спектральных плотностей мощности. Учитывая разнообразие случайных процессов, естественно, работу в этой области нельзя считать решенной в полной мере. Однако полученные результаты показывают перспективность данного подхода для решения разнообразных задач науки и техники, так как позволяют:

1. идентифицировать случайные процессы по виду функциональной вероятностной характеристики с использованием её фазового портрета;
2. получить аналитические выражения вероятностных функциональных характеристик в виде параметрических моделей как при регулярной, так и при нерегулярной дискретизации, удобные для дальнейших исследований и хранения результатов, что особенно важно при большом объеме статистических испытаний;
3. без существенных вычислительных затрат определить обобщенные корреляционно-спектральные характеристики: интервалы корреляции, корреляционные моменты, эквивалентную ширину спектра мощности и. т.д. – по параметрам модели;
4. в сомнительных случаях с помощью разработанных автоматизированных систем произвести аппроксимацию функциональной характеристики различными параметрическими моделями с использованием различных численных методов, включая аппроксимацию ортогональными функциями Лагерра;
5. за счёт встроенных подсистем имитации случайных процессов с заданными вероятностными характеристиками отладить и включить в системы новые алгоритмы аппроксимации;
6. сравнить результаты аппроксимации корреляционно-спектральных характеристик как при регулярной, так и при нерегулярной дискретизации случайных процессов;
7. за счёт визуализации имитации случайных процессов, идентификации и аппроксимации функциональных характеристик, использования ручного и автоматизированного режимов работы, применять автоматизированные системы в учебном процессе при подготовке специалистов по специальностям, связанным со статистической обработкой информации, автоматизацией научных исследований.

На наш взгляд представляет практический интерес решение следующих задач аппроксимативного анализа:

1. расширение круга параметрических моделей для решения разнообразных научно-технических задач;
2. поиск и применение для определения параметров моделей новых численных методов обладающих лучшей сходимостью;
3. поиск и исследования новых методов идентификации случайных процессов;
4. совершенствование автоматизированных систем для аппроксимативного анализа случайных процессов.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. А.С. № 446884 СССР, G 06g 7/19. Устройство для определения показателя затухания аппроксимирующей экспоненциальной корреляционной функции случайного процесса /Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 1801835/18-24, Заявлено 27.06.72; Оpubл. 10.07.75, Бюл. № 38. - С.4.
2. А.С. № 463121 СССР, G 06g 7/19. Коррелятор /Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 1932239/18-24, Заявлено 14.06.73; Оpubл. 05.03.75, Бюл. № 9. - С.3.
3. А.С. № 504206 СССР, G 06g 7/19. Коррелятор /Волков И.И., Прохоров С.А., Батищев В.И., Мотов В.В. /СССР/.-№ 2074908/18-24, Заявлено 14.11.74; Оpubл. 25.02.76, Бюл. № 7. - С.5.
4. А.С. № 517027 СССР, G 06g 7/19. Устройство для определения интервала корреляции /Волков И.И., Прохоров С.А., Мотов В.В., Токарев А.П., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2099351/24, Заявлено 14.11.74; Оpubл. 05.06.76, Бюл. № 21. - С.6.
5. А.С. № 522507 СССР, G 06g 7/52. Устройство для оценки интервала корреляции /Волков И.И., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2085136/24, Заявлено 18.12.74; Оpubл. 25.07.76, Бюл. № 27. - С.5.
6. А.С. № 529462 СССР, G 06g 7/19. Коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра /Волков И.И., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2160031/24, Заявлено 28.07.75; Оpubл. 25.09.76, Бюл. № 35. - С.5.
7. А.С. № 550647 СССР, G 06g 7/19. Двухканальный коррелятор /Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2158430/24, Заявлено 18.07.75; Оpubл. 21.03.77, Бюл. № 10. - С.5.
8. А.С. № 552619 СССР, G 06g 7/19. Коррелометр /Волков И.И., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2305064/24, Заявлено 29.12.75; Оpubл. 30.03.77, Бюл. № 12. - С.4.
9. А.С. № 583453 СССР, G 06g 7/19. Взаимный коррелятор /Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2302741/18-24, Заявлено 24.12.75; Оpubл. 20.12.77, Бюл. № 45. - С.6.
10. А.С. № 584311 СССР, G 06g 7/19. Устройство для определения параметров аппроксимирующей экспоненциально-косинусной корреляционной функции /Волков И.И., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2407400/18-24, Заявлено 27.09.76; Оpubл. 10.02.78, Бюл. № 46. - С.5.
11. А.С. № 619931 СССР, G 06g 7/52. Взаимный коррелятор /Волков И.И., Мотов В.В., Батищев В.И., Прохоров С.А. /СССР/.-№ 2429377/18-24, Заявлено 15.12.76; Оpubл. 15.08.78, Бюл. № 30. - С.6.
12. А.С. № 643906 СССР, G 06g 7/19. Коррелятор с аппроксимацией двухпараметрическими моделями /Волков И.И., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2406333/18-24, Заявлено 27.09.77; Оpubл. 25.01.79, Бюл. № 3. - С.6.
13. А.С. № 658493 СССР, G 01g 23/16. Устройство для измерения составляющих взаимной спектральной плотности /Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А., Батищев В.И. /СССР/.-№ 2304740/18-21, Заявлено 29.12.75; Оpubл. 25.04.79, Бюл. № 15. - С.6.
14. А.С. № 684559 СССР, G 06g 7/19. Взаимный коррелятор /Волков И.И., Мотов В.В., Батищев В.И., Прохоров С.А. /СССР/.-№ 2406332/18-24, Заявлено 27.09.76; Оpubл. 05.09.79, Бюл. № 33. - С.6.
15. А.С. № 832560 СССР, G 06f 15/336. Цифровой коррелятор/Прохоров С.А., Сухинин В.П. /СССР/.-№ 2798902/18-24; Заявлено 17.07.79; Оpubл. 23.05.81, Бюл. № 19. - С.4.
16. А.С. № 960864 СССР, G 06g 15/336. Устройство для определения интервала корреляции/Прохоров С.А., Сухинин В.П., Белолипецкий В.Н., Мартовой В.П. /СССР/.-№ 3250532/18-24, Заявлено 18.02.81; Оpubл. 23.09.82, Бюл. № 35. - С.5.

17. А.С. № 962976 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления корреляционной функции импульсной последовательности/Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3250521/18-24, Заявлено 18.02.81; Оpubл. 30.09.82, Бюл. № 36. - С.7.
18. А.С. № 968819 СССР, G 06f 15/336. Цифровой автокоррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3291998/18-24, Заявлено 25.02.81; Оpubл. 23.10.82, Бюл. № 39. - С.7.
19. А.С. № 980101 СССР, G 06f 15/336. Цифровой коррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3306092/18-24, Заявлено 26.06.81; Оpubл. 07.12.82, Бюл. № 45. - С.5.
20. А.С. № 982011 СССР, G 09f 15/336. Устройство для вычисления взаимокорреляционной функции импульсной последовательности/Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3292246/18-24, Заявлено 21.05.81; Оpubл. 15.12.82, Бюл. № 46. - С.4.
21. А.С. № 1020835 СССР, G 06f 15/336. Цифровой автокоррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3393333/18-24, Заявлено 15.02.82; Оpubл. 30.05.83, Бюл. № 20.- С.7.
22. А.С. № 1022167 СССР, G 06f 15/336. Автокоррелятор/Прохоров С.А., Мартовой В.П., Белолипецкий В.Н., Сухинин В.П. /СССР/.-№ 3380810/18-24, Заявлено 16.11.81; Оpubл. 07.06.83, Бюл. № 21. - С.5.
23. А.С. № 1042030 СССР, G 06f 15/336. Коррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3402977/18-24, Заявлено 23.02.82; Оpubл. 15.09.83, Бюл. № 34. - С.5.
24. А.С. № 1072057 СССР, G 06f 15/336. Цифровой коррелятор/Прохоров С.А., Сухинин В.П., Белолипецкий В.Н., Мартовой В.П. /СССР/.-№ 3402502/18-24, Заявлено 23.02.82; Оpubл. 07.02.84, Бюл. № 5. - С.6.
25. А.С. № 1104529 СССР, G 06f 15/336. Цифровой автокоррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н., Мартовой В.П. /СССР/.-№ 3565484/18-24; Заявлено 18.03.83; Оpubл. 23.07.84, Бюл. № 27. - С.8.
26. А.с. № 1166135 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления структурной и интервальной функции /Прохоров С.А., Иванов С.Г., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3693028/24-24; 3694521/24; Заявлено 24.01.84; Оpubл. 07.07.85, Бюл. № 25. - С.8.
27. А.С. № 1173419 СССР, G 06f 15/336. Коррелятор/Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3703968/24-24, 3701886/24-24; Заявлено 20.02.84; Оpubл. 16.08.85, Бюл. № 30. - С.5.
28. А.С. № 1183985 СССР, G 06f 15/336. Устройство для определения моментов k-го порядка /Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3745812/24-24; Заявлено 29.05.84; Оpubл. 07.10.85, Бюл. № 37. - С.5.
29. А.С. № 1224806 СССР, G 06f 15/336. Коррелометр /Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 3747492/24-24; 3745813/24-24; Заявлено 29.05.84; Оpubл. 15.04.86, Бюл. № 14. - С.6.
30. А.С. № 1257663 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления производной корреляционной функции /Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3750867/24-24; Заявлено 04.06.84; Оpubл. 15.09.86, Бюл. № 34. - С.5.
31. А.С. № 1288715 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления производной взаимоструктурной функции /Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3750851/24-24; Заявлено 06.06.84; Оpubл. 07.02.87, Бюл. № 5. - С.10.
32. А.С. № 13005710 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления производной корреляционной функции /Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 3954265/24-24; Заявлено 16.09.85; Оpubл. 23.04.87, Бюл. № 15. - С.6.
33. А.С. № 1355978 СССР, G 06f 15/336. Устройство для определения производной структурной функции /Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 4007833/24-24; Заявлено 15.01.86; Оpubл. 30.11.87, Бюл. № 44. - С.6.

