МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П.КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Производная и дифференциал функции двух переменных.

Исследование функции двух переменных.

Электронные методические указания

САМАРА
2011

УДК 517.55

Составитель: **Пчелкина Юлия Жиганшевна**

Производная и дифференциал функции двух переменных. Исследование функции двух переменных. [Электронный ресурс] : электрон. метод. указания / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); сост. Ю. Ж. Пчелкина. – Электрон. текстовые дан. (0,34 Мбайт). – Самара, 2011. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Настоящие методические указания содержат образцы решений типовых задач, и в кратком изложении теоретические сведения, необходимые для выполнения упражнений и индивидуальных заданий, по теме «Функции двух переменных». Разобраны задачи на нахождение области определения, частных переменных, производных по направлению, общего исследования функций двух переменных.

Методические указания предназначены для подготовки бакалавров направления 010400.62 «Прикладная математика и информатика» факультете информатики, изучающих дисциплину «Математический анализ» в 1 и 2 семестрах.

Разработано на кафедре прикладной математики.

Оглавление

1. Область определения функции двух переменных

Задача 1.1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных: $z = \dfrac{x-y}{x+y^2-1}$.

Решение. Очевидно, аналитическое выражение, задающее данную функцию, имеет смысл тогда и только тогда, когда знаменатель дроби не равен нулю: $x+y^2-1 \neq 0$. Уравнение $x+y^2-1=0$ задаёт на координатной плоскости xOy параболу $y^2=-x+1$, вершина которой находится в точке $(1;0)$, ветви направлены влево, а осью симметрии является ось абсцисс. Таким образом, областью определения данной функции являются все точки координатной плоскости, кроме тех, что лежат на параболе $y^2=-x+1$.

2. Частные производные первого и второго порядка функции двух переменных

Задача 2.1. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных

$$z = \ln xy.$$

Решение. $z'_x = (\ln xy)'_x = \frac{1}{xy}\cdot(xy)'_x = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$; $z'_y = (\ln xy)'_y = \frac{1}{xy}\cdot(xy)'_y = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}$.

Задача 2.2. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных

$$z = x^4 y^5.$$

Решение. $z'_x = (x^4 y^5)'_x = y^5 \cdot (x^4)' = 4x^3 y^5$; $z'_y = (x^4 y^5)'_y = x^4 \cdot (y^5)' = 5x^4 y^4$.

Задача 2.3. Найти частные производные первого порядка функций двух переменных

$$z = x\,tg\,y.$$

Решение. $z'_x = (x\,tg\,y)'_x = tg\,y \cdot x' = tg\,y$; $z'_y = (x\,tg\,y)'_x = x \cdot (tg\,y)' = \frac{x}{\cos^2 y}$.

Задача 2.4. Найти все частные производные второго порядка функции двух переменных

$$z = \sin xy .$$

Решение. Сначала найдём частные производные первого порядка:

$z'_x = (\sin xy)'_x = y\cos xy$; $z'_y = (\sin xy)'_y = x\cos xy$.

Теперь находим производные второго порядка по переменным x и y:

$z''_{xx} = (y\cos xy)'_x = -y^2 \sin xy$; $z''_{yy} = (x\cos xy)'_y = -x^2 \sin xy$.

Находим смешанные производные:

$z''_{xy} = z''_{yx} = (-y^2 \sin xy)'_y = (-y^2)' \cdot \sin xy + (-y^2)\cdot(\sin xy)'_y = -2y\sin xy - xy^2 \cos xy$.

3. Производная по направлению. Градиент.

Задача 3.1. Найти производную функции $z=\sqrt[3]{xy}$ в точке $M_0(8;-1)$ по направлению вектора $\vec{l}(-1;-1)$.

Решение. Производная функции $z=f(x;y)$ по направлению вектора $\vec{l}$ равна:

$\frac{\partial z}{\partial l}=z'_x\cos\alpha+z'_y\cos\beta$, где $\cos\alpha, \cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Находим частные производные данной функции: $z'_x=\frac{y}{3\sqrt[3]{(xy)^2}}$; $z'_y=\frac{x}{3\sqrt[3]{(xy)^2}}$.

Находим значения частных производных в точке $M_0(8;-1)$:

$$z'_x\Big|_{M_0}=-\frac{1}{12};\ z'_y\Big|_{M_0}=\frac{2}{3}.$$

Находим направляющие косинусы вектора $\vec{l}$:

$$\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно получим: $\frac{\partial z}{\partial l}=-\frac{1}{12}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{12\sqrt{2}}-\frac{2}{3\sqrt{2}}=-\frac{7}{12\sqrt{2}}$.

Задача 3.2 Найти градиент функции $z=x^2+2y^2-xy$ в точке $M_0(1;-1)$.

Решение. Градиент функции двух переменных $z=f(x;y)$ равен $grad z=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$.

Найдём частные производные: $z'_x=2x-y;\ z'_y=4y-x$.

Найдём значения частных производных в точке $M_0(1;-1)$:

$$z'_x\Big|_{M_0}=3;\ z'_y\Big|_{M_0}=-5.$$

Тогда градиент равен $grad z=3\vec{i}-5\vec{j}$.

4. Исследование функции двух переменных

Задача 4.1. Исследовать функцию $z = x^2 - y^2 + 2xy$ на экстремумы.

Решение. Областью определения данной функции является вся числовая плоскость xOy. Найдём частные производные данной функции:

$z'_x = 2x + 2y;\ z'_y = -2y + 2x$.

