МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Теория случайных процессов. Курсовая работа

Электронные методические указания

Самара 2011

УДК 519.21

Составитель: **Храмов Александр Григорьевич**

Теория случайных процессов. Курсовая работа [Электронный ресурс]: электрон. метод. указания / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королёва (нац. исслед. ун-т); сост. А. Г. Храмов. – Электрон. текстовые и графич. дан. (0,66 Мбайт). – Самара, 2011. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Тема курсовой работы – *«Статистический анализ и моделирование процессов авторегрессии – скользящего среднего»*.

В методических указаниях приводятся задание, исходные данные, комментарии к выполнению каждого пункта задания, требования к оформлению отчёта, типичные ошибки, контрольные вопросы, регламент переписки с преподавателем, образец титульного листа, график выполнения и порядок защиты курсовой работы.

Методические указания к курсовой работе предназначены для подготовки бакалавров по направлению 010400.62 *«Прикладная математика и информатика»*, изучающих дисциплину *«Теория случайных процессов»* в 6 семестре.

Разработаны на кафедре технической кибернетики.

Оглавление

1 Исходные данные

Дана реализация стационарного в широком смысле эргодического случайного процесса с дискретным временем (стационарная случайная последовательность, временной ряд) – выборка из $n = 5000$ последовательных значений (отсчётов) процесса. Исходные данные для различных вариантов задания находятся здесь: http://sama.ru/~kalex/.

2 Задание

1. Оценить моментные функции случайного процесса, рассчитав выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочную нормированную корреляционную функцию. Оценить радиус корреляции случайного процесса. Изобразить графически оценку нормированной корреляционной функции.
2. Построить модели авторегрессии (АР), модели скользящего среднего (СС) и смешанные модели авторегрессии и скользящего среднего (АРСС) до третьего порядка включительно: АРСС (M, N), $M = 0, 1, 2, 3$; $N = 0, 1, 2, 3$.
3. Рассчитать теоретические нормированные корреляционные функции выходной последовательности для каждой из построенных выше моделей. На основе сравнения выборочной и теоретических нормированных корреляционных функций выбрать наилучшую (наиболее адекватную) модель случайного процесса в каждом из множеств АР, СС и АРСС. Построить графики теоретических нормированных корреляционных функций для наилучших моделей.
4. Построить и изобразить графически параметрическую оценку спектральной плотности для трёх наилучших моделей.
5. Смоделировать случайный процесс АРСС с использованием наилучших моделей из классов АР, СС и АРСС. Сравнить графически фрагменты реализаций исходного и смоделированного процессов.
6. Построить оценки моментных функций смоделированных процессов, сравнить их с оценками моментных функций исходного процесса и с теоретическими моментными функциями, соответствующими выбранным моделям.

3 Указания

1. При выполнении работы использовать следующие учебные пособия и методические указания:
   - [1] «*Статистический анализ временных рядов авторегрессии и скользящего среднего*»: http://www.ws.samtel.ru/downloads/stat-an.rar,
   - [2] «*Статистическое моделирование и метод Монте–Карло*»: http://www.ws.samtel.ru/downloads/stat-mod.rar,
   - [3] Интернет-ресурс к курсовой работе: http://sama.ru/~kalex/.
2. По пункту 1 задания. Численные значения отсчётов выборочных и теоретических корреляционных функций $R_\eta(m)$ рассчитывать для $m = 0, 1, 2, \ldots, 10$ (для определения радиуса корреляции в некоторых вариантах может потребоваться рассчитать большее количество отсчетов выборочной корреляционной функции). В любом случае для достоверной оценки корреляционной функции необходимо выполнение условия: $m << n$, где n – объём выборки из последовательных отсчётов процесса.
3. По пункту 1 задания. Определение радиуса корреляции:

$$T_{кор} = \min\left\{T : \forall\left(m \geq T\right)\ \left|R_\eta(m)\right| < e^{-1}\right\}.$$

4. По пункту 2 задания. Шестнадцать построенных моделей АРСС записать в таблице (таблица 1, прочерки в таблице означают, что соответствующую модель не удалось построить, то есть соответствующая система уравнений не имеет решения, либо не выполняются условия устойчивости, приведённые в приложении *А.3*):

Таблица 1 – Пример оформления результатов построения моделей **АРСС (*M,N*)**

Порядок модели		*Параметры модели* $\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \beta_2\eta_{n-2} + \beta_3\eta_{n-3} + \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} + \alpha_2\xi_{n-2} + \alpha_3\xi_{n-3}$						
M	*N*	β_1	β_2	β_3	α_0	α_1	α_2	α_3
0	*0*				2.2420			
0	*1*				2.2420	0.0196		
0	*2*				2.0321	0.0148	0.9472	
0	*3*				2.0321	0.0157	0.9472	-0.0031
1	*0*	0.0087			2.2420			
1	*1*	–			–	–		
1	*2*	-0.0032			2.0321	0.0223	0.9473	
1	*3*	–			–	–	–	–
2	*0*	0.0054	0.3829		2.0711			
2	*1*	-0.0120	0.3830		2.0711	0.0422		
2	*2*	-0.0023	-0.0405		2.0200	0.0202	1.0537	
2	*3*	–	–		–	–	–	–
3	*0*	0.0084	0.3829	-0.0078	2.0711			
3	*1*	0.0594	-0.0275	-0.0190	2.2177	-0.0099		
3	*2*	0.0581	-0.0286	-0.0185	1.9590	-0.0454	1.0666	
3	*3*	0.0581	-0.0286	-0.0185	1.9591	-0.0457	1.0666	0.0011

Расчётные уравнения приведены в приложении *А*, примеры расчётов – в приложении *Б*.

5. По пункту 3 задания. Для сравнения нормированных корреляционных функций использовать критерий среднего квадратичного отклонения по первым десяти отсчётам:

$$\varepsilon^2 = \sum_{m=1}^{10}\left[r(m) - \hat{r}(m)\right]^2,$$

где $\hat{r}(m)$ – выборочная нормированная корреляционная функция исходного процесса, $r(m)$ – рассчитанная теоретическая нормированная корреляционная функция. Результаты сравнения выборочной и теоретических нормированных корреляционных функций представить в виде таблицы (таблица 2), в которой отмечены наилучшие модели из каждого класса (АР, СС, АРСС).

Таблица 2 – Теоретические погрешности моделей **АРСС (*M,N*)**

M	***N***			
	0	*1*	*2*	*3*
0	0.4351	0.3385	$\boxed{0.3325}$	–
1	0.3346	0.3200	–	–
2	0.4222	–	–	–
3	$\boxed{0.0674}$	0.002	0.0023	$\boxed{0.0007}$

6. По пункту 4 задания. На рисунке 1 приведён пример оформления графиков спектральной плотности мощности.

7. По пункту 5 задания. С использованием выбранной модели АРСС получить выборку из 5000 последовательных значений процесса. Учесть, что при нулевых начальных условиях сгенерированная случайная последовательность приобретает свойство стационарности по истечении интервала времени, много большего, чем радиус корреляции. Поэтому можно, например, сгенерировать 6000 отсчётов последовательности и отбросить первые

1000 отсчётов, считая их «браком». Для графического сравнения реализаций исходного и смоделированного процессов использовать фрагменты из 100 (или около того) последовательных отсчётов. На рисунке 2 приведён пример оформления графика случайной последовательности.

8. По пункту 6 задания. Изображать на одном графике три нормированные корреляционные функции: выборочную для исходного процесса, теоретическую для наилучшей модели, выборочную для смоделированного процесса. На рисунке 3 приведён пример оформления графиков корреляционных функций. В таблице 3 приведён пример оформления итоговых результатов анализа и моделирования.

9. При выполнении задания можно использовать любую доступную программную среду и любые математические пакеты. При использовании математических пакетов необходимо подробно описать в отчёте используемые им (пакетом) метод, алгоритм, параметры, и т.п.

