УДК 517.928

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РОБЕНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ОБЛАСТИ С ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

© Чинкина В.В., Пулькина Л.С.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

e-mail: mariya6300@mail.ru

В данной работе рассматривается краевая задача Робена для уравнения Лапласа: найти в области D решение уравнения:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0, \tag{1}$$

удовлетворяющее условию:

$$au+b\frac{\partial u}{\partial n}=g, x\in\partial D,$$

где n – внешняя нормаль к границе ∂D области D.

В отличие от задач Дирихле и Неймана задача Робена менее изучена.

Рассмотрим краевую задачу Робена:

$$\begin{cases} u=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=-a(u-g). \end{cases} \tag{2}$$

Попытаемся понять физическую интерпретацию данной задачи.

В отличие от условия Неймана, в правой части граничного условия Робена фигурирует искомая функция u. Если функция $u(x,y)$ интерпретируется как температура, то функцию $g(x,y)$ следует считать температурой внешней среды в точке, «примыкающей» к границе области, то есть в точке $(x,y)\in U$. Тогда граничное условие означает, что поток тепла через бесконечную малую дугу границы, имеющую длину dS и содержащую точку $(x,y)\in U$, пропорциональна разности температур области и внешней среды, вычисленной в точке $(x,y)\in U$. Константа a численно равна количеству тепла, протекающего через границу при разности температур в один градус.

В своей работе мы опираемся на классические результаты исследований краевых задач для эллиптических уравнений [1], а также на результаты статей [2; 3], в которых изучается задача Робена для эллиптических уравнений в цилиндре.

Основное внимание в работе обращено на краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости. В качестве примера рассмотрена задача Дирихле в области сложной конфигурации, составленной из прямоугольников разных размеров, и получено ее решение в явном виде для одного частного случая.

Найдены условия, при выполнении которых существует не более одного решения поставленной задачи.

Основным инструментом исследования является метод энергетических оценок.

Полученные результаты иллюстрируются некоторыми частными случаями, представляющими, на наш взгляд, интерес. Рассмотрены краевые задачи для уравнения

Лапласа на плоскости в областях, составленных из прямоугольников, а краевые условия представляют собой комбинацию условий Дирихле или Неймана и условия Робена.

Библиографический список

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
2. Самайтис К.П. Оценки решений задач Неймана и Робена для уравнения Лапласа в цилиндре // Дифференц. уравн. 2002. Т. 38, № 7. С. 1105–1112.
3. Неклюдов А.В. О задаче Робена для эллиптического уравнения 2 порядка в цилиндрических областях // Матем. заметки. 2018. Т. 103. Вып. 3. С. 413–436.