САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. КОРОЛЕВА

МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

САМАРА 1996

Составитель А А Деттярев

УДК 519 6

Методы интерполирования функций :
Метод указания / Самар гос аэрокосм ун-т ;
Сост А А Деттярев Самара, 1996 36 с

Предназначены для проведения практических занятий по численным методам и организации самостоятельной работы студентов, обучающихся по специальности 01 02 (прикладная математика)

Содержат краткие теоретические сведения и указания по методике решения задач интерполирования функций одной действительной переменной, а также упражнения для контроля знании студентов

Подготовлены на кафедре технической кибернетики

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета им С П Королева

Рецензент проф А Н Жданов

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

Задача интерполирования в общем виде ставится следующим образом:

дана функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$; известен класс функций $g(x;c_0,c_1,\dots,c_n)$, зависящих от $n+1$ параметров с областью определения $[\alpha,\beta]$, где $\alpha \le a < b \le \beta$; необходимо так выбрать параметры $c_0^*,c_1^*,\dots,c_n^*$, чтобы функция g совпадала с f в узлах интерполяции x_i, $i=\overline{0,n}$:

$$g(x_i;c_0^*,c_1^*,\dots,c_n^*)=f(x_i), \qquad i=\overline{0,n} \qquad (1)$$

Наиболее известна задача линейной интерполяции, когда интерполирующая функция $g(x;c_0,c_1,\dots,c_n)$ ищется в виде линейной комбинации

$$g(x;c_0,\dots,c_n)=\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i(x),$$

где $\varphi_i(x)$ фиксированные функции. Тогда условия интерполяции (1) имеют вид системы линейных уравнений относительно параметров c_i, $i=\overline{0,n}$:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi(x_j)=f(x_j), \qquad j=\overline{0,n}. \qquad (2)$$

Условия, при которых система уравнений (2) имеет решение, т.е. существует интерполяционный многочлен, дает следующая теорема [1]:

Теорема Для того, чтобы для любой функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a,b]$, и для любого набора $n+1$ узлов

$$x_0,x_1,\dots,x_n \ (x_i \in [a,b],\ x_i \ne x_j \ \text{при}\ i \ne j)$$

существовал обобщенный интерполяционный многочлен

$$g(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i(x),$$

необходимо и достаточно, чтобы система функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=\overline{0,n}}$ являлась системой Чебышева на $[a,b]$. При этом интерполяционный многочлен будет единственным.

1.Система Чебышева

Систему функций $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ называют системой Чебышева на отрезке $[a,b]$, если любой обобщенный многочлен по этой системе $g(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i(x)$, у которого хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля $\left(\sum_{i=0}^{n}|c_i|\neq 0\right)$, имеет на отрезке $[a,b]$ не более n нулей.

Упражнения для контроля

1. Доказать, что функции $1,x,x^2,\ldots,x^n$ образуют систему Чебышева на любом отрезке $[a,b]\in(-\infty,+\infty)$.

2. Доказать, что функции $1,\frac{1}{a_1+x},\frac{1}{a_2+x},\ldots,\frac{1}{a_n+x}$ образуют систему Чебышева при $x>0$, если $a_i>0$, $i=\overline{1,n}$.

3. Доказать, что функции $1,e^{a_1x},e^{a_2x},\ldots,e^{a_nx}$, где a_i - попарно различные действительные числа ($i=\overline{1,n}$) образуют систему Чебышева на любом отрезке $[a,b]\in(-\infty,+\infty)$.

4. Доказать, что функции $1,\frac{x}{R(x)},\frac{x^2}{R(x)},\ldots,\frac{x^n}{R(x)}$, где $R(x)$ - многочлен, образуют систему Чебышева на любом отрезке $[a,b]\in(-\infty,+\infty)$, на котором $R(x)$ не имеет корней.

5. Доказать, что система функций $I_0\left(\sqrt{\mu_i}\,x\right)$, $i=\overline{0,n}$, где μ_i - нули функции Бесселя первого рода нулевого порядка $I_0(x)$, образует систему Чебышева на любом отрезке $[a,b]\in(0,1)$.

6. Доказать, что система функций $1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\ldots,\sin nx,\cos nx$ образует периодическую систему Чебышева на отрезке $[0,2\pi]$

2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Если в качестве системы многочленов $\{\varphi_i(x)\}_{i=\overline{0,n}}$ взяты степенные функции $\varphi_i(x)=x^i$, то $g(x)$ есть алгебраический многочлен степени n. Условия интерполяции (2) в этом случае следующие:

$$\begin{aligned}
c_0+c_1x_0+c_2x_0^2+\ldots+c_nx_0^n&=f(x_0)\\
c_0+c_1x_1+c_2x_1^2+\ldots+c_nx_1^n&=f(x_1)\\
\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots&\quad\ldots\\
c_0+c_1x_n+c_2x_n^2+\ldots+c_nx_n^n&=f(x_n).
\end{aligned}\qquad(3)$$

Непосредственное решение системы (2) может быть связано с вычислительными трудностями. Интерполяционный многочлен Лагранжа степени n есть алгебраический многочлен степени n, построенный по системе узлов x_i, $i=\overline{0,n}$ при специальном способе построения функций $\varphi_i(x)$, здесь $\varphi_i(x)$ - алгебраические многочлены степени n, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\qquad \left(i,j=\overline{0,n}\right).$$

Такой способ задания $\varphi_i(x)$ позволяет легко решить систему уравнений (2):

$$c_i=f(x_i),\qquad i=\overline{0,n}.$$

Для того, чтобы построить функцию $\varphi_i(x)$, нужно найти алгебраический многочлен степени n, обращающийся в нуль в точках x_j, $j=\overline{0,n}$, $j\neq i$ и равный 1 в точке x_i:

$$\varphi_i(x)=A\,(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n).$$

Так как $\varphi_i(x_i)=1$, то

$$A=\frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)},$$

и окончательно :

$$\varphi_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

Упражнения для контроля

7. Пусть $x_0,x_1,\ldots,x_n$ - различные числа, $x_i\in(-\infty,+\infty)$, $i=\overline{0,n}$.
Построить многочлен $\ln^{(i)}(x)$ степени n, удовлетворяющий

условиям $\ln^{(i)}(x_j)=\delta_{ij}$, $i,j=\overline{0,n}$. Здесь $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ символ Кронекера. Доказать, что такой многочлен единствен.

8. Доказать, что многочлен $\ln^{(i)}(x)$ из задачи 7 может быть записан в виде $\ln^{(i)}(x)=\dfrac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$,
где $\omega_{n+1}(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$, $\quad \omega'_{n+1}(x_i)=\left.\dfrac{\partial\omega_{n+1}(x)}{\partial x}\right|_{x=x_i}$

9. Доказать тождество $\sum_{i=0}^{n}\ln^{(i)}(x)=1$.

10. Пусть даны $n+1$ пар действительных чисел: $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ и все x_i, $i=\overline{0,n}$ различны между собой. Построить многочлен $L_n(x)$ степени $\le n$, удовлетворяющий условиям $L_n(x_i)=y_i$, $i=\overline{0,n}$. Доказать, что этими условиями многочлен определяется однозначно.

11. Доказать, что интерполяционный многочлен Лагранжа может быть записан в виде

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

12. Показать, что интерполяционный многочлен Лагранжа не меняется при любой перестановке индексов узлов.