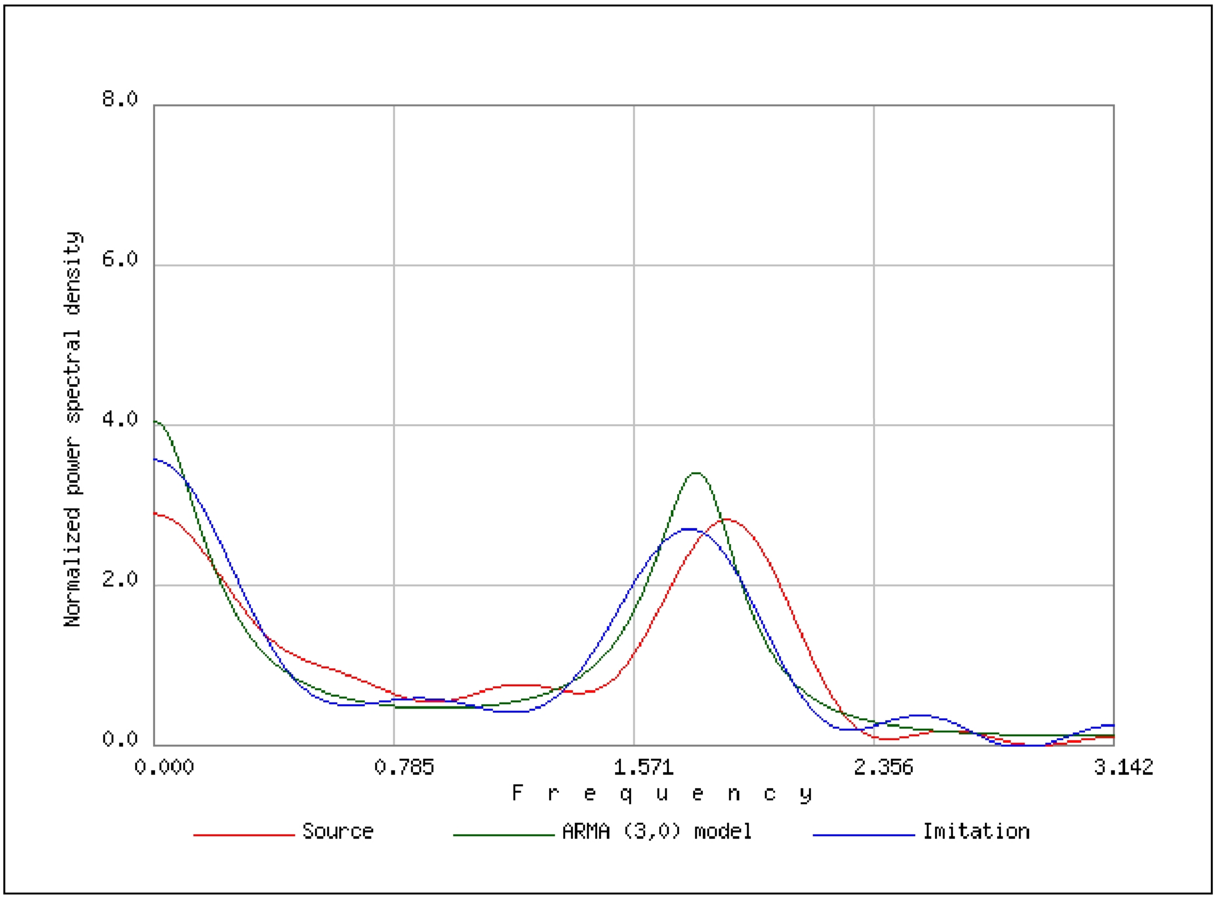

Рисунок 1 – Пример оформления графиков спектральной плотности мощности

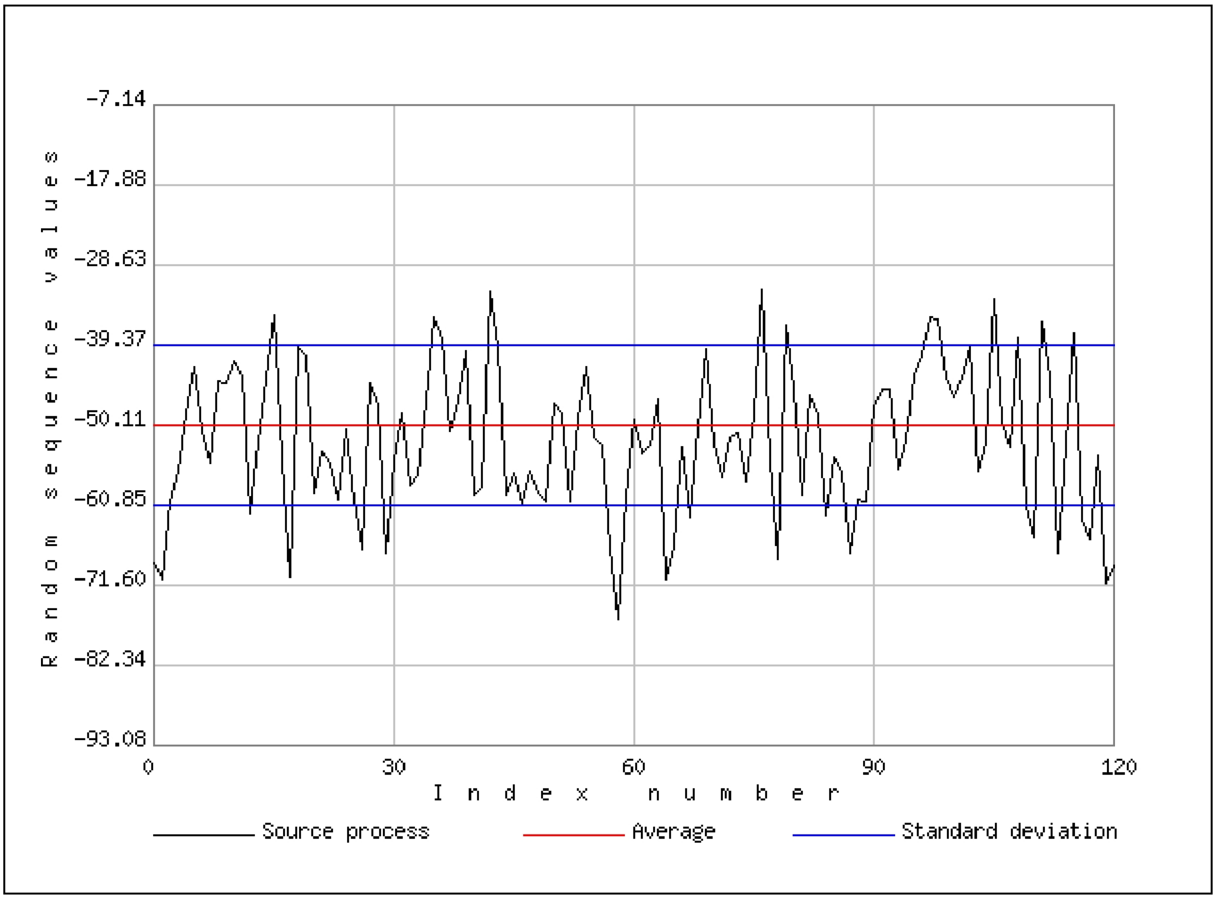

Рисунок 2 – Пример оформления графика случайной последовательности

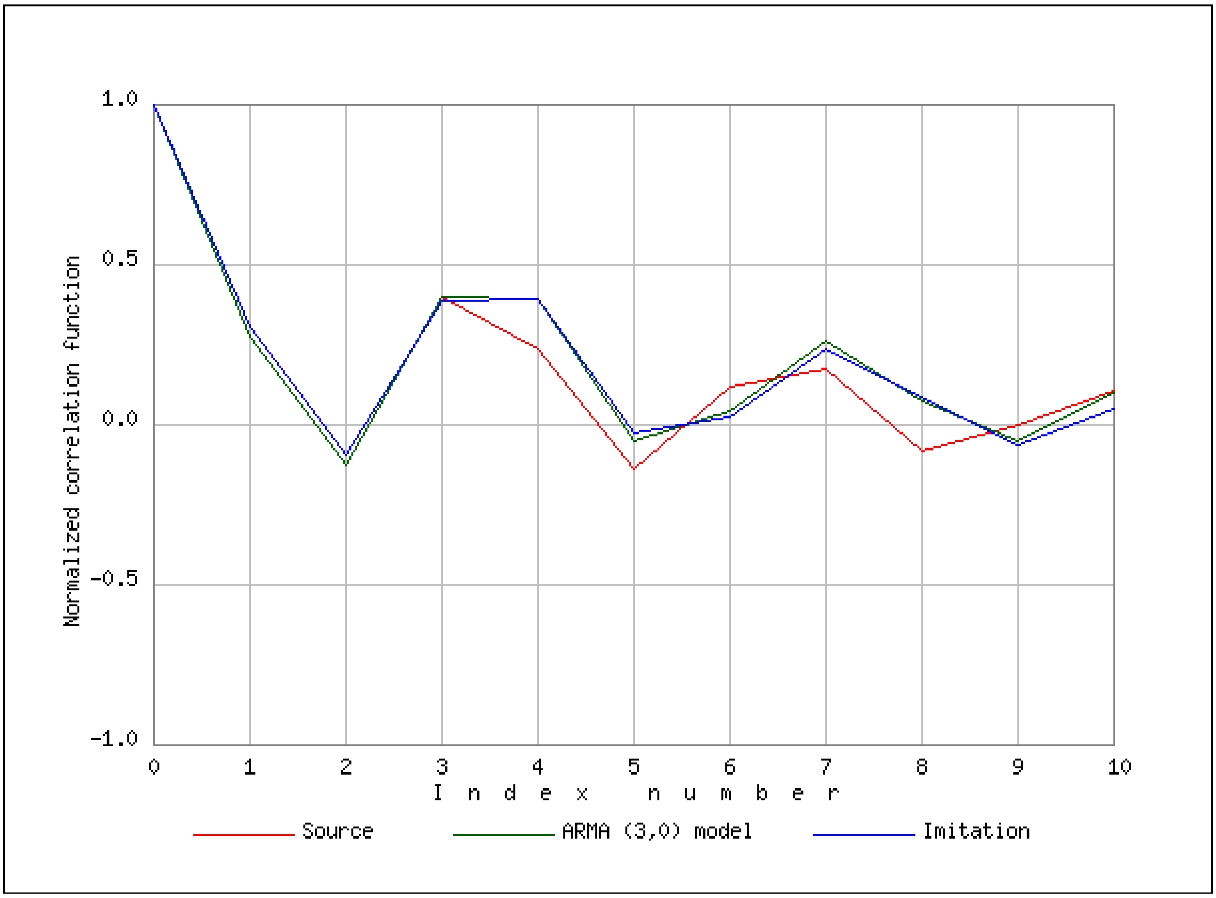

Рисунок 3 – Пример оформления графиков корреляционных функций

Таблица 3 – Пример оформления результатов статистического анализа и моделирования

Параметры процесса	Исходный процесс	АРСС(3,3) Теория	АРСС(3,3) Выборка	АР(3) Теория	АР(3) Выборка	СС(2) Теория	СС(2) Выборка
Минимум	-87.9350		-87.2426		-88.7109		-83.9052
Максимум	-12.8210		-13.6190		-15.6498		-9.3289
Среднее	-50.1103	-50.1103	-50.1163	-50.1103	-50.1725	-50.1103	-50.0197
Дисперсия	115.4016	115.4016	114.6943	115.4016	113.8828	115.4016	115.6795
СКО	10.7425	10.7425	10.7095	10.7425	10.6716	10.7425	10.7554
Нормированная корреляционная функция							
r[0]	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
r[1]	0.2738	0.2738	0.2750	0.2738	0.3030	0.2738	0.2667
r[2]	-0.1286	-0.1286	-0.1334	-0.1286	-0.0973	-0.1286	-0.1133
r[3]	0.3944	0.3944	0.4020	0.3944	0.3845	0.0000	0.0153
r[4]	0.2362	0.2362	0.2540	0.3882	0.3907	0.0000	0.0111
r[5]	-0.1415	-0.1415	-0.1312	-0.0560	-0.0282	0.0000	-0.0021
r[6]	0.1156	0.1156	0.1404	0.0385	0.0203	0.0000	0.0083
r[7]	0.1736	0.1787	0.2183	0.2601	0.2315	0.0000	0.0273
r[8]	-0.0839	-0.0785	-0.0546	0.0718	0.0861	0.0000	-0.0050
r[9]	-0.0030	-0.0024	0.0073	-0.0517	-0.0630	0.0000	-0.0232
r[10]	0.1023	0.1137	0.1081	0.0940	0.0483	0.0000	-0.0043
СКО	0.0000	0.0002	0.0041	0.0705	0.0865	0.2924	0.2650

4 Требования к оформлению отчета

1. Отчеты принимаются в виде твердой копии (переплетённые или сшитые листы формата А4). Кроме твёрдой копии необходимо предоставить электронную версию отчёта в одном из распространённых форматов документов (*Microsoft Office*, *OpenOffice.org*, *Adobe Reader*, гипертекстовый Web-документ, и т.п.). Файл отчёта должен иметь стандартное имя на кириллице: *группа-фамилия-вариант*, например: *638-Иванов-15.doc*.
2. Объём отчета не должен превышать 15 страниц (без приложений).
3. Состав отчета:
   - Титульный лист (см. приложение *В*).
   - Аннотация.
   - Содержание (оглавление).
   - Задание на курсовую работу.
   - Разделы отчета по пунктам задания.
   - Выводы по полученным результатам.
   - Список использованных источников.
   - Приложения (тексты программ).
4. В тексте отчета необходимо приводить ВСЕ необходимые, и ТОЛЬКО необходимые расчетные формулы с расшифровкой ВСЕХ обозначений.
5. Отчёт должен быть выполнен с максимально возможным соблюдением стандартов, в частности, страницы, разделы, приложения должны быть пронумерованы, все рисунки должны быть пронумерованы и подписаны снизу, все таблицы должны быть пронумерованы и подписаны сверху. На все приведённые рисунки и таблицы должны быть ссылки в тексте отчёта.
6. Верхний колонтитул должен содержать номер страницы (справа). Нижний колонтитул должен содержать краткое название отчета, фамилию и учебную группу студента.

5 Типичные ошибки при оформлении отчёта

1. Грамматические ошибки (орфография, синтаксис, пунктуация, стилистика, и т.п.).

2. Одинаковыми символами обозначаются различные математические объекты и, наоборот, один и тот же объект обозначается различными символами в разных местах отчёта, например, одним и тем же символом обозначается объём выборки и порядок модели СС.
3. Неудачное выполнение графических иллюстраций (неподписанные оси координат на графиках, неоптимальное использование графического пространства, злоупотребление цветом, размером и разнообразием маркеров).
4. Отсутствие расшифровки обозначений в формулах.
5. Неаккуратное форматирование текста (выравнивание, отступы, границы, и т.п.), отсутствие единообразия в форматировании.
6. Запись формул в «текстовом» режиме вместо использования «редактора уравнений». Это приводит к различию в шрифтах в формулах и в тексте отчёта.
7. Нелаконичные названия разделов отчёта.
8. Неразумная точность представления числовых данных (число цифр в числах). Точность не должна превосходить возможностей визуального восприятия.

