МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И СИСТЕМ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К КУРСОВОЙ РАБОТЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
(ЭТАП 2)

Самара 2004

Бушков С.В., Коломиец Л.В.

УДК 510.2 (075.8)

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И СИСТЕМ: Методические указания к курсовой работе по математике (этап 2) /Самарский. государственный аэрокосмический ун-т.,
сост. Бушков С.В., Коломиец Л.В., Самара, 2004, 50с.

Методические указания предназначены для студентов специальностей 200700, 200800, 201500, 190500 радиотехнического факультета СГАУ, рабочая программа которых включает курсовую работу в 3 семестре. Методические указания также могут быть использованы для самостоятельной работы студентов других факультетов.

Методические указания содержат полное методическое обеспечение второго этапа курсовой работы по математике, посвященного изучению методов интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков и систем дифференциальных уравнений.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева

Рецензент С.В. Дворянинов

СОДЕРЖАНИЕ

Второй этап курсовой работы посвящен изучению дифференциальных уравнений высших порядков и систем дифференциальных уравнений.

2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Общие понятия. Задача Коши

Уравнение вида $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, где $n > 1$, называется дифференциальным уравнением **Ошибка! Закладка не определена.**n-ого порядка относительно функции $y(x)$. Уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2.1)$$

называется уравнением **Ошибка! Закладка не определена.**n-ого порядка в нормальной форме.

Начальные условия или условия Коши для дифференциального уравнения **Ошибка! Закладка не определена.**n-ого порядка задают значения функции и ее первых $n-1$ производных в некоторой точке x_o:

$$y(x_o) = y_o, \quad y'(x_o) = y'_o, \; \dots, \; y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}, \qquad (2.2)$$

где $y_o, \, y'_o, \, y''_o, \, \dots, \, y_o^{(n-1)}$ - заданные числа.

Задача отыскания частного решения (2.1), удовлетворяющего системе начальных условий (2.2), называется задачей Коши для дифференциального уравнения.

Теорема 2.1 (о существовании и единственности решения задачи Коши). Пусть дано дифференциальное уравнение (2.1) и система начальных условий (2.2). Если функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ непрерывна в окрестности точки $M_o(x_o, y_o, y'_o, ..., y_o^{(n-1)}) \in R^{n+1}$ и имеет в этой окрестности непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \; \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \; \dots, \; \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то найдется интервал $(x_o - \delta; x_o + \delta)$, на котором существует, и притом единственное, решение задачи Коши $y = y(x)$.

Общим решением дифференциального уравнения порядка n в некоторой области D, в каждой точке которой выполнены условия теоремы существования и единственности, называется n-параметрическое семейство функций $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) непрерывно дифференцируемая функция $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$, является решением уравнения (2.1) при любых значениях произвольных постоянных $C_1,C_2,...,C_n$,
2) при любых начальных условиях (2.2) существуют такие значения постоянных $C_1,C_2,...,C_n$, что функция $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$ удовлетворяет этим условиям.

Если решение дифференциального уравнения удается получить в неявном виде $\Phi(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0$, то последнее равенство называется общим интегралом этого уравнения. Геометрически общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, зависящее от n параметров.

Рассмотрим основные методы интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков.

2.1. Уравнения, допускающие понижение порядка

Задача интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков является значительно более сложной, чем задача интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Одним из методов интегрирования уравнений высших порядков является понижение порядка уравнения, то есть сведение его с помощью соответствующей замены к дифференциальному уравнению более низкого порядка.

Рассмотрим некоторые типы уравнений, допускающих понижение порядка.

2.1.1. *Уравнение вида:* $y^{(n)}=f(x)$.

Порядок этого уравнения понижается всякий раз на единицу путем последовательного интегрирования:

$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1, \quad y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2$ и так далее.

2.1.2. ***Дифференциальные уравнения, не содержащие явно искомой функции*** y и ее первых производных до порядка $k-1$ включительно, то есть уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}) = 0$.

Введем новую неизвестную функцию $z(x) = y^{(k)}(x)$. Тогда $y^{(k+1)} = z'(x)$, данное уравнение сводится к уравнению первого порядка $F(x, z, z') = 0$. Решив его, можно найти функцию $z(x) = y^{(k)}(x)$ и получить уравнение из пункта 2.1.1.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения: $(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$.

Решение. Это дифференциальное уравнение второго порядка, которое не содержит явно искомую функцию y. Понизим порядок уравнения, введя замену $y' = z(x)$. Тогда уравнение принимает вид $(1+x^2)z' + 2xz = 12x^3$.