13. Доказать, что для случая равноотстоящих узлов $(x_{i+1}-x_i=const=h)$ интерполяционный многочлен Лагранжа может быть записан в виде

$$L_n(x)=L_n(x_0+t\,h)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)(-1)^{n-i}\frac{t\,(t-1)\ldots(t-n)}{(t-i)\,i!\,(n-i)!},$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

14. Доказать, что для фундаментальных полиномов $\ln^{(i)}(x)$ (см. задачи 7,8) справедливы следующие тождества :

$$\sum_{i=0}^{n} (x_i - x)^j \ln^{(i)}(x) = 0 \ , \quad j = \overline{1,n} \ .$$

15. Пусть в качестве узлов интерполяции x_i, $i = \overline{0,n}$ взяты нули полинома Чебышева $T_{n+1}(x) = \cos\left[(n+1)\arccos x\right]$. Доказать, что в этом случае фундаментальные полиномы $\ln^{(i)}(x)$ могут быть записаны в виде

$$\ln^{(i)}(x) = \frac{(-1)^i\sqrt{1-x_i^2}}{n+1}\,\frac{T_{n+1}(x)}{x-x_i} \ , \ i = \overline{0,n}.$$

16. Пусть в качестве узлов интерполяции x_i, $i = \overline{0,n}$ взяты нули полинома Чебышева 2-го рода $U_{n+1}(x) = \dfrac{\sin\left[(n+2)\arccos x\right]}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказать, что в этом случае фундаментальные полиномы $\ln^{(i)}(x)$ могут быть записаны в виде

$$\ln^{(i)}(x) = \frac{(-1)^i\left(1-x_i^2\right)}{n+2}\,\frac{U_{n+1}(x)}{x-x_i} \ , \qquad i = \overline{0,n}.$$

17. Пусть в качестве узлов интерполяции x_i, $i = \overline{0,n}$ взяты нули полинома $U_{n-1}(x)\left(1-x^2\right) = \sqrt{1-x^2}\,\sin\left(n\arccos x\right)$.Доказать, что в этом случае фундаментальные полиномы $\ln^{(i)}(x)$ могут быть записаны в виде:

$$\ln^{(i)}(x) = \frac{(-1)^{i-1}}{n}\,\frac{\left(1-x^2\right)U_{n-1}(x)}{x-x_i} \ , \ i = \overline{1,n-1},$$

$$\ln^{(0)}(x) = \frac{1}{2n}\,U_{n-1}(x)(x+1),$$

$$\ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{2n}\,U_{n-1}(x)(x-1)\,.$$

18. Пусть в качестве узлов интерполяции x_i, $i = \overline{0,n}$ взяты корни $(n+1)$-й степени из 1. Доказать,что в этом случае фундаментальные полиномы $\ln^{(i)}(x)$ могут быть записаны в виде

$$\ln^{(i)}(x) = \frac{x_i}{n+1}\,\frac{x^{n+1}-1}{x-x_i} \ , \ i = \overline{0,n}.$$

19. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ - произвольные целые числа, причем $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Показать, что каждый алгебраический полином n - й степени вида $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ принимает в точках x_i, $i = \overline{0,n}$ значения, из которых, по крайней мере, одно по абсолютной величине $\geq \dfrac{n!}{2^n}$.

20. Функция $f(x)$ задана при $x = -h, 0, h$. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа.

21. Построить интерполяционный многочлен, принимающий в узлах $-\dfrac{\pi}{6}, 0, \dfrac{\pi}{6}$ те же значения, что и функция $f(x) = \cos x$.

22. Построить интерполяционный многочлен , принимающий в узлах $-2, -\dfrac{4}{3}, 0, \dfrac{4}{3}, 2$ те же значения, что и функция $f(x) = \cos\dfrac{\pi x}{4}$.

23. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,\cos\dfrac{\pi x}{3}$ задана при $x = -1, 0, 1$.
Построить интерполяционный многочлен Лагранжа.

24. Даны узлы интерполяции $x_0 = 1, x_1 = -1, x_n = 2$ и значения функции в них: $f_0 = \dfrac{1}{3}, f_1 = -3,\ f_2 = 2$. Необходимо построить интерполяционный многочлен Лагранжа.

25. Построить интерполяционный многочлен, принимающий в узлах $-\dfrac{\pi}{6}, 0, \dfrac{\pi}{6}$ те же значения, что и функция $f(x) = \sin x$.

26. Построить интерполяционный многочлен для функции $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ и системы узлов $x_i = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

3. Интерполяционная схема Эйткена

Для вычисления значения интерполяционного многочлена в какой-либо точке x удобно пользоваться процедурой, которая носит название схемы Эйткена :

$$L_{012\ldots n}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{012\ldots n-1}(x) & x_0 - x \\ L_{123\ldots n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}}{x_n - x_0}, \qquad L_i(x) = f(x_i).$$

Упражнения для контроля

27. Пусть последовательность многочленов $L_i^{(j)}(x)$ строится по следующей схеме

$$L_i^{(j)}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_i^{(j-1)}(x) & x_i - x \\ L_{i+1}^{(j-1)}(x) & x_{i+j} - x \end{vmatrix}}{x_{i+j} - x_i}, \qquad j = 1, 2, \ldots ,$$

причем $L_i^{(0)}(x) = y_i \quad i = \overline{0, n}$. Доказать, что функция $L_0^{(n)}(x)$ совпадает с интерполяционным многочленом, принимающим в точках x_i значения $y_i \quad (i = \overline{0, n})$.

28. Пользуясь значениями интегрального синуса

$$f(x) = Si(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u}\,du$$

x	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
$f(x)$	0.7721	0.86047	0.94608	1.02869	1.10805

Найти $Si(0.973)$ по схеме Эйткена.

29. Давление p в некоторой фиксированной точке пространства задано как функция времени t

t	0.01208	0.01451	0.01714
$p(t)$	5.384	4.549	3.915

t	0.01996	0.02295	0.2512
$p(t)$	3.423	3.04	2.724

Найти $p(0.01852)$, используя способ Эйткена .

30. По данным задачи 28 найти $Si(1.08)$.

4. Погрешность интерполяционной формулы Лагранжа

Если отсутствует погрешность округления и значения $f(x_i)$ заданы точно , то погрешность интерполяционной формулы Лагранжа в точке x есть погрешность метода и равна

$$\varepsilon : \varepsilon(x) = f(x) - L_n(x) \qquad (4)$$

Для оценки $\varepsilon(x)$ вводят вспомогательную

$$\psi(z) = f(z) - L_n(z) - K(z - x_0)(z - x_1)\dots(z - x_n) \qquad (5)$$

и накладывают на функцию $f(x)$ следующие ограничения: $f(x)$ обладает на $[a,b]$ непрерывными производными до порядка n включительно, производная $f^{(n)}(x)$ дифференцируема на $[a,b]$.

Подставляя в выражение (5) $z = x_0, \dots, x_n$, убеждаемся, что

$$\psi(x_0) = \psi(x_1) = \dots = \psi(x_n) = 0 \quad .$$

Подберем константу K таким образом, чтобы $\psi(x) = 0$, где x точка, в которой ищется оценка для $\varepsilon(x)$, $x \neq x_i$, $i = \overline{0,n}$:

$$K = \frac{f(x) - L_n(x)}{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}$$

Применяя к функции $\psi(x)$ теорему Ролля, получим, что существует такая точка ξ, в которой $\psi^{(n+1)}(\xi) = 0$, отсюда

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) \; .$$

Упражнения для контроля

31. Доказать, что если $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$, то остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ может быть записан в форме Коши:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x) \quad ,$$

где $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, $\xi \in (\alpha, \beta)$,

$\alpha = \min(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$, $\beta = \max(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$.