34. А.С. № 1361577 СССР, G 06f 15/336. Устройство для определения взаимной корреляционной функции /Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 4101653/24-24; Заявлено 26.05.86; Оpubл. 23.12.87, Бюл. № 47. - С.6.
35. А.С. № 1387012 СССР, G 06f 15/336. Устройство для вычисления интервальной взаимокорреляционной функции /Прохоров С.А., Иванов С.Г. /СССР/.-№ 4139478/24-24; Заявлено 28.10.86; Оpubл. 07.04.88, Бюл. № 13. - С.5.
36. А.С. № 1444813 СССР, G 06f 15/336. Коррелятор /Прохоров С.А., Белолипецкий В.Н. /СССР/.-№ 4253803/24-24; Заявлено 28.04.87; Оpubл. 15.12.88, Бюл. № 46. - С.6.
37. Автоматизированная информационная система для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик/ С.А. Прохоров, А.В. Иващенко// Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении. – Самара, СГАУ, 2001. – 135-141 с.
38. Автоматизированная учебно-исследовательская система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа/ Прохоров С.А., Кудрина М.А., Новиченкова И.Ю., Шевченко Д.В.//Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении. – Самара, СГАУ, 2001. – 142-156 с.
39. Автоматизированные системы научных исследований /Прохоров С.А., Фурсов В.А., Кривошеев А.О., и др.:НПЦ «Авиатор», Самара, 1995. - 137 с.
40. Адаптивные телеизмерительные системы /Авдеев Б.Я., Антонюк Е.М., Долинов С.Н., Журавин Л.Г., Семенов Е.И., Фремке А.В./ Л.: Энергоатомиздат, 1981. - 246 с.
41. Артамонов Г.Т., Тюрин В.Д. Анализ информационно-управляющих систем со случайным интервалом квантования сигнала по времени. - М.: Энергия, 1977. - 112 с.
42. Батищев В.И. Разработка и исследование аппроксимативных методов и средств оценки корреляционных характеристик случайных процессов для ИИС статистического анализа. - Дисс. ... канд. техн. наук. - Куйбышев, 1980. - 228 с.
43. Белолипецкий В.Н. Алгоритмы и устройства корреляционного анализа неравномерно дискретизированных сигналов. Дисс.... канд. техн. наук - Куйбышев, 1984. - 233 с.
44. Билинский И.Я., Микелсон А.К. Стохастическая цифровая обработка непрерывных сигналов. - Рига: Зинатне, 1983. - 292 с.
45. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969. - 576 с.
46. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1965. - 368 с.
47. Вероятностный анализ и моделирование океанологических процессов//Сб. статей п/р Рожкова В.А. - Л.: Гидрометеоздат, 1984. – 164 с.
48. Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А. К вопросу построения аппаратуры для аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида //Информационно-измерительные системы и их элементы. - Куйбышев, 1974.- С.151-156.
49. Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А. Корреляторы с аппроксимацией параметрическими моделями //Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей. Тез. докладов VII Всесоюзного симпозиума. - Л. - 1975.- С.60-64.
50. Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А. Об одном методе аппаратурной аппроксимации корреляционных функций стационарных случайных процессов.//ИВУЗов СССР «Радиофизика». - т. XVI.- №11. - 1973. - С.1770-1771.
51. Волков И.И., Прохоров С.А. Анализ статистических погрешностей при аппаратурной аппроксимации корреляционных функций однопараметрическими моделями //Информационно-измерительные системы и их элементы. - Куйбышев, 1974. - С.151-156.
52. Волков И.И., Прохоров С.А. Батищев В.И. Способ построения аппаратуры для определения методических погрешностей аппроксимации корреляционных функций //ИВУЗов СССР «Приборостроение». - т. XXI. - №8- 1978. - С.24-29.
53. Волков И.И., Прохоров С.А. Способ повышения точности аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра //ИВУЗов СССР «Приборостроение». - т. XVII. - №7- 1974. - С.66-72.

54. Волков И.И., Прохоров С.А., Батищев В.И. Методы и аппаратура для аппроксимативной оценки корреляционных характеристик с применением функций Лагерра. - Куйбышев, КПТИ, 1977. - 55 с.
55. Голд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов. – М.: Сов. Радио, 1973. - 368 с.
56. Горбачевич Е.Д. Коррелометры с аппроксимацией. - М., «Энергия», 1971. - 125с.
57. Горелов Г.В. Нерегулярная дискретизация сигналов. - М.: Радио и связь, 1982. - 256 с., ил. (стат. теория связи. Вып. 17)
58. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Физматгиз, 1963. - 1100 с.
59. Грибанов Ю. И., Веселова Г.П., Андреев В.Н. Автоматические цифровые корреляторы. – М.: Энергия, 1971. – 240 с., ил.
60. Грибанов Ю.И., Мальков В.Л. Спектральный анализ случайных процессов. -М.: Энергия, 1974. - 240 с., ил.
61. Губарев В.В. Алгоритмы статистических измерений. - М.: Энергоатомиздат, 1985. - 272 с.
62. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: «Наука», 1970.
63. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Ч.1. - М.:Мир,1971. -320 с.
64. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения.Ч.2. - М.:Мир,1972. -288 с.
65. Заездный А.М. Основы расчётов по статистической радиотехнике. – М.: Связь, 1969. - 447 с.
66. Инженерные изыскания на континентальном шельфе. ВНИ 51.2- 84. Рига: 1985. - 72 с.
67. Кавалеров Г.И., Мандельштам С.М. Введение в информационную теорию измерений.- М.: Энергия, 1974. - 375 с.
68. Калашников И.Д., Степанов В.С., Чуркин А.В. Адаптивные системы сбора и передачи информации. -М.: Энергия,1975. - 240 с.
69. Карпов И.Г. Модификация уравнений Пирсона для односторонних законов распределения непрерывной случайной величины. - Радиотехника, 1999, №3, С. 22 – 26.
70. Клигман Э. Проектирование микропроцессорных систем. – М.: Мир, 1980. – 575 с.
71. Коварцев А.Н. Автоматизация разработки и тестирования программных средств/Самар. гос. аэрокосм.ун- т. Самара, 1999. - 150 с.:ил
72. Козлов А.Н. Автоматизированная информационная система аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов. Дипломная работа. каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000.- 94 с.
73. Кудрина М.А. Автоматизированная учебно- исследовательская система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа. Дипломная работа, каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000.- 116 с.
74. Курочкин С.С. Многоканальные счётные системы и коррелометры. – М.: Энергия, 1972. – 344 с., ил.
75. Метод повышения точности аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра. /Батищев В.И., Волков И.И., Мотов В.В., Прохоров С.А. //Тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей» Л., 1975, С.60-64.
76. Методика обработки и анализа данных измерений течений АЦИИТ применительно к задачам темы П17 а.05 « Провести комплексное исследование океанографических, метеорологических и экологических условий в перспективных районах освоения минерального сырья в мировом океане» .- Л.: ЛОГОИН.- 1987. - 46 с.

77. Методическое письмо по вероятностному анализу векторных временных рядов скоростей течений и ветра. Л.: Гидрометеоиздат. - 1984.- 62 с.
78. Методы нормирования метрологических характеристик, оценки и контроля характеристик погрешностей средств статистических измерений. РТМ 25 139-74//Минприбор. – 1974. – 76 с.
79. Мидлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. – М: «Сов. Радио», 1961, т. 1.
80. Мирский Г.Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. - М.: Энергия,1972.-456 с., ил.
81. Мирский Г.Я. Характеристика стохастической взаимосвязи и их измерения.- М.: Энергоиздат, 1982. – 319 с.
82. Михайлов А.С., Прохоров С.А., Трапезников Ю.А. Применение метода расчета вероятностных характеристик к данным с неравномерной дискретностью для изучения гидрологического режима в открытой части Балтийского моря//Труды ВНИИГМИ-МЦД, 1989, вып.152, с. 85-91.
83. Новиченкова И.Ю. Автоматизированная учебно- исследовательская система аппроксимативного корреляционно- спектрального анализа. Дипломная работа, каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000.- 126 с.
84. Орищенко В.И., Санников В.Г., Свириденко В.А. Сжатие данных в системах сбора и передачи информации. – М.: Радио и связь, 1985. – 184 с., ил.
85. Перспективные средства вычислительной техники и автоматизации для создания интеллектуальных АСНИ /Прохоров С.А., Дерябкин В.П., Кривошеев А.О. и др.: НПЦ «Авиатор». Самара, 1994. 99 с.
86. Прохоров С.А. Измерение вероятностных характеристик при неравномерной дискретизации. - Дисс.... докт. техн. наук - Куйбышев: 1987. - 409 с.
87. Прохоров С.А. Исследование и разработка методов и аппаратуры для аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида.- Дисс. ... канд. техн. наук - Куйбышев: 1974, - 126 с.
88. Прохоров С.А. Особенности статистической обработки информации с использованием ЭВМ типа «Наири». Методические разработки по курсу «Математические основы информационно- измерительной техники» .- Куйбышев, КПТИ, 1977.- 43 с.
89. Прохоров С.А. Особенности статистической обработки информации с использованием ЭВМ типа «Наири». Методические разработки по курсу «Математические основы информационно- измерительной техники» .- Куйбышев, КПТИ, 1980.- 27 с.
90. Прохоров С.А., Сухинин В.П. Аппроксимативная корреляционная ИИС на базе ИВК //Статистические измерения и применение микромашиных средств в измерениях: Тез. докл. Всесоюзн. симп., секция 4, - Л.: 1982. - С. 133-137.
91. Пугачёв В.С. Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1968. - 368 с.
92. Пугачёв В.С. Теория случайных функций. – М.: Физматиздат., 1962. – 884 с.
93. Рабинер П., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.//Пер. с англ./Под ред. Ю.Н. Александрова. - М.: Мир, 1978.-848 с.
94. Рожков В.А. Методы вероятностного анализа океанологических процессов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1979. – 280 с.
95. Романенко А.Ф. Сергеев Г.А. Аппроксимативные методы анализа случайных процессов. - М.: Энергия,1974.-176 с., ил.
96. Романенко А.Ф. Сергеев Г.А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. -М.: Сов.радио,1968.-256 с.
97. Руководство по гидрологическим работам в океанах и морях. - Л.:Гидрометеоиздат.-1977.-752с.
98. Свириденко В.А. Анализ систем со сжатием данных. - М.:Связь,1977.-184с.

99. Соболев В.С. Методы идентификации класса случайного процесса в адаптивных информационно-измерительных системах статистического анализа. – Дисс.... канд. техн. Наук. – Л., 1983. – 212 с.
100. Соучек Б. Мини-ЭВМ в системах обработки информации. – М.: Мир, 1976. – 520 с.
101. Сухинин В.П., Прохоров С.А. Идентификация стационарных случайных процессов по виду корреляционной функции //Идентификация и автоматизация технологических процессов и промышленных установок. Куйбышев. - 1982. - С. 25 - 29.
102. Урмаев А.С. Основы моделирования на аналоговых вычислительных машинах. – М.: Наука, 1978. – 271 с.
103. Учеватов С.В. Автоматизированная информационная система аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов. Дипломная работа, каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2000.- 69 с.
104. Цветков Э.И. Методические погрешности статистических измерений - Л: Ленинградское отд-ние Энергоатомиздата, 1984.-144с., ил.
105. Цветков Э.И. Нестационарные случайные процессы и их анализ. - М.: Энергия, 1973.-128с., ил.
106. Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений.-2-е изд., перераб. и доп.- Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1982.- 256 с.
107. Чеголин П.М. Автоматизация спектрального и корреляционного анализа. – М.: Энергия, 1969. – 383 с.
108. Численные методы: Курс лекций/ А.Н. Коварцев. Самар. Гос. аэрокосм. Ун-т, 2000, 177 с.
109. Шевченко Д.В. Автоматизированная учебно-исследовательская система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа. Дипломная работа, каф. ИСТ, СГАУ, научный руководитель Прохоров С.А., 2001.- 139 с.
110. Ященко В.В. Разработка и исследование методов определения вероятностных характеристик сигналов, представленных нерегулярной выборкой. Дисс.... канд. техн. наук. - Л.:1986.-164 с.
111. Lampard D.G. A new Method of determining Correlation Function Sstationary Time Series. “Proceedings of the Institution of Electrical Engineers”, vol. 102, part. C. March, 1955, London, №1.
112. Prokhorov S. Manual for the Simulation of Random Processes and Dynamic Systems. - IRB.- Zagreb. - 1980.- 62 p.
113. Soucek B., Prokhorov S. Event-Train Correlation and Real-Time Microcomputer Systems//Microprocessing and Microprograming. - vol. 11 (1983).- № 1. - North Holland Publishing Company. - P. 23-29.
114. Soucek B., Prokhorov S. Event-Train Correlator Based on Small Computers//Proceedings of the IV International Symp. «MIMI 80».- Budapest. - 1980. - P.264-267.