Получили линейное уравнение первого порядка. Разделим обе его части на $(1+x^2) \neq 0$ и будем искать решение в виде $z = u \cdot v$, $z' = uv' + u'v$.

Имеем
$$u'v + u\left(v' + \frac{2x}{1+x^2}v\right) = \frac{12x^3}{1+x^2}. \tag{2.3}$$

Полагая выражение в скобках равным нулю и решая уравнение $v' + \dfrac{2x}{1+x^2}v = 0$ с разделяющимися переменными, найдем функцию $v = \dfrac{1}{1+x^2}$. Тогда из (2.3) получим $u' = 12x^3$, откуда находим функцию $u = 3x^4 + C_1$. Следовательно, $z = u \cdot v = \dfrac{3x^4 + C_1}{1+x^2}$.

Учитывая, что $y' = z(x)$, приходим к уравнению с разделенными переменными $y' = \dfrac{3x^4 + C_1}{1 + x^2}$. Интегрируем обе его части и получаем общее решение исходного уравнения: $y = x^3 - 3x + C_1 arctgx + C_2$.

2.1.3. ***Дифференциальные уравнения, не содержащие явно независимую переменную*** x, то есть уравнения вида $F(y, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$.

Замена $y' = p$, где $p = p(y)$, понижает порядок уравнения на единицу. Действительно, имеем: $y' = \dfrac{dy}{dx} = p = p(y)$, $y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p \cdot \dfrac{dp}{dy}$;

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy} \right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy} \right)\frac{dy}{dx} = \left[\left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p\frac{d^2 p}{dy^2} \right] p$$

и так далее. Подставляя значения производных в рассматриваемое уравнение, придем к дифференциальному уравнению, порядок которого на единицу меньше порядка исходного уравнения.

В частности, уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$ заменой $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot \cancel{p}'_y$ сводится к уравнению $F(y, p, p \cdot p'_y) = 0$.

<u>**Пример 2.**</u> Найти решение задачи Коши:

$$y^3 y'' = y^4 - 18,\ y(3) = 1,\ y'(3) = -2.$$

Решение. Это уравнение второго порядка не содержит переменной x, поэтому заменой $y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ его можно привести к уравнению с разделяющимися переменными: $pdp = \left(y - \dfrac{18}{y^3} \right) dy$.

Интегрируя последнее уравнение, получим $y' = p = \pm\sqrt{y^2 + \dfrac{9}{y^2} + C_1}$.

Так как решение задачи Коши существует лишь в окрестности точки $x_o = 3$, по теореме о постоянстве знака непрерывной функции заключаем, что в некоторой окрестности $U(3)$ производная $y'(x)$ будет иметь тот же знак, что и в самой точке $y'(3) = -2 < 0$.

Итак, $y' = -\sqrt{y^2 + \dfrac{9}{y^2} + C_1}$. Подставим в это уравнение значения $y'(3) = -2$, $y(3) = 1$ и найдем $C_1 = -6$.

Тогда $y' = -\sqrt{y^2 + \dfrac{9}{y^2} - 6} = -\sqrt{\left(y - \dfrac{3}{y}\right)^2} = -\left| y - \dfrac{3}{y} \right|$.

Найдем, какой знак будет иметь выражение $y - \dfrac{3}{y}$ в некоторой $U(3)$.

Для этого подставим $y(3) = 1$ и получим, что $y - \dfrac{3}{y} = 1 - 3 < 0$, поэтому $\left| y - \dfrac{3}{y} \right| = \dfrac{3}{y} - y$. Теперь нужно проинтегрировать уравнение $y' = y - \dfrac{3}{y}$.

Это уравнение нельзя интегрировать непосредственно, а нужно сначала разделить переменные: $\dfrac{ydy}{y^2 - 3} = dx$, откуда $\ln\left|y^2 - 3\right| = 2x + C_2$.

Остается подобрать C_2 так, чтобы выполнялись начальные условия $y(3) = 1$. Находим $C_2 = \ln 2 - 6$, и выражение y с учетом знака модуля: $y = \sqrt{3 - 2e^{2x-6}}$.

Эта функция является решением данной задачи Коши.

2.2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \qquad (2.4)$$

в котором $f(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$,..., $a_n(x)$ - заданные на $[a;b]$ функции, называется линейным неоднородным уравнением n-ого порядка.

Если $f(x) \equiv 0, \forall x \in [a;b]$, то уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (2.5)$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением n-ого порядка.