32. Зная значения $\sin x$ при $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, найти $\sin x$ при $x = \frac{\pi}{12}$. Оценить погрешность.

33. С помощью интерполяции вычислить $\sqrt{41}$, используя данные $\sqrt{25} = 5, \sqrt{36} = 6, \sqrt{49} = 7$. Оценить погрешность и сравнить с фактической.

34. Оценить погрешность интерполяции функции в задаче 20.

35. Используя результаты задачи 21, вычислить $\cos\frac{\pi}{12}$. Найти оценку погрешности и сравнить с фактической.

36. Используя результаты задачи 22, вычислить $\cos\frac{\pi}{4}$ и $\cos\frac{3\pi}{4}$. Найти оценку погрешности и фактическую погрешность.

37. Используя интерполяционный многочлен, найденный в задаче 23, вычислить $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Найти оценку погрешности и сравнить с фактической.

38. С какой точностью можно извлечь кубический корень из 1300, интерполируя функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ между узлами $10^3, 11^3, 12^3$?

39. Дана таблица натуральных логарифмов чисел от 1 до 10. Какова

наибольшая погрешность линейной интерполяции, если шаг таблицы $h = 0{,}001$.

5. Интерполяционная формула Ньютона

Интерполяционный многочлен Ньютона для неравных промежутков есть особая форма записи интерполяционного многочлена Лагранжа и имеет следующий вид:

$$N_n(x) = f\left[x_0\right] + \left(x - x_0\right) f\left[x_0;x_1\right] + \left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right) f\left[x_0;x_1;x_2\right] +$$
$$+ \ldots + \left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right) \ldots \left(x - x_{n-1}\right) f\left[x_0;x_1;\ldots;x_n\right] \quad ,$$

где

$f\left[x_0\right] = f\left(x_0\right)$ - разделенная разность 0-го порядка ,

$f\left[x_0;x_1\right] = \dfrac{f\left[x_1\right] - f\left[x_0\right]}{x_1 - x_0}$ - разделенная разность 1-го порядка

. . . .

$$f\left[x_0;x_1;\ldots;x_n\right] = \frac{f\left[x_1;x_2;\ldots;x_n\right] - f\left[x_0;x_1;\ldots;x_{n-1}\right]}{x_n - x_0} \quad -$$

разделенная разность n-го порядка .

Такая форма записи интерполяционного многочлена более удобна для вычислений, чем формула Лагранжа, так как добавление одного или нескольких узлов не приводит к необходимости пересчитывать весь многочлен заново.

Упражнения для контроля

40. Показать, что n-я разделенная разность многочлена n -степени равна коэффициенту при x^n независимо от выбора узлов.

41. Показать, что если $f(x) = \left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\ldots\left(x - x_n\right)$, то

$$f\left[x_0;x_1;\ldots;x_i\right] = 0 \quad \text{при } i < n .$$

42. Показать, что если аргументы умножить на одну и ту же постоянную c , а значения функции оставить неизменными, то разделенная разность $f\left[x_0;x_1;\ldots;x_n\right]$ умножится на c^{-n}.

43. Показать, что разделенные разности не изменятся, если аргументы увеличить на одну и ту же величину, а значения функции оставить неизменными.

44. Показать, что если $f(x) = \varphi(x)\,\psi(x)$, то

$$f\left[x_0;x_1;\ldots;x_n\right] = \sum_{i=0}^{n} \varphi\left[x_0;x_1;\ldots;x_i\right] \psi\left[x_i;x_{i+1};\ldots;x_n\right] .$$

45. Обобщить формулу из задачи 44 на случай m сомножителей, т.е. показать, что если $f(x) = \prod_{j=1}^{m} \varphi_j(x)$, то

$$f\left[x_0;x_1;\ldots;x_n\right] = \sum_{i=0}^{n} \varphi_1\left[x_0;x_1;\ldots;x_{i_1}\right] \varphi_2\left[x_{i_1};x_{i_1+1};\ldots;x_{i_2}\right] \cdots$$
$$\cdots \varphi_m\left[x_{i_{m-1}};x_{i_{m-1}+1};\ldots;x_n\right] ,$$

где сумма распространена на все значения $i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}$, удовлетворяющие неравенствам $0 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{m-1} \le n$.

46. Доказать, что операция нахождения разделенной разности линейна, т.е. если $F(x) = a\,f(x) + b\,\varphi(x)$, то $F\left[x_i;x_{i+1}\right] = a\,f\left[x_i;x_{i+1}\right] + b\,\varphi\left[x_i;x_{i+1}\right]$, где a и b постоянные.

47. Интерполяционный многочлен $N_n(x)$, определяемый условиями $N_n(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$, представим в виде

$$N_n(x) = A_0 + A_1\left(x - x_0\right) + A_2\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right) + \ldots +$$
$$+ A_n\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\ldots\left(x - x_{n-1}\right) .$$

Найти коэффициенты $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$.

48. Доказать, пользуясь методом индукции, тождество

$$f\left[x_0;x_1;\dots;x_n\right]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)},$$

где $\omega_{n+1}(x)=\prod_{j=0}^{n}\left(x-x_j\right),\ \omega'_{n+1}(x_i)=\left.\frac{d\omega_{n+1}(x)}{dx}\right|_{x=x_i}$.

49. Найти интерполяционный многочлен степени $n=2$, удовлетворяющий условиям $f(0)=2$, $f(1)=3$, $f(3)=11$.

50. Найти интерполяционный многочлен степени $n=3$, удовлетворяющий условиям
$f(0)=2$, $f(1)=3$, $f(3)=11$, $f(-1)=0$.

51. С помощью интерполяционного многочлена Ньютона найти значение функции $f(x)$ в точке $x=6.42$, если
$f(5)=150$, $f(7)=392$, $f(11)=1452$,
$f(13)=2366$, $f(21)=9702$.

52. Найти для функции $f(x)=\frac{1}{x^2}$ следующие разделенные разности:

$f\left[x_0;x_1\right]$, $f\left[x_0;x_1;x_2\right]$, $f\left[x_0;x_1;x_2;x_3\right]$.

53. Для функции $f(x)=\frac{1}{x}$ найти разделенную разность

$f\left[x_0;x_1;\dots;x_n\right]$.

54. Для конечных разностей («вперед»)
$\Delta^k y_j=\Delta^{k-1}y_{j+1}-\Delta^{k-1}y_j \quad \left(\Delta^0 y_j=y_j\right)$.

Доказать тождество $\Delta^n y_j=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}c_n^i\, y_{j+i}$.

55. Доказать, что для равноотстоящих узлов x_i, $i=\overline{0,n}$ $\left(x_{i+1}-x_i=const=h\right)$ первая интерполяционная формула Ньютона (интерполирования « вперед »)имеет вид

$$N_n(x)=N_n\left(x_0+t\,h\right)=\sum_{i=0}^{n}\Delta^i y_0\,\frac{t(t-1)\dots(t-i+1)}{i!},$$

где $y_i=f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$, а $t=\frac{x-x_0}{h}$.