6 Регламент выполнения курсовой работы

1. Выполнение курсовой работы состоит из двух последовательных этапов:
   - Изготовление и сдача отчёта.
   - Защита курсовой работы.

   Защита курсовой работы включает в себя (1) защиту выполненной работы по отчёту, (2) ответы на теоретические и практические контрольные вопросы (пункт 7 указаний). График выполнения курсовой работы приведён в таблице 4.

Таблица 4 – График выполнения курсовой работы

Учебные недели	*Содержание этапа*	*Контрольные точки*	*Отчётные материалы*
1–2	Получение задания.	5%	Задание, указания, исходные данные
3–4	Выполнение пункта 1 задания	25%	Отчёт о выполнении пункта 1 задания
5–6	Выполнение пункта 2 задания	50%	Отчёт о выполнении пунктов 1–2 задания
7–8	Выполнение пункта 3 задания	60%	Отчёт о выполнении пунктов 1–3 задания
9–10	Выполнение пункта 4 задания	70%	Отчёт о выполнении пунктов 1–4 задания
11–12	Выполнение пунктов 5 и 6 задания	90%	Отчёт о выполнении пунктов 1–6 задания
13–14	Оформление отчёта	100%	Твёрдая копия и электронная версия полностью оформленного отчёта
15–17	Защита работы, зачёт		Зачётная книжка

Индивидуальные графики выполнения курсовой работы в течение семестра можно посмотреть на Web-страницах: http://www.sama.ru/~kalex/schedule.php и http://www.sama.ru/~kalex/schedule.txt.

2. Оценка за курсовую работу выставляется с учётом следующих факторов:
   - Качество отчёта (пункты 4, 5 указаний).
   - Самостоятельность работы.
   - Соблюдение графика выполнения курсовой работы в течение семестра.
   - Ответы на вопросы по изготовленному отчёту.
   - Ответы на контрольные вопросы (пункт 7 указаний).
3. Консультации по курсовой работе можно получать с использованием электронной почты, присылая преподавателю электронную версию отчёта или его частей (см. требования выше) по адресу: *www.student@gmail.com*. Регламент переписки по электронной почте:

- Высылать ровно ОДИН файл, содержащий отчёт, поименованный стандартным образом (см. требования выше).

- Писать (на кириллице) имя и фамилию автора отчёта в заголовке письма в поле «От».
- Указывать номер варианта и номер учебной группы в заголовке письма в поле «Тема».
- Писать краткий сопроводительный текст в теле письме. Здесь же задавать вопросы. Цитировать вопросы и замечания преподавателя и отвечать на них по пунктам в теле письма.
- В письмо с отчетом следует включать предыдущие обсуждения и переписку с преподавателем, если таковые имели место быть.

4. Не накладывается никаких ограничений на программную среду разработки. Можно использовать коммерческие продукты (например, *MATLAB* фирмы *MathWorks*, *Mathematica* фирмы *Wolfram Research*, *Mathcad* фирмы *PTC*, *Maple* фирмы *MapleSoft*, и т.п.). Рекомендуется использовать свободно распространяемые пакеты (например, *Scilab* – http://scilab.org, *Python* – http://python.org, и т.п.). При использовании специальных библиотечных функций (например, для решения систем линейных и нелинейных уравнений) необходимо в основном тексте отчёта полностью описать соответствующие функции (назначение, используемый метод, параметры, ограничения, и т.п.).

7 Контрольные вопросы к защите курсовой работы

1. Кратко пересказать содержание курсовой работы, обращая внимание на взаимосвязь пунктов задания.
2. Сделать вывод уравнений, связывающих параметры модели АРСС и корреляционную функцию выходной последовательности для частного случая по указанию преподавателя (например, АР(2), СС(3), АРСС(1,1), и т.п.). Примеры вывода уравнений приведены в приложении *Б*.
3. Построить модель АРСС, если известна корреляционная функция выходной последовательности, например, $R_\eta(m) = 2^{-|m|}\cos\left(\frac{\pi}{3}m\right)$.
4. Найти корреляционную функцию выходной последовательности η_n, если задана её модель АРСС, например, $\eta_n = 0.5\eta_{n-1} + \xi_n + \xi_{n-1}$.
5. Взаимная корреляционная функция случайных последовательностей. Свойства взаимной корреляционной функции $R_{\xi\eta}(m)$ входной ξ_n и выходной η_n последовательностей модели АРСС.
6. Найти взаимную корреляционную функцию $R_{\xi\eta}(m)$ входной ξ_n и выходной η_n последовательностей, если задана модель АРСС, например, $\eta_n = 0.5\eta_{n-1} + \xi_n + 0.5\xi_{n-1}$.
7. Записать систему уравнений Юла–Уокера.
8. Что такое стационарный дискретный «белый шум»? Какие у него корреляционная функция и спектральная плотность мощности?
9. Что такое «стационарный в широком смысле случайный процесс»?
10. Что такое «эргодический случайный процесс»? Как можно установить, что стационарный случайный процесс является эргодическим?
11. Что такое «радиус корреляции»? В чём его физический смысл?
12. Оценка математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции стационарной эргодической случайной последовательности.

13. Определение и свойства спектральной плотности мощности стационарной случайной последовательности.
14. Определение и свойства корреляционной функции случайной последовательности.
15. Определение и свойства корреляционной функции стационарной случайной последовательности.
16. Что в названии процессов **А**вто**Р**егрессии и **С**кользящего **С**реднего обозначают буквы **А**, **Р**, **С**, **С**? Детально прокомментировать. Как расшифровывается соответствующая английская аббревиатура **ARMA**?
17. Как использовалось свойство эргодичности исходного случайного процесса в настоящей работе?
18. Найти корреляционную функцию случайной последовательности $\eta_n = \sum_{k=0}^{M} \xi_{n-k}$, если ξ_n – стационарный «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.
19. Найти корреляционную функцию случайной последовательности $\eta_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \xi_{n-k}$, $|\alpha| < 1$, если ξ_n – стационарный «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.
20. Найти корреляционную функцию $R_\eta(m)$ случайной последовательности $\eta_n = \xi_n - \xi_{n-1}$, если ξ_n – стационарная случайная последовательность с экспоненциальной корреляционной функцией $R_\xi(m) = \alpha^{|m|}$, $|\alpha| < 1$.
21. Какой физический смысл параметров A и α для экспоненциальной корреляционной функции $R_\xi(m) = A\alpha^{|m|}$ случайной последовательности ξ_n? Чему равен радиус корреляции?
22. Как сгенерировать на компьютере случайную величину, имеющую нормальное распределение с заданными математическим ожиданием и дисперсией?
23. Как сгенерировать на компьютере случайную величину, имеющую равномерное распределение с заданными математическим ожиданием и дисперсией?
24. Что такое смещённые и несмещённые оценки математического ожидания и дисперсии? Какие из них использовались в настоящей работе?
25. Что такое нестационарный «белый шум»?
26. Доказать, что две следующие модели скользящего среднего эквивалентны (то есть порождают случайные последовательности с одинаковыми корреляционными функциями):
$$\eta_n = \alpha_0 \xi_n + \alpha_1 \xi_{n-1} + \ldots + \alpha_{N-1} \xi_{n-N+1} + \alpha_N \xi_{n-N},$$
$$\eta_n = \alpha_N \xi_n + \alpha_{N-1} \xi_{n-1} + \ldots + \alpha_1 \xi_{n-N+1} + \alpha_0 \xi_{n-N}.$$
27. Что такое «сходимость по вероятности»? «сходимость в среднем квадратичном»?
28. Как рассчитывались числовые данные для таблицы 3 (см. выше)?

Литература

1. ***Тараскин, А.Ф.*** Статистический анализ временных рядов авторегрессии и скользящего среднего: учебное пособие [Текст] // Самара: СГАУ, 1998. – 56с. [Интернет-ссылка]

2. ***Тараскин, А.Ф.*** Статистическое моделирование и метод Монте–Карло: учебное пособие [Текст] // Самара: СГАУ, 1997. – 62с. [Интернет-ссылка]
3. ***Храмов, А.Г.*** Анализ и моделирование процессов АРСС: интернет-ресурс к курсовой работе [Электронный ресурс] // Самара: СГАУ, 2009. [Интернет-ссылка]

Приложение А Основные расчётные методы и алгоритмы

А.1 Общая (смешанная) модель АРСС (M, N)

Рассмотрим смешанную модель авторегрессии – скользящего среднего порядка (*M,N*), которая в общем виде может быть записана как

$$\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \beta_2\eta_{n-2} + \ldots + \beta_M\eta_{n-M} + \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} + \ldots + \alpha_N\xi_{n-N}, \tag{А.1}$$

где ξ_n – входная некоррелированная случайная последовательность с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией ($\mathbf{M}\xi_n = 0,\ \ \mathbf{M}\xi_n^2 = 1,\ \ \mathbf{M}\xi_k\xi_n = \delta_{kn}$), η_n – выходная случайная последовательность с корреляционной функцией $R_\eta(m)$. В таблице А.1 приведены уравнения связей параметров модели авторегрессии – скользящего среднего с корреляционной функцией выходной случайной последовательности.

Таблица А.1 – Уравнения связей параметров модели АРСС (*M,N*) с корреляционной функцией $R_\eta(m)$

Блок	*Кол-во урав-нений*	**Модель АРСС (*M,N*):** $\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \beta_2\eta_{n-2} + \ldots + \beta_M\eta_{n-M} + \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} + \ldots + \alpha_N\xi_{n-N}$ $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M\} \Leftrightarrow \{R_\eta(0), R_\eta(1), R_\eta(2), R_\eta(3), \ldots, R_\eta(M+N)\}$
А	***N+1***	$R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(2) + \ldots + \beta_M R_\eta(M) + \alpha_0 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(2) + \ldots + \alpha_N R_{\xi\eta}(N)$ $R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \beta_2 R_\eta(1) + \ldots + \beta_M R_\eta(M-1) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(2) + \ldots + \alpha_N R_{\xi\eta}(N-1)$ $R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(0) + \ldots + \beta_M R_\eta(M-2) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_4 R_{\xi\eta}(2) + \ldots + \alpha_N R_{\xi\eta}(N-2)$ … $R_\eta(N-1) = \beta_1 R_\eta(N-2) + \beta_2 R_\eta(N-3) + \ldots + \beta_M R_\eta(N-M-1) + \alpha_{N-1} R_{\xi\eta}(0) + \alpha_N R_{\xi\eta}(1)$ $R_\eta(N) = \beta_1 R_\eta(N-1) + \beta_2 R_\eta(N-2) + \ldots + \beta_M R_\eta(N-M) + \alpha_N R_{\xi\eta}(0)$
Б	***M***	$R_\eta(N+1) = \beta_1 R_\eta(N) + \beta_2 R_\eta(N-1) + \ldots + \beta_M R_\eta(N-M+1)$ $R_\eta(N+2) = \beta_1 R_\eta(N+1) + \beta_2 R_\eta(N) + \ldots + \beta_M R_\eta(N-M+2)$ … $R_\eta(N+M-1) = \beta_1 R_\eta(N+M-2) + \beta_2 R_\eta(N+M-3) + \ldots + \beta_M R_\eta(N-1)$ $R_\eta(N+M) = \beta_1 R_\eta(N+M-1) + \beta_2 R_\eta(N+M-2) + \ldots + \beta_M R_\eta(N)$
В	∞	$R_\eta(N+M+1) = \beta_1 R_\eta(N+M) + \beta_2 R_\eta(N+M-1) + \ldots + \beta_M R_\eta(N+1)$ $R_\eta(N+M+2) = \beta_1 R_\eta(N+M+1) + \beta_2 R_\eta(N+M) + \ldots + \beta_M R_\eta(N+2)$ $R_\eta(N+M+3) = \beta_1 R_\eta(N+M+2) + \beta_2 R_\eta(N+M+1) + \ldots + \beta_M R_\eta(N+3)$ …
Г	***N+1***	$R_{\xi\eta}(0) = \alpha_0$ $R_{\xi\eta}(1) = \beta_1 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1$ $R_{\xi\eta}(2) = \beta_1 R_{\xi\eta}(1) + \beta_2 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_2$ $R_{\xi\eta}(3) = \beta_1 R_{\xi\eta}(2) + \beta_2 R_{\xi\eta}(1) + \beta_3 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_3$ … $R_{\xi\eta}(N) = \beta_1 R_{\xi\eta}(N-1) + \beta_2 R_{\xi\eta}(N-2) + \ldots + \beta_M R_{\xi\eta}(N-M) + \alpha_N$

В таблице А.2 приведены соответствующие соотношения для частных случаев моделей авторегрессии и моделей скользящего среднего.