Типовые законы распределения

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$	
1	Равномерный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{1}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{x-a}{b-a}, & (a < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	0; 0;	$(b-a)^4/80;$ -1,2;	$a = \alpha_1 - \sqrt{3\mu_2};$ $b = \alpha_1 + \sqrt{3\mu_2};$	
2	Симпсона	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < a); \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & (a < x < (a+b)/2); \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & ((a+b)/2 < x < b); \\ 0, & (b < x < \infty); \end{cases}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/24$	0; 0;	$(b-a)^4/240;$ -0,6;	$a = \alpha_1 - \sqrt{6\mu_2};$ $b = \alpha_1 + \sqrt{6\mu_2};$	
3	Арксинуса	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & (-a < x < a), \\ 0, & (a < x < \infty), \end{cases}$			$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < -a), \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}, & (-a < x < a), \\ 1, & (a < x < \infty), \end{cases}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	0	$a^2/2$	0; 0;	$3a^4/8;$ -1,5;	$a = \sqrt{2\mu_2}$	
4	Коши	$\frac{a}{\pi[(x-\mu)^2 + a^2]}$			$\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-\mu}{a} + \frac{1}{2}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$		
	Начальных и центральных моментов не существует, так как соответствующие интегралы расходятся					

№	Название закона	$f_x(x)$	$F_x(x)$		
5	Лапласа	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x-\mu }$	$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda(x-\mu)}, & (-\infty < x < \mu), \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda(x-\mu)}, & (\mu < x < \infty), \end{cases}$		
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\mu$	$2/\lambda^2$	$6/\lambda^3;$ $\approx 2,1;$	$24/\lambda^4;$ $3;$	
6	Вейбулла	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha\beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha); & \\ \alpha > 0, \beta > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0), \\ 1 - \exp(-\beta x^\alpha), & (0 < x < \infty) \end{cases}$		
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\Gamma(1+1/\alpha)\beta^{-1/\alpha}$	$\begin{aligned} & [\Gamma(1+2/\alpha) - \\ & - \Gamma^2(1+1/\alpha)] \times \\ & \times \beta^{-2/\alpha} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & [\Gamma(1+3/\alpha) - \\ & - 3\Gamma(1+1/\alpha) \times \\ & \times \Gamma(1+2/\alpha) + \\ & + 2\Gamma^3(1+1/\alpha)] \times \\ & \times \beta^{-3/\alpha}; \\ & \mu_3 / \mu_2^{3/2}; \end{aligned}$	$\begin{aligned} & [\Gamma(1+4/\alpha) - \\ & - 4\Gamma(1+3/\alpha) \times \\ & \times \Gamma(1+1/\alpha) + \\ & + 6\Gamma(1+2/\alpha) \times \\ & \times \Gamma^2(1+1/\alpha) - \\ & - 3\Gamma^4(1+1/\alpha)] \times \\ & \times \beta^{-4/\alpha}; \\ & \mu_4 / \mu_2^2 - 3; \end{aligned}$	
7	Рэля	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & (0 < x < \infty) \end{cases}$		
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \approx 1,25\sigma$	$\frac{4-\pi}{2} \sigma^2 \approx$ $\approx 0,43 \sigma^2$	$\frac{(\pi-3)\sqrt{\pi}}{2} \times$ $\times \sigma^3 \sqrt{2};$ $\approx 0,63;$	$\frac{32-3\pi^2}{4} \sigma^4;$ $\approx -0,3;$	
8	Экспоненциальный	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ \alpha e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0); \\ 1 - e^{-\alpha x}, & (0 < x < \infty) \end{cases}$		
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$1/\alpha$	$1/\alpha^2$	$2/\alpha^3;$ $2;$	$9/\alpha^4;$ $6;$	



№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$
9	$\operatorname{sech}^2 x$	$\frac{a}{2} \operatorname{sech}^2 ax$			$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} ax$
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	0	$\frac{\pi^2}{12a^2}$	0; 0;	$\frac{7\pi^4}{240a^4};$ 4,2;	$a = \frac{\pi}{2\sqrt{3}\mu_2}$
10	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$			$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt$
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	a	$\sigma^2$	0; 0;	$3\sigma^4;$ 0;	$a = \alpha_1;$ $\sigma = \sqrt{\mu_2};$
11	Односторонний нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp\left(-x^2/2\sigma^2\right), x > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \int_0^x \exp\left(-t^2/2\sigma^2\right) dt, x > 0 \end{cases}$
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\approx 0,8\sigma$	$\approx 0,36\sigma^2$	$\approx 0,22\sigma^3;$ $\approx 1;$	$\approx 0,54\sigma^4;$ $\approx 0,85;$	$\sigma = 1,25\alpha_1$
12	Пирсона	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}; \end{cases}$ $\lambda = n/2 (n = 1, 2, \dots)$			$\begin{cases} 0, (-\infty, x < 0); \\ \frac{\Gamma(\lambda, \alpha x)}{\Gamma(\lambda)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения
	$\lambda/\alpha$	$\lambda/\alpha^2$	$2\lambda/\alpha^3;$ $2/\sqrt{\lambda};$	$3\lambda(\lambda+2)/\alpha^4;$ $6/\lambda;$	$\alpha = \alpha_1/\mu_2;$ $\lambda = \alpha_1^2/\mu_2;$

№	Название закона	$f_x(x)$	$F_x(x)$
13	Распределение модуля нормальной случайной величины	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \left[ e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma^2}} \right]; \\ 0 \leq x < \infty \end{cases}$	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0) \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, (0 \leq x < \infty) \end{cases}$
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$
	$\frac{\sigma \sqrt{2\pi} (n-1)!!}{2^{n/2} \Gamma(n/2)};$ $\frac{\sigma \sqrt{2\pi} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Gamma(n/2)};$ $(n = 2k)$ $(n = 2k + 1)$	$\sigma^2 \left[ n - \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \right]$	$\sigma_3 \sqrt{2} \left[ (1-2n) \times \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + 4 \frac{\Gamma^3\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^3\left(\frac{n}{2}\right)} \right];$ $\mu_3 / \mu_2^{3/2};$
14	Усечённый нормальный	$\begin{cases} 0, (-\infty < x \leq x_1); \\ \frac{A}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, (x_1 < x \leq x_2); \\ 0, (x_1 < x < x_2); \end{cases}$ $A = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [B(x_2) - B(x_1)]}$ $B(x_i) = \int_0^{\frac{x_i-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$	$\begin{cases} 0, (-\infty < x \leq x_1); \\ \frac{B(x) - B(x_1)}{B(x_2) - B(x_1)}, (x_1 < x \leq x_2); \\ 0, (x_1 < x < x_2); \end{cases}$
		$\alpha_1$	$\mu_2$
	$a + E\sigma;$ $D(x) = \frac{x-a}{\sigma}; C(x) = \exp\left(-\frac{D^2(x)}{2}\right);$ $E = \frac{C(x_1) - C(x_2)}{B(x_2) - B(x_1)};$	$\sigma^2 \left\{ 1 - E^2 - \frac{A}{\sqrt{2\pi}} [D(x_2)C(x_2) - D(x_1)C(x_1)] \right\}$	

№	Название закона	$f_x(x)$			$F_x(x)$	
15	Эрланга	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\beta x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\beta x} (\beta x)^k}{k!}, \\ (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$\alpha/\beta$	$\alpha/\beta^2$	$2\alpha/\beta^3;$ $2/\sqrt{\alpha};$	$3\alpha(\alpha+2)/\beta^4;$ $6/\alpha;$	$\alpha = \alpha_1^2/\mu_2;$ $\beta = \alpha_1/\mu_2;$	
16	«Гамма-распределение»	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, (0 < x < \infty), \\ \alpha > -1, \beta > 0 \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\Gamma\left(\alpha+1; \frac{x}{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$(\alpha+1)\beta$	$(\alpha+1)\beta^2$	$2(\alpha+1)\beta^3;$ $\frac{2}{\sqrt{\alpha+1}};$	$3(\alpha+3)(\alpha+1)\beta^4$ $\frac{6}{\alpha+1};$	$\alpha = \frac{\alpha_1^2}{\mu_2} - 1;$ $\beta = \frac{\mu_2}{\alpha_1};$	
17	Показательно-степенной	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{x^m}{m!} e^{-x}, (0 < x < \infty) \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{\Gamma(m+1, x)}{\Gamma(m+1)}, (0 < x < \infty) \end{cases}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$m+1$	$m+1$	$2(m+1);$ $\frac{2}{\sqrt{m+1}};$	$3(m+3)(m+1);$ $\frac{6}{m+1};$	$m = \alpha_1 - 1$	
18	Максвелла	$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{4}{\sqrt{\pi}(2\sigma^2)^{3/2}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$			$\begin{cases} 0, (-\infty < x < 0); \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{cases}$	
	$\alpha_1$	$\mu_2$	$\mu_3;$ $k_a;$	$\mu_4;$ $k_\varepsilon;$	Параметры функции распределения	
	$\approx 1,6\sigma$	$\approx 1,73\sigma^2$	$\approx 0,15\sigma^3;$ $\approx 0,07;$	$\approx 13,5\sigma^4;$ $\approx 1,55;$	$\sigma \approx 0,625\alpha_1$	

Обратные функции законов распределения

Закон распределения	Обратная функция
Симпсона	$\begin{cases} a, y = 0 \\ (b - a) * \sqrt{\frac{y}{2}} + a, (0 < y < \frac{1}{2}) \\ b - \sqrt{\frac{1-y}{2}} * (b - a), [\frac{1}{2} < y < 1) \\ b, y = 1 \end{cases}$
Арксинуса	$\begin{cases} -a, y = 0 \\ -a * \cos(\pi y), (0 < y < 1) \\ a, y = 1 \end{cases}$
Коши	$a * \operatorname{tg} \left( \pi y - \frac{\pi}{2} \right) + \mu$
Лапласа	$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} * \ln(2y) + \mu, (0 < y < \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{\lambda} \ln(2 * (1 - y)) + \mu, [\frac{1}{2} < y < 1) \end{cases}$
Вейбулла	$\begin{cases} 0, y = 0 \\ \sqrt[\alpha]{-\frac{1}{\beta} \ln(1 - y)}, (0 < y < 1) \end{cases}$
Рэля	$\begin{cases} 0, y = 0 \\ \sqrt{-2 * \sigma^2 \ln(1 - y)}, (0 < y < 1) \end{cases}$
Экспоненциальный односторонний	$\begin{cases} 0, y = 0 \\ -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y), (0 < y < 1) \end{cases}$
Равномерный	$y(b - a) + a$
$\operatorname{sech}^2 ax$	$\frac{1}{2 * a} \ln\left(\frac{y}{1 - y}\right)$

Приложение 3

Характеристики типовых законов распределения (Рд=0,999)

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
1	Нормальный	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}}$	$6,8\sigma_x$
2	Односторонний нормальный	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}}{\sigma_x}$	$\frac{1}{\sigma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}}$	$3,4\sigma_x$
3	Усечённый нормальный	$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}}{[B(x_2) - B(x_1)]}$ $B(x_1) = \int_0^{\frac{x_1-a}{\sigma_x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$	$\frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma_x^2} e^{-\frac{1}{2}}$	$(x_2 - x_1)\sigma_x$
4	Распределение модуля нормальной случайной величины	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \left[ e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} - e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma_x^2}} \right]$	$X_3 \text{ определяется из уравнения}$ $(x^2 + a^2 - \sigma_x^2) \operatorname{ch} \frac{ax}{\sigma_x} - 2ax \operatorname{sh} \frac{ax}{\sigma_x} = 0;$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x^3} \left[ (x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} + (x+a)e^{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma_x^2}} \right]$	$3,15\sigma_x$

