МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Надёжность изделий и систем ракетно-космической техники

Электронный вариант заданий
для самостоятельной работы студентов

С А М А Р А

2010

УДК 629.1.011.1 (075)

Составители: **Куренков Владимир Иванович,**
Волоцуев Владимир Валерьевич

Приведены методические рекомендации студентам для самостоятельного изучения материала.

Изложен материал для самостоятельной работы студентов в соответствии с рабочей программой дисциплины «Надёжность изделий и систем ракетно-космической техники». Приведены некоторые сведения из теории множеств и теории вероятностей.

Материал для самостоятельной работы предназначен для студентов специальности 160400.68 «Ракетные комплексы и космонавтика» направления подготовки по магистерской программе «Проектирование и конструирование космических мониторинговых и транспортных систем».

Разработан на кафедре летательных аппаратов СГАУ.

Ил. 24. Табл. 1. Библиогр.: 4 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Успешное освоение материала по дисциплине «Надёжность изделий и систем ракетно-космической техники» невозможно без знаний основ теории множеств и теории вероятностей.

Теорию вероятностей студенты специальности 160400.68 «Ракетные комплексы и космонавтика» направления подготовки по магистерской программе «Проектирование и конструирование космических мониторинговых и транспортных систем» изучают на втором курсе в рамках математической подготовки. Однако, как показывает опыт преподавания, лишь не многие студенты помнят основные положения теории вероятности в той степени, которая необходима для решения практических задач, тем более задач надёжности.

Цель настоящего пособия – помочь студентам вспомнить основные положения теории вероятностей и освоить их для решения практических задач.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Успешное освоение материала по дисциплине «Надёжность изделий и систем ракетно-космической техники» невозможно без знаний основ теории множеств и теории вероятностей.

Если студент всё помнит, то повторять теорию вероятности необязательно. Если не помнит, то лучше всего сначала обратиться к своим старым конспектам. Некоторые студенты сохраняют конспекты лекций по теории вероятности, которые они писали при изучении данной дисциплины на младших курсах.

Если конспектов не сохранилось, то необходимо приступить к изучению материала данного пособия.

Рекомендуется сначала попытаться вспомнить материал каждого раздела и подраздела, который студент взялся повторить.

Если материал вспомнить не удается, то рекомендуется первый раз прочитать текст раздела или подраздела без вникания в сущность формул. Необходимо постараться понять суть этого материала.

При втором чтении попытаться вникнуть в формулы.

Если понять формулы затруднительно, то рекомендуется обратиться к примерам и внимательно сопоставить их с используемыми формулами. То есть можно учиться на примерах.

После того, как будет понят материал, необходимо попытаться изложить его на бумаге самостоятельно. Можно сначала подсматривать в пособие. Постепенно необходимо запомнить весь материал и изложить его на бумаге без пособия.

Категорически не рекомендуется заучивать материал и формулы, если они непонятны. В этом случае лучше ещё раз внимательно вдуматься в материал. Можно обратиться к товарищам по группе, которые успешно освоили материал. Можно обратиться и к преподавателю.

Для передовых студентов рекомендуется дополнительно проработать литературу по теории вероятностей.

После посещения лекций по дисциплине «Надёжность изделий и систем ракетно-космической техники» рекомендуется каждый раз повторять материал по соответствующей темы по конспекту.

Если что-то непонятно, то рекомендуется воспользоваться электронным конспектом лекций или проконсультироваться с преподавателем.

К каждой лабораторной работе необходимо готовиться, прочитав теоретическую часть соответствующей лабораторной работы. Необходимо также проверить свои знания по контрольным вопросам. Приведённым в конце каждой лабораторной работы.

При оформлении отчётов о выполнении лабораторных работ необходимо посмотреть оформление в электронном варианте контрольно-проверочных материалов по данной дисциплине.

Допускается отчёты о выполнении лабораторных работ оформлять без привлечения компьютерной техники, но при условии аккуратного выполнения.

Преподаватель ставит отметку об отчёте о выполнении лабораторной работы при условии правильности полученных результатов, оформлении отчёта и ответе студента на контрольные вопросы.

При подготовке к экзаменам рекомендуется кроме конспекта студента воспользоваться электронным конспектом лекций. Вопросы, которые входят в экзаменационные билеты, приведены в электронном варианте контрольно-проверочных материалов по данной дисциплине.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Теория множеств занимается исследованием свойств множеств, образованных из элементов, которые обладают определенными свойствами и находятся между собой или элементами других множеств в некоторых отношениях.

Примеры. Множество студентов в институте - конечное множество; множество натуральных чисел 1,2,3,4,... - бесконечное множество; множество точек на отрезке [0, 1] - бесконечное множество.

Если нужно указать, что какой-нибудь объект "a" есть один из элементов множества A, то употребляют так называемый знак включения и пишут $a \in A$.

Если объект "a" не встречается среди элементов множества A, то пишут $a \,\bar{\in}\, A$ или $a \notin A$.

Равными называют одинаковые множества, то есть множества, состоящие из одних и тех же элементов и записывают $A = B$.

Во множестве может не быть ни одного элемента, и тогда такое множество называется пустым м записывается значком $\varnothing$.

Универсальным множеством называют такое множество, которому заведомо принадлежат все элементы множества.

Пусть рассматривается два множества A и B. Если каждый элемент множества A входит также в множество B, то говорят, что A есть часть или подмножество множества B.

Это обстоятельство записывается с помощью знака включения $\subset$ и пишут $A \subset B$.

Аналитически множество можно задать явно, например так: $A = \{1,\ 2, 3, 4\}$ - множество положительных чисел от одного до четырех. Можно множество задавать и описанием условий принадлежности рассматриваемому множеству, например: $A = \{x : \text{\textit{целое и}}\ 1 \le x \le 4\}$. Двоеточие читается как "такое, что".

Графически множества изображаются в виде диаграмм Венна, представляющих собой прямоугольник с буквой V у левого верхнего угла. Буква V обозначает универсальное множество. Например, свойство $A \subset B$ на диаграмме Венна изображается так, как это представлено на рис. 1.1.

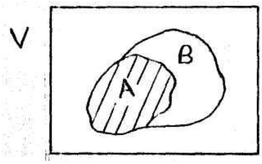

Рис. 1.1. Графическая иллюстрация принадлежности множества A множеству B

Объединением двух множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cup B$, которое состоит из всех элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A или B. Графически это можно представить с помощью заштрихованной области на рис. 1.2.

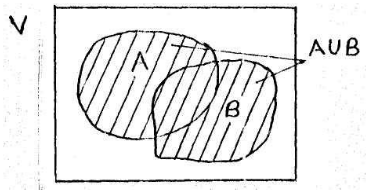

Рис. 1.2. Графическая иллюстрация операции объединения

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{3, 4, 5\}$, тогда $C_1 = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Пересечением двух множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cap B$, состоящие из всех элементов, которые входят и в множество A и в множество B. Графически это можно представить заштрихованной областью на рис. 1.3.

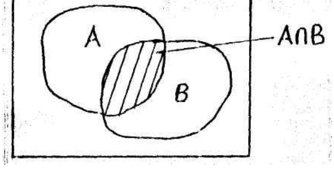

Рис. 1.3. Графическая иллюстрация операции пересечения

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{3, 4, 5\}$, тогда $C_2 = A \cap B = \{3, 4\}$.

