МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королева
(национальный исследовательский университет)»

Теория случайных процессов. Индивидуальные задания

Электронные методические указания

Самара 2011

УДК 519.21

Составитель: **Храмов Александр Григорьевич**

Теория случайных процессов. Индивидуальные задания [Электронный ресурс]: электрон. метод. указания / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королёва (нац. исслед. ун-т); сост. А. Г. Храмов. – Электрон. текстовые дан. (0,17 Мбайт). – Самара, 2011. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Приводится 3 индивидуальных задания, в каждом – 25 вариантов. Темы задач: вероятностные распределения и моментные функции, процессы с независимыми приращениями, стационарные в широком смысле процессы и их корреляционные и спектральные характеристики, цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем, дифференциальные уравнения Колмогорова.

Индивидуальные домашние задания предназначены для подготовки бакалавров по направлению 010400.62 *«Прикладная математика и информатика»*, изучающих дисциплину *«Теория случайных процессов»* в 5 семестре.

Разработаны на кафедре технической кибернетики.

Индивидуальное задание №1

1. Найти двумерную плотность вероятности случайного процесса $\xi(t) = X\cos\omega t + Y\sin\omega t$, если случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, а ω – детерминированная величина.
2. Найти одномерную плотность вероятности случайного процесса $\xi(t) = X\sin\omega t$, если случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, а ω – детерминированная величина.
3. Найти одномерную плотность вероятности случайного процесса $\xi(t) = \sin(\omega t + \varphi)$, если случайная величина φ распределена равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, а ω – детерминированная величина.
4. Найти одномерную плотность вероятности случайного процесса $\xi(t) = \cos(\omega t + \varphi)$, если случайная величина φ распределена равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$, а ω – детерминированная величина.
5. Найти одномерное и двумерное распределения случайного процесса $\eta(t) = (-1)^{\pi(t)}$, где $\pi(t)$ – пуассоновский процесс с параметром $\lambda = 1$.
6. Найти двумерную плотность распределения $f_w(t, s, x, y)$ винеровского процесса $w(t)$.
7. Записать одномерный ряд распределения $p_\pi(t, k) = \Pr\{\pi(t) = k\}$ пуассоновского процесса $\pi(t)$.
8. Записать двумерный ряд распределения $p_\pi(t, s, k, m) = \Pr\{\pi(t) = k, \pi(s) = m\}$ пуассоновского процесса $\pi(t)$.
9. Найти моментные функции случайного процесса $\xi(t) = \alpha\cos(\omega t + \varphi)$, если случайные величины α и φ независимы и распределены равномерно на отрезках $[-A, A]$ и $[-\pi, \pi]$ соответственно, ω – детерминированная величина.
10. Найти моментные функции комплекснозначного случайного процесса $\xi(t) = Xe^{i\omega t} + Ye^{-i\omega t}$, если вещественные случайные величины X и Y независимы и имеют нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией, ω – детерминированная величина.
11. Найти моментные функции комплекснозначного случайного процесса $\xi(t) = X\exp(-i(\omega t + \varphi))$, если вещественные случайные величины X и φ независимы, X имеет нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией, а φ – равномерное распределение на отрезке $[-\pi, \pi]$, ω – детерминированная величина.
12. Найти моментные функции случайного процесса $\xi(t) = \alpha\cos(\omega t + \varphi)$, если случайная величина α распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m дисперсией σ^2, а случайная величина φ распределена равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. Случайные величины α и φ независимы, ω – детерминированная величина.

13. Является ли стационарным в узком смысле случайный процесс $\eta(t)=\exp(\xi(t))$, если $\xi(t)$ – стационарный в узком смысле случайный процесс?

14. Найти моментные функции случайного процесса $\xi(t)=\alpha\cos(\omega t)$, если случайные величины α и ω независимы и распределены равномерно на отрезках $[-A, A]$ и $[-\Omega,\Omega]$ соответственно.

15. Найти корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t)=\sin(\omega t+\varphi)$, если случайные величины ω и φ независимы и распределены равномерно соответственно на отрезках $[-\Omega,\Omega]$ и $[-\pi,\pi]$.