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	dx
5	Логарифмический нормальный	$\frac{1}{x\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma_x^2}}$	$-\frac{1}{\sigma_x^3\sqrt{2\pi}x^2} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma_x^2}} (\sigma_x^2 + \ln x - a)$ $x = e^{a-1,5\sigma_x^2} \mp \sqrt{0,25\sigma_x^4 + 1}$	$e^{3,085\sigma_x + a}$
6	Экспоненциальный	$\alpha e^{-\alpha x}$	$\alpha^2$	$\frac{6,9078}{\alpha}$
7	Пирсона	$\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, \lambda = \frac{n}{2}, (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{\alpha^2\sqrt{\lambda-1}(\lambda-1-\sqrt{\lambda-1})^{\lambda-2}}{\Gamma(\lambda)} e^{-(\lambda-1-\sqrt{\lambda-1})}$	$\frac{4}{\alpha}$
8	Гамма-распределение	$\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}, \alpha > -1, \beta > 0$	$\frac{\sqrt{\alpha(\alpha-\sqrt{\alpha})^{\alpha-1}}}{\beta^2\Gamma(\alpha+1)} e^{-(\alpha-\sqrt{\alpha})}$	9,5β
9	Максвелла	$\frac{4}{\sqrt{\pi}(2\sigma_x^2)^{3/2}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$	$\frac{4,1357\sigma_x}{\sqrt{\pi}(2\sigma_x^2)^{3/2}} e^{-0,2192}$	4,1σ <sub>x</sub>
10	Распределение модуля многомерного вектора	$\frac{2x^{n-1}}{(2\sigma_x^2)^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}, n = 1, 2, 3, \dots$	$[\frac{\sigma_x\sqrt{n-0,5(1+\sqrt{8n-7})}]{(2\sigma_x^2)^{n/2}\Gamma(n/2)}]^{n-2} \times e^{-\frac{[\sqrt{8n-7}-1]}{n-0,5(1+\sqrt{8n-7})}}$	3,8σ <sub>x</sub>
11	«m-распределение» (Накагами)	$\frac{2m^m x^{2m-1}}{\Gamma(m)\sigma_x^{2m}} e^{-\frac{mx^2}{\sigma_x^2}}, m \geq 1/2$	$m = 1/2, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-1/2}}{\sigma_x^2}$ $m = 1, \frac{6}{2} e^{-3/2} \sigma_x^2$	$\frac{2,33\sigma_x}{\sqrt{m}}$

№	Название	$f_x(x)$	$ F''(x) $	$dx$
12	Показательно-степенной	$\frac{x^m}{m!} e^{-x}$	$\frac{\sqrt{m} (m - \sqrt{m})^{m+1}}{m!} e^{-(m-\sqrt{m})}$	
13	Эрланга	$\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\beta x}, \alpha = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{\beta^2 \sqrt{\alpha-1} (\alpha-1 - \sqrt{\alpha-1})^{\alpha-2}}{(\alpha-1)!} e^{-(\alpha-1-\sqrt{\alpha-1})}$	
14	Гиперэкспоненциальный	$\sum_{n=1}^N \alpha_n \lambda_n e^{-\lambda_n x}$	$\sum_{n=1}^N \alpha_n \lambda_n^2$	

Таблица  $\chi^2$  распределения

r\p	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10
1	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60
3	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25
4	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78
5	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24
6	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64
7	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02
8	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36
9	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68
10	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99
11	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28
12	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55
13	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81
14	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,10
15	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,30
16	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,50	23,50
17	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,60	24,80
18	10,86	12,86	14,44	17,34	20,60	22,80	26,00

Таблица значений коэффициента  $\lambda$  к критерию Колмогорова

$\delta \backslash N$	500	1000	2000	5000	8000	10000
0,0025	0,0559	0,0790	0,1118	0,1767	0,2236	0,25
0,005	0,1118	0,1581	0,2236	0,3535	0,4472	0,5
0,01	0,2236	0,3162	0,4472	0,7071	0,8944	1
0,02	0,4472	0,6324	0,8944	1,4142	1,7889	2
0,03	0,6708	0,9486	1,3416	2,1213	2,6833	3
0,04	0,8972	1,2648	1,7888	2,8284	3,5777	4
0,05	1,1208	1,5810	2,2360	3,5355	4,4721	5



Приложение 6

Производные для однопараметрических плотностей распределения вероятностей

Закон распределения	$f(x, \beta_1)$	$\frac{\partial f(x, \beta_1)}{\partial \beta_1}$	$\frac{\partial^2 f(x, \beta_1)}{\partial \beta_1^2}$
$\operatorname{sech}^2 x$	$\frac{a}{2} \operatorname{ch}^{-2} a\bar{x}_j$	$\frac{1}{2} \operatorname{ch}^{-2} (a\bar{x}_j) - a\bar{x}_j \operatorname{ch}^{-3} (a\bar{x}_j) \operatorname{sh} (a\bar{x}_j)$	$-\operatorname{ch}^{-3} (a\bar{x}_j) \operatorname{sh} (a\bar{x}_j) (1 + \bar{x}_j) + a\bar{x}_j^2 \operatorname{ch}^{-2} (a\bar{x}_j) (3 \operatorname{ch}^{-2} (a\bar{x}_j) \operatorname{sh}^2 (a\bar{x}_j) - 1)$
Арксинуса	$\frac{1}{\pi} \left( a^2 - \bar{x}_j^2 \right)^{-1/2}$	$-\frac{a}{\pi} \left( a^2 - \bar{x}_j^2 \right)^{-3/2}$	$\frac{3a^2}{\pi} \left( a^2 - \bar{x}_j^2 \right)^{-5/2} - \frac{1}{\pi} \left( a^2 - \bar{x}_j^2 \right)^{-3/2}$
Рэля	$\frac{\bar{x}_j}{\sigma^2} e^{-\frac{\bar{x}_j^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{\bar{x}_j^2}{2\sigma^2}} \left( \frac{\bar{x}_j}{\sigma^2} - \frac{2\bar{x}_j}{\sigma^3} \right)$	$e^{-\frac{\bar{x}_j^2}{2\sigma^2}} \left( \frac{\bar{x}_j^5}{\sigma^8} - \frac{7\bar{x}_j^3}{\sigma^6} + \frac{6\bar{x}_j}{\sigma^4} \right)$
Экспоненциальный	$\alpha e^{-\alpha \bar{x}_j}$	$e^{-\alpha \bar{x}_j} [1 - \alpha \bar{x}_j]$	$-\bar{x}_j e^{-\alpha \bar{x}_j} [2 - \alpha \bar{x}_j]$

Производные для двухпараметрических плотностей распределения вероятностей

Закон распределения	$\frac{\partial f(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1}$	$\frac{\partial f(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2}$	$\frac{\partial^2 f(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1^2}$
Симпсона	$\frac{-4}{(b-a)^2} + 8 \frac{(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^3}$ $(a < x < \frac{a+b}{2})$ $\frac{8(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^3}$ $(\frac{a+b}{2} < x < b)$	$8 \frac{(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^3}$ $(a < x < \frac{a+b}{2})$ $\frac{4}{(b-a)^2} - \frac{8(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^3}$ $(\frac{a+b}{2} < x < b)$	$\frac{-16(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^3} + \frac{24(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^4}$ $(a < x < \frac{a+b}{2})$ $\frac{24(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^4}$ $(\frac{a+b}{2} < x < b)$
Лапласа	$\frac{1}{2} e^{-\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (1 - \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x > \mu)$ $\frac{1}{2} e^{\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (1 + \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x < \mu)$	$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda(\bar{x}_j - \mu)}$ $(x > \mu)$ $-\frac{\lambda^2}{2} e^{\lambda(\bar{x}_j - \mu)}$ $(x < \mu)$	$\frac{1}{2} e^{-\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (\bar{x}_j - \mu) (2 - \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x > \mu)$ $\frac{1}{2} e^{\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (\bar{x}_j - \mu) (2 + \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x < \mu)$
Вейбулла	$\beta \bar{x}_j^{\alpha-1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} (1 + \alpha \ln \bar{x}_j - \alpha \beta \bar{x}_j^\alpha \ln \bar{x}_j)$	$\bar{x}_j^{\alpha-1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} (1 - \beta \bar{x}_j^\alpha)$	$\beta \bar{x}_j^{\alpha-1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} \ln \bar{x}_j (1 - \beta \bar{x}_j^\alpha - \alpha \beta \bar{x}_j^{\alpha-1} \ln \bar{x}_j) +$ $+ \beta \bar{x}_j^{\alpha-1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} \ln \bar{x}_j (1 - \beta \bar{x}_j^\alpha) (1 + \alpha \ln \bar{x}_j - \alpha \beta \bar{x}_j^\alpha \ln \bar{x}_j)$

Закон распределения	$\frac{\partial^2 f(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2^2}$	$\frac{\partial^2 f(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1 \beta_2}$	$\frac{\partial^2 f(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2 \beta_1}$
Симпсона	$\frac{24(\bar{x}_j - a)}{(b - a)^4}$ $(a < x < \frac{a+b}{2})$ $-\frac{16}{(b-a)^3} + \frac{24(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^4}$ $(\frac{a+b}{2} < x < b)$	$\frac{8}{(b-a)^3} - \frac{24(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^4}$ $(a < x < \frac{a+b}{2})$ $\frac{8}{(b-a)^3} - \frac{24(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^4}$ $(\frac{a+b}{2} < x < b)$	$\frac{8}{(b-a)^3} - \frac{24(\bar{x}_j - a)}{(b-a)^4}$ $(a < x < \frac{a+b}{2})$ $\frac{8}{(b-a)^3} - \frac{24(b - \bar{x}_j)}{(b-a)^4}$ $(\frac{a+b}{2} < x < b)$
Лапласа	$\frac{\lambda^3}{2} e^{-\lambda(\bar{x}_j - \mu)}$ $(x > \mu)$ $\frac{\lambda^3}{2} e^{\lambda(\bar{x}_j - \mu)}$ $(x < \mu)$	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (2 - \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x > \mu)$ $-\frac{\lambda}{2} e^{\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (2 + \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x < \mu)$	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (2 - \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x > \mu)$ $-\frac{\lambda}{2} e^{\lambda(\bar{x}_j - \mu)} (2 + \lambda(\bar{x}_j - \mu))$ $(x < \mu)$
Вейбулла	$-\alpha \bar{x}_j^{2\alpha - 1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} (2 - \beta \bar{x}_j^\alpha)$	$\beta \bar{x}_j^{\alpha - 1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} (-\alpha \bar{x}_j^{\alpha - 1} \ln \bar{x}_j) + (1 + \alpha \ln \bar{x}_j - \alpha \beta \bar{x}_j^\alpha \ln \bar{x}_j)$ $(\bar{x}_j^{\alpha - 1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} - \beta \bar{x}_j^{2\alpha - 1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha})$	$\bar{x}_j^{\alpha - 1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} (-\beta \bar{x}_j^{\alpha - 1} \ln \bar{x}_j) + (1 - \beta \bar{x}_j^\alpha)$ $(\bar{x}_j^{\alpha - 1} e^{-\beta \bar{x}_j^\alpha} (1 + \alpha \ln \bar{x}_j - \alpha \beta \bar{x}_j^\alpha \ln \bar{x}_j))$