Два множества *A* и *B* называют непересекающимися (или несовместными), если у них нет общих элементов. Условие несовместности (или ортогональности) множеств *A* и *B* символически обозначается $A \cap B = \varnothing$.

Графическая иллюстрация непересекающиеся множеств представлена на рис. 1.4.

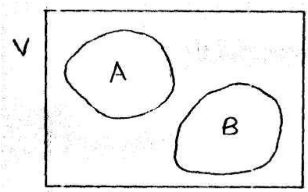

Рис. 1.4. Графическая иллюстрация непересекающихся множеств

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{4, 5\}$, тогда $C_3 = A \cap B = \varnothing$.

Дополнением множества A в универсальном множестве V называется множество всех тех точек $x \in V$, которые не принадлежат множеству A, то есть множество, обладающее свойством $x \notin A$.

Дополнение множества обозначается $\overline{A}$ или A'.

Графическая иллюстрация дополнения множества A до универсального множества V представлена на рис. 1.5 заштрихованной областью.

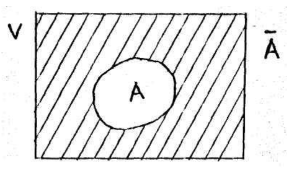

Рис. 1.5. Графическая иллюстрация дополнения множества *A* до универсального множества *V*

Пример. Пусть $A = \{2, 3, 4\}$ и $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, тогда $C_4 = A' = \{1, 5, 6\}$.

Операция взятия дополнения обладает следующими свойствами:

$A \cap A' = \varnothing$;

$A \cup A' = V$

$$A^{//} = A, \text{ или } \left(A^{/}\right)^{/} = A;$$

$$\varnothing^{/} = V;$$

$$V^{/} = \varnothing.$$

Не вдаваясь в сложные определения мощности и меры множества, поясним, что мощность множества часто отождествляется с количеством элементов множества, а мера множества - с массой, объемом, площадью и т. п. Рассмотрим эти понятия на примерах.

Пример 1. Пусть имеется аудитория, в которой 25 мест. В аудиторию входит группа и занимает 20 мест. Тогда мощность универсального множества $n(V)$ равна 25, а мощность множества занятых мест $n(A)$ равна 20.

Пример 2. Площадь поражения при взрыве одной бомбы равна 50 м2 , а площадь, по которой осуществляется бомбометание - 500 м2. Тогда мера универсального множества $m(V)$ равна 500, а мера множества при взрыве одной бомбы $m(A)$ равна 50.

2. ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Под случайным событием понимают факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Частотой события называется отношение числа его появлений "k" к числу всех произведенных опытов N, то есть:

$$h = \frac{k}{N}.$$

Устойчивость частот при большом числе опытов дает основание считать, что с каждым событием связано некоторое число - вероятность этого события, около которого стремится стабилизироваться частота. Вероятность события А обозначается $P(A)$. То есть, приближенно за вероятность события А можно принять его частоту при большом количестве опытов

$P(A) \approx h.$

В некоторых частных случаях элементарные события равновозможны, тогда вероятность события А можно определить через меру и мощность множества, то есть

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(V)} \text{ или } P(A) = \frac{m(A)}{m(V)}.$$

Пример 1. Игральные кости имеют 6 граней: 1,2,3,4,5,6. Тогда вероятность выпадения четных граней $A = \{2, 4, 6\}$ будет

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(V)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2.1. Свойства случайных событий

Несовместность и совместность случайных событий

Два случайных события называются несовместными, если не существует никакого элементарного события, реализаций которого означает выполнение каждого из данных событий; "n" событий называются несовместными в совокупности, если любые два из них несовместны. В противном случае события называются совместными. Графическая иллюстрация несовместных и совместных событий приведены на рис. 2.1.

Для несовместных событий справедливы следующие соотношения:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(\varnothing) = \varnothing; \qquad (2.1)$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2); \qquad (2.2)$$

где $P(\cdot)$ - символ вероятности.

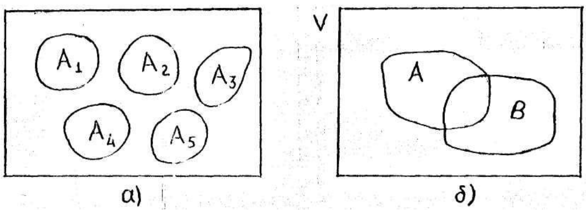

Рис. 2.1. Иллюстрация несовместных (*а*) и совместных (*б*) событий

То есть вероятность логического произведения несовместных событий равна нулю, а вероятность логического сложения несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ несовместны и их объединение совпадает со всем пространством событий *V*, то говорят, что они образуют полную группу событий. Такие события называются гипотезами. Это положение иллюстрируется рисунком 2.2.

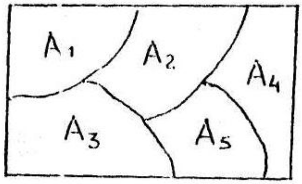

Рис. 2.2. Иллюстрация полной группы событий

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу событий, то сумма вероятностей этих событий равна единице, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) = 1.$$

Если событие $A^{/}$ - есть дополнение события A до полной группы, то вероятности этих событий дополняют друг друга до единицы, то есть

$$P\left(A^{/}\right) = 1 - P\left(A\right) \text{ и } P\left(A\right) = 1 - P\left(A^{/}\right).$$

Пример 1. Бросается монета один раз. Событие *A* (выпадение "орла") и событие $A^{/}$ (выпадение "решки") являются несовместными. Вероятность выпадения "орла" и "решки" одинаковы и равны

$$P\left(A\right) = P\left(A^{/}\right) = 0,5.$$

Событие выпадения "орла" и "решки" при одном бросании будет невозможным событием и, следовательно, вероятность его равна нулю.

Подсчитаем вероятность выпадения "орла" или "решки" при одном бросании монеты. Обозначим это событие через *C*.

$C = A \cup A'$.

$P(C) = P(A \cup A') = P(A) + P(A') = 0{,}5 + 0{,}5 = 1.$

Действительно, событие выпадения "орла" или "решки" образует полную группу событий, поэтому его вероятность равна единице.

Пример 2. Бросается игральная кость с шестью гранями: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Определить вероятность выпадения четной грани.

Вероятность выпадения любой грани равна 1/6. Введем события A_2, A_4, A_6, которые означают выпадение граней с номерами соответственно 2, 4 и 6.

Введем событие C - выпадение четных граней и рассчитаем вероятность этого события

$C = A_2 \cup A_4 \cup A_6$;

$$P(C) = P(A_2 \cup A_4 \cup A_6) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Для совместных событий справедливо следующее соотношение

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \qquad (2.3)$$

Это свойство может быть получено из следующих рассуждений. Очевидно, что вероятность $P(A) + P(B)$ включает в себя вероятность $P(A \cap B)$ дважды (см. рис. А.6 *б*). Поэтому вероятность $P(A \cap B)$ необходимо вычесть один раз из суммы вероятностей $P(A) + P(B)$.

Для того, чтобы проиллюстрировать примером выражение (2.3), необходимо рассмотреть зависимость и независимость случайных событий.