Таблица А.2 – Частные случаи: модели АР(*M*) и СС(*N*)

Модель АР(*M*): $\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \beta_2\eta_{n-2} + \ldots + \beta_M\eta_{n-M} + \alpha_0\xi_n$	**Модель СС(*N*):** $\eta_n = \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} + \ldots + \alpha_N\xi_{n-N}$
$R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(2) + \ldots + \beta_M R_\eta(M) + \alpha_0^2$	$R_\eta(0) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \ldots + \alpha_N^2$ $R_\eta(1) = \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \ldots + \alpha_{N-1}\alpha_N$ $R_\eta(2) = \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{N-2}\alpha_N$ … $R_\eta(N-1) = \alpha_0\alpha_{N-1} + \alpha_1\alpha_N$ $R_\eta(N) = \alpha_0\alpha_N$
$R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \beta_2 R_\eta(1) + \ldots + \beta_M R_\eta(M-1)$ $R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(0) + \ldots + \beta_M R_\eta(M-2)$ … $R_\eta(M) = \beta_1 R_\eta(M-1) + \beta_2 R_\eta(M-2) + \ldots + \beta_M R_\eta(0)$	
$R_\eta(m) = \beta_1 R_\eta(m-1) + \beta_2 R_\eta(m-1) + \ldots + \beta_M R_\eta(m-M), \quad m > M$	$R_\eta(m) = 0, \quad m > N$

А.2 Оценивание параметров смешанной модели АРСС

Система из (M+$2N$+2) нелинейных уравнений (блоки **А**, **Б**, **Г**) позволяет по (M+N+1) отсчётам корреляционной функции выходной последовательности $R_\eta(m),\ \ m = 0,1,2,\dots,M+N$, найти ($M$+$N$+1) параметров модели АРСС(M,N) $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M\}$, используя ($N$+1) вспомогательных отсчётов взаимной корреляционной функции $R_{\xi\eta}(m),\ \ m = 0,1,2,\dots,N$. Уравнения блока **В** используются для рекурсивного расчёта корреляционной функции $R_\eta(m)$ для $m > M+N$.

При практическом использовании уравнений, приведённых в таблице А.1, для оценивания параметров моделей АРСС следует учесть, что точные значения отсчётов корреляционной функции $R_\eta(m),\ \ m = 0,1,2,3,\dots$ и точные значения параметров модели $\{M,\ N,\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M\}$ неизвестны. Поэтому непосредственное использование этих уравнений может привести к большим погрешностям получаемых оценок (методы 1 и 2 ниже). Обозначим через $\widehat{R}_\eta(m)$ оценку корреляционной функции $R_\eta(m)$, а через $\widehat{R}_{\xi\eta}(m)$ – оценку взаимной корреляционной функции $R_{\xi\eta}(m)$.

Метод 1

Шаг 1. Из системы M линейных уравнений

$$\begin{cases} \widehat{R}_\eta(N+1) = \beta_1 \widehat{R}_\eta(N) + \beta_2 \widehat{R}_\eta(N-1) + \ldots + \beta_M \widehat{R}_\eta(N-M+1), \\ \widehat{R}_\eta(N+2) = \beta_1 \widehat{R}_\eta(N+1) + \beta_2 \widehat{R}_\eta(N) + \ldots + \beta_M \widehat{R}_\eta(N-M+2), \\ \ldots, \\ \widehat{R}_\eta(N+M) = \beta_1 \widehat{R}_\eta(N+M-1) + \beta_2 \widehat{R}_\eta(N+M-2) + \ldots + \beta_M \widehat{R}_\eta(N) \end{cases}$$

находятся оценки M неизвестных коэффициентов $\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \dots, \widehat{\beta}_M$.

Шаг 2. Уравнения блока **Г** (таблица А.1)

$$\widehat{R}_{\xi\eta}(0) = \alpha_0,$$

$$\widehat{R}_{\xi\eta}(1) = \widehat{\beta}_1 \widehat{R}_{\xi\eta}(0) + \alpha_1,$$

$$\ldots,$$

$$\widehat{R}_{\xi\eta}(N) = \widehat{\beta}_1 \widehat{R}_{\xi\eta}(N-1) + \widehat{\beta}_2 \widehat{R}_{\xi\eta}(N-2) + \ldots + \widehat{\beta}_M \widehat{R}_{\xi\eta}(N-M) + \alpha_N$$

подставляются в уравнения блока **А**.

Шаг 3. Из системы (N+1) нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \widehat{R}_\eta(0) = \widehat{\beta}_1 \widehat{R}_\eta(1) + \widehat{\beta}_2 \widehat{R}_\eta(2) + \ldots + \widehat{\beta}_M \widehat{R}_\eta(M) + \alpha_0 \widehat{R}_{\xi\eta}(0) + \alpha_1 \widehat{R}_{\xi\eta}(1) + \alpha_2 \widehat{R}_{\xi\eta}(2) + \ldots + \alpha_N \widehat{R}_{\xi\eta}(N), \\ \widehat{R}_\eta(1) = \widehat{\beta}_1 \widehat{R}_\eta(0) + \widehat{\beta}_2 \widehat{R}_\eta(1) + \ldots + \widehat{\beta}_M \widehat{R}_\eta(M-1) + \alpha_1 \widehat{R}_{\xi\eta}(0) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_3 \widehat{R}_{\xi\eta}(2) + \ldots + \alpha_N \widehat{R}_{\xi\eta}(N-1), \\ \ldots, \\ \widehat{R}_\eta(N) = \widehat{\beta}_1 \widehat{R}_\eta(N-1) + \widehat{\beta}_2 \widehat{R}_\eta(N-2) + \ldots + \widehat{\beta}_M \widehat{R}_\eta(N-M) + \alpha_N \widehat{R}_{\xi\eta}(0) \end{cases}$$

находятся оценки (N+1) неизвестных коэффициентов $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_N$.

Метод 2

Уравнение (А.1) можно переписать в виде:

$$\zeta_n = \alpha_0 \xi_n + \alpha_1 \xi_{n-1} + \ldots + \alpha_N \xi_{n-N}, \tag{А.2}$$

где

$$\zeta_n = \eta_n - \beta_1 \eta_{n-1} - \beta_2 \eta_{n-2} - \ldots - \beta_M \eta_{n-M}. \tag{А.3}$$

Уравнение (А.2) – это модель СС (N) для последовательности ζ_n, которая может быть получена из исходной последовательности η_n по уравнению (А.3).

Шаг 1. Из системы M линейных уравнений

$$\begin{cases} \widehat{R}_\eta(N+1) = \beta_1 \widehat{R}_\eta(N) + \beta_2 \widehat{R}_\eta(N-1) + \ldots + \beta_M \widehat{R}_\eta(N-M+1), \\ \widehat{R}_\eta(N+2) = \beta_1 \widehat{R}_\eta(N+1) + \beta_2 \widehat{R}_\eta(N) + \ldots + \beta_M \widehat{R}_\eta(N-M+2), \\ \ldots, \\ \widehat{R}_\eta(N+M) = \beta_1 \widehat{R}_\eta(N+M-1) + \beta_2 \widehat{R}_\eta(N+M-2) + \ldots + \beta_M \widehat{R}_\eta(N) \end{cases}$$

находятся оценки M неизвестных коэффициентов $\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \dots, \widehat{\beta}_M$.

Шаг 2. Из исходной последовательности η_n строится последовательность ζ_n с использованием уравнения (А.3).

Шаг 3. Строится оценка $\widehat{R}_\zeta(m)$ корреляционной функции $R_\zeta(m)$ случайной последовательности ζ_n.

Шаг 4. Из системы (N+1) нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \widehat{R}_\zeta(0) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \ldots + \alpha_N^2, \\ \widehat{R}_\zeta(1) = \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \ldots + \alpha_{N-1}\alpha_N, \\ \ldots, \\ \widehat{R}_\zeta(N) = \alpha_0\alpha_N \end{cases}$$

находятся оценки (N+1) неизвестных коэффициентов $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \ldots, \widehat{\alpha}_N$.

Метод 3

Учитывая, что точные значения отсчётов корреляционной функции $R_\eta(m)$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ неизвестны, будем считать, что каждое из уравнений связей параметров модели АРСС (M,N) с корреляционной функцией $R_\eta(m)$ (таблица А.1) задано с некоторой случайной погрешностью (невязкой) ε_k, то есть эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}
&R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(2) + \ldots + \beta_M R_\eta(M) + \alpha_0 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(2) + \ldots + \alpha_N R_{\xi\eta}(N) + \varepsilon_0, \\
&R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \beta_2 R_\eta(1) + \ldots + \beta_M R_\eta(M-1) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(2) + \ldots + \alpha_N R_{\xi\eta}(N-1) + \varepsilon_1, \\
&\ldots \\
&R_\eta(N-1) = \beta_1 R_\eta(N-2) + \beta_2 R_\eta(N-3) + \ldots + \beta_M R_\eta(N-M-1) + \alpha_{N-1} R_{\xi\eta}(0) + \alpha_N R_{\xi\eta}(1) + \varepsilon_{N-1}, \\
&R_\eta(N) = \beta_1 R_\eta(N-1) + \beta_2 R_\eta(N-2) + \ldots + \beta_M R_\eta(N-M) + \alpha_N R_{\xi\eta}(0) + \varepsilon_N, \\
&R_\eta(N+1) = \beta_1 R_\eta(N) + \beta_2 R_\eta(N-1) + \ldots + \beta_M R_\eta(N-M+1) + \varepsilon_{N+1}, \\
&R_\eta(N+2) = \beta_1 R_\eta(N+1) + \beta_2 R_\eta(N) + \ldots + \beta_M R_\eta(N-M+2) + \varepsilon_{N+2}, \\
&\ldots \\
&R_\eta(N+M) = \beta_1 R_\eta(N+M-1) + \beta_2 R_\eta(N+M-2) + \ldots + \beta_M R_\eta(N) + \varepsilon_{N+M}.
\end{aligned}$$