## Приложение 8

### Производные для однопараметрических функций распределения вероятностей

Закон распределения	$F(x, \beta_1)$	$\frac{\partial F(x, \beta_1)}{\partial \beta_1}$	$\frac{\partial^2 F(x, \beta_1)}{\partial \beta_1^2}$
$\sec h^2 x$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th}(ax_j)$	$\frac{\bar{x}_j}{2} \operatorname{ch}^{-2}(ax_j)$	$-\frac{x_j^2}{\operatorname{ch}^3(ax_j)}$
Арксинуса	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x_j}{a}$	$\frac{x_j}{\pi \sqrt{(a^2 - x_j^2)^2}}$	$\frac{x_j}{2\pi \sqrt{(a^2 - x_j^2)^3}}$
Рэля	$1 - e^{-\frac{x_j^2}{2\sigma^2}}$	$-\frac{x_j}{\sigma^2} e^{-\frac{x_j^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{x_j^2}{2\sigma^2}} \left( \frac{3x_j^2}{4\sigma^4} - \frac{x_j^4}{\sigma^6} \right)$
Экспоненциальный	$1 - e^{-\alpha x_j}$	$x_j e^{-\alpha x_j}$	$x_j^2 e^{-\alpha x_j}$

Производные для двухпараметрических функций распределения

Закон распределения	$\frac{\partial F(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1}$	$\frac{\partial F(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2}$	$\frac{\partial^2 F(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1^2}$
Симпсона	$\frac{4(x_j - a)^2}{(b - a)^3} - \frac{4(x_j - a)}{(b - a)^2}$ $(a < x < \frac{a + b}{2})$ $-\frac{4(b - x_j)^2}{(b - a)^3}$ $(\frac{a + b}{2} < x < b)$	$-\frac{4(x_j - a)^2}{(b - a)^3}$ $(a < x < \frac{a + b}{2})$ $\frac{4}{(b - a)^2} - \frac{8(b - x_j)}{(b - a)^3}$ $(\frac{a + b}{2} < x < b)$	$\frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4} - \frac{16(x_j - a)}{(b - a)^3} + \frac{4}{(b - a)^2}$ $(a < x < \frac{a + b}{2})$ $\frac{24(b - x_j)}{(b - a)^4}$ $(\frac{a + b}{2} < x < b)$
Лапласа	$\frac{1}{2}e^{-\lambda(x_j - \mu)}(x_j - \mu)$ $(x > \mu)$ $\frac{1}{2}e^{\lambda(x_j - \mu)}(x_j - \mu)$ $(x < \mu)$	$-\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda(x_j - \mu)}$ $(x > \mu)$ $-\frac{\lambda}{2}e^{\lambda(x_j - \mu)}$ $(x < \mu)$	$-\frac{1}{2}e^{-\lambda(x_j - \mu)}(x_j - \mu)^2$ $(x > \mu)$ $\frac{1}{2}e^{\lambda(x_j - \mu)}(x_j - \mu)^2$ $(x < \mu)$
Вейбулла	$\beta x_j^\alpha e^{-\beta x_j^\alpha} \ln x_j$	$x_j^\alpha e^{-\beta x_j^\alpha}$	$\beta x_j^\alpha e^{-\beta x_j^\alpha} \ln^2 x_j (1 - \beta x_j^\alpha)$

Продолжение приложения 9

Закон распределения	$\frac{\partial^2 F(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2^2}$	$\frac{\partial^2 F(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_1 \beta_2}$	$\frac{\partial^2 F(x, \beta_1, \beta_2)}{\partial \beta_2 \beta_1}$
Симпсона	$\frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4}$ $(a < x < \frac{a + b}{2})$ $\frac{16(b - x_j)^2}{(b - a)^3} - \frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4} - \frac{4}{(b - a)^2}$ $(a + b < x < b)$	$\frac{8(x_j - a)^2}{(b - a)^3} - \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4}$ $(a < x < \frac{a + b}{2})$ $\frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4} - \frac{8(b - x_j)^2}{(b - a)^3}$ $(a + b < x < b)$	$\frac{8(x_j - a)^2}{(b - a)^3} - \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4}$ $(a < x < \frac{a + b}{2})$ $\frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4} - \frac{8(b - x_j)^2}{(b - a)^3}$ $(a + b < x < b)$
Лапласа	$-\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda(x_j - \mu)}$ $(x > \mu)$ $\frac{\lambda^2}{2} e^{\lambda(x_j - \mu)}$ $(x < \mu)$	$\frac{1}{2} e^{-\lambda(x_j - \mu)} (\lambda(x_j - \mu) - 1)$ $(x > \mu)$ $-\frac{1}{2} e^{\lambda(x_j - \mu)} (1 + \lambda(x_j - \mu))$ $(x < \mu)$	$\frac{1}{2} e^{-\lambda(x_j - \mu)} (\lambda(x_j - \mu) - 1)$ $(x > \mu)$ $-\frac{1}{2} e^{\lambda(x_j - \mu)} (1 + \lambda(x_j - \mu))$ $(x < \mu)$

**Приложение 10**  
**Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом нерекурсивной фильтрации**

$K_x(\tau)$	$h(\tau)$	К
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$k\alpha e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x \sqrt{\frac{1}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$k\alpha^2 \tau e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau )$	$k\alpha e^{-\alpha\tau} (1 - \alpha\tau)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau  + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$k\alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha\tau}$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{3\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$k\alpha e^{-\alpha\tau} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} - \alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{1}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{k\alpha \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}}{\omega_0} e^{-\alpha\tau} \sin \omega_0 \tau$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$k\alpha e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}$

Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом рекурсивной фильтрации

Вид модели	Моделирующий алгоритм	Параметры алгоритма
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$Y_n = a_0 X_n + b_1 Y_{n-1}$	$\gamma = \alpha \Delta t; p = e^{-\gamma}; a_0 = \sqrt{1 - p^2}; b_1 = p$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$Y_n = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + b_1 Y_{n-1} + b_2 Y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p^3 (1 + \gamma) - p(1 - \gamma); \alpha_1 = 1 - 4p^2 \gamma - p^4;$ $a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})} / 2; a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p; b_2 = -p^2$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$Y_n = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + b_1 Y_{n-1} + b_2 Y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0; \alpha_1 = 1 - p^4;$ $a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})} / 2; a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$Y_n = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + b_1 Y_{n-1} + b_2 Y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 + \frac{\alpha}{\omega_0} (1 + p^2) p \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 - 4p^2 \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0; a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})} / 2;$ $a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$Y_n = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + b_1 Y_{n-1} + b_2 Y_{n-2}$	$\gamma = \alpha \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t; p = e^{-\gamma}; \alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 - \frac{\alpha}{\omega_0} (1 + p^2) p \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 + 4p^2 \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0; a_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})} / 2;$ $a_1 = \alpha_0 / \alpha_1; b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$



**Параметрические модели корреляционных функций**

На верхнем рисунке графики соответствуют (сверху вниз):  $\rho_{x4}(\tau)$  (ряд 1),  $\rho_{x2}(\tau)$  (ряд 2),  $\rho_{x1}(\tau)$  (ряд 3),  $\rho_{x3}(\tau)$  (ряд 4).

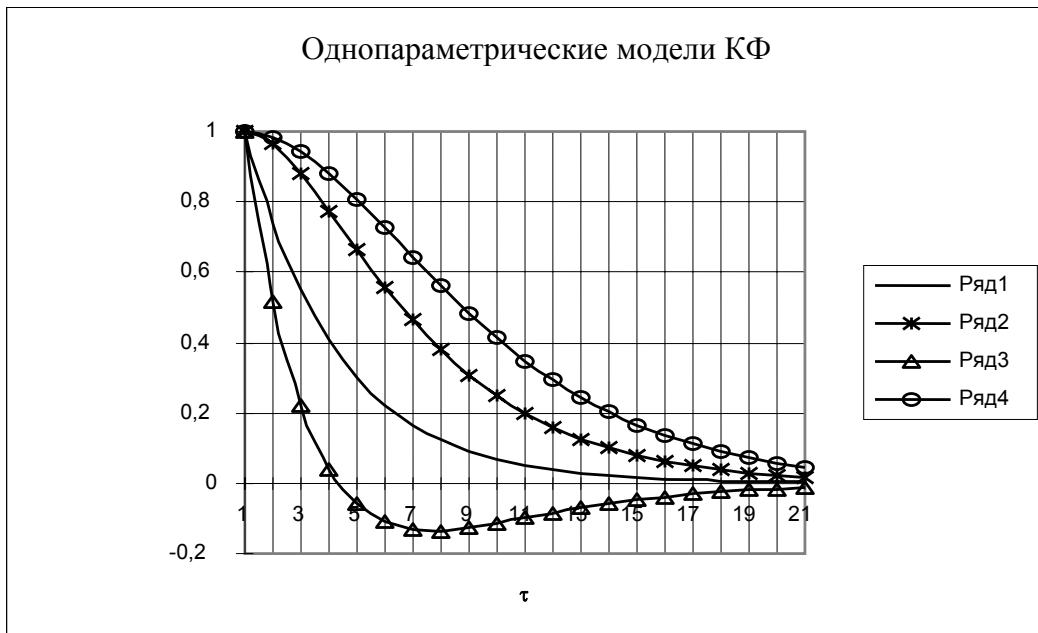


Рисунок П.12.1

На нижнем рисунке и далее верхняя кривая соответствует модели

$$\rho_{6x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\tau} \sin \omega_0 |\tau| \right), \text{ средняя-} \rho_{5x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \text{ нижняя-}$$

$$\rho_{7x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\tau} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