2.2. Независимость и зависимость случайных событий

События A и B называются независимыми тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (2.4)$$

Иногда говорят, что два события независимы, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

Существует опасность смешения понятий несовместности и независимости событий. Источник этой ошибки кроется в слишком вольном употреблении выражения "не имеет никакого отношения одно к другому". Покажем на примере, что независимые события могут быть совместными (если их вероятности больше нуля).

Пример. Два стрелка независимо друг от друга стреляют в цель по одному разу. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,8; вторым - 0,7. Какова вероятность поражения цели?

Пусть A - случайное событие - попадание в цель первым стрелком; B - вторым. Эти события независимы (стрелки не мешают друг другу), но они и совместны, так как попадание в цель одним стрелком не исключает возможность попадания в ту же цель другим стрелком. Обозначим буквой С событие поражения цели (первым стрелком или вторым стрелком или обоими стрелками). Для расчета воспользуемся формулами (А.3) и (А.4):

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=0{,}8+0{,}7-0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}94.$$

2.3. Условная вероятность

Покажем, что условная вероятность события A при условии, что произошло событие B, определяется формулой:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \quad \textit{если} \quad P(B)\neq 0. \qquad (2.5)$$

Представим события A и B на диаграмме Венна (рис. 2.3 *а*) и выделим из нее приведенное пространство $B=V^*$ (рис. 2.3 *б*).

Рис. 2.3. Выделение приведенного пространства событий

Определим эту вероятность через меры множеств в приведенном пространстве событий следующим образом:

$$P\left(A|B\right)=P\left(A^{*}\right)=\frac{m\left(A^{*}\right)}{m\left(V^{*}\right)}. \qquad (2.6)$$

В качестве меры множества будем рассматривать площади фигур на рисунках. Мера множества A^{*} есть площадь заштрихованной на диаграмме Венна фигуры A^{*}, то есть $m\left(A^{*}\right)=F_{A}^{*}$. Мера множества *B* (приведенного пространства событий) есть площадь фигуры *B*, то есть $m\left(V^{*}\right)=F_{B}^{*}$. Мера универсального множества *V* есть площадь диаграммы Венна, то есть $m\left(V\right)=F_{V}$.

Подставим меры множеств *A* и *B* в формулу (2.6):

$$P\left(A|B\right)=\frac{m\left(A^{*}\right)}{m\left(V^{*}\right)}=\frac{F_{A}^{*}}{F_{B}^{*}}.$$

Поделим и числитель, и знаменатель этого выражения на меру универсального множества.

$$P\left(A|B\right)=\frac{F_{A}^{*}/F_{V}}{F_{B}^{*}/F_{V}}.$$

Учитывая, что в универсальном множестве

$$\frac{F_{A}^{*}}{F_{V}}=P\left(A\cap B\right) \text{ и } \frac{F_{B}^{*}}{F_{V}}=P\left(B\right),$$

окончательно получаем искомую зависимость (2.5).

Из этой формулы можно получить выражения раскрытия вероятности пересечения событий:

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(B\right)\cdot P\left(A|B\right). \qquad (2.7)$$

Аналогично можно получить:

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B|A\right). \qquad (2.8)$$

Если рассматривать три события *A, B* и *C*, то можно получить следующее выражение;

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B).$$

В частном случае, если события *А, В* и *С* независимы, то есть, $P(B|A)=P(B)$ и $P(C|A\cap B)=P(C)$, приходим к следующему выражению: $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$.

Пример 1. Метеорная частица попадает в пилотируемый космический аппарат с вероятностью 0,001, а в обитаемый модуль того же космического - с вероятностью 0,0001. Определить вероятность попадания метеорной частицы в обитаемый модуль, если она попала в космический аппарат, но неизвестно в какое место именно.

Для решения задачи введем следующие события: событие *В* - попадание метеорной частицы в космический аппарат и событие *А* - попадание метеорной частицы обитаемый модуль. Поскольку событие *А* принадлежит событию *В,* то есть $A\in B$, то $A\cap B=A$ (см. рис. 4.1), то приходим к следующему результату:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}-\frac{0,0001}{0,001}=0,1.$$

Пример 2. В урне находится 10 шаров: 5 белых и 5 черных. Шары перемешиваются и вынимаются случайным образом. Определить вероятность того, что вторым окажется черный шар, при условии, что первым был вынут белый шар.

Решение. Введем события: *А* - появление белого шара; *В* - появление черного шара. Поскольку первым был первый шар, то перед второй выемкой в урне осталось 4 белых шара и 5 черных (всего 9 шаров). Решать будем с использованием мощности множеств:

$$P(B|A)=\frac{m(B)}{m(V)}=\frac{5}{9}.$$

Пример 3. В условиях примера 2 определить вероятность того, что первым будет вынут белый шар, а вторым - черный.

Решение. Сначала определим вероятность того, что первым окажется белый шар:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(V)}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

Далее, введем событие С, означающее появление сначала события A, а затем события B: $C = A \cap B$. Воспользуемся формулой (4.8):

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18}.$$

3 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Ограничимся техническим определением случайной величины.

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

Случайные величины подразделяются на дискретные и непрерывные.

3.1. Дискретные случайные величины

Приведем пример дискретной случайной величины.

Бросают три монеты. При этом возможны следующие события:

A - не выпадает ни одного "орла";

B - выпадает один "орел";

C - выпадает два "орла";

D - выпадает три "орла".

Вероятность выпадения "орла" при бросании одной монеты составляет 0,5. Вероятности же появления событий A, B, C, и D будут какими-то другими. Если провести опыты по многократному бросанию трех монет, то можно получить частоты появления этих событий *h(A), h (B), h(C) и h (D),* которые приближенно принимают за вероятности появления соответствующих событий.

В этом примере случайной величиной *x* является количество выпавших "орлов". Дискретную случайную величину обычно представляют в виде ряда распределения:

X	0	1	2	3
P_i	P_0	P_1	P_2	P_3

или в виде так называемого многоугольника распределения, как это показано на рисунке 3.1. На этом рисунке по оси абсцисс откладывается случайная величина *x*, а по оси ординат соответствующие вероятности P_i .

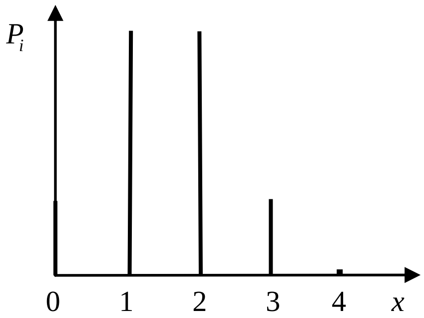

Рис. 3.1. Многоугольник распределения дискретной случайной величины

Математическое ожидание и дисперсия данной дискретной случайной величины определяются по следующим формулам:

$$m_x = \sum_{i=0}^{3} x_i \cdot P_i; \qquad (3.1)$$

$$D_x^2 = \sum_{i=0}^{3} \left(x_i - m_x\right)^2 \cdot P_i. \qquad (3.2)$$

Напомним, что математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины, а дисперсия - разброс относительно среднего.

Для аналитического представления или аппроксимации дискретных случайных величин используют так называемые законы распределения случайных величин. Из большого числа таких законов рассмотрим для примера лишь один.