Теорема 2.2. Если на отрезке $[a;b]$ коэффициенты $a_k(x)$, $k = 1,2,\ldots n$ и правая часть $f(x)$ уравнения (2.4) непрерывны, то на всем этом отрезке существует, и притом единственное, решение дифференциального уравнения (2.4) с начальными условиями

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y'_o, \ldots ,\ y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}, \quad \text{где } x_o \in [a;b].$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что уравнения (2.4) и (2.5) удовлетворяют этой теореме.

Одним из замечательных свойств линейных дифференциальных уравнений является то, что общее решение можно найти по известным частным решениям.

Теорема 2.3. (о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения). Всякое линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n имеет ровно n линейно независимых частных решений $y_1(x),\ldots,y_n(x)$. Общее решение уравнения (2.5) имеет вид $y(x) = C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x)$, где $C_1,\ldots,C_n$ - произвольные постоянные.

Всякая система из n линейно независимых решений однородного дифференциального уравнения n - ого порядка называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией функций из фундаментальной системы решений.

Запишем условие линейной независимости системы функций. Пусть функции $y_1(x),...,y_n(x)$ имеют непрерывные производные до порядка $n-1$ включительно. Тогда справедлива

Теорема 2.4. 1) Если функции $y_1(x),...,y_n(x)$ линейно зависимы на $(a;b)$, то определитель Вронского

$$W[x]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv 0 \ , \ \forall x \in (a;b).$$

2) Если хотя бы в одной точке $x_o \in (a;b)$ определитель Вронского $W(x_o) \neq 0$, то функции $y_1(x),...,y_n(x)$ линейно независимы на $(a;b)$.

Таким образом, определитель Вронского играет определяющую роль в выяснении линейной зависимости системы функций.

Если определитель Вронского построен на частных решениях $y_1(x),...,y_n(x)$ уравнения (2.5), то справедлива формула Лиувилля – Остроградского:

$$W(x)=W(x_0)\cdot exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt\right), \qquad (2.6),$$

где $a_1(x)$ - первый коэффициент уравнения (2.5).

Для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ фундаментальная система состоит из двух линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x)$; его общее решение находится по формуле $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Если для такого уравнения известно одно частное решение $y_1(x)$, то второе его решение, линейно независимое с первым, можно найти по формуле, являющейся следствием формулы Лиувилля – Остроградского:

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx. \qquad (2.7)$$

<u>**Пример 3.**</u> Найти общее решение дифференциального уравнения $y''(1+2x) + 4xy' - 4y = 0$, проверив, что одно его частное решение имеет вид $y_1(x) = x$.

Решение. Разделим обе части данного уравнения на $1 + 2x \neq 0$:

$$y'' + \frac{4x}{1+2x}y' - \frac{4}{1+2x}y = 0. \qquad (2.8)$$

Здесь коэффициенты $a_1(x) = \dfrac{4x}{1+2x}$ и $a_2(x) = -\dfrac{4}{1+2x}$ непрерывны при $x \neq -\dfrac{1}{2}$, следовательно, решение дифференциального уравнения существует в области $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; \infty\right)$.

Подставляя $y_1(x) = x$ в (2.8), получим тождество, поэтому $y_1(x) = x$ является решением этого уравнения. Найдем второе частное решение по формуле (2.7). Сначала вычислим

$$\int a_1(x)dx = \int \frac{4x}{1+2x}dx = 2x - \ln(2x+1).$$

Произвольную постоянную C при вычислении неопределенного интеграла можно не писать, так как нас интересует лишь одно частное решение.

Теперь найдем

$$\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx = \int \frac{e^{\ln(2x+1)-2x}}{x^2}dx = \int \frac{(2x+1)e^{-2x}}{x^2}dx .$$

Заметим, что подынтегральное выражение в последнем интеграле является производной от функции $\left(-\dfrac{e^{-2x}}{x}\right)$, поэтому

$$\int \frac{(2x+1)e^{-2x}}{x^2}dx = -\int \left(\frac{e^{-2x}}{x}\right)' dx = -\frac{e^{-2x}}{x}.$$

(Постоянную C здесь также можно не писать).

Таким образом, второе частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y_2(x) = x\left(-\frac{e^{-2x}}{x}\right) = -e^{-2x}.$$

Проверим, что два полученных решения линейно независимы. Вычислим определитель Вронского:

$$W[y_1; y_2] = \begin{vmatrix} x & -e^{-2x} \\ 1 & 2e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-2x}(2x+1) \neq 0 \quad \text{при } x \neq -\frac{1}{2}.$$

В рассматриваемой области $W \neq 0$, откуда следует, что решения $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = -e^{-2x}$ линейно независимы. По теореме 2.3 общее решение дифференциального уравнения будет иметь вид:

$y = C_1 x + C_2 e^{-2x}$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

2.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{2.9}$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - некоторые постоянные числа.