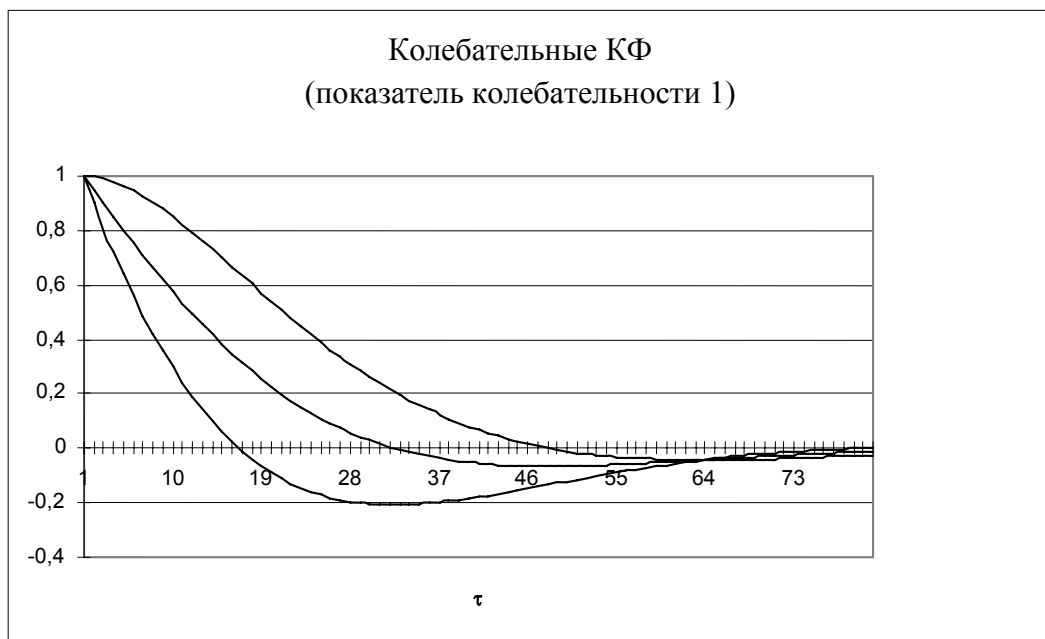


Рисунок П.12.2

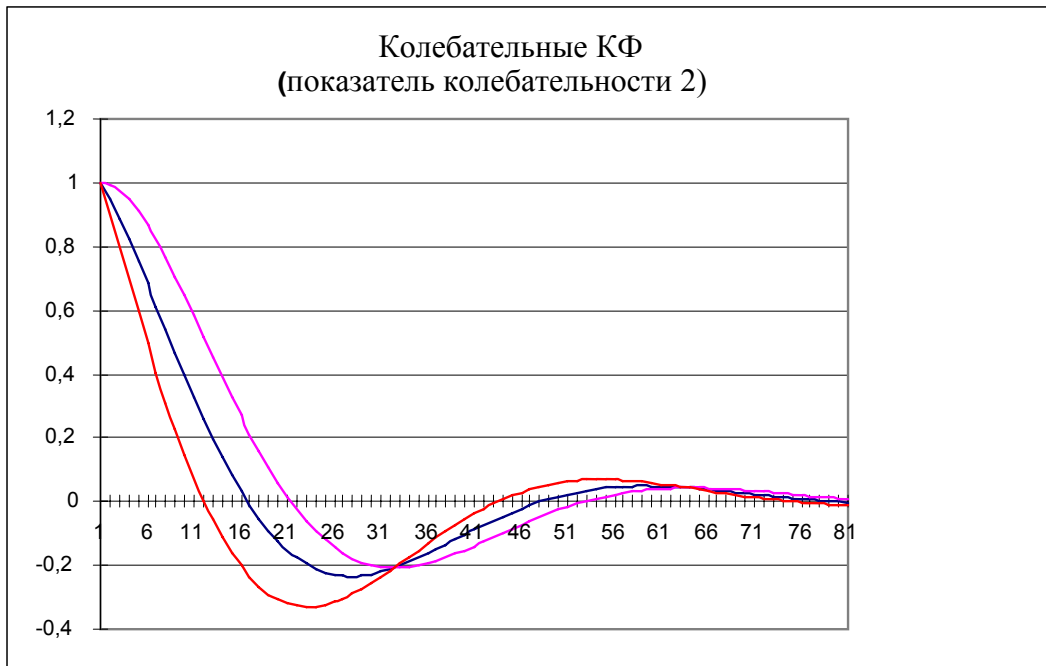


Рисунок П.12.3

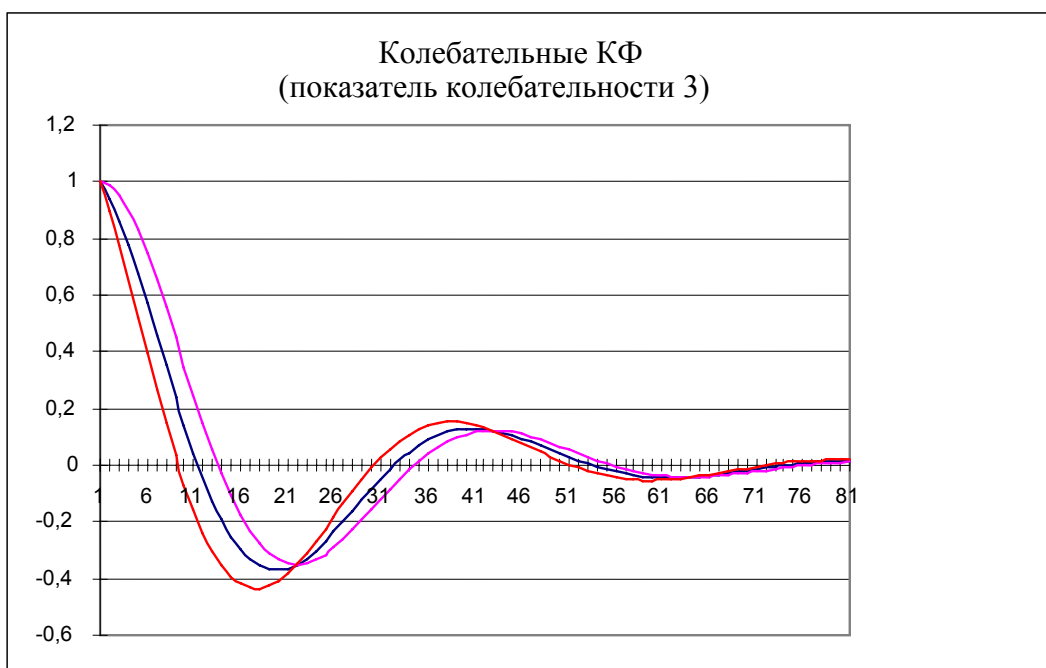


Рисунок П.12.4

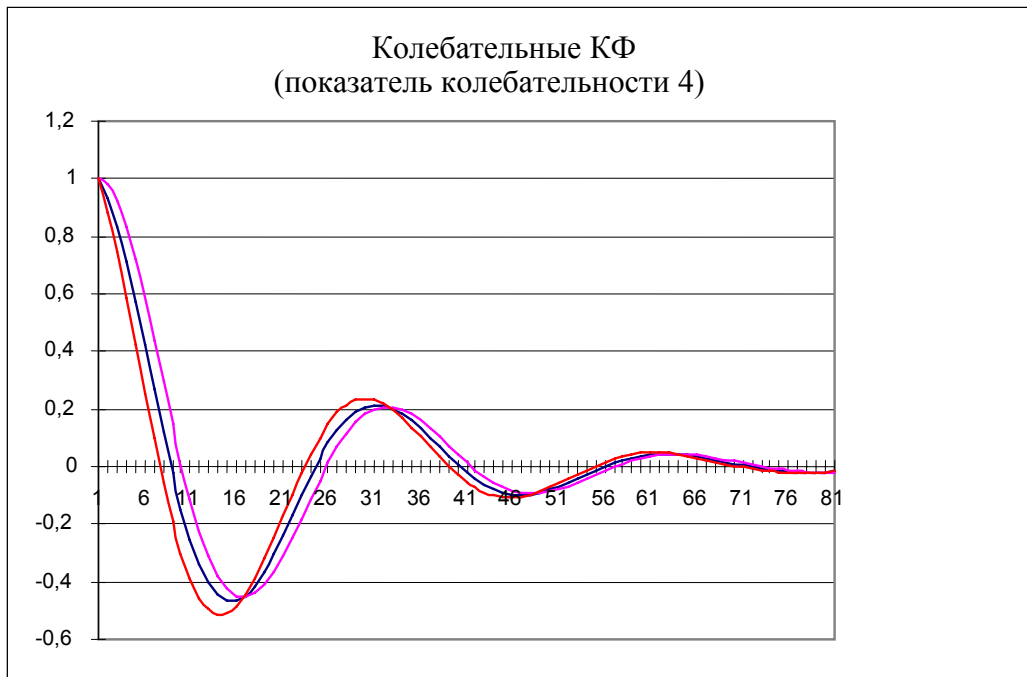


Рисунок П.12.5

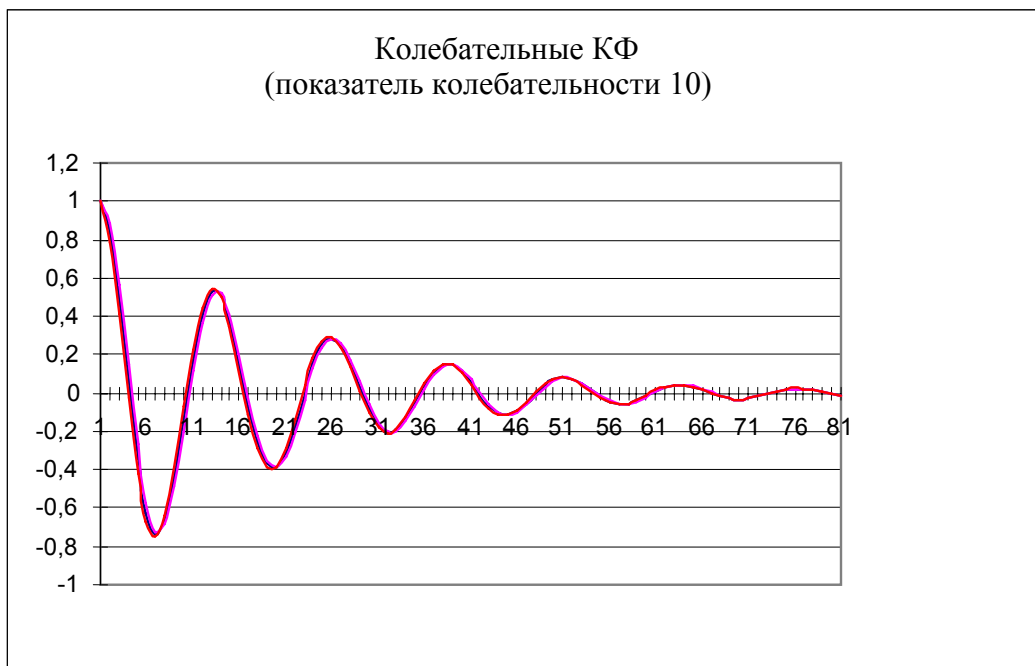


Рисунок П.12.6

### Ортогональные функции Лагерра

Ортогональные функции Лагерра, определяемые выражением

$$L_k(\tau) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\alpha\tau/2},$$

удовлетворяют следующему свойству:  $\int_0^{\infty} L_k(\tau) L_n(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq n; \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{при } k = n. \end{cases}$

Вид первых 6 ортогональных функций Лагерра приведен ниже.



Приложение 14

Параметры моделей корреляционных функций в ортогональном базисе Лагерра

Нормированные значения параметра функции Лагерра и относительные погрешности аппроксимации (m=2)

Таблица П. 14.1.

№	1		2		3	
	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$
1	1,330	0,00559	3,100	0,00102	8,910	0,01760
2	2,100	0,06250	5,210	0,02676		
3	2,860	0,15532	7,560	0,09041		
4	3,760	0,24765	9,990	0,16725		
5	4,460	0,328109	12,450	0,24145		

Нормированные значения параметра функции Лагерра и относительные погрешности аппроксимации (m=4)

Таблица П. 14.2.

№	1		2		3		4	
	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$
1	0,85000	0,00383	1,88500	0,00008	2,98599	0,00002	4,89999	0,00016
2	1,23999	0,05213	2,82199	0,00657	4,91400	0,00384	8,95100	0,01164
3	1,74999	0,13664	3,96999	0,03404	7,06899	0,02406	13,20800	0,05306
4	2,30000	0,22406	5,18299	0,07912	9,29700	0,06143	17,52499	0,11303
5	2,86000	0,30214	6,42500	0,13165	11,55600	0,10797	21,86699	0,17712

Нормированные значения параметра функции Лагерра и относительные погрешности аппроксимации (m=6)  
Таблица П.14.3.