56. Доказать по индукции формулу

$$f\left[x_0;x_1;\dots;x_i\right]=\frac{\Delta^i f(x_0)}{i!\,h^i},\quad i=1,2,\dots,$$

Здесь узлы интерполяции приняты равноотстоящими, то есть $x_{i+1}=x_i+h$, $i=0,1,\dots$.

57. Доказать тождество

$$f[\underbrace{x_0;x_0;\dots;x_0}_{i+1\ \text{раз}}]=\lim_{h\to0}f\left[x_0;x_1;\dots;x_i\right]=\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0).$$

Здесь $x_i=x_0+i\,h$, $i=0,1,\dots$; $f^{(i)}(x_0)=\left.\frac{d^i f(x)}{dx^i}\right|_{x=x_0}$.

58. Написать выражения для разделенных разностей $f\left[x_0;x_0;x_1\right]$ и $f\left[x_0;x_0;x_0;x_1\right]$.

59. Построить интерполяционный многочлен Ньютона, удовлетворяющих условиям

$$N(x_i)=f_i,\quad i=\overline{0,2};$$
$$N'(x_0)=f'_0,\quad N''(x_0)=f''_0.$$

60. Найти многочлен $P(x)$, который при $x=1$ удовлетворяет условиям: $P(1)=2$, $P'(1)=4$, $P''(1)=12$ и, кроме того, $P(2)=17$, $P(3)=82$

61. Доказать, что для равноотстоящих узлов и x_i, $i=\overline{0,n}$ $\left(x_{i+1}=x_i+h\right)$ вторая интерполяционная формула Ньютона (интерполирование «назад») имеет вид

$$N_n(x)=N_n\left(x_n+t\,h\right)=\sum_{i=0}^{n}\Delta^i y_{n-i}\,\frac{t(t+1)\dots(t+i-1)}{i!},$$

где $\quad y_j = f(x_j) \quad , \quad t = \dfrac{x - x_n}{h}$.

62. Доказать, что если функция $\quad f(x) \in C^n [a, b] \quad$, где

$a = x_0 , \quad b = x_0 + nh$, то существует такая точка $\xi \in [a, b]$,

для которой справедливо равенство $\Delta^n f(x_0) = h^n f^{(n)}(\xi)$.

63. Доказать, что если функция $f(x) \in C^{n+1} [a, b]$, где

$a = x_0 ; \quad x_i = x_0 + ih , \quad i = \overline{0, n} , \; b = x_n ,$ то остаточный член

первой интерполяционной формулы Ньютона

$R_n(x) = f(x) - N_n(x)$ имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t-1)\dots(t-n) \quad ,$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{h} \quad , \quad \xi \in [\alpha, \beta], \; \alpha = \min(x, a), \quad \beta = \max(x, b)$.

64. Доказать, что если функция $\quad f(x) \in C^{n+1} [a, b] \quad$, где

$a = x_0 , \quad x_i = x_0 + ih , \quad i = \overline{0, n} , \; b = x_n ,$ то остаточный член второй

интерполяционной формулы Ньютона $R_n(x) = f(x) - N_n(x)$ имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t+1)\dots(t+n) \quad ,\text{где}$$

$$t = \frac{x - x_n}{h} \quad , \quad \xi \in [\alpha, \beta], \quad \alpha = \min(x, a), \quad \beta = \max(x, b).$$

65. Доказать, что вторая интерполяционная формула Ньютона может

быть записана в виде $N_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \Delta^i y_n \dfrac{t(t+1)\dots(t+i-1)}{i!}$, где

$$\nabla^i y_j = \nabla^i y_j - \nabla^{i-1} y_{j-1} , \nabla^0 y_j = y_j , y_j = f(x_j)$$

($\nabla^i y_j$ – конечные разности «назад»).

66. Дана таблица значений функции $\quad f(x) = \sin x$

x	20^0	25^0	30^0	35^0
sin x	0.342	0.4226	0.5	0.5736

x	40^0	45^0	50^0
sin x	0.6428	0.7071	0.766

Построить интерполяционные многочлены Ньютона для интерполирования «вперед» и «назад». Вычислить sin 23^0 . Оценить погрешность.

67. Пользуясь таблицей функции $f(x) = e^{-x}$

x	1.5	1.52	1.54	1.56	1.58
e^{-x}	0.2231	0.2187	0.2144	0.2101	0.206

вычислить $f(1.51)$. Оценить погрешность результата .

68. Пользуясь таблицей функции $f(x) = \ln x$

x	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0	6.2
ln x	1.6487	1.6864	1.7228	1.7579	1.7918	1.8425

вычислить $\ln 5.27$. Оценить погрешность результата.

69. Пусть погрешность табличных значений функции не превосходит $0.5 \cdot 10^{-m}$. Показать, что погрешность округления в разностях k -го порядка может достигать по модулю $2^{k-1} \cdot 10^{-m}$.

70. Оценить погрешность в задачах 66 - 68 с учетом погрешности округления.

<u>6. Интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга, Бесселя и Эверетта</u>

Если в качестве узлов интерполяции взяты точки

$x_0,\ x_0+h,\ x_0-h,\ x_0+2h,\ x_0-2h,\ \ldots,\ x_0+nh,\ x_0-nh,\ \ldots,$
где $h=const$, то интерполяционный многочлен может быть записан в следующем виде:

$$G_1(x)=G\left(x_0+th\right)=f_0+t\,f_{1/2}^1+\frac{t\,(t-1)}{2!}f_0^2+\frac{t\left(t^2-1\right)}{3!}f_{1/2}^3+\ldots+$$
$$+\frac{t\left(t^2-1\right)\left(t^2-2^2\right)\ldots\left[t^2-(n-1)^2\right]}{(2n-1)!}f_{1/2}^{2n-1}+$$
$$+\frac{t\left(t^2-1\right)\left(t^2-2^2\right)\ldots\left[t^2-(n-1)^2\right](t-n)}{(2n)!}f_0^{2n}+\ldots$$

Если изменить порядок следования узлов интерполяции:
$x_0,\ x_0-h,\ x_0+h,\ \ldots,\ x_0-nh,\ x_0-nh,\ \ldots,$ то получим другую форму интерполяционного многочлена:

$$G_2(x)=G_2\left(x_0+th\right)=f_0+t\,f_{-1/2}^1+\frac{t\,(t+1)}{2!}f_0^2+$$
$$+\frac{t\left(t^2-1\right)}{3!}f_{-1/2}^3+\ldots+\frac{t\left(t^2-1\right)\left(t^2-2^2\right)\ldots\left[t^2-(n-1)^2\right]}{(2n-1)!}f_{-1/2}^{2n-1}$$
$$+\frac{t\left(t^2-1\right)\left(t^2-2^2\right)\ldots\left[t^2-(n-1)^2\right](t+n)}{(2n)!}f_0^{2n}+\ldots$$

Здесь $t=\dfrac{x-x_0}{h}$, $f_i=f\left(x_i\right)$;

$f_{i+1/2}^1=f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i\right)$ – конечная разность 1-го порядка;

$f_i^2=f_{i+1/2}^1-f_{i-1/2}^1$ – конечная разность 2-го порядка ;

. . . .