16. Найти моментные функции случайного процесса $\xi(t)=(-1)^{\pi(t)}$, если $\pi(t)$ – пуассоновский процесс.

17. Найти корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t)=w(t+T)-w(t)$, если $w(t)$ – винеровский процесс с параметром σ^2, T – детерминированная величина.

18. Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс $\xi(t)=\pi(t+T)-\pi(t)$, если $\pi(t)$ – пуассоновский процесс, T – детерминированная величина?

19. Найти корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t)=w(t+T)+w(t)$, если $w(t)$ – винеровский процесс, T – детерминированная величина.

20. Найти дисперсию случайного процесса $\eta(t)=\sin w(t)$, если $w(t)$ – винеровский процесс.

21. Найти дисперсию случайного процесса $\eta(t)=\cos w(t)$, если $w(t)$ – винеровский процесс.

22. Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс $\zeta(t)=\xi(t)-\eta(t)$, если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – независимые стационарные в широком смысле случайные процессы?

23. Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс $\xi(t)=\sin\omega t$, если случайная величина ω распределена равномерно на отрезке $[-1,1]$?

24. Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс $\xi(t)=\pi(t+T)-\pi(t)$, если $\pi(t)$ – пуассоновский процесс, T – детерминированная величина?

25. Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R_\xi(\tau)=\sigma^2\exp(-\alpha|\tau|)$. Найти корреляционную функцию случайного процесса $\eta(t)=\xi(t+T)-\xi(t)$.

26. Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R_\xi(\tau)=\sigma^2\exp(-\alpha\tau^2)$. Найти корреляционную функцию случайного процесса $\eta(t)=\xi(t+T)+\xi(t)$, T – детерминированная величина.

27. Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс $\zeta(t)=\xi(t)\cdot\eta(t)$, если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – независимые стационарные в широком смысле случайные процессы?

Индивидуальное задание №2

1. Доказать, пользуясь определением: $S_\xi(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_\xi(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau$ и свойствами корреляционной функции, что спектральная плотность мощности $S_\xi(\omega)$ стационарного в широком смысле <u>комплекснозначного</u> случайного процесса $\xi(t)$ является вещественной функцией.

2. Доказать, что случайный процесс $\xi(t)=\sum\limits_{k=1}^{N} X_k\cos(\omega_k t)+\sum\limits_{k=1}^{N} Y_k\sin(\omega_k t)$ является стационарным в широком смысле, если $X_1, X_2,\ldots X_N, Y_1, Y_2,\ldots Y_N$ – некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, ω_k – детерминированные величины.

3. Найти спектральную плотность мощности $S_\zeta(\omega)$ случайного процесса $\zeta(t)=\xi(t)-\eta(t)$, если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – стационарные в широком смысле независимые случайные процессы, имеющие спектральные плотности мощности $S_\xi(\omega)$ и $S_\eta(\omega)$.

4. Доказать, что случайные процессы $\eta(t)=\xi(t)-\xi(t+T)$ и $\zeta(t)=\xi(t)+\xi(t+T)$ являются стационарными в широком смысле случайными процессами, если $\xi(t)$ – стационарный в широком смысле случайный процесс.

5. Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность мощности $S_\xi(\omega)$. Найти спектральные плотности мощности $S_\eta(\omega)$ и $S_\zeta(\omega)$ стационарных в широком смысле случайных процессов $\eta(t)=\xi(t)-\xi(t+T)$ и $\zeta(t)=\xi(t)+\xi(t+T)$.

6. Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R_\xi(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$. Найти спектральную плотность мощности $S_\eta(\omega)$ стационарного в широком смысле случайного процесса $\eta(t)=\xi(t)-\xi(t+T)$.

7. Доказать, что случайный процесс $\xi(t)=\pi(t+T)-\pi(t),\ T>0$, где $\pi(t)$ – пуассоновский процесс, удовлетворяет свойствам стационарного в широком смысле случайного процесса при $t>0$.

8. Доказать, что случайный процесс $\xi(t)=w(t+T)-w(t),\ T>0$, где $w(t)$ – винеровский процесс, удовлетворяет свойствам стационарного в широком смысле случайного процесса при $t>0$.

9. Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R_\xi(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\cos(\beta\tau)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность мощности $S_\xi(\omega)$ этого случайного процесса.

10. Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R_\xi(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}(1-\beta|\tau|)$. Найти спектральную плотность мощности $S_\xi(\omega)$ этого случайного процесса. При каких значениях параметров (α,β) корреляционная функция $R_\xi(\tau)$ имеет смысл?

11. Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R_\xi(\tau)=\begin{cases}\sigma^2\left(1-\dfrac{|\tau|}{T}\right), |\tau|\le T;\\ 0, |\tau|>T\end{cases}$. Найти и изобразить графически спектральную плотность мощности $S_\xi(\omega)$ этого случайного процесса.

12. Доказать четырьмя способами: (1) непосредственно, на основе корреляционной зависимости сечений случайного процесса, (2) с использованием свойств корреляционной функции, (3) с использованием свойств спектральной плотности мощности, (4) с использованием свойств непрерывности в среднем квадратичном, что не существует стационарного в широком смысле случайного процесса $\xi(t)$ с корреляционной функцией $R_\xi(\tau)=\begin{cases}1, |\tau|\le 1;\\ 0, |\tau|>1\end{cases}$.

13. Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность мощности $S_\xi(\omega)=\begin{cases}1, |\omega|\le\Omega;\\ 0, |\omega|>\Omega\end{cases}$. Найти и изобразить графически корреляционную функцию $R_\xi(\tau)$ этого случайного процесса.

14. Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность мощности $S_\xi(\omega)=\begin{cases}1, |\omega|\in[\Omega_1;\Omega_2];\\ 0, \textit{иначе}\end{cases}$ $(0<\Omega_1<\Omega_2)$. Найти корреляционную функцию $R_\xi(\tau)$ этого случайного процесса.

15. Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность мощности $S_\xi(\omega)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|\omega|}{\Omega}\right), |\omega|\le\Omega\\ 0, |\omega|>\Omega\end{cases}$. Найти и изобразить графически корреляционную функцию $R_\xi(\tau)$ этого случайного процесса.

16. Является ли эргодическим случайный процесс $\xi(t)=X\cos(\omega t)+Y\sin(\omega t)$, если случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону с нулевым средним и единичной дисперсией, а ω – детерминированная величина?

17. Стационарный в широком смысле эргодический случайный процесс $\xi(t)$ и случайная величина X являются независимыми. Доказать, что случайный процесс $\eta(t)=\xi(t)+X$ не является эргодическим.

18. Является ли эргодическим случайный процесс $\xi(t)=\sin(\omega t+\varphi)$, если случайная величина φ распределена равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$, а ω – детерминированная величина?

19. Является ли эргодическим случайный процесс $\xi(t)=X\sin(\omega t)$, если случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-1,1]$, а ω – детерминированная величина?

20. Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность мощности $S_\xi(\omega) = \begin{cases} \dfrac{|\omega|}{\Omega}, |\omega| \le \Omega; \\ 0, |\omega| > \Omega \end{cases}$. Найти и изобразить графически корреляционную функцию $R_\xi(\tau)$ этого случайного процесса.

21. Доказать, что процесс $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$ является эргодическим, если случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ эргодические и независимые.

22. Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}$. Найти спектральную плотность мощности этого случайного процесса.

23. Доказать, что случайный процесс $\xi(t) = (-1)^{\pi(t)}$, где $\pi(t)$ – пуассоновский процесс, является непрерывным в среднем квадратичном в любой точке $t > 0$.

24. Доказать, что комплекнозначный процесс $\xi(t) = e^{iw(t)}$, где $w(t)$ – винеровский процесс, является непрерывным в среднем квадратичном в любой точке $t > 0$.

25. Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность мощности $S_\xi(\omega) = e^{-\omega^2/\Omega^2}$. Найти и изобразить графически корреляционную функцию этого случайного процесса.

26. Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R_\xi(\tau) = \dfrac{\sin\tau}{\tau}$. Найти и изобразить графически спектральную плотность мощности $S_\xi(\omega)$ этого случайного процесса.