№	1		2		3		4	
	$\mu$	$\delta$	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$
1	0,54000	0,00949	0,62999	0,00348	1,40999	0,00002	2,13999	0,0000
2	0,77499	0,07415	2,00999	0,00390	3,22999	0,00082	4,79000	0,00055
3	1,08499	0,17108	2,77999	0,02395	4,54000	0,00832	6,86000	0,00645
4	1,41999	0,26412	3,61999	0,06069	5,92000	0,02734	9,00000	0,02270
5	1,76499	0,34458	4,47000	0,10611	7,33000	0,05617	11,17999	0,04854

№	5		6		7	
	$\mu$	$\delta$	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$
1	2,94999	0,00000	4,10999	0,00000	6,59000	0,00007
2	7,22000	0,00125	12,47000	0,00867		
3	10,55000	0,01157				
4	13,94000	0,03570				
5	17,36999	0,07014				

Нормированные значения параметра функции Лагерра и относительные погрешности аппроксимации  
Таблица П.14.4.

$\mu$	1		2		3		4		5	
	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$
2,82842			4,47213		6,32455		8,24621		10,19803	
0,00168			0,03715		0,11470		0,20137		0,28108	

Оптимальные значения параметра функций Лагерра и коэффициентов разложения

Таблица П 14.5

$\mu$	$\chi_{opt}$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\sum_{k=0}^2 \beta_k$	$\delta$
1	3,09999	1,05364	0,11420	-0,19517	0,97267	0,00102
2	5,21000	1,10508	0,25974	-0,48216	0,88266	0,02676
3	7,56000	1,13465	0,35433	-0,69139	0,79758	0,08041
4	9,99000	1,15306	0,41540	-0,83667	0,73179	0,16725
5	12,45000	1,16516	0,45774	0,94055	0,68234	0,24145

$\mu$	$\chi_{opt}$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\sum_{k=0}^4 \beta_k$	$\delta$
1	2,98599	1,03174	0,13852	-0,18655	-0,01202	0,03290	1,00460	0,00002
2	4,91400	1,06500	0,31040	-0,44916	-0,06075	0,18031	1,04579	0,00384
3	7,06899	1,08432	0,42320	-0,63711	-0,11336	0,35152	1,10858	0,02406
4	9,29700	1,09620	0,49715	-0,76637	-0,15673	0,49907	1,16931	0,06143
5	11,55600	1,10410	0,54842	-0,85858	-0,19099	0,61863	1,22158	0,10797

$\mu$	$\chi_{opt}$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\sum_{k=0}^6 \beta_k$	$\delta$
1	2,94999	1,02464	0,14614	-0,18344	-0,01609	0,03234	0,00117	-0,00562	0,99914	0,00000
2	4,79000	1,04740	0,33107	-0,43251	-0,08578	0,17377	0,01637	-0,06810	0,98222	0,00055
3	6,86000	1,06165	0,45143	-0,60846	-0,16003	0,33656	0,04182	-0,18040	0,94257	0,00645
4	9,00000	1,07027	0,53066	-0,72831	-0,22177	0,47602	0,06856	-0,30040	0,89503	0,02270
5	11,17999	1,07669	0,58477	-0,81456	-0,26874	0,58961	0,09048	-0,41082	0,84743	0,04854

Нормированные параметры функции Лагерра и соответствующие погрешности аппроксимации экспоненциально- косинусной корреляционной функции для  $m=2$

Таблица П.14.6

$\mu$	1		2		3	
	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$
1	1,22600	0,10318	1,00039	0,01031	0,99989	0,02602
2	1,78700	0,34013	1,00002	0,01254	0,99978	0,16005
3	2,52399	0,49958	1,00009	0,04035	0,99998	
4	3,31499	0,59888	1,00026	0,11646	0,99972	
5	4,12899	0,66527	1,00013	0,18847	1,02527	

Нормированные параметры функции Лагерра и соответствующие погрешности аппроксимации экспоненциально- косинусной корреляционной функции для  $m=4$

Таблица П.14.7

$\mu$	1		2		3		4		5						
	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$	$\chi$	$\delta$					
1	0,780	0,085	1,001	1,855	0,006	0,999	2,960	0,000	1,001	4,860	0,002	1,000	13,89	0,017	1,000
2	1,105	0,332	1,003	2,750	0,002	0,999	4,850	0,014	1,001	8,865	0,004	0,999			
3	1,550	0,486	1,003	3,860	0,017	0,993	6,970	0,044	1,002	13,08	0,043	0,996			
4	2,030	0,590	1,000	5,035	0,021	0,998	9,165	0,087	1,005	17,35	0,102	0,998			
5	2,530	0,654	1,006	6,240	0,074	0,996	11,39	0,137	1,005	21,64	0,166	1,000			