$f_{i+1/2}^{2n-1}=f_{i+1}^{2n-2}-f_i^{2n-2}$ - конечная разность $(2n-1)$ - го порядка ;

$f_i^{2n}=f_{i+1/2}^{2n-1}-f_{i-1/2}^{2n-1}$ - конечная разность $(2n)$- го порядка .

Формула для $G_1(x)$ носит название первой интерполяционной формулы Гаусса (для интерполирования «вперед»), а для $G_2(x)$ - второй интерполяционной формулы Гаусса (для интерполирования «назад») .

Полусумма интерполяционных формул Гаусса дает интерполяционную формулу Стирлинга:

$$S(x)=\frac{G_1(x)+G_2(x)}{2}=S\left(x_0+th\right)=f_0+t\,f_0^1+\frac{t^2}{2!}f_0^2+\ldots+$$
$$+\frac{t\left(t^2-1\right)\left(t^2-2^2\right)\ldots\left[t^2-(n-1)^2\right]}{(2n-1)!}f_0^{2n-1}+$$
$$+\frac{t\left(t^2-1\right)\left(t^2-2^2\right)\ldots\left[t^2-(n-1)^2\right](t+n)}{(2n)!}f_0^{2n}+\ldots$$

Формула Бесселя получится, если взять полусумму формулы G_2 относительно точки x_1 $(a$ не $x_0)$ и G_1:

$$B(x)=B\left(x_0+th\right)=f_{1/2}+\left(t-\frac{1}{2}\right)f_{1/2}^1+\frac{t\,(t-1)}{2!}f_{1/2}^2+\ldots+$$
$$+\frac{t\left(t^2-1\right)\ldots\left[t^2-(n-1)^2\right](t-n)}{(2n)!}f_{1/2}^{2n}+$$
$$+\frac{t\left(t^2-1\right)\ldots\left[t^2-(n-1)^2\right](t-n)\left(t-\frac{1}{2}\right)}{(2n)!}f_{1/2}^{2n+1}+\ldots,$$

где $f_{i+1/2}^{2k}=\dfrac{1}{2}\left[f_{i+1}^{2k}-f_i^{2k}\right]$.

Эта формула удобна для интерполирования на середину $\left(t=\dfrac{1}{2}\right)$.

Формулу Эверетта получим, если из формулы $G_1(x)$ исключим разности нечетного порядка:

$$H(x)=H\left(x_0+th\right)=t\,f_1+\frac{t\left(t^2-1\right)}{3!}f_1^2+\ldots+\frac{t\left(t^2-1\right)\ldots\left(t^2-n^2\right)}{(2n+1)!}f_1^{2n}+$$
$$+\ldots\xi\,f_0+\frac{\xi\left(\xi^2-1\right)}{3!}f_0^2+\ldots+\frac{\xi\left(\xi^2+1\right)\ldots\left(\xi^2-n^2\right)}{(2n+1)!}f_0^{2n}+\ldots,$$

Упражнения для контроля

71. Пусть в качестве узлов интерполяции взяты точки
$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 - h, \ldots, x_{2n-1} = x_0 + nh, x_{2n} = x_0 - nh$.
Доказать, что в этом случае интерполяционный многочлен может быть записан в виде первой интерполяционной формулы Гаусса (интерполяция «вперед»)

$$G(x) = G(x_0 + th) = f_0 + \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{t(t^2-1^2)\ldots[t^2-(i-1)^2]}{(2i-1)!}\delta^{2i-1} f_{1/2} + \frac{t(t^2-1^2)\ldots[t^2-(i-1)^2](t-i)}{(2i)!}\delta^{2i} f_0\right\}$$

где $\delta^j f_i = \delta^{j-1} f_{i+1} - \delta^{j-1} f_i$ - центральные разности, а $t = \frac{x - x_0}{h}$

72. Пусть в качестве узлов интерполяции взяты точки
$x_0, x_1 = x_0 - h, x_2 = x_0 + h, \ldots, x_{2n-1} = x_0 - nh, x_{2n} = x_0 + nh$
Доказать, что в этом случае интерполяционный многочлен может быть записан в виде второй интерполяционной формулы Гаусса (интерполяция «назад»)

$$G(x) = G(x_0 + th) = f_0 + \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{t(t^2-1^2)\ldots[t^2-(i-1)^2]}{(2i-1)!}\delta^{2i-1} f_{-1/2} + \frac{t(t^2-1^2)\ldots[t^2-(i-1)^2](t+i)}{(2i)!}\delta^{2i} f_0\right\},$$

где $\delta^j f_i = \delta^{j-1} f_{i+1} - \delta^{j-1} f_i$ - центральные разности, а
$t = \frac{x - x_0}{h}$.

73. Используя первую и вторую интерполяционные формулы Гаусса, получить интерполяционную формулу Стирлинга в виде

$$S(x) = S(x_0 + th) = f_0 + \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{t(t^2-1^2)\ldots[t^2-(i-1)^2]}{(2i-1)!}\delta^{2i-1} f_{1/2} + \frac{t^2(t^2-1^2)\ldots[t^2-(i-1)^2]}{(2i)!}\delta^{2i} f_0\right\},$$

74. Используя первую интерполяционную формулу Гаусса, получить интерполяционную формулу Эверетта в виде

$$H(x) = H(x_0 + th) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{t(t^2-1^2)\ldots(t^2-i^2)}{(2i+1)!}\delta^{2i} f_1 + \frac{\tau(\tau^2-1^2)\ldots(\tau^2-i^2)}{(2i+1)!}\delta^{2i} f_0\right\},$$

где $\tau = 1 - t$, $t = \frac{x - x_0}{h}$.

75. Используя первую и вторую интерполяционные формулы Гаусса, получить интерполяционную формулу Бесселя в виде

$$B(x) = B(x_0 + th) = \mu f_{1/2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\delta f_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2!}\mu\delta^2 f_{1/2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\frac{t(t-1)}{3!}\delta^3 f_{1/2} + \ldots + \frac{t(t^2-1^2)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}\mu\delta^{2n} f_{1/2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\frac{t(t^2-1^2)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n+1)!}\delta^{2n+1} f_{1/2},$$

Здесь $\mu\,\varphi_i = \frac{1}{2}\left(\varphi_{i+1/2} + \varphi_{i-1/2}\right)$ - операция усреднения.

76. Написать выражения для остаточного члена в формуле Стирлинга, когда:
последняя используемая разность имеет четный порядок;
последняя используемая разность имеет нечетный порядок.

77. Написать выражения для остаточного члена в формуле Бесселя, когда :

последняя используемая разность имеет четный порядок ;
последняя используемая разность имеет нечетный порядок .

78. Написать выражения для остаточных членов первой и второй формулы Гаусса.

79. Написать выражение для остаточного члена формулы Эверетта.

80. Используя таблицу значений функции $f(x)=\sin x$ (см. задачу 66)и приняв $x_0=35^0$, построить интерполяционные многочлены Гаусса, Стирлинга, Бесселя и Эверетта. Выписать выражения для остаточных членов.

81. Используя результаты решения задачи 80 , вычислить значения $\sin 37^0\ 30'$ *и* $\sin 32^0\ 30'$. Оценить погрешности. Дать сравнительную характеристику интерполяционных формул.

82. Используя таблицу значений функции $f(x)=e^{-x}$ (см. задачу 67) и приняв $x_0=1.54$, построить интерполяционные многочлены Гаусса, Стирлинга, Бесселя и Эверетта. Выписать выражения для остаточных членов.