Будем считать, что оптимальную оценку параметров $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M$ можно найти, минимизируя суммарную невязку $J = \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_{N+M}^2$, что приводит к использованию метода наименьших квадратов (МНК) со следующим критерием качества:

$$\begin{aligned}
J = &\left[\widehat{R}_\eta(0) - \beta_1 \widehat{R}_\eta(1) - \beta_2 \widehat{R}_\eta(2) - \ldots - \beta_M \widehat{R}_\eta(M) - \alpha_0 \widehat{R}_{\xi\eta}(0) - \alpha_1 \widehat{R}_{\xi\eta}(1) - \alpha_2 \widehat{R}_{\xi\eta}(2) - \ldots - \alpha_N \widehat{R}_{\xi\eta}(N)\right]^2 + \\
&+ \left[\widehat{R}_\eta(1) - \beta_1 \widehat{R}_\eta(0) - \beta_2 \widehat{R}_\eta(1) - \ldots - \beta_M \widehat{R}_\eta(M-1) - \alpha_1 \widehat{R}_{\xi\eta}(0) - \alpha_2 \widehat{R}_{\xi\eta}(1) - \alpha_3 \widehat{R}_{\xi\eta}(2) - \ldots - \alpha_N \widehat{R}_{\xi\eta}(N-1)\right]^2 + \\
&+ \ldots + \\
&+ \left[\widehat{R}_\eta(N) - \beta_1 \widehat{R}_\eta(N-1) - \beta_2 \widehat{R}_\eta(N-2) - \ldots - \beta_M \widehat{R}_\eta(N-M) - \alpha_N \widehat{R}_{\xi\eta}(0)\right]^2 + \\
&+ \left[\widehat{R}_\eta(N+1) - \beta_1 \widehat{R}_\eta(N) - \beta_2 \widehat{R}_\eta(N-1) - \ldots - \beta_M \widehat{R}_\eta(N-M+1)\right]^2 + \\
&+ \ldots + \\
&+ \left[\widehat{R}_\eta(N+M) - \beta_1 \widehat{R}_\eta(N+M-1) - \beta_2 \widehat{R}_\eta(N+M-2) - \ldots - \beta_M \widehat{R}_\eta(N)\right]^2.
\end{aligned} \tag{А.3}$$

С учётом подстановок в (А.3) уравнений блока **Г** из таблицы А.1

$$\begin{aligned}
&\widehat{R}_{\xi\eta}(0) = \alpha_0, \\
&\widehat{R}_{\xi\eta}(1) = \beta_1 \widehat{R}_{\xi\eta}(0) + \alpha_1, \\
&\ldots, \\
&\widehat{R}_{\xi\eta}(N) = \beta_1 \widehat{R}_{\xi\eta}(N-1) + \beta_2 \widehat{R}_{\xi\eta}(N-2) + \ldots + \beta_M \widehat{R}_{\xi\eta}(N-M) + \alpha_N)
\end{aligned}$$

получаем, что (А.3) является функцией (M+N+1) аргументов: $J = J(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M)$. Минимизируя эту функцию с использованием численных методов оптимизации, находим оценки параметров модели АРСС: $\left(\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \ldots, \widehat{\alpha}_N, \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \ldots, \widehat{\beta}_M\right) = \underset{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M}{\arg\min} J(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M)$.

А.3 Условия устойчивости моделей АРСС

Общее условие устойчивости модели АРСС(*M,N*) (А.1) заключается в том, что все M корней $z_k,\ k=1,2,\ldots,M$ характеристического уравнения $1-\beta_1 z^{-1}-\beta_2 z^{-2}-\beta_2 z^{-3}-\ldots-\beta_M z^{-M}=0$ лежат внутри окружности единичного радиуса комплексной *z*-плоскости, то есть $|z_k|<1,\ k=1,2,\ldots,M$. В частности,

- модель АРСС (*0,N*) = СС (*N*) устойчива всегда,
- модель АРСС (*1,N*) устойчива тогда и только тогда, когда $|\beta_1|<1$,
- модель АРСС (*2,N*) устойчива тогда и только тогда, когда $|\beta_2|<1$, $|\beta_1|<1-\beta_2$,
- модель АРСС (*3,N*) устойчива тогда и только тогда, когда $|\beta_3|<1$, $|\beta_1+\beta_3|<1-\beta_2$, $|\beta_2+\beta_1\beta_3|<|1-\beta_3^2|$.

На устойчивость модели не влияют значения коэффициентов $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_N$.

Рассчитанные модели АРСС могут оказаться неустойчивыми в силу неадекватности рассматриваемой модели АРСС и/или случайного характера исходной выборки.

А.4 Спектральная плотность мощности

Связь спектральной плотности мощности (СПМ) $\Phi_\xi\left(e^{i\omega}\right)$ и корреляционной функции $R_\xi(m)$ произвольной стационарной случайной последовательности ξ_n задается парой уравнений преобразования Фурье:

$$\Phi_\xi\left(e^{i\omega}\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}R_\xi(m)e^{i\omega m}=R_\xi(0)+2\sum_{m=1}^{+\infty}R_\xi(m)\cos(\omega m),\quad R_\xi(m)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_\xi\left(e^{i\omega}\right)e^{i\omega m}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Phi_\xi\left(e^{i\omega}\right)\cos(\omega m)\,d\omega.$$

СПМ выходной последовательности для модели АРСС(*M,N*):

$$\Phi_\eta\left(e^{i\omega}\right)=\left|\frac{\alpha_0+\alpha_1e^{i\omega}+\alpha_2e^{i2\omega}+\ldots+\alpha_Ne^{iN\omega}}{1-\beta_1e^{i\omega}-\beta_2e^{i2\omega}-\ldots-\beta_Me^{iM\omega}}\right|^2=$$
$$=\frac{(\alpha_0+\alpha_1\cos\omega+\alpha_2\cos2\omega+\ldots+\alpha_N\cos N\omega)^2+(\alpha_1\sin\omega+\alpha_2\sin2\omega+\ldots+\alpha_N\sin N\omega)^2}{(1-\beta_1\cos\omega-\beta_2\cos2\omega-\ldots-\beta_M\cos M\omega)^2+(\beta_1\sin\omega+\beta_2\sin2\omega+\ldots+\beta_M\sin M\omega)^2},\quad \omega\in[0;\pi]. \tag{А.4}$$

СПМ можно использовать для проверки адекватности построенной модели АРСС, визуально сравнивая график теоретической СПМ (А.4) с выборочной СПМ

$$\hat{\Phi}_\eta\left(e^{i\omega}\right)=\hat{R}_\eta(0)+2\sum_{m=1}^{K}\hat{R}_\eta(m)\cos(\omega m), \tag{А.5}$$

непосредственно рассчитанной по выборочной корреляционной функции $\hat{R}_\eta(m)$, и со СПМ смоделированной (пункт 5 задания) случайной последовательности.

Приложение Б Примеры вывода уравнений АРСС и расчёта параметров моделей

В общем виде модель авторегрессии – скользящего среднего порядка (*M,N*) задаётся уравнением

$$\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \beta_2\eta_{n-2} + \ldots + \beta_M\eta_{n-M} + \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} + \ldots + \alpha_N\xi_{n-N},$$

где ξ_n – входная некоррелированная случайная последовательность с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией ($\mathbf{M}\xi_n = 0,\ \ \mathbf{M}\xi_n^2 = 1,\ \ \mathbf{M}\xi_k\xi_n = \delta_{kn}$), η_n – выходная случайная последовательность.

Будем считать (без доказательства), что выходная случайная последовательность η_n является стационарной в широком смысле и имеет математическое ожидание $\mathbf{M}\eta_n = 0$ и корреляционную функцию $R_\eta(m) = \mathbf{M}\eta_n\eta_{n+m}$. Считаем также, что случайные последовательности ξ_n и η_n являются взаимно стационарными в широком смысле. Обозначим через $R_{\xi\eta}(m)$ их взаимную корреляционную функцию: $R_{\xi\eta}(m) = \mathbf{M}\xi_n\eta_{n+m}$. Заметим, что $R_{\xi\eta}(m) = 0$ при $m < 0$, так как в соответствии с уравнением АРСС «прошлое» значение η_{n+m} не зависит от «будущего» значения ξ_n при $m < 0$.

Б.1 Модель АРСС(2,1)

Рассмотрим смешанную модель авторегрессии – скользящего среднего порядка (2,1):

$$\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \beta_2\eta_{n-2} + \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1}. \tag{Б.1}$$

Установим связь между параметрами модели АРСС (В.1) $\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2\}$ и корреляционной функцией выходной последовательности $\{R_\eta(m),\ m = 0,1,2,3,\ldots\}$.

Для этого сначала умножим обе части уравнения (Б.1) на η_n и вычислим математическое ожидание:

$$\mathbf{M}\eta_n\eta_n = \beta_1\mathbf{M}\eta_{n-1}\eta_n + \beta_2\mathbf{M}\eta_{n-2}\eta_n + \alpha_0\mathbf{M}\xi_n\eta_n + \alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\eta_n.$$

Получаем первое уравнение:

$$R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(2) + \alpha_0 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(1). \tag{Б.2}$$

Затем умножим обе части уравнения (Б.1) на η_{n-1} и вычислим математическое ожидание:

$$\mathbf{M}\eta_n\eta_{n-1} = \beta_1\mathbf{M}\eta_{n-1}\eta_{n-1} + \beta_2\mathbf{M}\eta_{n-2}\eta_{n-1} + \alpha_0\mathbf{M}\xi_n\eta_{n-1} + \alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\eta_{n-1}.$$

С учётом того, что $\mathbf{M}\xi_n\eta_{n-1} = R_{\xi\eta}(-1) = 0$, получаем второе уравнение:

$$R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \beta_2 R_\eta(1) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(0). \tag{Б.3}$$

Аналогично получаем уравнения:

$$R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(0), \tag{Б.4}$$

$$R_\eta(3) = \beta_1 R_\eta(2) + \beta_2 R_\eta(1), \tag{Б.5}$$

$$R_\eta(4) = \beta_1 R_\eta(3) + \beta_2 R_\eta(2),$$

$$\ldots$$

Умножим обе части уравнения (Б.1) на ξ_n и вычислим математическое ожидание:

$$\mathbf{M}\xi_n\eta_n = \beta_1\mathbf{M}\xi_n\eta_{n-1} + \beta_2\mathbf{M}\xi_n\eta_{n-2} + \alpha_0\mathbf{M}\xi_n\xi_n + \alpha_1\mathbf{M}\xi_n\xi_{n-1}.$$

Получаем уравнение:

$$R_{\xi\eta}(0) = \alpha_0. \tag{Б.6}$$

Умножим обе части уравнения (Б.1) на ξ_{n-1} и вычислим математическое ожидание:

$$\mathbf{M}\xi_{n-1}\eta_n = \beta_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\eta_{n-1} + \beta_2\mathbf{M}\xi_{n-1}\eta_{n-2} + \alpha_0\mathbf{M}\xi_{n-1}\xi_n + \alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\xi_{n-1}, \text{ то есть}$$

$$R_{\xi\eta}(1) = \beta_1 R_{\xi\eta}(0) + \beta_2 R_{\xi\eta}(-1) + \alpha_0 R_\xi(1) + \alpha_1 R_\xi(0).$$