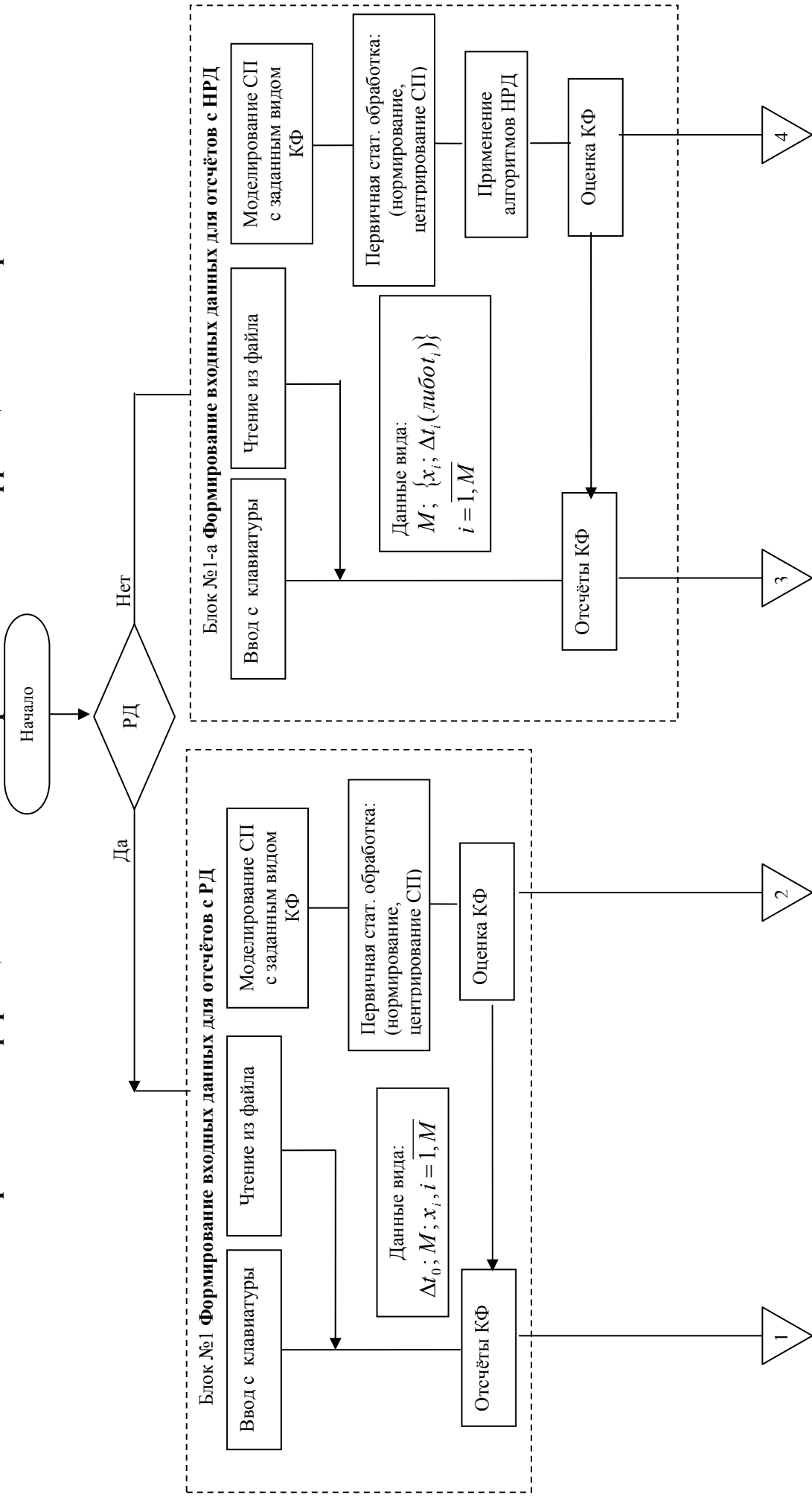
Обобщенные спектральные характеристики

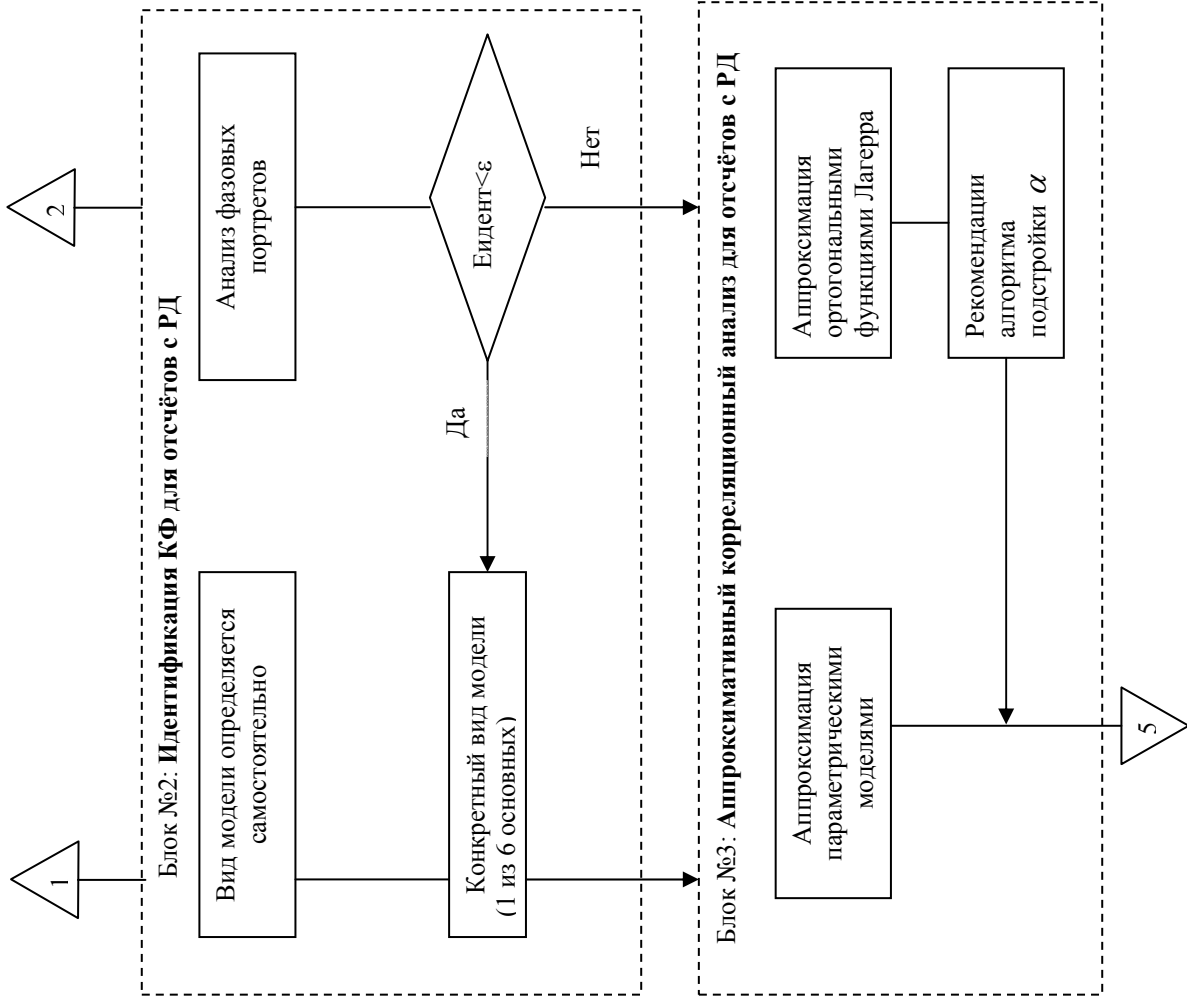
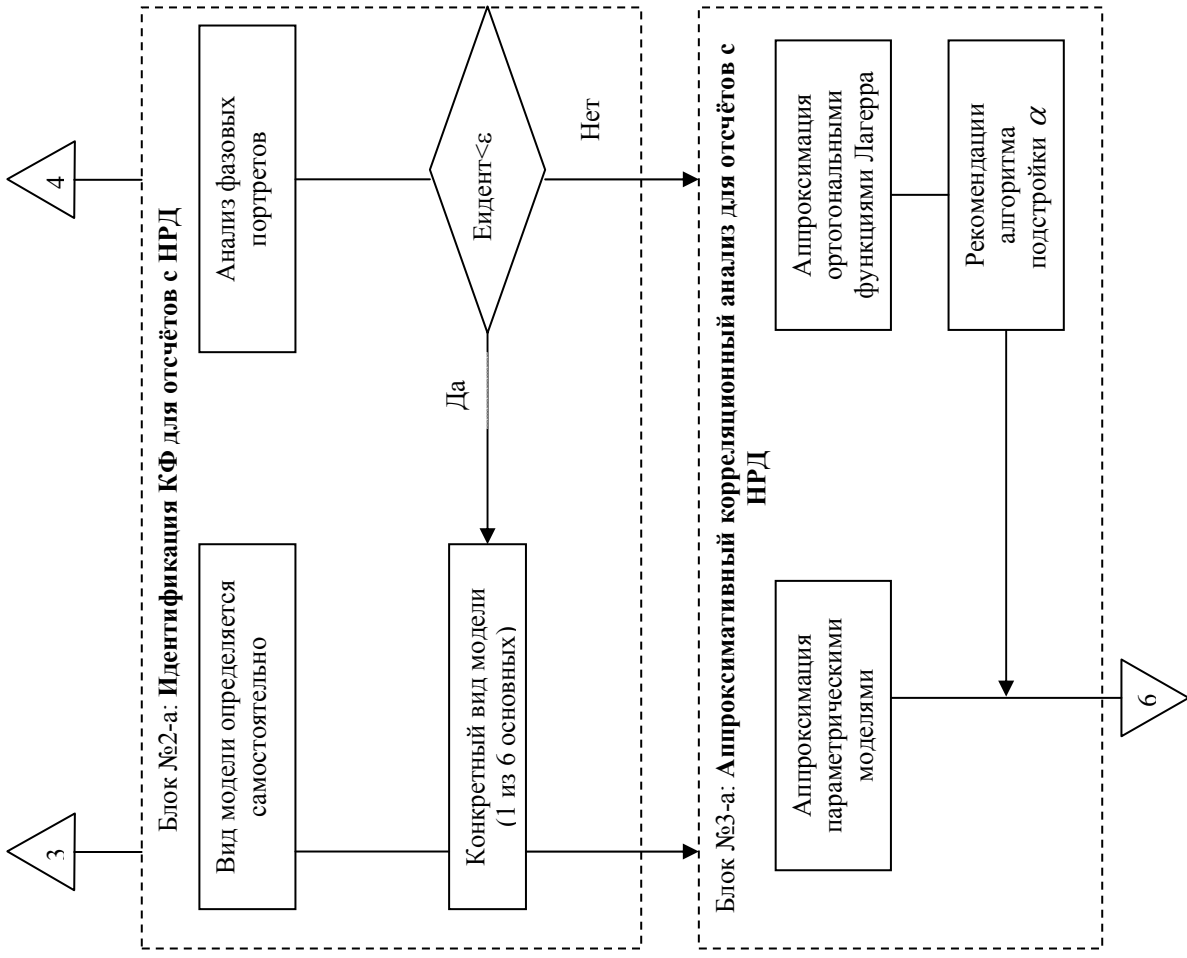
№	$K_x(\tau)$	$\omega_0$	$S_x(\omega_0)$
1	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	0	$\frac{\sigma_x^2}{\pi\alpha}$
2	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau )$	0	$\frac{2\sigma_x^2}{\pi\alpha}$
3	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau )$	$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$	$\frac{2\sigma_x^2}{9\pi\alpha}$
4	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	0	$\frac{8\sigma_x^2}{3\pi\alpha}$
5	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\sqrt{2\omega_0\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}-\left(\omega_0^2+\alpha^2\right)}$	$\frac{\sigma_x^2\alpha}{\pi} \left\{ \frac{\alpha^2+\omega_0^2+\omega_0^2}{\left[\alpha^2+(\omega_0-\omega_0)^2\right] \left[\alpha^2+(\omega_0+\omega_0)^2\right]} \right\}$
6	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$	$\frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2+\omega_0^2}{\left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}-\omega_0\right)^2\right] \left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}+\omega_0\right)^2\right]}$
7	$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}$	$\frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2+\omega_0^2}{\left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}-\omega_0\right)^2\right] \left[\alpha^2+\left(\sqrt{\omega_0^2+\alpha^2}+\omega_0\right)^2\right]}$

№	$\Delta\omega'_3 = \frac{\sigma_x^2}{2S_x(\omega_3)}$	$\Delta\omega'_3 = \omega_3 + \frac{\Delta\omega'_3}{2}$
1	$\frac{\pi\alpha}{2}$	$\frac{\pi\alpha}{2}$
2	$\frac{\pi\alpha}{4}$	$\frac{\pi\alpha}{4}$
3	$\frac{9\pi\alpha}{4}$	$\frac{\alpha(2\sqrt{2} + 9\pi)}{4}$
4	$\frac{3\pi\alpha}{16}$	$\frac{3\pi\alpha}{16}$
5	$\frac{\pi[\alpha^2 + (\omega_3 - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_3 + \omega_0)^2]}{2\alpha(\alpha^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2)}$	$\omega_3 + \frac{\pi[\alpha^2 + (\omega_3 - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_3 + \omega_0)^2]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2)}$
6	$\frac{\pi[\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0)^2]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \pi[\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0)^2]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
7	$\frac{\pi[\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0)^2]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \pi[\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0)^2]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$

# Приложение 16

## Блок-схема автоматизированной информационной системы аппроксимационно-спектрального анализа





5

Блок №4: Обобщённый анализ корреляционных характеристик для отсчётов с РД

Блок №5: Аппроксимативный спектральный анализ для отсчётов с РД

Блок №6: Обобщённый анализ спектральных характеристик для отсчётов с РД

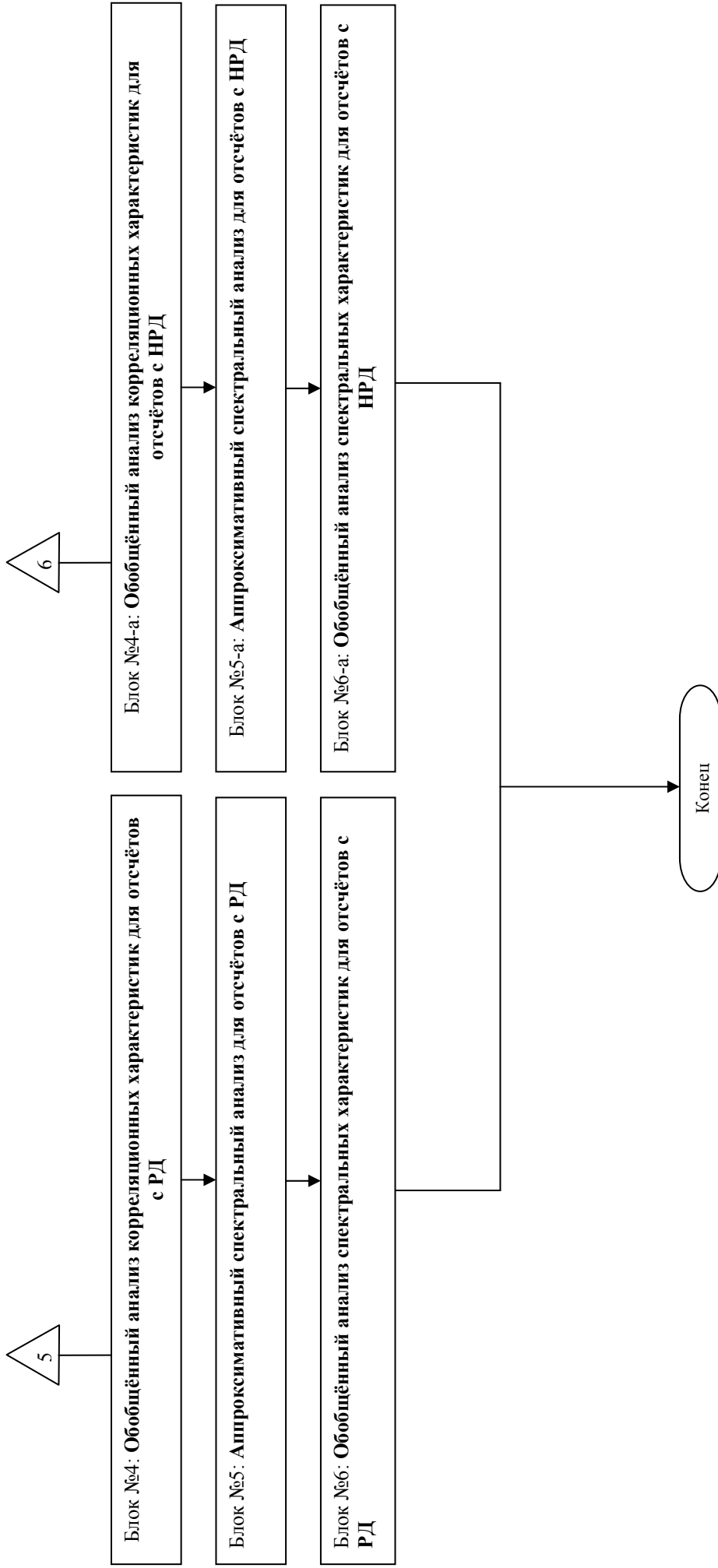
6

Блок №4-а: Обобщённый анализ корреляционных характеристик для отсчётов с НРД

Блок №5-а: Аппроксимативный спектральный анализ для отсчётов с НРД

Блок №6-а: Обобщённый анализ спектральных характеристик для отсчётов с НРД

Конец



Научное издание

Прохоров Сергей Антонович

Аппроксимативный анализ случайных процессов

Компьютерный набор и верстка: С.А. Прохоров  
Лицензия

Подписано в печать. Формат 60x84 1/16  
Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 22,16  
Тираж 500 экз. Заказ № 35

Самарский научный центр Российской академии наук.  
443001 Самара, Студенческий переулок, 3 А.