3.2. Биномиальный закон распределения

В теории вероятностей доказывается, что этот закон справедлив для схемы независимых испытаний. Он определяется следующим выражением:

$$P_n(x) = C_n^x \cdot p^x (1-p)^{(n-x)}, \tag{3.3}$$

где n - максимальное значение случайной величины;

x - текущее значение случайной величины;

$P_n(x)$ - вероятность выпадения случайной величины x из n возможных;

C_n^x - число сочетаний из n по x, которое определяется следующей формулой:

$$C_n^x = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!}. \tag{3.4}$$

p - вероятность появления элементарного события.

Покажем процедуру расчета вероятностей по этому закону на примере с бросанием трех монет (см. выше). Для этого примера n=3; x = 0; 1; 2 и 3; p= 0,5. Тогда по формулам (3.3) и (3.4) имеем

$$P_3(0) = C_3^0 \cdot p^0 (1-p)^{(3-0)} = \frac{3!}{0! \cdot (3-0)!} \cdot 0,5^0 \cdot (1-0,5)^{3-0} = 0,125;$$

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot p^1 (1-p)^{(3-1)} = \frac{3!}{1! \cdot (3-1)!} \cdot 0,5^1 \cdot (1-0,5)^{3-1} = 0,375;$$

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot p^2 (1-p)^{(3-2)} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} \cdot 0,5^2 \cdot (1-0,5)^{3-2} = 0,375;$$

$$P_3(3) = C_3^3 \cdot p^3 (1-p)^{(3-3)} = \frac{3!}{3! \cdot (3-3)!} \cdot 0,5^3 \cdot (1-0,5)^{3-3} = 0,125.$$

Поскольку отдельные события (выпадения ни одного, одного, двух и трех «орлов») несовместны, причем, события образуют полную группу событий, то сумма вероятностей этих событий должна быть равна единице:

$$\sum_{x=0}^{3} P_3(x) = 0,125 + 0,375 + 0,375 + 0,125 = 1.$$

График плотности вероятности представлен на рис.3.2.

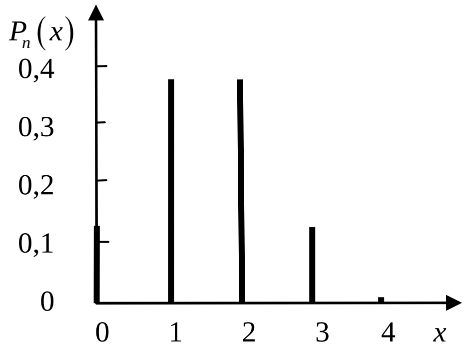

Рис. 3.2. График распределения вероятности для примера трехкратного бросания монеты

Подсчитаем математическое ожидание и дисперсию:

$$m_x = \sum_{i=0}^{3} x_i \cdot P_i = 0 \cdot 0{,}125 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}375 + 3 \cdot 0{,}125 = 1{,}5;$$

$$D_x^2 = \sum_{i=0}^{3} \left(x_i - m_x\right)^2 \cdot P_i = \left(0 - 1{,}5\right)^2 \cdot 0{,}125 + \left(1 - 1{,}5\right)^2 \cdot 0{,}375 +$$

$$+\left(2 - 1{,}5\right)^2 \cdot 0{,}275 + \left(3 - 1{,}5\right)^2 \cdot 0{,}125 = 0{,}75.$$

Заметим, что математическое ожидание в данном случае получилось нереализуемым значением случайной величины.

3.3. Распределение Пуассона

Распределение Пуассона имеет следующий вид

$$P(x) = \frac{m^x}{x!} \cdot e^{-m}, \qquad (3.5)$$

где m - математическое ожидание (параметр распределения).

На рис. 3.3 приведен график закона Пуассона для параметра m = 3. Наибольшее значение вероятностей «группируется» вблизи математического ожидания. С увеличением значения случайной величины x ее вероятность уменьшается. Например, при x=12 вероятность равна 0,0001, то есть $P(12)=0{,}0001$.

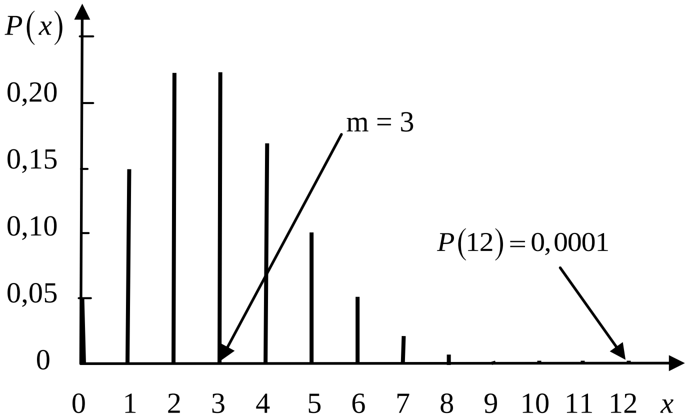

Рис. 3.31. График закона Пуассона для параметра m=3

На практике этот закон можно использовать, например, для определения вероятности занятости линий при телефонных переговорах. На рис. 3.4 схематично изображен процесс (развертка во времени) занятости линий связи. Количество тонких горизонтальных линий соответствует количеству имеющихся линий связи. Утолщенные горизонтальные отрезки схематично отображают занятость тех или иных линий связи по времени.

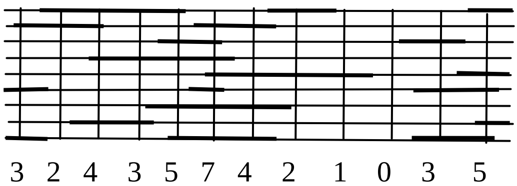

Рис. 3.4. Схема, иллюстрирующая случайный
характер занятости линий связи

Анализ схемы показывает, что в процессе изменения времени (см. различные сечения процесса) количество занятых каналов связи меняется случайным образом. Это количество подчиняется закону Пуассона.

Если математическое ожидание в законе Пуассона меньше единицы, то характер распределения вероятностей меняется, и наибольшее значение вероятности располагается между нулем и единицей. Заметим, что математическое ожидание в данном случае является нереализуемой на практике случайной величиной. Оно лишь показывает, что в районе математического ожидания «группируются» наибольшие значении вероятностей, то есть в районе значений случайной величины, равной нулю и единице.

На рис. 3.5 приведен график закона Пуассона для параметра $m = 0{,}5$. С увеличением значения случайной величины x ее вероятность уменьшается в большей степени, чем в случае, когда параметр m больше единицы. Например, при $x = 6$ вероятность равна 0,0002, то есть $P(6) = 0{,}0002$.