Условия теоремы (2.2) существования и единственности решения задачи Коши выполняются на всей плоскости XOY.

Будем искать частное решение из фундаментальной системы решений в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ - некоторая константа.

Тогда $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, ..., $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$.

Подставим в уравнение (2.9):

$$e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0.$$

Т.к. $e^{\lambda x} \neq 0$, получим, что функция $y = e^{\lambda x}$ является решением дифференциального уравнения (2.9) тогда и только тогда, когда число λ является решением уравнения:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (2.10)$$

Это уравнение называется <u>характеристическим уравнением </u>и получается из линейного однородного уравнения заменой в нем производных искомой функции соответствующими степенями λ, причем сама функция заменяется единицей. Характеристическое уравнение является уравнением n-ой степени и имеет n корней (действительных или комплексных), среди которых могут быть и равные.

Фундаментальная система решений линейного однородного уравнения строится в зависимости от характера корней характеристического уравнения согласно таблице 2.1.

Если найдена фундаментальная система решений $y_1(x),\ldots,y_n(x)$, то общее решение (2.9), согласно теореме 2.3, записывается в виде:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Таблица 2.1

Корни характеристического уравнения	К-во лин. незав. реш.	Линейно независимые решения
λ - действительный простой корень	1	$y = e^{\lambda x}$
λ - действительный корень кратности k	k	$y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = x e^{\lambda x}$, $y_3 = x^2 e^{\lambda x}$, $\ldots y_k = x^{k-1} e^{\lambda x}$.
$\alpha \pm \beta i$ - пара простых комплексно сопряженных корней	2	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$
$\alpha \pm \beta i$ - пара компл. сопряженных корней кратности k	$2k$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$, $y_3 = x e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_4 = x e^{\alpha x} \sin \beta x$, …………………………………………… $y_{2k-1} = x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_{2k} = x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Пример 5. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y^{(5)} - 8y^{(2)} = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^5 - 8\lambda^2 = 0$ имеет пять корней: $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_{4,5} = -1 \pm \sqrt{3} i$. Этим корням соответствует пять функций, составляющих фундаментальную систему решений:

$$y_1(x) = e^{0 \cdot x} = 1, \quad y_2(x) = x \cdot e^{0 \cdot x} = x, \quad y_3(x) = e^{2x},$$

$$y_4(x) = e^{-x} \cos(\sqrt{3}\, x), \quad y_5(x) = e^{-x} \sin(\sqrt{3}\, x).$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-x} \cos(\sqrt{3} x) + C_5 e^{-x} \sin(\sqrt{3} x).$$

2.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)}+a_1\,y^{(n-1)}+a_2\,y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}\,y'+a_n\,y=f(x)\ . \qquad (2.11)$$

Теорема 2.5. (о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения). Общее решение линейного неоднородного уравнения (2.11) представляет собой сумму некоторого его частного решения $y^*(x)$ и общего решения $y^o(x)$ соответствующего однородного уравнения (2.9), то есть общее решение имеет вид: $y(x)=y^*(x)+y^o(x)$.

Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, то общее решение (2.11) имеет вид:

$$y(x)=y^*(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x),$$

где $y^*(x)$ - частное решение линейного неоднородного уравнения.

2.4.1. Уравнения со специальной правой частью.

Для специального вида правых частей $f(x)$ для нахождения частного решения $y^*(x)$ можно применить метод подбора частного решения (метод неопределенных коэффициентов).

Общий вид правой части $f(x)$ уравнения (2.11), при которой применяется метод подбора, имеет вид:

$$f(x)=e^{\alpha x}\left[T_n(x)\cos\beta x+R_m(x)\sin\beta x\right], \qquad (2.12)$$

где α и β - постоянные, $T_n(x)$ и $R_m(x)$ - многочлены степени n и m соответственно с постоянными действительными коэффициентами.

Частное решение (2.11) в этом случае следует искать в виде:

$$y^*(x) = x^p \cdot e^{\alpha x}\left[T_s(x)\cos\beta x + R_s(x)\sin\beta x\right], \qquad (2.13)$$

где p равно показателю кратности корня $\alpha + i\beta$ в характеристическом уравнении $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ (если характеристическое уравнение такого корня не имеет, то следует положить $p = 0$), $T_s(x)$ и $R_s(x)$ - полные многочлены от x степени s, причем s равно наибольшему из чисел n и m: $s = \max\{n; m\}$. Подчеркнем, что многочлены $T_s(x)$ и $R_s(x)$ должны быть полными, т.е. содержать все степени x от нуля до s с различными неопределенными коэффициентами.