83. Используя результаты решения задачи 82 , вычислить значения e^{-x} при $x=1.53$ *и* $x=1.55$. Оценить погрешности. Дать сравнительную характеристику интерполяционных формул.

84. Получить формулу Бесселя для интерполирования на середину интервала.

7.Диаграмма Фрезера

Способ построения интерполяционных формул, предложенный Фрезером, отличается наглядностью и многовариантностью. Основным элементом способа Фрезера является специального вида

диаграмма [рис.1]. Выбирая произвольным образом начальную точку на диаграмме (f_i) и путь, заканчивающийся на постоянных разностях, складывая все встречающиеся на пути величины, получают одну из возможных интерполяционных формул

$$L_n(x_0+th)\ ,\ \text{где}\ t=\frac{x-x_0}{h}\ .$$

Пример. Рассмотрим путь, идущий от f_0 по диагонали вниз:

$$L_n(x_0+th)=f_0+C_t^1\,\Delta f_{1/2}+C_t^2\,\Delta^2 f_1+\ldots+C_t^n\,\Delta^n f_{n/2}\ .$$

Учитывая ,что $C_t^m=\dfrac{t(t-1)\ldots(t-m+1)}{m!}$, получим

$$L_n(x)=L_n(x_0+th)=\sum_{i=0}^{n}\Delta^i f_{i/2}\,\frac{t(t-1)\ldots(t-i+1)}{i!}$$

, т.е. первую интерполяционную формулу Ньютона для равноотстоящих узлов.

Упражнения для контроля

85. Для обобщенных биномиальных коэффициентов

$$C_t^i=\frac{t(t-1)\ldots(t-i+1)}{i!}\ ,$$

где i - натуральное число, а t - действительное число (необязательно целое). Доказать справедливость тождества

$$C_{t+1}^{i+1}=C_t^i+C_t^{i+1}\ .$$

Доказать, что при использовании правил, описанных в задаче 87, сумма, вычисленная вдоль любой ломанной, идущей слева направо и составленной из сторон ромбов и горизонтальных диагоналей, равна сумме, вычисленной вдоль любой другой ломанной, имеющей то же начало и тот же конец.

86. Доказать тождество

$$c_t^i\,\Delta^i\,y_{j+1}+c_t^{i+1}\,\Delta^{i+1}\,y_j=c_t^i\,\Delta^i\,y_j+c_{t+1}^{i+1}\,\Delta^{i+1}\,y_j\ .$$

87. Для ромбовидной диаграммы [рис.1] введено следующее правило :

При движении в некоторую вершину по восходящей стороне нужно умножать величину в вершине на величину под ней , а при движении по нисходящей - на величину над ней . Доказать,что при этих условиях справедливы следующие утверждения:

1. Если исходя из какой-либо величины , помещенной в левую вершину ромба , двигаться по его верхним сторонам до правой вершины , прибавляя все встречающиеся по пути величины , то мы получим такой же результат , как если бы двигались по нижним сторонам .

2. Если двигаясь по диагонали ромба слева направо брать полусуммы величин ,стоящих над ней и под ней , то получим тот же результат , что ив первом случае .

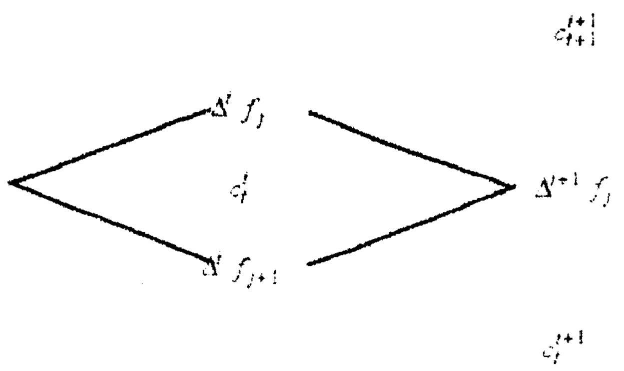

рис . 1

88. Дана диаграмма Фрезера [рис.2] .Доказать, что при использовании правил, описанных в задаче 87, сумма, вычисленная вдоль любой ломанной, идущей слева направо и составленной из сторон ромбов и горизонтальных диагоналей, равна сумме, вычисленной вдоль любой другой ломанной, имеющей то же начало и тот же конец.

89. Доказать, что двигаясь по диаграмме Фрезера от любых двух узлов

f_i и f_{i+1} $\left(\text{или} \quad f_i \quad \text{и} \quad \dfrac{f_i + f_{i+1}}{2} \right)$, взятых в качестве

начала двух путей, и закончив эти пути на разностях одного и того же порядка, получим один и тот же результат.

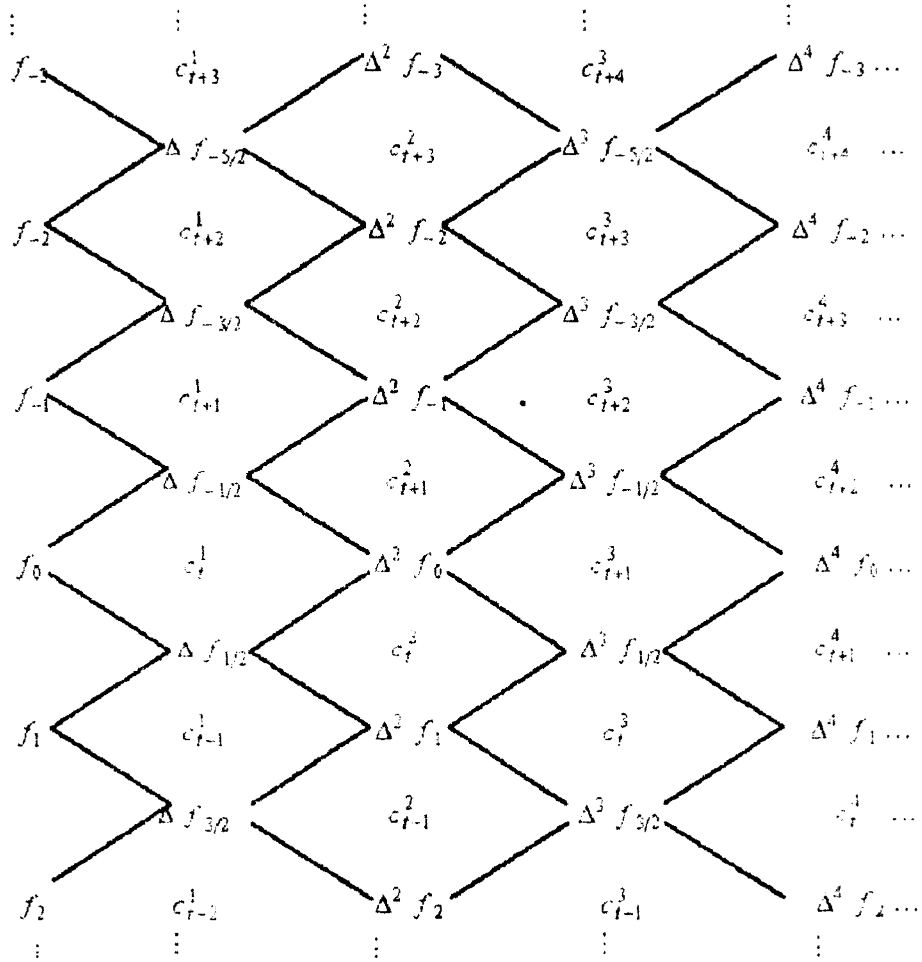

рис. 2

90. Указать на диаграмме Фрезера пути (начинающиеся с точки f_0), двигаясь по которым получим первую и вторую интерполяционные формулы Ньютона.