27. Доказать, что случайный процесс $\xi(t) = \pi(t) \cdot w(t)$, где $\pi(t)$ и $w(t)$ – независимые пуассоновский и винеровский процессы, является непрерывным в среднем квадратичном в любой точке $t > 0$.

Индивидуальное задание №3

1. Найти вероятностное распределение времени ожидания *третьего* события в простейшем потоке событий.

2. Однородная цепь Маркова с непрерывным временем имеет три состояния. Интенсивности перехода из первого состояния во второе и из второго состояния в третье равны λ. В начальный момент времени цепь Маркова находится в первом состоянии. Найти и изобразить графически вероятность нахождения цепи Маркова во втором состоянии в произвольный момент времени t.

3. В систему с двумя линиями обслуживания поступают заявки с интенсивностью λ. Среднее время обслуживания заявки на каждой линии равно T. Если при поступлении заявки все линии обслуживания заняты, то заявка теряется. Если при поступлении заявки обе линии обслуживания свободны, то заявка поступает на первую линию. Найти вероятности занятости каждой линии в стационарном состоянии.

4. В систему с двумя линиями обслуживания поступают заявки с интенсивностью λ. Среднее время обслуживания заявки на первой линии равно T. Среднее время обслуживания заявки на второй линии равно $2T$. Если при поступлении заявки все линии обслуживания заняты, то заявка теряется. Если при поступлении заявки обе линии обслуживания свободны, то заявка поступает на первую линию. Найти вероятность потери заявки в стационарном состоянии.

5. В систему с одной линией обслуживания поступают заявки с интенсивностью λ. Среднее время обслуживания заявки равно T. Если при поступлении заявки линия обслуживания занята, то заявка теряется. Найти соотношение между параметрами λ и T, при котором вероятность занятости линии обслуживания в стационарном состоянии равна p.

6. Двое играют в “орлянку” до полного банкротства одного из них. Начальные капиталы игроков равны, соответственно, одной и трем ставкам. Найти вероятности банкротства каждого из игроков, среднюю продолжительность игры и вероятность завершения игры до пятого бросания монеты включительно.

7. В начальный момент времени частица находится в начале координат. В каждый целочисленный момент времени частица смещается на Δ вправо или влево с одинаковой вероятностью независимо от предыдущих перемещений. Пусть $\xi(n)$ - координата частицы в момент времени $n = 0, 1, 2, \ldots$. Найти корреляционную функцию случайного процесса $\xi(n)$.

8. Частица совершает двумерное случайное блуждание на плоскости по точкам с целочисленными координатами. В начальный момент времени частица находится в начале координат. В каждый целочисленный момент времени частица перемещается на единицу вдоль одной из координатных осей в одну из четырех соседних точек с одинаковой вероятностью независимо от предыдущих перемещений. Пусть $(\xi(n), \eta(n))$ - координаты частицы на плоскости в момент времени $n = 0, 1, 2, \ldots$. Найти корреляционную функцию случайного процесса $\xi(n)$.

9. Частица совершает трехмерное случайное блуждание в пространстве по точкам с целочисленными координатами. В начальный момент времени частица находится в начале координат. В каждый целочисленный момент времени частица перемещается на единицу вдоль одной из координатных осей в одну из шести соседних точек с одинаковой вероятностью независимо от предыдущих перемещений. Пусть $(\xi(n), \eta(n), \zeta(n))$ – пространственные координаты частицы в пространстве в момент времени $n = 0, 1, 2, \ldots$. Найти корреляционную функцию случайного процесса $\xi(n)$.

10. В случайные моменты времени, определяемые простейшим потоком событий интенсивности λ, частица перемещается из точки с координатой 0 в точку с координатой 1 или из точки с координатой 1 в точку с координатой 0. В начальный момент времени частица находится в точке с координатой 0. Пусть $\xi(t)$ - координата частицы в момент времени t. Найти моментные функции случайного процесса $\xi(t)$.

11. В случайные моменты времени, определяемые простейшим потоком событий интенсивности λ, частица перемещается из точки с координатой 0 в точки с координатами ± 1 с одинаковыми вероятностями или из точек с координатами ± 1 в точку с координатой 0. В начальный момент времени частица находится в точке с координатой 0. Пусть $\xi(t)$ - координата частицы в момент времени t. Найти корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t)$.