С использованием соотношения (Б.6) и учётом того, что $R_{\xi\eta}(-1) = 0$, получаем уравнение:

$$R_{\xi\eta}(1) = \alpha_0\beta_1 + \alpha_1. \tag{Б.7}$$

Подставляя соотношения (Б.6) и (Б.7) в уравнения (Б.2)–(Б.5), получаем систему из четырёх уравнений относительно четырёх неизвестных параметров $\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2\}$:

$$\begin{cases} R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(2) + \alpha_0^2 + \alpha_1(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1), \\ R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \beta_2 R_\eta(1) + \alpha_0\alpha_1, \\ R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(0), \\ R_\eta(3) = \beta_1 R_\eta(2) + \beta_2 R_\eta(1). \end{cases} \tag{Б.8}$$

Задача: $\boxed{\left\{\widehat{R}_\eta(0),\ \widehat{R}_\eta(1),\ \widehat{R}_\eta(2),\ \widehat{R}_\eta(3)\right\} \ \Rightarrow\ \left\{\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2\right\}}$

Решение:

Метод 1

1. Из системы двух линейных уравнений $\widehat{R}_\eta(2) = \beta_1 \widehat{R}_\eta(1) + \beta_2 \widehat{R}_\eta(0)$, $\widehat{R}_\eta(3) = \beta_1 \widehat{R}_\eta(2) + \beta_2 \widehat{R}_\eta(1)$ находим оценки коэффициентов $\widehat{\beta}_1 = \dfrac{\widehat{R}_\eta(1)\widehat{R}_\eta(2) - \widehat{R}_\eta(0)\widehat{R}_\eta(3)}{\widehat{R}_\eta^2(1) - \widehat{R}_\eta(0)\widehat{R}_\eta(2)}$, $\widehat{\beta}_2 = \dfrac{\widehat{R}_\eta(1)\widehat{R}_\eta(3) - \widehat{R}_\eta^2(2)}{\widehat{R}_\eta^2(1) - \widehat{R}_\eta(0)\widehat{R}_\eta(2)}$.

2. Аналитическими или численными методами решаем систему из двух нелинейных уравнений относительно неизвестных α_0, α_1:

$$\begin{cases} \widehat{R}_\eta(0) - \widehat{\beta}_1 \widehat{R}_\eta(1) - \widehat{\beta}_2 \widehat{R}_\eta(2) = \alpha_0^2 + \alpha_1(\alpha_0 \widehat{\beta}_1 + \alpha_1), \\ \widehat{R}_\eta(1) - \widehat{\beta}_1 \widehat{R}_\eta(0) - \widehat{\beta}_2 \widehat{R}_\eta(1) = \alpha_0 \alpha_1 \end{cases}$$

и таким образом находим оценки коэффициентов $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1$.

Метод 2

1. Из системы двух линейных уравнений $\widehat{R}_\eta(2) = \beta_1 \widehat{R}_\eta(1) + \beta_2 \widehat{R}_\eta(0)$, $\widehat{R}_\eta(3) = \beta_1 \widehat{R}_\eta(2) + \beta_2 \widehat{R}_\eta(1)$ находим оценки коэффициентов $\widehat{\beta}_1$ и $\widehat{\beta}_2$ (как в методе 1).

2. С использованием уравнения $\zeta_n = \eta_n - \widehat{\beta}_1 \eta_{n-1} - \widehat{\beta}_2 \eta_{n-2}$ получаем выборку случайной последовательности $\{\zeta_n\}$.

3. Находим оценку её корреляционной функции: $\widehat{R}_\zeta(m)$, $m = 0,1,2$.

4. Находим оценки неизвестных параметров $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1$, аналитически или численно решая систему из двух нелинейных уравнений: $\widehat{R}_\zeta(0) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2$, $\widehat{R}_\zeta(1) = \alpha_0 \alpha_1$.

Метод 3

Оценки параметров находим с использованием численных методов оптимизации:

$$\left(\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2\right) = \underset{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2}{\arg\min}\ J\left(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2\right),$$

где

$$J\left(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2\right) = \left[\widehat{R}_\eta(0) - \beta_1 \widehat{R}_\eta(1) - \beta_2 \widehat{R}_\eta(2) - \alpha_0^2 - \alpha_1(\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1)\right]^2$$
$$+ \left[\widehat{R}_\eta(1) - \beta_1 \widehat{R}_\eta(0) - \beta_2 \widehat{R}_\eta(1) - \alpha_1 \alpha_0\right]^2 + \left[\widehat{R}_\eta(2) - \beta_1 \widehat{R}_\eta(1) - \beta_2 \widehat{R}_\eta(0)\right]^2 + \left[\widehat{R}_\eta(3) - \beta_1 \widehat{R}_\eta(2) - \beta_2 \widehat{R}_\eta(1)\right]^2.$$

Задача: $\boxed{\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2\} \ \Rightarrow\ \left\{R_\eta(m),\ m = 0,1,2,3,\ldots\right\}}$

Решение:

1. Из системы трёх линейных уравнений

$$\begin{cases} R_\eta(0) - \beta_1 R_\eta(1) - \beta_2 R_\eta(2) = \alpha_0^2 + \alpha_1(\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1), \\ R_\eta(1) - \beta_1 R_\eta(0) - \beta_2 R_\eta(1) = \alpha_0 \alpha_1, \\ R_\eta(2) - \beta_1 R_\eta(1) - \beta_2 R_\eta(0) = 0 \end{cases}$$

находим значения $R_\eta(0)$, $R_\eta(1)$, $R_\eta(2)$.

2. Пользуясь соотношением $R_\eta(m) = \beta_1 R_\eta(m-1) + \beta_2 R_\eta(m-2)$, рекурсивно рассчитываем значения остальных отсчётов корреляционной функции: $R_\eta(3)$, $R_\eta(4)$, $R_\eta(5)$, $R_\eta(6)$, …

Б.2 Модель АРСС(2,2)

Рассмотрим смешанную модель авторегрессии – скользящего среднего порядка (2,2):

$$\eta_n = \beta_1 \eta_{n-1} + \beta_2 \eta_{n-2} + \alpha_0 \xi_n + \alpha_1 \xi_{n-1} + \alpha_2 \xi_{n-2}, \tag{Б.9}$$

где ξ_n – входная некоррелированная случайная последовательность с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией ($\mathbf{M}\xi_n = 0$, $\mathbf{M}\xi_n^2 = 1$, $\mathbf{M}\xi_k \xi_n = \delta_{kn}$), η_n – выходная случайная последовательность.

Установим связь между параметрами модели АРСС (Б.9) $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$ и корреляционной функцией выходной последовательности $\{R_\eta(m),\ m = 0,1,2,3,\ldots\}$.

Для этого сначала умножим обе части уравнения (Б.9) на η_n и вычислим математическое ожидание:

$$\mathbf{M}\eta_n\eta_n = \beta_1\mathbf{M}\eta_{n-1}\eta_n + \beta_2\mathbf{M}\eta_{n-2}\eta_n + \alpha_0\mathbf{M}\xi_n\eta_n + \alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\eta_n + \alpha_2\mathbf{M}\xi_{n-2}\eta_n .$$

Получаем первое уравнение:

$$R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(2) + \alpha_0 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(2) . \tag{Б.10}$$

Затем умножим обе части уравнения (Б.9) на η_{n-1} и вычислим математическое ожидание:

$$\mathbf{M}\eta_n\eta_{n-1} = \beta_1\mathbf{M}\eta_{n-1}\eta_{n-1} + \beta_2\mathbf{M}\eta_{n-2}\eta_{n-1} + \alpha_0\mathbf{M}\xi_n\eta_{n-1} + \alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\eta_{n-1} + \alpha_2\mathbf{M}\xi_{n-2}\eta_{n-1} .$$

Получаем второе уравнение:

$$R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \beta_2 R_\eta(1) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(1) . \tag{Б.11}$$

Аналогично получаем уравнения:

$$R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(0) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(0) , \tag{Б.12}$$

$$R_\eta(3) = \beta_1 R_\eta(2) + \beta_2 R_\eta(1) , \tag{Б.13}$$

$$R_\eta(4) = \beta_1 R_\eta(3) + \beta_2 R_\eta(2) , \tag{Б.14}$$

$$R_\eta(5) = \beta_1 R_\eta(4) + \beta_2 R_\eta(3) ,$$

$$\ldots$$

Умножим обе части уравнения (Б.9) на ξ_n и вычислим математическое ожидание:

$$\mathbf{M}\xi_n\eta_n = \beta_1\mathbf{M}\xi_n\eta_{n-1} + \beta_2\mathbf{M}\xi_n\eta_{n-2} + \alpha_0\mathbf{M}\xi_n\xi_n + \alpha_1\mathbf{M}\xi_n\xi_{n-1} + \alpha_2\mathbf{M}\xi_n\xi_{n-2} .$$

Получаем уравнение:

$$R_{\xi\eta}(0) = \alpha_0 . \tag{Б.15}$$

Умножим обе части уравнения (Б.9) на ξ_{n-1} и вычислим математическое ожидание:

$$\mathbf{M}\xi_{n-1}\eta_n = \beta_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\eta_{n-1} + \beta_2\mathbf{M}\xi_{n-1}\eta_{n-2} + \alpha_0\mathbf{M}\xi_{n-1}\xi_n + \alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\xi_{n-1} + \alpha_2\mathbf{M}\xi_{n-1}\xi_{n-2} .$$

С использованием соотношения (Б.15) получаем уравнение:

$$R_{\xi\eta}(1) = \alpha_0\beta_1 + \alpha_1 . \tag{Б.16}$$

Умножим обе части уравнения (Б.9) на ξ_{n-2} и вычислим математическое ожидание:

$$\mathbf{M}\xi_{n-2}\eta_n = \beta_1\mathbf{M}\xi_{n-2}\eta_{n-1} + \beta_2\mathbf{M}\xi_{n-2}\eta_{n-2} + \alpha_0\mathbf{M}\xi_{n-2}\xi_n + \alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-2}\xi_{n-1} + \alpha_2\mathbf{M}\xi_{n-2}\xi_{n-2} .$$

С использованием соотношений (Б.15) и (Б.16) получаем уравнение:

$$R_{\xi\eta}(2) = (\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_0 + \beta_1\alpha_1 + \alpha_2 . \tag{Б.17}$$

Подставляя соотношения (Б.15)–(Б.17) в уравнения (Б.10)–(Б.14), получаем систему из пяти уравнений относительно пяти неизвестных параметров $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$:

$$\begin{cases} R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(2) + \alpha_0^2 + \alpha_1(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) + \alpha_2((\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_0 + \beta_1\alpha_1 + \alpha_2), \\ R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \beta_2 R_\eta(1) + \alpha_1\alpha_0 + \alpha_2(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1), \\ R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(0) + \alpha_2\alpha_0, \\ R_\eta(3) = \beta_1 R_\eta(2) + \beta_2 R_\eta(1), \\ R_\eta(4) = \beta_1 R_\eta(3) + \beta_2 R_\eta(2). \end{cases} \tag{Б.18}$$

<u>Задача:</u> $\boxed{\{\hat{R}_\eta(0),\ \hat{R}_\eta(1),\ \hat{R}_\eta(2),\ \hat{R}_\eta(3),\ \hat{R}_\eta(4)\} \Rightarrow \{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\}}$

<u>Решение:</u>

Метод 1

1. Из системы двух линейных уравнений $\hat{R}_\eta(3) = \beta_1\hat{R}_\eta(2) + \beta_2\hat{R}_\eta(1)$, $\hat{R}_\eta(4) = \beta_1\hat{R}_\eta(3) + \beta_2\hat{R}_\eta(2)$ находим оценки коэффициентов $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\hat{R}_\eta(2)\hat{R}_\eta(3) - \hat{R}_\eta(1)\hat{R}_\eta(4)}{\hat{R}_\eta^2(2) - \hat{R}_\eta(1)\hat{R}_\eta(3)}$, $\hat{\beta}_2 = \dfrac{\hat{R}_\eta(2)\hat{R}_\eta(4) - \hat{R}_\eta^2(3)}{\hat{R}_\eta^2(2) - \hat{R}_\eta(1)\hat{R}_\eta(3)}$.

