УДК 517.98

ТЕОРЕМА ХАНА-БАНАХА И БАНАХОВЫ ПРЕДЕЛЫ

© Чубенко Д.М., Асташкин С.В.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

e-mail: dm3pod2@yandex.ru

Пусть l_∞ – пространство ограниченных последовательностей вещественных чисел $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ и c – пространство сходящихся последовательностей вещественных чисел $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$, т. е. для которых существует конечный предел [1–3].

Пусть l_∞^* – пространство линейных ограниченных функционалов на l_∞.

Определение 1. Банахов предел – это функционал $B \in l_\infty$, удовлетворяющий следующим условиям:

$B(x) \geq 0$, если $x_n \geq 0$, $n = \overline{0, \infty}$;

$B\big(T(x)\big) = B(x)$, $x \in l_\infty$, где T – оператор сдвига такой, что $T\,(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$;

$B(I) = 1$, где $I = (1, 1, \dots)$.

Обозначим множество всех банаховых пределов через $\boldsymbol{B}$. Зададим на l_∞ следующие функционалы:

$$M(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in N} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+m} \text{ и } W(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in N} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+m}.$$

Теорема Хана-Банаха. Пусть X является линейным пространством, а Y – его подпространство. Пусть дана полунорма $p: X \to [0; \infty)$. Предположим, что функционал $f: Y \to R$ линеен и удовлетворяет условию $f(x) \leq p(x)$, $x \in Y$. Тогда существует линейный функционал $\check{f}(x)$ на X такой, что $\check{f}(x) \leq p(x)$, $x \in X$ и $\check{f}(x) = f(x)$, $x \in Y$.

Утверждение. $\boldsymbol{B} \neq \emptyset$.

Определение 2. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *квазифунда-ментальной*, если для элементов данной последовательности выполняется условие:

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$

Теорема. Пусть $\{x_n\}$ – квазифундаментальная последовательность. Обозначим через U множество всех ее частичных пределов, а через $Ban(x) = \{B(x) : B \in \boldsymbol{B}\}$. Тогда $Ban(x) = U$.

Пример 1. Для последовательности $x = \{\sin \ln n\}$ $Ban(x) = [-1; 1]$.

Пример 2. Для последовательности $x = \{\sqrt[4]{n} \sin \sqrt{n}\}$ $Ban(x) = [-\infty; +\infty]$.

Пример 3. Для последовательности $x = \{\sin(\pi\sqrt{n^3})\}$ $Ban(x) = [-1; 1]$.

Библиографический список

1. Банах С. Теория линейных операций. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 272 с.
2. Рудин У. Функциональный анализ. СПб.: Лань, 2005. 448 с.
3. Sucheston L. Banach limits // Amer. Math. Monthly. 1967. V. 74, № 3. P. 308–311.