91. Указать на диаграмме Фрезера путь (начинающийся с точки f_0), двигаясь по которому получим интерполяционную формулу Стирлинга.

92. Указать на диаграмме Фрезера путь (начинающийся с точки $\frac{1}{2}\left(f_0+f_1\right)$), двигаясь по которому получим интерполяционную формулу Бесселя.

8. Интерполирование периодических функций

Интерполяция периодической функции $f(x)$, $x \in [a,b]$, $f(a)=f(b)$ осуществляется с помощью периодических базисных функций $\varphi_i(x)$:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} c_i\, \varphi_i(x) \quad , \qquad \varphi(a)=\varphi(b) \quad .$$

Определение. Совокупность непрерывных функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, удовлетворяющих условиям $\varphi_i(a)=\varphi_i(b)$, называется *периодической системой Чебышева на отрезке* $[a, b]$, если любая линейная комбинация $c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)$, не все коэффициенты которой нули, имеет на $[a, b]$ не более n корней при условии, что a и b считаются за один корень.

С помощью линейной замены $x=a+\dfrac{b-a}{2\pi}\theta$ отрезок периодичности $[a, b]$ преобразуется в $[0, 2\pi]$, на котором простейшей системой периодических функций является система

$$1, \sin\theta, \cos\theta, \sin 2\theta, \cos 2\theta, \ldots, \sin k\theta, \cos k\theta$$

Данная система на отрезке $[0, 2\pi]$ образует периодическую систему Чебышева.

Теорема. Для любой периодической функции $f(\theta)$ с периодом 2π при любом наборе из $(2n+1)$ попарно различных узлов $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{2n}$ из полуотрезка $[0, 2\pi)$ существует единственный тригонометрический многочлен

$$T_n(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta\right),$$ являющийся интерполяционным многочленом для $f(\theta)$ по данной системе узлов, т.е. удовлетворяющий условиям

$$T_n(\theta_i)=f(\theta_i) \quad , \qquad i=\overline{0, 2n} \quad .$$

Упражнения для контроля

93. Доказать, что всякий тригонометрический полином n - го порядка по косинусам можно представить в виде $P_n(\cos\theta)$, где $P_n(x)$ – алгебраический полином n – ой степени.

94. Доказать, что всякий тригонометрический полином n – го порядка по синусам можно представить в виде $\sin\theta \cdot P_{n-1}(\cos\theta)$.

95. Доказать, что произведение двух тригонометрических полиномов n – го и m – го порядка представляет собой тригонометрический полином $(n+m)$ – го порядка.

96. Доказать, что всякий тригонометрический полином n – го порядка $g_n(\theta)=a_0+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta\right)$ может быть представлен в виде $g_n(\theta)=e^{-in\theta}\,G_{2n}\left(e^{i\theta}\right)$,

где $G_{2n}(x)=\sum_{k=0}^{2n} c_k x^k$ – некоторый алгебраический полином $(2n)$ - ой степени.

97. Доказать, что тригонометрический полином n — го порядка

$$g_n(\theta)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta),$$

где $a_n \pm i b_n \neq 0$ имеет ровно $2n$ нулей (вещественных или комплексных) с учетом их кратностей.

98. Пусть θ_k $(k=\overline{1,2n},\ 0\le \operatorname{Re}\theta_k \le 2\pi)$ – нули тригономерического полинома $g_n(\theta)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)$,

у которого $a_n \pm i b_n \neq 0$. Доказать, что $g_n(\theta)$ можно представить в виде

$$g_n(\theta)=A\cdot\prod_{k=1}^{2n}\sin\frac{\theta-\theta_k}{2},$$

где $A=const$. Найти A.

99. Доказать, что если тригонометрический полином порядка n по косинусам

$$g_n(\theta)=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos k\theta,$$

то (см. задачу 98)

$$g_n(\theta)=2^{n-1}a_n\prod_{k=1}^{n}(\cos\theta-\cos\theta_k),$$

где θ_k $(k=\overline{1,n})$ – нули полинома $g_n(\theta)$, для которых $0\le\operatorname{Re}\theta_k\le\pi$.

100. Доказать, что если тригонометрический полином порядка n по синусам

$$g_n(\theta)=\sum_{k=1}^{n}b_k\sin k\theta,$$

то (см. задачу 98)

$$g_n(\theta)=2^{n-1}b_n\sin\theta\prod_{k=1}^{n-1}(\cos\theta-\cos\theta_k),$$

где θ_k $(k=\overline{1,n-1})$ – нули полинома $g_n(\theta)$, для которых $0<\operatorname{Re}\theta_k<\pi$.

101. Пусть задано $2n+1$ различных точек (узлов) θ_k, $k=\overline{0,2n}$, $0\le\operatorname{Re}\theta_k<2\pi$. Построить фундаментальные полиномы тригонометрического интерполирования, т.е. тригонометрические полиномы $t_n^{(k)}(\theta)$ порядка не выше n, удовлетворяющие условиям $t_n^{(k)}(\theta_i)=\delta_{ik}$, $i,k=\overline{0,2n}$, здесь δ_{ik} – символ Кронекера.

102. Построить тригонометрический полином $g_n(\theta)$ порядка не выше n, принимающий в узлах $\theta_0,\theta_1,\dots,\theta_{2n}$ заданные значения $y_0,y_1,\dots,y_{2n}$. Доказать, что этими условиями тригонометрический полином порядка не выше n определяется единственным образом.

103. Обозначим через

$$\omega(\theta)=C\cdot\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\theta_1}{2}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{\theta-\theta_{2n}}{2}$$

тригонометрический полином полуцелого порядка $n+\frac{1}{2}$, нули которого $\theta_0,\theta_1,\dots,\theta_{2n}$ – заданные узлы, $C\neq0$ - постоянная. Доказать, что

$$t_n^{(k)}(\theta)=\frac{\omega(\theta)}{2\omega'(\theta_k)\sin\frac{\theta-\theta_k}{2}}$$

104. Доказать тождество $\sum_{k=0}^{2n} t_n^{(k)}(\theta) = 1.$

106. Пусть заданы $n+1$ различных узлов $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$, $0 \le \operatorname{Re}\theta_k \le \pi$, $k = \overline{0, n}$. Построить тригонометрические полиномы по косинусам $C_n^{(k)}(\theta)$ порядка не выше n, удовлетворяющие условиям $C_n^{(k)}(\theta_i) = \delta_{ik}$, $i,k = \overline{0, n}$.

106. Построить тригонометрический полином по косинусам $C_n(\theta)$ порядка не выше n, принимающий в узлах $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$ заданное значение $y_0, y_1, \ldots, y_n$.
Доказать, что этими условиями четный тригонометрический полином определяется единственным образом.