2. Численными методами решаем систему трёх нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \hat{R}_\eta(0) - \hat{\beta}_1 \hat{R}_\eta(1) - \hat{\beta}_2 \hat{R}_\eta(2) = \alpha_0^2 + \alpha_1(\alpha_0 \hat{\beta}_1 + \alpha_1) + \alpha_2((\hat{\beta}_1^2 + \hat{\beta}_2)\alpha_0 + \hat{\beta}_1 \alpha_1 + \alpha_2), \\ \hat{R}_\eta(1) - \hat{\beta}_1 \hat{R}_\eta(0) - \hat{\beta}_2 \hat{R}_\eta(1) = \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_2(\alpha_0 \hat{\beta}_1 + \alpha_1), \\ \hat{R}_\eta(2) - \hat{\beta}_1 \hat{R}_\eta(1) - \hat{\beta}_2 \hat{R}_\eta(0) = \alpha_2 \alpha_0 \end{cases}$$

и находим оценки коэффициентов $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$.

Метод 2

1. Из системы двух линейных уравнений $\hat{R}_\eta(3) = \beta_1 \hat{R}_\eta(2) + \beta_2 \hat{R}_\eta(1)$, $\hat{R}_\eta(4) = \beta_1 \hat{R}_\eta(3) + \beta_2 \hat{R}_\eta(2)$ находим оценки коэффициентов $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$ (как и в методе 1).
2. С использованием уравнения $\zeta_n = \eta_n - \hat{\beta}_1 \eta_{n-1} - \hat{\beta}_2 \eta_{n-2}$ получаем выборку случайной последовательности $\{\zeta_n\}$.
3. Находим оценку её корреляционной функции: $\hat{R}_\zeta(m)$, $m = 0, 1, 2$.
4. Находим оценки неизвестных параметров $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$, численно решая систему из трёх нелинейных уравнений: $\hat{R}_\zeta(0) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, $\hat{R}_\zeta(1) = \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2$, $\hat{R}_\zeta(2) = \alpha_0 \alpha_2$.

Метод 3

Оценки параметров находим с использованием численных методов оптимизации:

$$\left(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right) = \underset{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2}{\arg\min} J\left(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\right),$$

где

$$\begin{aligned} J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = & \left[\hat{R}_\eta(0) - \beta_1 \hat{R}_\eta(1) - \beta_2 \hat{R}_\eta(2) - \alpha_0^2 - \alpha_1(\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1) - \alpha_2((\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_0 + \beta_1 \alpha_1 + \alpha_2) \right]^2 \\ & + \left[\hat{R}_\eta(1) - \beta_1 \hat{R}_\eta(0) - \beta_2 \hat{R}_\eta(1) - \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_2(\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1) \right]^2 \\ & + \left[\hat{R}_\eta(2) - \beta_1 \hat{R}_\eta(1) - \beta_2 \hat{R}_\eta(0) - \alpha_2 \alpha_0 \right]^2 + \left[\hat{R}_\eta(3) - \beta_1 \hat{R}_\eta(2) - \beta_2 \hat{R}_\eta(1) \right]^2 + \left[\hat{R}_\eta(4) - \beta_1 \hat{R}_\eta(3) - \beta_2 \hat{R}_\eta(2) \right]^2. \end{aligned}$$

Задача: $\boxed{\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\} \Rightarrow \{R_\eta(m),\ m = 0, 1, 2, 3, \ldots\}}$

Решение:

1. Из системы трёх линейных уравнений

$$\begin{cases} R_\eta(0) - \beta_1 R_\eta(1) - \beta_2 R_\eta(2) = \alpha_0^2 + \alpha_1(\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1) + \alpha_2((\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_0 + \beta_1 \alpha_1 + \alpha_2), \\ R_\eta(1) - \beta_1 R_\eta(0) - \beta_2 R_\eta(1) = \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_2(\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1), \\ R_\eta(2) - \beta_1 R_\eta(1) - \beta_2 R_\eta(0) = \alpha_2 \alpha_0 \end{cases}$$

находим значения $R_\eta(0)$, $R_\eta(1)$, $R_\eta(2)$.

2. Пользуясь соотношением $R_\eta(m) = \beta_1 R_\eta(m-1) + \beta_2 R_\eta(m-2)$, рекурсивно рассчитываем значения остальных отсчётов корреляционной функции: $R_\eta(3)$, $R_\eta(4)$, $R_\eta(5)$, $R_\eta(6)$, …

Б.3 Модель АРСС(1,3)

Уравнение АРСС: $\eta_n = \beta_1 \eta_{n-1} + \alpha_0 \xi_n + \alpha_1 \xi_{n-1} + \alpha_2 \xi_{n-2} + \alpha_3 \xi_{n-3}$

Исходные уравнения:

$$R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \alpha_0 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(2) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(3),$$

$$R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(2),$$

$$R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(1),$$

$$R_\eta(3) = \beta_1 R_\eta(2) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(0),$$

$$R_\eta(4) = \beta_1 R_\eta(3),$$

…

$$R_{\xi\eta}(0) = \alpha_0, \quad R_{\xi\eta}(1) = \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1, \quad R_{\xi\eta}(2) = \alpha_0 \beta_1^2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2, \quad R_{\xi\eta}(3) = \alpha_1 \beta_1^2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_3.$$

Задача: $\boxed{\{\widehat{R}_\eta(0),\ \widehat{R}_\eta(1),\ \widehat{R}_\eta(2),\ \widehat{R}_\eta(3),\ \widehat{R}_\eta(4)\} \Rightarrow \{\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\alpha}_3, \widehat{\beta}_1\}}$

Решение:

Метод 1

1. Из линейного уравнения $\widehat{R}_\eta(4) = \beta_1 \widehat{R}_\eta(3)$ находим оценку коэффициента $\widehat{\beta}_1$.

2. Из системы четырёх нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \widehat{R}_\eta(0) - \widehat{\beta}_1 \widehat{R}_\eta(1) = \alpha_0^2 + \alpha_1(\alpha_0\widehat{\beta}_1 + \alpha_1) + \alpha_2(\alpha_0\widehat{\beta}_1^2 + \alpha_1\widehat{\beta}_1 + \alpha_2) + \alpha_3(\alpha_1\widehat{\beta}_1^2 + \alpha_2\widehat{\beta}_1 + \alpha_3), \\ \widehat{R}_\eta(1) - \widehat{\beta}_1 \widehat{R}_\eta(0) = \alpha_1\alpha_0 + \alpha_2(\alpha_0\widehat{\beta}_1 + \alpha_1) + \alpha_3(\alpha_0\widehat{\beta}_1^2 + \alpha_1\widehat{\beta}_1 + \alpha_2), \\ \widehat{R}_\eta(2) - \widehat{\beta}_1 \widehat{R}_\eta(1) = \alpha_2\alpha_0 + \alpha_3(\alpha_0\widehat{\beta}_1 + \alpha_1), \\ \widehat{R}_\eta(3) - \widehat{\beta}_1 \widehat{R}_\eta(2) = \alpha_3\alpha_0 \end{cases}$$

находим оценки коэффициентов $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\alpha}_3$.

Метод 2

1. Из линейного уравнения $\widehat{R}_\eta(4) = \beta_1 \widehat{R}_\eta(3)$ находим оценку коэффициента $\widehat{\beta}_1$.

2. С использованием уравнения $\zeta_n = \eta_n - \widehat{\beta}_1\eta_{n-1}$ получаем выборку случайной последовательности $\{\zeta_n\}$.

3. Находим оценку её корреляционной функции: $\widehat{R}_\zeta(m),\ m = 0,1,2,3$.

4. Находим оценки неизвестных параметров $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\alpha}_3$, численно решая систему из четырёх нелинейных уравнений: $\widehat{R}_\zeta(0) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, $\ R_\zeta(1) = \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3$, $\ \widehat{R}_\zeta(2) = \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3$, $\ \widehat{R}_\zeta(3) = \alpha_0\alpha_3$.

Метод 3

Оценки параметров находим с использованием численных методов оптимизации:

$$\left(\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\alpha}_3, \widehat{\beta}_1\right) = \underset{\alpha_0,\,\alpha_1,\,\alpha_2,\alpha_3,\,\beta_1}{\arg\min}\ J\left(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1\right),$$

где

$$\begin{aligned} J\left(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1\right) = &\left[\widehat{R}_\eta(0) - \beta_1\widehat{R}_\eta(1) - \alpha_0^2 - \alpha_1(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) - \alpha_2(\alpha_0\beta_1^2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2) - \alpha_3(\alpha_1\beta_1^2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3)\right]^2 \\ &+ \left[\widehat{R}_\eta(1) - \beta_1\widehat{R}_\eta(0) - \alpha_1\alpha_0 - \alpha_2(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) - \alpha_3(\alpha_0\beta_1^2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2)\right]^2 \\ &+ \left[\widehat{R}_\eta(2) - \beta_1\widehat{R}_\eta(1) - \alpha_2\alpha_0 - \alpha_3(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1)\right]^2 + \left[\widehat{R}_\eta(3) - \beta_1\widehat{R}_\eta(2) - \alpha_3\alpha_0\right]^2 + \left[\widehat{R}_\eta(4) - \beta_1\widehat{R}_\eta(3)\right]^2. \end{aligned}$$

Задача: $\boxed{\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1\} \Rightarrow \{R_\eta(m),\ m = 0,1,2,3,\ldots\}}$

Решение:

1. Из системы четырёх линейных уравнений

$$\begin{cases} R_\eta(0) - \beta_1 R_\eta(1) = \alpha_0^2 + \alpha_1(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) + \alpha_2(\alpha_0\beta_1^2 + \beta_1\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3(\alpha_0\beta_1^3 + \alpha_1\beta_1^2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3), \\ R_\eta(1) - \beta_1 R_\eta(0) = \alpha_1\alpha_0 + \alpha_2(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) + \alpha_3(\alpha_0\beta_1^2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2), \\ R_\eta(2) - \beta_1 R_\eta(1) = \alpha_2\alpha_0 + \alpha_3(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1), \\ R_\eta(3) - \beta_1 R_\eta(2) = \alpha_3\alpha_0. \end{cases}$$

находим значения $R_\eta(0),\ R_\eta(1),\ R_\eta(2),\ R_\eta(3)$.