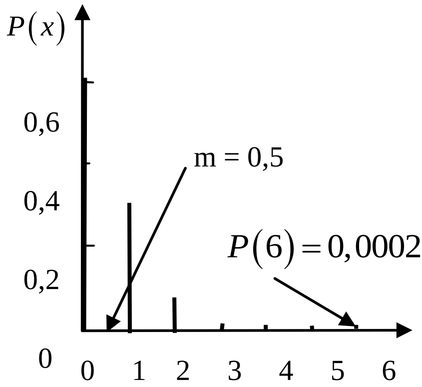

Рис. 3.5. График закона Пуассона для параметра m = 0,5

Этот закон можно использовать, например, для определения вероятности попадания или непопадания метеорных частиц в космический аппарат. Вероятность непопадания метеорной частицы в космический аппарат отыщем с помощью выражения (4.13), полагая $x = 0$

$$P(0) = \frac{m^0}{0!} e^{-m} = e^{-m}.$$

А вероятность попадания одной, двух, трех и т.д. частиц найдем как дополнение вероятности непопадания до единицы:

$$P(1, 2, 3...) = 1 - P(0) = 1 - e^{-m}.$$

3.4. Непрерывные случайные величины

Примером случайной величины может быть наработка до отказа пружин при их испытании. Наиболее полно непрерывная случайная величина характеризуется функцией распределения или функцией плотности распределения.

Функция распределения $F(x)$ показывает вероятность того, что случайная величина X будет меньше, чем наперед заданное конкретное значение x, что записывается следующим образом:

$$F(x) = P(X < x), \tag{3.6}$$

где $P(\cdot)$ - символ вероятности.

Функция плотности распределения случайной величины определяется как производная от функции распределения:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F^{/}(x). \tag{3.7}$$

Схематично графики различных законов распределения представлены на рис. 3.6, *а*, а графики плотностей распределения - на рис. 3.6, *б*.

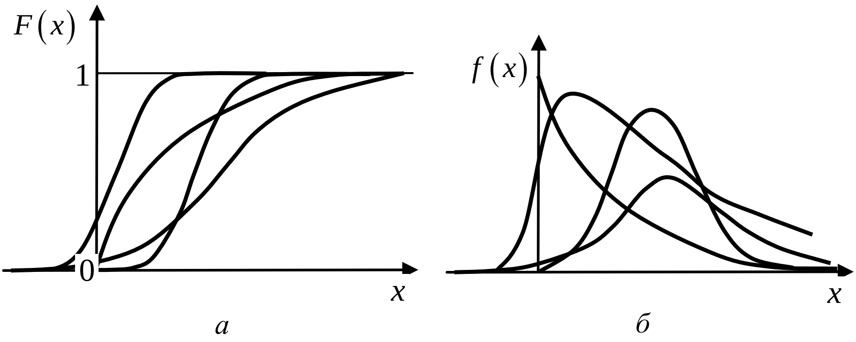

Рис. 3.6. Графики различных законов распределения

Функция распределения случайной величины (интегральная функция) выражается через ее плотность следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx .$$

На рис. 3.7 представлена графическая интерпретация функциональной связи между функцией распределения и функцией плотности распределения случайной величины.

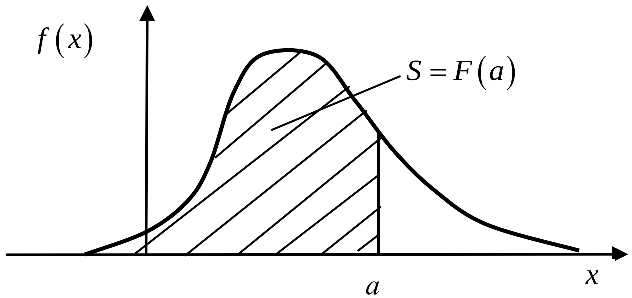

Рис. 3.7. Интерпретация функции распределения через площадь под кривой плотности распределения

Функция распределения численно равна площади под функцией плотности на интервале изменения случайной величины от $-\infty$ до a.

Условие нормировки (вероятность попадания случайной величины на интервале от $-\infty$ до $+\infty$) записывается следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx = 1.$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал иллюстрируется рис. 3.8. На этом рисунке в верхней части изображен график плотности вероятности, а на нижней - график функции распределения случайной величины.

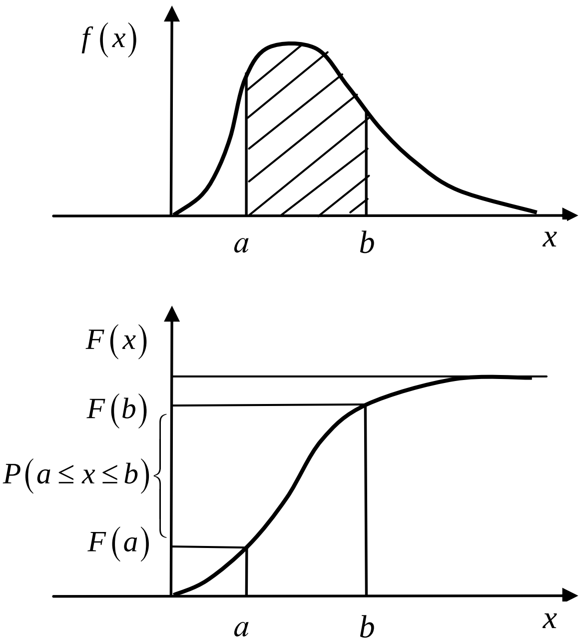

Рис. 3.8. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал определяется с помощью следующих зависимостей:

$$P(a \le x \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx =$$

$$= F(b) - F(a). \qquad (3.8)$$

Следствие. Вероятность попадания случайной величины в точку ($x = a = b$) равна нулю.

Менее полно случайная величина характеризуется математическим ожиданием и дисперсией, формулы для нахождения которых выглядят следующим образом:

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx; \qquad (3.9)$$

$$D_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2\, f(x)\,dx. \qquad (3.10)$$

Аналогично определяются и многомерные случайные величины. Приведем лишь некоторые формулы для двумерных случайных величин, x и y, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Функция распределения:

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y).$$

Функция плотности:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Связь между функцией плотности распределения и функцией распределения следующая:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dxdy. \qquad (3.11)$$

Если ввести условные плотности распределения $f(x|y)$ и $f(y|x)$, то можно записать

$$f(x,y) = f(x)\, f(y|x)$$

или

$$f(x,y) = f(y)\, f(x|y).$$

Для независимых случайных величин будет справедливо следующее выражение:

$$f(x,y) = f(x)\, f(y),$$

где $f(x)$ - плотность распределения случайной величины *x*, а $f(y)$ - плотность распределения случайной величины *y*.

Рассмотрим некоторые конкретные законы распределения непрерывных случайных величин.

3.5. Некоторые законы распределения

Равномерный закон распределения

Этот закон характеризуется равномерной плотностью распределения на заданном интервале:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & при\ a \le x \le b; \\ 0 \quad при\ x < a\ \ и\ \ x > b, \end{cases} \tag{3.12}$$

где *a* и *b* - границы рассматриваемого интервала.

Функция распределения определяется следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\ x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a} & при\ a \le x \le b; \\ 1 & при\ \ x > b. \end{cases} \tag{3.13}$$

График этих зависимостей приведен на рис. 3.9.