107. Обозначим

$$\omega(\theta) = B\cdot(\cos\theta - \cos\theta_0)(\cos\theta - \cos\theta_1)\ldots(\cos\theta - \cos\theta_n),$$

$B \ne 0$ – константа. Доказать, что

$$C_n^{(k)}(\theta) = -\frac{\omega(\theta)\cdot\sin\theta_k}{(\cos\theta - \cos\theta_k)\cdot\omega'(\theta_k)} \quad \text{при } \theta_k \ne 0, \pi;$$

$$C_n^{(k)}(\theta) = \frac{\omega(\theta)}{(1-\cos\theta)\cdot\omega''(0)} \quad \text{при } \theta_k = 0;$$

$$C_n^{(k)}(\theta) = \frac{\omega(\theta)}{(1+\cos\theta)\cdot\omega''(\pi)} \quad \text{при } \theta_k = \pi.$$

108. Пусть заданы n, различных узлов $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$. Построить тригонометрические полиномы по синусам порядка не выше n, удовлетворяющие условиям

$$S_n^{(k)}(\theta_i) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1, n}.$$

109. Построить тригонометрический полином по синусам $S_n(\theta)$ порядка не выше n, принимающий в узлах θ_i, $i = \overline{1, n}$, заданные значения y_i, $i = \overline{1, n}$. Доказать, что этими условиями нечетный тригонометрический полином порядка не выше n определяется однократно.

110. Обозначим
$\omega(\theta) = C\cdot\sin\theta\cdot(\cos\theta - \cos\theta_1)\ldots(\cos\theta - \cos\theta_n)$, $C \ne 0$ – константа. Доказать, что

$$S_n^{(k)}(\theta) = -\frac{\omega(\theta)\cdot\sin\theta_k}{(\cos\theta - \cos\theta_k)\cdot\omega'(\theta_k)}.$$

111. Пусть узлы интерполирования равноотстоящие:
$\theta_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $k = \overline{0, 2n}$. Показать, что в этом случае фундаментальные полиномы тригонометрического интерполирования имеют вид

$$t_n^{(k)}(\theta) = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\theta - \theta_k)}{\sin\frac{\theta - \theta_k}{2}}.$$

112. Найти коэффициенты интерполяционного полинома

$$g_n(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta),$$

если узлы интерполирования равноотстоящие (см. задачу 111).

9. Интерполяционный многочлен Эрмита

Интерполяционный многочлен Эрмита применяется для решения общей задачи интерполирования, которая формулируется следующим образом: для заданной системы функций $\varphi_i(x)$, $i = \overline{0, m}$, $x \in [a, b]$ требуется построить такой многочлен

$\varphi(x)=\sum_{i=0}^{m} C_i\,\varphi_i(x)$, который удовлетворял бы условиям интерполяции

$$\varphi^{(k)}(x_j)=y_j^{(k)},\quad j=\overline{0,n},\quad k=\overline{0,r_j-1},$$

где $y_j^{(k)}$ – заданные числа, $x_j\in[a,b]$.

Общий вид многочлена Эрмита :

$$H_m(x)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{r_i-1}\sum_{k=0}^{r_i-j-1} y_i^{(j)}\,\frac{1}{j!}\,\frac{1}{k!}\left[\frac{x-x_i}{\Omega(x)}\right]^{(k)}_{x=x_i}\frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^{r_i-j-k}}$$

где

$$\Omega(x)=(x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1}\dots(x-x_n)^{r_n}.$$

Упражнения для контроля

113. Пусть даны узлы $x_0, x_1,\dots,x_n$; и соответствующие им системы чисел

$$\begin{array}{llll} y_0, & y_0', & \dots\dots & ,y_0^{(\alpha_0-1)} \\ y_1, & y_1', & \dots\dots & ,y_1^{(\alpha_1-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n, & y_n', & \dots\dots & ,y_n^{(\alpha_n-1)}. \end{array}$$

Доказать, что может существовать только один полином $H_m(x)$ степени не выше m, где $m=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i-1$, удовлетворяющий условиям $H_m^{(j)}(x_i)=y_i^{(j)}$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,\alpha_i-1}$.

114. Доказать, что задача построения полинома $H_m(x)$, удовлетворяющего условиям $H_m^{(j)}(x_i)=y_i^{(j)}$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,\alpha_i-1}$,

будет решена, если построить полиномы

$$h_{i,j}(x),\quad i=\overline{0,n},\quad j=\overline{0,\alpha_i-1}$$

степени $\le m$, удовлетворяющие условиям

$$h_{k,l}^{(j)}(x_i)=\delta_{i,k}\cdot\delta_{l,j},\quad i,k=\overline{0,n},\quad j,l=\overline{0,\alpha_i-1}.$$

115. Построить формулу Эрмита для случая, когда $\alpha_i=const=2$.

116. Найти частный случай формулы Эрмита, когда $n=0$.

117. Пусть функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ конечную производную порядка $m+1=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i$, где $\alpha_i\ge 1$ и узлы $x_i\in[a,b]$, $i=\overline{0,n}$. Пусть $H_m(x)$ – полином Эрмита, интерполирующий $f(x)$ в узлах x_i, $i=\overline{0,n}$, причем узел x_i является кратным с порядком кратности α_i, т.е.

$$H_m^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i),\quad i=\overline{0,n},\quad j=\overline{0,\alpha_i-1}.$$

Доказать, что остаточный член $R_m(x)=f(x)-H_m(x)$ интерполяционной формулы Эрмита можно представить в виде

$$R_m(x)=\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\,\omega(x),$$

где $\omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^{\alpha_i}$, $\xi\in[a,b]$.

118. Написать функцию

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega^2(x)}{(x-x_i)^2\left[\omega'(x_i)\right]^2}\left\{f(x_i)\left[1-\frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(x-x_i)\right]+f'(x_i)(x-x_i)\right\},$$ где $\omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$, для случая,

когда в качестве узлов x_i , $i = \overline{0, n}$ взяты нули полинома Чебышева 1-го рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

119. Написать функцию $H_{2n+1}(x)$ (см. задачу 118) для случая, когда в качестве узлов x_i , $i = \overline{0, n}$ взяты нули полинома Чебышева 2-го рода

$$U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \sin\left[(n+1) \arccos x \right] .$$

120. Написать функцию $H_{2n+1}(x)$ (см. задачу 118) для случая, когда в качестве узлов x_i , $i = \overline{0, n}$ взяты корни ($n+1$) – ой степени из единицы : $x_j = e^{i\frac{2\pi(j+1)}{n+1}}$, $j = \overline{0, n}$.

Библиографический список.

1. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н.В. *Вычислительные методы для инженеров* .– М. : Высш. шк., 1994 .
2. Волков Е. А. *Численные методы* .– М. : Наука, 1987.
3. Г. Н. *Методы вычислительной математики* . – М. : Наука, 1980 .
4. Самарский А. А. *Введение в численные методы* . –М. : Наука, 1987 .
5. Марчук Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. *Вычислительные методы* .
   Т1. – М.: Наука ,1976 .
6. Корнейчук Н. П. *Сплайны в теории приближения.* – М. : Наука ,1984 .

МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ
ФУНКЦИЙ

Составитель Д е г т я р е в Александр Александрович

Редактор
Тех. редактор
Корректор

Лицензия ЛР $N^{\underline{o}}$ 020301 от 28.11.91

Подписано в печать Формат
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1.2. Заказ Арт.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ИПО Самарского государственного аэрокосмического университета.
443001 Самара, ул. Ульяновская, 18.