

УДК 517.928

СМЕНА УСТОЙЧИВОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В БИОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

© Тельнова К.С., Щепаккина Е.А.

*Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация*

e-mail: kstelnova15@yandex.ru

Представленная работа посвящена изучению особенностей смены устойчивости инвариантных многообразий одного класса сингулярно возмущенных систем, которое широко используется при математическом моделировании биологических систем. С помощью методов геометрической теории сингулярных возмущений рассматривается новый подход к построению одномерных инвариантных многообразий со сменой устойчивости (траекторий-уток) для класса сингулярно возмущенных систем с двумя медленными и одной быстрой переменными. Траектории-утки – это траектории сингулярно возмущенной системы, которые сначала проходят вдоль устойчивого интегрального многообразия, а затем вдоль неустойчивого [1; 2].

В качестве примера подобных динамических систем рассматривается модель, описывающая взаимодействие двух видов хищников, конкурирующих за одну добычу. Данная динамическая модель описывается следующей системой уравнений [3]:

$$\dot{x} = x \left(\frac{m_1 z}{\beta_1 + z} - d_1 \right), \quad \dot{y} = y \left(\frac{m_2 z}{\beta_2 + z} - d_2 \right), \quad \varepsilon = z \left(1 - z - \frac{m_1 x}{\beta_1 + z} - \frac{m_2 y}{\beta_2 + z} \right).$$

Здесь x и y – безразмерные плотности населения первого и второго вида хищников соответственно; z – безразмерная плотность населения жертвы; $\varepsilon = 1/\gamma$, где γ – скорость роста добычи; для $i = 1, 2, m_i > 0$ – максимальное число прироста i -го хищника; $\beta_i = a_i / K$, где a_i – константа полунасыщения для i -го хищника, K – коэффициент размножения добычи; $d_i > 0$ – скорость смертности i -го хищника [4].

Характерной особенностью рассматриваемых систем является наличие точного медленного инвариантного многообразия со сменой устойчивости. Это обстоятельство позволяет формировать колебания трехмерной системы посредством выбора формы траекторий двух ее двухмерных проекций.

Особое внимание в работе уделено колебательным процессам, траектории которых являются траекториями-утками. С этой точки зрения обсуждаемый подход можно рассматривать как новый способ «охоты» на траектории-утки в трехмерном пространстве. Следует отметить, что по сравнению с традиционными методами этот подход кажется более простым.

Библиографический список

1. Соболев В.А., Щепаккина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 320 с.
2. Щепаккина Е.А., Соболев В.А. Интегральные поверхности со сменой устойчивости и траектории-утки // Известия РАН. Математика. Математическое моделирование. Информатика и управление. 1997. Т. 1, № 3. С. 151–175.
3. Liu W., Xiao D., Yi Y. Relaxation oscillations in a class of predator-prey systems // Journal of Differential Equations. 2003. Vol. 188. P. 306–331.
4. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 400 с.