УДК 517.9

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Куркин Е.И.
Научный руководитель – доц., к.т.н. Белашевский Г.Е.
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева

Достаточно часто возникает вопрос качественной оценки поведения различных физических систем, для которых определена система дифференциальных уравнений. Такая задача решается на начальном этапе проектирования физической системы при выборе преимущественной для анализа из нескольких возможных для реализации. В работе рассмотрен метод геометрического описания системы дифференциальных уравнений на примере механической системы с двумя степенями свободы – маятник с гироскопом. Система дифференциальных уравнений выведена на базе уравнения Лагранжа второго рода вблизи положения равновесия маятника.

Особенностью представленного метода является переход к алгебраическим уравнениям при помощи рассмотрения дифференциальных величин как независимых переменных. Следующий шаг - переход к безразмерным, относительным, параметрам. В приведенном примере массы тел относились к массе ротора гироскопа, длины к радиусу гироскопа, а времена к периоду колебаний математического маятника единичной длины.

В результате получена алгебраическая система (1), коэффициенты которой непосредственно выражаются из системы уравнений Лагранжа путем описанного выше преобразования координат и коэффициентов.

$$\begin{cases} a_1x_3 + b_1x_5x_7 + c_1x_1 = 0; \\ a_2x_6 + b_2x_2x_7 + c_2x_4 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) описывает пересечение Н 2-х поверхностей второго порядка. Проекция Н на пространство первых 6-ти переменных представляет собой квадрику:

$$a_1b_2x_2x_3 + c_1b_2x_1x_2 - a_2b_1x_5x_6 - c_2b_1x_4x_5 = 0; \quad (2).$$

Поверхность пересечения Н находится на высоте $x_7 = \dfrac{a_1x_3 + c_1x_1}{-b_1x_5}$ над квадрикой (2).

В работе приведено исследование квадрики (2) и приведение ее к каноническому виду. При этом показано, что квадрика имеет два собственных числа равных 0 и может быть рассмотрена как поверхность размерности 4. Квадрика (2) получена из дифференциальной системы движения маятника. Решения этой системы лежат на поверхности квадрики. Поэтому можно сказать, что квадрика описывает все возможные изменения параметров $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (\chi, \dot{\chi}, \ddot{\chi}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$. Анализируя геометрические характеристики квадрики можно сделать выводы о физическом поведении системы «маятник-гироскоп». На базе анализа квадрики показана возможность разложения пространства на 2 подпространства меньшей размерности и оценено качественно влияние вращения гироскопа на колебания маятника.