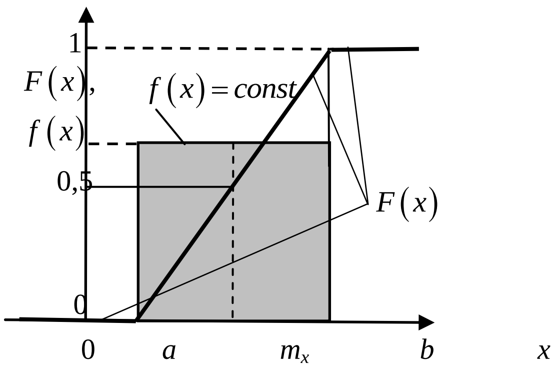

Рис. 3.9. Иллюстрация равномерного закона распределения

Математическое ожидание и дисперсия определяются следующим образом:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{b-a} f(x) dx = \frac{b-a}{12}. \qquad (3.14)$$

$$D_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{b-a}{12}. \qquad (3.15)$$

Нормальный закон распределения

Функция плотности распределения случайной величины *x*:

$$f(x) = \frac{1}{D_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - m_x}{D_x} \right) \right). \qquad (3.16)$$

Здесь m_x - математическое ожидание случайной величины;

D_x - среднеквадратическое отклонение случайной величины, которое связано с дисперсией D_x^2 следующим соотношением:

$$D_x = \sqrt{D_x^2}.$$

Нормальный закон распределения случайной величины:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx = \frac{1}{D_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - m_x}{D_x} \right)^2 \right) dx, \qquad (3.17)$$

или $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - m_x}{D_x} \right)^2 \right) dx,$ (3.18)

где *z* - нормированная случайная величина. Здесь нормировка осуществляется следующим образом:

$$z = \frac{x - m_x}{D_x}. \qquad (3.19)$$

График нормального закона распределения и его плотности представлен на рис. 3.10.

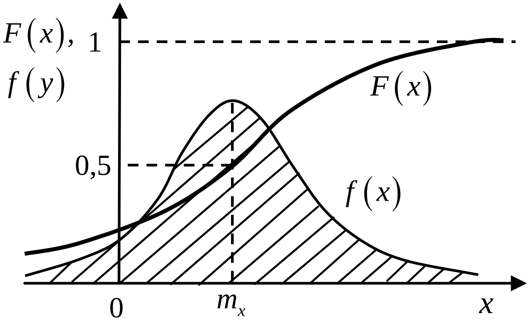

Рис. 3.10. Примерный график функции нормального закона распределения случайной величины и ее плотности

Экспоненциальный закон распределения

Экспоненциальный закон распределения определяется следующими зависимостями:

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}; \tag{3.20}$$

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda \cdot t}, \tag{3.21}$$

где λ - параметр распределения.

Примерный график экспоненциального закона распределения и его плотности представлен на рис. 4. 18.

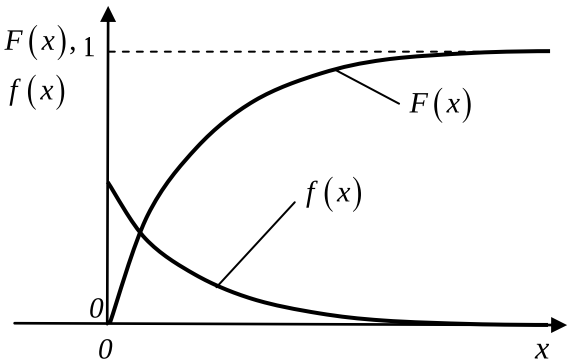

Рис. 4.18. Примерный вид графиков функции экспоненциального закона распределения случайной величины и ее плотности

Распределение Вейбула

Это распределение характеризуется следующими функциями:

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\lambda \cdot x^a\right); \quad (3.22)$$

$$f(x) = \lambda a x^{a-1} \exp\left(-\lambda \cdot x^a\right), \quad (3.23)$$

где λ и a параметры распределения. Графики этих функций приведены на рис. 3.11.

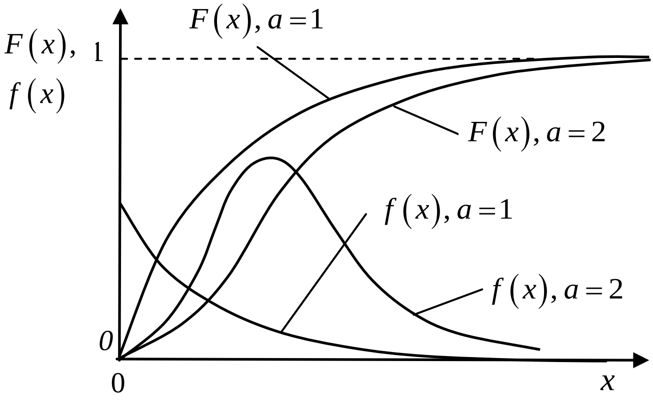

Рис. 3.11. Примерный вид графиков функции плотности распределения закона Вейбула

Следует отметить, что экспоненциальное распределение является частным случаем распределения Вейбула при a = 1.

Некоторые распределения случайных величин

Существуют и другие распределения случайных величин. Некоторые из них обсуждаются при выполнении лабораторных работ в рамках данной дисциплины. Это распределения Пирсона, Смирнова, Стьюдента, Фишера и др.

Из приведенного списка необычной является фамилия (или псевдоним) «Стьюдент» (студент). Настоящее имя ученого, жившего в Англии и публиковавшего свои научные труды под псевдонимом

«Стьюдент», было Госсет. Он начинал свою трудовую деятельность в булочной. Хозяин булочной, чтобы получить побольше прибыли, проводил, как сейчас принято говорить, сбор и обработку статистических данных, касающихся продажи разных сортов выпекаемого хлеба, причем с учетом времени года, суток, праздников, рабочих дней, погоды и других факторов. К этой работе был привлечен способный молодой человек по фамилии Госсет. Хозяин решил послать его на обучение к Пирсону, ученому с мировым именем. В дальнейшем Госсет стал известным ученым, однако все права по научным публикациям принадлежали бывшему хозяину. Поэтому и появился псевдоним «Стьюдент».

3.6. Многомерные случайные величины

Аналогично определяются и многомерные случайные величины. Приведем лишь некоторые формулы для двумерных случайных величин, X и $У$, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Функция распределения:

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y).$$

Функция плотности:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \cdot \partial y}.$$

Связь функции распределения и функции плотности:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y) \cdot dx \cdot dy;$$

Если ввести условные плотности распределения $f(x|y)$ или $f(y|x)$, то можно записать

$$f(x,y) = f(x) \cdot f(y|x)$$

или

$$f(x,y) = f(y) \cdot f(x|y).$$

Для независимых случайных величин будет справедливо следующее выражение:

$$f(x,y) = f(x)\cdot,$$

где $f(x)$ - плотность распределения случайной величины *x*, а $f(y)$ - плотность распределения случайной величины *y*.

Рассмотрим некоторые конкретные законы распределения непрерывных случайных величин.

3.7. Математическое ожидание и дисперсия функции случайных величин

Пусть а - детерминированная (не случайная) величина, X и $У$ - случайные величины.

Введем следующие обозначения:

$M[\cdot]$ - операция математического ожидания (m_x - результат операции);

$D^2[\cdot]$- операция дисперсии (D_x^2 - результат операции).