12. Частица перемещается по сторонам равнобедренного прямоугольного треугольника, переходя из одной вершины в другую по часовой стрелке в случайные моменты времени с интенсивностями, обратно пропорциональными длине стороны, вдоль которой происходит перемещение. Найти предельные вероятности нахождения частицы в каждой вершине треугольника.

13. В случайные моменты времени, определяемые простейшим потоком событий интенсивности λ, частица перемещается по сторонам треугольника, переходя из одной вершины в другую по часовой стрелке. Найти вероятности нахождения частицы в каждой вершине треугольника в произвольный момент времени t.

14. В случайные моменты времени, определяемые простейшим потоком событий интенсивности λ, частица перемещается из центра единичного квадрата в его вершины с одинаковыми вероятностями и из вершин квадрата в его центр. Найти математическое ожидание расстояния от частицы до центра квадрата в момент времени t при условии, что в начальный момент времени частица находилась в центре квадрата.

15. В случайные моменты времени, определяемые простейшим потоком событий, частица перемещается на плоскости по узлам решетки 3×3 на один шаг в горизонтальном и вертикальном направлениях с одинаковой вероятностью всех возможных направлений. Найти предельные вероятности положений частицы. Найти математическое ожидание расстояния от частицы до центральной точки решетки в бесконечной момент времени.

16. Частица совершает случайное блуждание на плоскости, перемещаясь по узлам решетки 3×3 на один шаг в горизонтальном, вертикальном или диагональном направлениях с одинаковой вероятностью всех возможных направлений. Найти предельные вероятности положений частицы. Найти математическое ожидание расстояния от частицы до центральной точки решетки в бесконечной момент времени.

17. В случайные моменты времени, определяемые простейшим потоком событий интенсивности λ, частица совершает случайное блуждание в пространстве, перемещаясь по узлам решетки $3 \times 3 \times 3$ на один шаг во всех возможных направлениях с одинаковой вероятностью. Найти предельные вероятности положений частицы. Найти математическое ожидание расстояния от частицы до центральной точки решетки в бесконечной момент времени.

18. Частица совершает случайное блуждание на плоскости, перемещаясь по узлам решетки 3×3 на один шаг во горизонтальном, вертикальном или диагональном направлениях с равной вероятностью. Угловые положения являются поглощающими. В начальный момент времени частица находится в центре. Найти вероятность поглощения частицы до шестого шага включительно и математическое ожидание числа шагов до поглощения.

19. Сколько мест должно быть на автомобильной парковке, чтобы вероятность её полного заполнения была не больше $0,1$. Автомобили прибывают на парковку с интенсивностью *10 штук* в час, среднее время парковки равно *12 минутам*.

20. Двое играют в одну из азартных игр до полного банкротства одного из них. В каждой партии один из игроков выигрывает один рубль у другого с определенной вероятностью. Каковы должны быть вероятности выигрыша партии каждым из игроков, чтобы вероятности банкротства каждого из игроков были одинаковы, если начальный капитал первого игрока составляет один рубль, а начальный капитал второго игрока составляет два рубля?

21. Двое играют в одну из азартных игр до полного банкротства одного из них. В каждой партии один из игроков выигрывает один рубль у другого с определенной вероятностью. Вероятность выигрыша каждой партии первым игроком в три раза выше вероятности выигрыша партии вторым игроком. Вероятность банкротства которого из игроков выше, если начальный капитал второго игрока в три раза выше начального капитала первого игрока?

22. Два дуэлянта поочередно стреляют друг в друга. Вероятность попадания каждым дуэлянтом в соперника при каждом выстреле равна p. Дуэль продолжается до первого попадания. При какой вероятности p средняя продолжительность дуэли будет равна четырем выстрелам?

23. Два дуэлянта поочередно стреляют друг в друга. Дуэль продолжается до первого попадания. Первый дуэлянт поражает соперника с вероятностью $0{,}5$, второй дуэлянт поражает соперника с вероятностью $0{,}25$. Найти вероятность завершения дуэли до n-го выстрела включительно.

24. Найти вероятностное распределение времени ожидания n-го события в простейшем потоке событий с интенсивностью λ.