Производные первого порядка непрерывны на всей области определения функции.

Для того, чтобы найти стационарные критические точки функции, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0, \\ 2x - 2y = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Получили одну стационарную критическую точку $M(0;0)$. Для того, чтобы выяснить, является ли она точкой экстремума, найдём производные второго порядка.

$z''_{xx} = 2;\ z''_{yy} = -2;\ z''_{xy} = 2$.

Найдём дискриминант:

$D = AC - B^2$, где $A = z''_{xx|(0;\,0)}$, $B = z''_{xy|(0;\,0)}$, $C = z''_{yy|(0;\,0)}$.

В данном случае, $A = 2,\ B = 2,\ C = -2;\ D = -4 - 4 = -8 < 0$.

В данной точке экстремума нет.

Задача 4.2. Найти экстремум функции $z = x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 4$.

Решение. Областью определения данной функции является вся числовая плоскость xOy. Выразим из уравнения связи $x^2 + y^2 = 5$ переменную y:

$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$.

Далее рассмотрим оба возможных случая.

1) $y=-\sqrt{4-x^2}$.

Подставляя это выражение в исходную функцию, получим функцию одной переменной $z=x-\sqrt{4-x^2}$. Исследуем эту функцию на наибольшее и наименьшее значение при $x\in[-2;2]$.

$$z'=1+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}+x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Очевидно, $z'\neq 0$ при любых значениях переменной $x\in[-2;2]$, и поэтому наибольшее и наименьшее значение достигается в концах отрезка. $z(-2)=-2;\ z(2)=2$.

2) $y=\sqrt{4-x^2}$.

Подставляя это выражение в исходную функцию, получим функцию одной переменной $z=x+\sqrt{4-x^2}$.

Исследуем эту функцию на наибольшее и наименьшее значение при $x\in[-2;2]$.

$$z'=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}},\ z'=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}.$$

Получили две стационарные критические точки. Найдём значения функции в этих точках и на концах отрезка.

$z(-2)=-2,\ z(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0,\ z(\sqrt{2})=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2},\ z(2)=2$.

Таким образом, $\min\limits_{x^2+y^2=4} z=z(-2)=-2,\ \max\limits_{x^2+y^2=4} z=z(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$.

Задание 4.3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=xy-x-y$ в области $0\le x\le 1, 1\le y\le 2$.

Решение. Прежде всего, заметим, что данная функция непрерывна в рассматриваемой области. Найдём стационарные критические точки функции, принадлежащие указанной области.

Частные производные первого порядка $z'_x = y - 1, z'_y = x - 1$ непрерывны в данной области.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} y - 1 = 0, \\ x - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Получили одну стационарную критическую точку $M(1;1)$. Найдём значение функции в этой точке: $z_{|M} = -1$. Далее, последовательно найдём значения функции на всех границах области.

1) $x = 0, 1 \le y \le 2$. Функция принимает вид $z = -y$. Тогда $z_{|y=1} = -1, z_{|y=2} = -2$.

2) $x = 1, 1 \le y \le 2$. Функция принимает вид $z = -1$. Тогда $z_{|y=1} = -1, z_{|y=2} = -1$.

3) $y = 1, 0 \le x \le 1$. Функция принимает вид $z = -1$. Тогда $z_{|x=0} = -1, z_{|x=1} = -1$.

4) $y = 2, 0 \le x \le 1$. Функция принимает вид $z = x - 2$. Тогда $z_{|x=0} = -2, z_{|x=1} = -1$.

Получили: $\min z = z(0;2), \max z = z(1;1) = z(0;1) = z(1;2)$

5. Нахождение приближенного значения с помощью дифференциала

Задача 5.1. Найти с помощью полного дифференциала приближённое значение выражения $2{,}02^3 \cdot 0{,}98^2$

Решение. Воспользуемся приближённым равенством

$\Delta f(x;\, y) \approx df(x;\, y)$.

Отсюда $f(x; y) \approx f(x_0;\, y_0) + df(x;\, y)$.

Рассмотрим функцию

$z = x^3 \cdot y^2$.

Найдём полный дифференциал этой функции:

$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y = 3x^2 y^2 \Delta x + 2x^3 y \Delta y$.

Примем $x_0 = 2, y_0 = 1, \Delta x = 0{,}2, \Delta y = -0{,}2$.

Тогда получим:

$2{,}02^3 \cdot 0{,}98^2 \approx 2^3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 \cdot 0{,}02 - 2 \cdot 2^3 \cdot 1 \cdot 0{,}02 = 8 - 0{,}08 = 7{,}92$.

(Вычисление с помощью микрокалькулятора даёт результат 7,916).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А. Лекции по математическому анализу //М.: Дрофа, 2004. – 640 с.

2. Ильин В.А., Садовничий В.А. Математический анализ. Часть 1 //М.: Издательство Проспект, 2007. – 660 с.

3. Ильин В.А., Садовничий В.А. Математический анализ. Часть 2 //М.: Издательство Проспект, 2004. – 357 с.

4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 1 //М.: Физматлит, 2005. – 645 с.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 2 //М.: Физматлит, 2006. – 464 с.

6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа // М.: Наука, 1985. – 384с.

7. Райков Д.А. Одномерный математический анализ //М.: Высшая школа, 1982. –416 с.

8. Райков Д.А. Многомерный математический анализ //М.: Высшая школа, 1989. –272 с.