Приведем формулы математического ожидания и дисперсии функции случайных величин без доказательства.

$$M[a\cdot X] = aM[X]; \qquad D^2[a\cdot X] = a^2\cdot D^2[X];$$

$$M[a+X] = a+M[X]; \qquad D^2[a+X] = D^2[X];$$

$$M[X+Y] = M[X]+M[Y]; \qquad D^2[X+Y] = D^2[X]+D^2[Y];$$

$$M[X-Y] = M[X]-M[Y]; \qquad D^2[X-Y] = D^2[X]+D^2[Y];$$

$$M\left[X^2\right] = \left(M[X]\right)^2 + D^2[X]; \tag{3.24}$$

Если X и Y - независимые случайные величины, то

$$M[X\cdot Y] = M[X]\cdot M[Y].$$

Более сложные зависимости при изучении материала настоящего учебного пособия не понадобятся.

Покажем справедливость формулы (3.24).

Пример 1. Проведено 3 опыта, получены следующие результаты (размерность в данном случае не имеет значения): 8, 12, 10. Найдем математическое ожидание и дисперсию этих значений:

$$M[X]=m_x=\frac{8+12+10}{3}=12;$$

$$D^2[X]=D_x^2=\frac{(8-10)^2+(12-10)^2+(10-10)^2}{3}=2,67.$$

Возведем значение каждого результата в квадрат, получим: 64, 144, 100.

Найдем математическое ожидание от этих значений:

$$M\left[X^2\right]=m_x=\frac{64+144+100}{3}=\frac{308}{3}=102,67.$$

Учитывая, что $\left(M[X]\right)^2=10^2=100$, приходим к выводу, что формула (3.24) справедлива.

Пример 2. На одной из картин 19 века, которая называется «Устный счет» изображен класс сельской школы. На доске написано мелом следующее выражение:

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}=?.$$

Попытаемся решить данную задачу с помощью формулы (4.32):

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}=\frac{1}{73}\cdot\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{5}=$$

$$=\frac{1}{73}\cdot M\left[X^2\right]=\frac{1}{73}\left[\left(M[X]\right)^2+D_x^2[X]\right].$$

Учитывая, что $M[X]=10;$

$$D_x^2[X]=\frac{(10-12)^2+(11-12)^2+(12-12)^2+(13-12)^2+(14-12)^2}{5}=2,$$

получаем

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}=\frac{1}{73}\left[12^2+2\right]=2.$$

4. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Случайная функция - это функция, принимающая в результате опыта конкретные виды, которые нельзя заранее предугадать. Эти конкретные виды называются ее *реализациями*. Их совокупность образует семейство реализаций. При каждом конкретном значении аргумента случайная функция превращается в случайную величину в обычном понимании. Ее называют сечением случайной функции.

Характеристиками случайных функций, в отличие от характеристик случайных величин, являются не числа, а функции.

Случайную функцию, аргументом которой является время, называют еще случайным процессом. На рис. 4.1 приведена схема для иллюстрации графиков случайной функции $x(t)$.

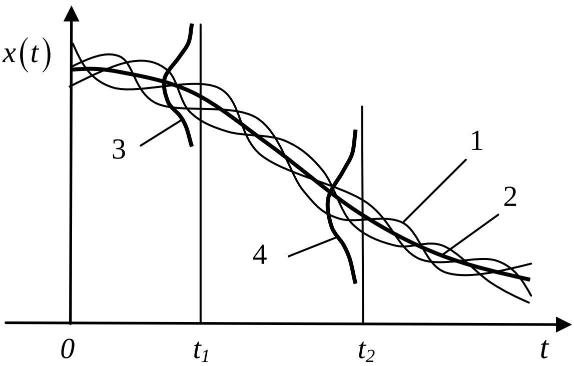

Рис. 4.1. Пример случайной функции

На рисунке введены следующие обозначения:

1 - реализация случайного процесса;

2 - математическое ожидание случайного процесса (является неслучайной функцией времени $m_x(t)$;

t_1 и t_2 - время сечений случайного процесса;

3 и 4 - плотности распределения в сечениях процесса $f\left[x(t_1)\right]$ и $f\left[x(t_2)\right]$ (графики повернуты), где $x(t_1)$ и $x(t_2)$ - случайные величины в сечениях процесса.

В сечениях процесса можно подсчитать дисперсии $D_x^2\left[x(t_1)\right]$ и $D_x^2\left[x(t_2)\right]$. В общем случае дисперсия есть неслучайная функция времени, то есть $D_x^2 = D_x^2(t)$.

В случайном процессе можно рассматривать не только функцию $x(t)$, но и ее производную $\dot{x}(t)$, то есть скорость изменения процесса, которая будет также случайной.

Можно также рассматривать совместную плотность распределения случайной функции и ее производной $f(x, \dot{x}; t)$, которая является функцией времени.

Стационарным процессом называется процесс, числовые характеристики которого не зависят от времени, то есть

$m_x(t) = \text{const}$;

$D_x^2(t) = \text{const}$;

$f(x, \dot{x}; t) = f(x, \dot{x})$.

Гауссовским процессом называется процесс, для которого распределение случайных величин в любом сечении процесса подчиняется нормальному закону распределения. Для такого процесса величины x и $\dot{x}$ в сечениях процесса независимы и, следовательно, можно записать:

$$f(x, \dot{x}) = f_1(x)\, f_2(\dot{x}),$$

где

$$f_1(x) = \frac{1}{D_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_x}{D_x}\right)^2};$$

$$f_2(\dot{x}) = \frac{1}{D_{\dot{x}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}-m_{\dot{x}}}{D_{\dot{x}}}\right)^2}.$$

Здесь $m_{\dot{x}}$ и $D_{\dot{x}}$ - математическое ожидание и дисперсия производной случайного процесса.

5. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Большая совокупность объектов или полный набор всех возможных значений, которые может принимать случайная величина, называют генеральной совокупностью.

Генеральная совокупность может быть бесконечной или конечной по числу элементов в ней (N). Из этой совокупности извлекаются n объектов, которые образуют выборку. Число n называется объемом выборки.

Выборка подвергается исследованию, по результатам которого требуется описать (оценить) всю генеральную совокупность или какие-нибудь ее свойства, характеристики.

Выборку объема n из бесконечной генеральной совокупности можно осуществить бесконечным числом способов. Ясно, что любая выборка при этом сама станет случайным событием.

Из случайности выборки вытекает, что все числовые характеристики выборки при неизменном объеме будут случайными величинами со своими распределениями.

Задачи математической статистики:

- оценка неизвестной функции распределения;
- оценка неизвестных параметров распределения;

- оценка доверительных интервалов;

- проверки статистических гипотез и др.

Методы обработки данных зависят от объема выборки. При малой выборке ($n < 30$) статистические данные обрабатываются в том виде, как они поступают. При большой выборке данные перед обработкой (для удобства работы) группируются. Для этого весь интервал изменения данных выборки разбивается на разряды (интервалы).

Для оценки неизвестной функции распределения выборку необходимо упорядочить в возрастающем порядке и получить так называемый вариационный ряд:

$$X_1 \le X_2 \le \ldots \le X_n .$$

Статистическую функцию распределения $\hat{F}(x) = P(X < x)$ находят следующим образом:

$$\bar{F}_i(x) = \begin{cases} 0 & при\ x < x_1; \\ \dfrac{i}{n} & при\ x_i < x \le x_{i+1}; \\ 1 & при\ \ x > x_n. \end{cases} \qquad (4.33)$$

Примерный вид функции распределения показан на рис. 5.1.