2. Пользуясь соотношением $R_\eta(m) = \beta_1 R_\eta(m-1)$, рекурсивно рассчитываем значения остальных отсчётов корреляционной функции: $R_\eta(4),\ R_\eta(5),\ R_\eta(6),\ R_\eta(7), \ldots$

Б.4 Модель АРСС(3,3)

Уравнение АРСС: $\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \beta_2\eta_{n-2} + \beta_3\eta_{n-3} + \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} + \alpha_2\xi_{n-2} + \alpha_3\xi_{n-3}$

Исходные уравнения:

$$R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(2) + \beta_3 R_\eta(3) + \alpha_0 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(2) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(3),$$

$$R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \beta_2 R_\eta(1) + \beta_3 R_\eta(2) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(2),$$

$$R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(0) + \beta_3 R_\eta(1) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(1),$$

$$R_\eta(3) = \beta_1 R_\eta(2) + \beta_2 R_\eta(1) + \beta_3 R_\eta(0) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(0),$$

$R_\eta(4) = \beta_1 R_\eta(3) + \beta_2 R_\eta(2) + \beta_3 R_\eta(1)$,

$R_\eta(5) = \beta_1 R_\eta(4) + \beta_2 R_\eta(3) + \beta_3 R_\eta(2)$,

$R_\eta(6) = \beta_1 R_\eta(5) + \beta_2 R_\eta(4) + \beta_3 R_\eta(3)$,

…

$R_{\xi\eta}(0) = \alpha_0$, $\quad R_{\xi\eta}(1) = \alpha_0\beta_1 + \alpha_1$, $\quad R_{\xi\eta}(2) = (\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_0 + \beta_1\alpha_1 + \alpha_2$,

$R_{\xi\eta}(3) = (\beta_1^3 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_3)\alpha_0 + (\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_1 + \beta_1\alpha_2 + \alpha_3$.

Задача: $\boxed{\left\{\widehat{R}_\eta(0),\ \widehat{R}_\eta(1),\ \widehat{R}_\eta(2),\ \widehat{R}_\eta(3),\ \widehat{R}_\eta(4),\ \widehat{R}_\eta(5),\ \widehat{R}_\eta(6)\right\} \ \Rightarrow\ \left\{\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\alpha}_3, \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\beta}_3\right\}}$

Решение:

Метод 1

1. Из системы трёх линейных уравнений

$R_\eta(4) = \beta_1 R_\eta(3) + \beta_2 R_\eta(2) + \beta_3 R_\eta(1), \quad R_\eta(5) = \beta_1 R_\eta(4) + \beta_2 R_\eta(3) + \beta_3 R_\eta(2), \quad R_\eta(6) = \beta_1 R_\eta(5) + \beta_2 R_\eta(4) + \beta_3 R_\eta(3)$

находим оценки коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \beta_3$:

$$\begin{cases} \widehat{\beta}_1 = \dfrac{R_\eta^2(3)R_\eta(4) + R_\eta^2(2)R_\eta(6) + R_\eta(1)R_\eta(4)R_\eta(5) - R_\eta(1)R_\eta(3)R_\eta(6) - R_\eta^2(4)R_\eta(2) - R_\eta(2)R_\eta(3)R_\eta(5)}{R_\eta^3(3) + R_\eta^2(2)R_\eta(5) + R_\eta^2(4)R_\eta(1) - R_\eta(1)R_\eta(3)R_\eta(5) - 2R_\eta(2)R_\eta(3)R_\eta(4)}, \\ \widehat{\beta}_2 = \dfrac{R_\eta^2(3)R_\eta(5) + R_\eta(2)R_\eta(4)R_\eta(5) + R_\eta(1)R_\eta(4)R_\eta(6) - R_\eta^2(5)R_\eta(1) - R_\eta^2(4)R_\eta(3) - R_\eta(2)R_\eta(3)R_\eta(6)}{R_\eta^3(3) + R_\eta^2(2)R_\eta(5) + R_\eta^2(4)R_\eta(1) - R_\eta(1)R_\eta(3)R_\eta(5) - 2R_\eta(2)R_\eta(3)R_\eta(4)}, \\ \widehat{\beta}_3 = \dfrac{R_\eta^2(3)R_\eta(6) + R_\eta^2(5)R_\eta(2) + R_\eta^3(4) - 2R_\eta(3)R_\eta(4)R_\eta(5) - R_\eta(2)R_\eta(4)R_\eta(6)}{R_\eta^3(3) + R_\eta^2(2)R_\eta(5) + R_\eta^2(4)R_\eta(1) - R_\eta(1)R_\eta(3)R_\eta(5) - 2R_\eta(2)R_\eta(3)R_\eta(4)}. \end{cases}$$

2. Из системы четырёх нелинейных уравнений

$$\begin{cases} R_\eta(0) - \widehat{\beta}_1 R_\eta(1) - \widehat{\beta}_2 R_\eta(2) - \widehat{\beta}_3 R_\eta(3) = \\ \quad \alpha_0^2 + \alpha_1(\alpha_0\widehat{\beta}_1 + \alpha_1) + \alpha_2((\widehat{\beta}_1^2 + \widehat{\beta}_2)\alpha_0 + \widehat{\beta}_1\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3((\widehat{\beta}_1^3 + 2\widehat{\beta}_1\widehat{\beta}_2 + \widehat{\beta}_3)\alpha_0 + (\widehat{\beta}_1^2 + \widehat{\beta}_2)\alpha_1 + \widehat{\beta}_1\alpha_2 + \alpha_3), \\ R_\eta(1) - \widehat{\beta}_1 R_\eta(0) - \widehat{\beta}_2 R_\eta(1) - \widehat{\beta}_3 R_\eta(2) = \alpha_1\alpha_0 + \alpha_2(\alpha_0\widehat{\beta}_1 + \alpha_1) + \alpha_3((\widehat{\beta}_1^2 + \widehat{\beta}_2)\alpha_0 + \widehat{\beta}_1\alpha_1 + \alpha_2), \\ R_\eta(2) - \widehat{\beta}_1 R_\eta(1) - \widehat{\beta}_2 R_\eta(0) - \widehat{\beta}_3 R_\eta(1) = \alpha_2\alpha_0 + \alpha_3(\alpha_0\widehat{\beta}_1 + \alpha_1), \\ R_\eta(3) - \widehat{\beta}_1 R_\eta(2) - \widehat{\beta}_2 R_\eta(1) - \widehat{\beta}_3 R_\eta(0) = \alpha_3\alpha_0 \end{cases}$$

находим оценки коэффициентов $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\alpha}_3$.

Метод 2

1. Из системы трёх линейных уравнений

$R_\eta(4) = \beta_1 R_\eta(3) + \beta_2 R_\eta(2) + \beta_3 R_\eta(1), \quad R_\eta(5) = \beta_1 R_\eta(4) + \beta_2 R_\eta(3) + \beta_3 R_\eta(2), \quad R_\eta(6) = \beta_1 R_\eta(5) + \beta_2 R_\eta(4) + \beta_3 R_\eta(3)$

находим оценки коэффициентов $\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\beta}_3$ (как в методе 1).

2. С использованием уравнения $\zeta_n = \eta_n - \widehat{\beta}_1\eta_{n-1} - \widehat{\beta}_2\eta_{n-2} - \widehat{\beta}_3\eta_{n-3}$ получаем выборку случайной последовательности $\{\zeta_n\}$.

3. Находим оценку её корреляционной функции: $\widehat{R}_\zeta(m),\ m = 0,1,2,3$.

4. Находим оценки неизвестных параметров $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\alpha}_3$, численно решая систему из четырёх нелинейных уравнений: $\widehat{R}_\zeta(0) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, $\quad \widehat{R}_\zeta(1) = \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3$, $\quad \widehat{R}_\zeta(2) = \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3$, $\quad \widehat{R}_\zeta(3) = \alpha_0\alpha_3$.

Метод 3

Оценки параметров находим с использованием численных методов оптимизации:

$$\left(\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\alpha}_3, \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\beta}_3\right) = \underset{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3}{\arg\min} J\left(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_2\right),$$

где

$$
\begin{aligned}
&J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\
&= [\hat{R}_\eta(0) - \beta_1 \hat{R}_\eta(1) - \beta_2 \hat{R}_\eta(2) - \beta_3 \hat{R}_\eta(3) \\
&\quad -\alpha_0^2 - \alpha_1(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) - \alpha_2((\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_0 + \beta_1\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_3((\beta_1^3 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_3)\alpha_0 + (\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_1 + \beta_1\alpha_2 + \alpha_3)]^2 \\
&+ [\hat{R}_\eta(1) - \beta_1 \hat{R}_\eta(0) - \beta_2 \hat{R}_\eta(1) - \beta_3 \hat{R}_\eta(2) - \alpha_1\alpha_0 - \alpha_2(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) - \alpha_3((\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_0 - \beta_1\alpha_1 + \alpha_2)]^2 \\
&+ [\hat{R}_\eta(2) - \beta_1 \hat{R}_\eta(1) - \beta_2 \hat{R}_\eta(0) - \beta_3 \hat{R}_\eta(1) - \alpha_2\alpha_0 - \alpha_3(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1)]^2 + [\hat{R}_\eta(3) - \beta_1 \hat{R}_\eta(2) - \beta_2 \hat{R}_\eta(1) - \beta_3 \hat{R}_\eta(0) - \alpha_3\alpha_0]^2 \\
&+ [\hat{R}_\eta(4) - \beta_1 \hat{R}_\eta(3) - \beta_2 \hat{R}_\eta(2) - \beta_3 \hat{R}_\eta(1)]^2 + [\hat{R}_\eta(5) - \beta_1 \hat{R}_\eta(4) - \beta_2 \hat{R}_\eta(3) - \beta_3 \hat{R}_\eta(2)]^2 + [\hat{R}_\eta(6) - \beta_1 \hat{R}_\eta(5) - \beta_2 \hat{R}_\eta(4) - \beta_3 \hat{R}_\eta(3)]^2.
\end{aligned}
$$

<u>*Задача:*</u> $\boxed{\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} \Rightarrow \{R_\eta(m),\ m = 0,1,2,3,\ldots\}}$

<u>*Решение:*</u>

1. Из системы четырёх линейных уравнений

$$
\begin{cases}
R_\eta(0) - \beta_1 R_\eta(1) - \beta_2 R_\eta(2) - \beta_3 R_\eta(3) = \\
\quad \alpha_0^2 + \alpha_1(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) + \alpha_2((\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_0 + \beta_1\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3((\beta_1^3 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_3)\alpha_0 + (\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_1 + \beta_1\alpha_2 + \alpha_3), \\
R_\eta(1) - \beta_1 R_\eta(0) - \beta_2 R_\eta(1) - \beta_3 R_\eta(2) = \alpha_1\alpha_0 + \alpha_2(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) + \alpha_3((\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_0 + \beta_1\alpha_1 + \alpha_2), \\
R_\eta(2) - \beta_1 R_\eta(1) - \beta_2 R_\eta(0) - \beta_3 R_\eta(1) = \alpha_2\alpha_0 + \alpha_3(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1), \\
R_\eta(3) - \beta_1 R_\eta(2) - \beta_2 R_\eta(1) - \beta_3 R_\eta(0) = \alpha_3\alpha_0
\end{cases}
$$

находим значения $R_\eta(0),\ R_\eta(1),\ R_\eta(2),\ R_\eta(3)$.

2. Пользуясь соотношением $R_\eta(m) = \beta_1 R_\eta(m-1) + \beta_2 R_\eta(m-2) + \beta_3 R_\eta(m-3)$, рекурсивно рассчитываем значения остальных отсчётов корреляционной функции: $R_\eta(4),\ R_\eta(5),\ R_\eta(6),\ R_\eta(7),\ \ldots$

Приложение В **Образец оформления титульного листа**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева

(национальный исследовательский университет)»

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ АВТОРЕГРЕССИИ И СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

курсовая работа по дисциплине **«Теория случайных процессов»**

Вариант № ___

Выполнил: Фамилия И.О., гр.XXX

Проверил: Храмов А.Г.

Оценка: ______________________

Самара 2011