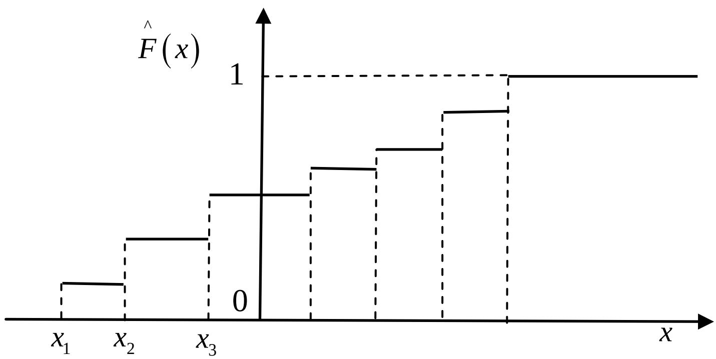

Рис. 5.10. Статистическая функция распределения

Если выборка разделена на разряды, в каждом из которых присутствует разное количество точек, то функция распределения внутри границ наименьшего и наибольшего значения случайной величины определяется следующем образом:

$$\hat{F}_s(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=s} \Delta n_i}{n},$$

где Δn_i - количество элементов выборки, попавших (при группировке) в i-й интервал;

s - номер интервала, для которого подсчитывается значение функции распределения.

Плотность функции распределения оценивается по следующей зависимости:

$$\hat{f}_i(x) = \frac{\Delta F_i(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F_{i+1}(x) - \Delta F_i(x)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Если выборка не разбивается на разряды, то

$$\hat{f}_i(x) = \frac{\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}}{\Delta x} = \frac{1}{n \cdot \Delta x}. \qquad (5.1)$$

Если выборка разбивается на разряды, то

$$\hat{f}_s(x) = \frac{\frac{\sum\limits_{i=1}^{s+1} \Delta n_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} \Delta n_i}{n}}{\Delta x} = \frac{\Delta n_s}{n \cdot \Delta x}, \qquad (5.2)$$

где Δn_s - количество элементов выборки, попавших (при группировке) в интервал с номером s;

Примерный вид статистической функции плотности распределения представлен на рис. 5.2.

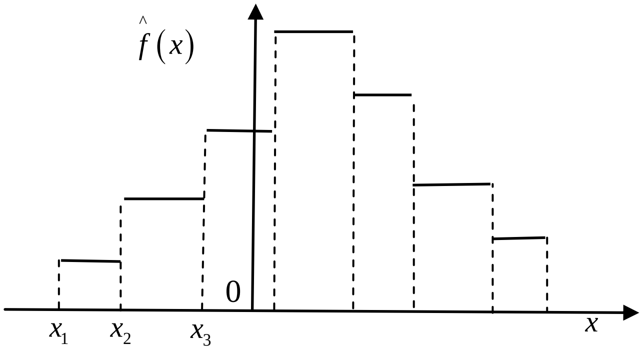

Рис. 5.2. Статистическая функция плотности распределения

Иногда экспериментальные данные представляют в виде гистограммы, которая по форме похожа на статистическую функцию плотности распределения, но по оси ординат откладывают либо частоту h_i, либо число наблюдений Δn_i, попавших в рассматриваемый интервал (при группировке).

Если выборка не сгруппирована по интервалам, то математическое ожидание и дисперсия оцениваются по следующим формулам:

$$\hat{m}_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \tag{5.3}$$

$$\hat{D}_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_x\right)^2}{n-1}. \tag{5.4}$$

Если выборка разделена на k интервалов, то математическое ожидание и дисперсия оцениваются так:

$$\hat{m}_x = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i \, h_i; \tag{5.5}$$

$$\hat{D}_x^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(\bar{x}_i - \hat{m}_x\right)^2 h_i. \tag{5.6}$$

где $\overline{x}_i$ - представитель i-го интервала (например, среднее значение случайной величины в интервале).

h_i - частота i-го интервала (отношение количества элементов выборки, попавших в рассматриваемый интервал, к общему объему выборки n);

6. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

Обозначим через θ любую статистическую характеристику (математическое ожидание, дисперсия и др.), которую определяют в результате обработки статистических данных.

Вследствие случайности результатов опытов возникает задача определения таких пределов, из которых ошибка оценки не выходила бы с заданной вероятностью.

Интервал, который с заданной вероятностью γ «накрывает» статистическую характеристику θ, называется *доверительным* интервалом для этой характеристики, соответствующим коэффициенту доверия γ. Величина $\alpha = 1 - \gamma$ называется *уровнем значимости* отклонения оценки. Концы доверительного интервала называются *доверительными границами*. Границы интервала, в свою очередь, являются случайными величинами.

Поскольку каждая характеристика θ является случайной, то она характеризуется также своим законом распределения и функцией плотности распределения. Иллюстрация доверительных интервалов приведена на рис. 6.1.

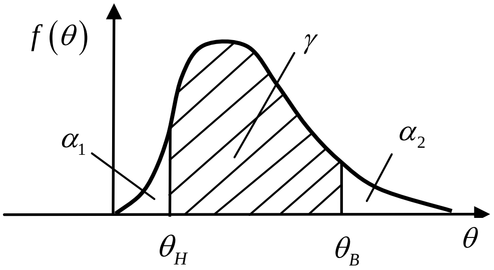

Рис. 6.1. Иллюстрация к понятию доверительного интервала

На этом рисунке введены следующие обозначения: θ_H и θ_B - соответственно нижняя и верхняя границы доверительного интервала; уровень значимости α определяется суммой:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 ,$$

где α_1 - вероятность попадания случайной величины θ в область левее нижней доверительной границы θ_H ;

α_2 - вероятность попадания случайной величины θ в область правее верхней доверительной границы θ_B .

Очевидно, что доверительная вероятность определяется площадью под кривой плотности

$$\gamma = \int_{\theta_H}^{\theta_B} f(\theta) d\theta. \tag{5.1}$$

Если известна плотность распределения $f(\theta)$, то с помощью этого уравнения и дополнительных условий (например, интервал симметричен относительно математического ожидания, или что $\alpha_1 = \alpha_2$), можно определить значение границ θ_H и θ_B .

Доверительные границы могут быть не только двухсторонними, как это только что было рассмотрено, но и односторонними, когда определяется какая-нибудь одна граница (только нижняя, или только верхняя, см. рис. 6.1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в пособии изложены вопросы основы теории вероятностей, знание которой необходимо для успешного освоения материала по дисциплине «Надёжность изделий и систем ракетно-космической техники».

В то же время много вопросов из-за ограниченности объема пособия осталось вне поля нашего зрения. Желающих более глубоко изучить вопросы, связанные с теорией вероятностей, можно отослать к литературе, приведенной в списке использованных источников.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. - М., Наука, 1969.

2. Кузнецов, А.А. Математическое обеспечение надежности летательных аппаратов / А. А. Кузнецов. - М. МАИ, 1982. -72с.

3. Надежность и эффективность в технике: справочник. В 10 т. / ред. совет: В. С. Авдуевский (предс.) и др. – М.: Машиностроение, 1988. Т. 3. Эффективность технических систем / под общ. ред. В. Ф. Уткина, Ю. В. Крючкова. – 328 с.

4. Справочник по сециальным функциям / пер. с англ.; под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. - М: Наука, 1979.