Неопределенные коэффициенты можно найти из системы линейных алгебраических уравнений, которая получается приравниванием коэффициентов при подобных членах в правой и левой частях исходного уравнения после подстановки в него $y^*(x)$.

Частные случаи правых частей и соответствующих видов частных решений приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Вид правой части $f(x)$, вид числа $\alpha + i\beta$ в (2.13)	Кратность корня $\alpha + i\beta$ в характ. уравнении	Вид частного решения $y^*(x)$
$P_n(x) = B_o x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots$ $\ldots + B_{n-1}x + B_n$ $\alpha + i\beta = 0$	Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$y^*(x) = A_o x^n + A_1 x^{n-1} +$ $\ldots + A_{n-1}x + A_n = T_n(x)$
	Число 0 является корнем характ. уравнения кратности p	$y^*(x) = x^p(A_o x^n + \ldots$ $\ldots + A_{n-1}x + A_n) =$ $= x^p \cdot T_n(x)$

Вид правой части $f(x)$, вид числа $\alpha + i\beta$ в (2.13)	Кратность корня $\alpha + i\beta$ в характ. уравнении	Вид частного решения $y^*(x)$
$e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$ $\alpha + i\beta = \alpha$	Число α <u>не является</u> корнем характеристического уравнения	$y^*(x) = e^{\alpha x} \cdot T_n(x)$
	Число α <u>является корнем</u> характ. уравнения кратности p	$y^*(x) = x^p \cdot e^{\alpha x} \cdot T_n(x)$
$e^{\alpha x} \cdot (M \sin \beta x + N \cos \beta x)$ $\alpha + i\beta$	Число $\alpha + i\beta$ <u>не является корнем</u> характеристического уравнения	$y^*(x) = e^{\alpha x}(A \cos \beta x +$ $+ B \sin \beta x)$
	Число $\alpha + i\beta$ <u>является корнем</u> характ. уравнения кратности p	$y^*(x) =$ $= x^p \cdot e^{\alpha x} \cdot (A \cos \beta x +$ $+ B \sin \beta x)$

<u>Пример 5.</u> Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$y''' - 5y'' + 6y' = 108x^2.$$

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y''' - 5y'' + 6y' = 0$. Составим для него характеристическое уравнение $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$, корнями которого являются числа $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Тогда общее решение линейного однородного уравнения имеет вид: $y^o(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.

Правая часть $f(x)=108x^2$ является многочленом второй степени, а число $\alpha=0$ является простым корнем характеристического уравнения. Согласно таблице 2.2, нужно искать частное решение в виде $y^*(x)=x\cdot(A_o x^2+A_1 x+A_2)$. Для нахождения неопределенных коэффициентов A_0, A_1, A_2 вычислим производные $(y^*)';(y^*)'';(y^*)'''$ и подставим их в данное уравнение:

$$6A_o-5(6A_o x+2A_1)+6(3A_o x^2+2A_1 x+A_2)=108x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях последнего уравнения, составим систему.

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 18A_0=108 \\ x & -30A_0+12A_1=0 \\ 1 & 6A_0-10A_1+6A_2=0 \end{array}$$

Решим систему и найдем $A_0=6$; $A_1=15$; $A_2=19$. Тогда частное решение $y^*(x)=6x^2+15x+19$, а общее решение по теореме 2.5 имеет вид:

$$y(x)=C_1+C_2 e^{2x}+C_3 e^{3x}+6x^2+15x+19.$$

Заметим: несмотря на то, что в правой части данного дифференциального уравнения некоторые коэффициенты квадратного трехчлена были равны нулю, частное решение является полным многочленом и содержит все степени x

Пример 6. Найдите решение задачи Коши:

$$y'''+y''-6y'=100xe^{2x},$$

$$y(0)=3, \qquad y'(0)=7, \qquad y''(0)=-20.$$

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y'''+y''-6y'=0$. Составим для него характеристическое уравнение $\lambda^3+\lambda^2-6\lambda=0$, корнями которого являются числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 2$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид $y^o(x) = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x}$. Поскольку правая часть $f(x) = 100xe^{2x}$ является многочленом первой степени, умноженным на e^{2x}, а число $\alpha = 2$ является простым корнем характеристического уравнения, то частное решение $y^*(x)$ ищем в виде:

$$y^*(x) = x \cdot e^{2x} \cdot (A_o x + A_1) = e^{2x}(A_o x^2 + A_1 x), \quad \text{отсюда}$$

$$(y^*)' = e^{2x}(2A_o x^2 + 2A_o x + 2A_1 x + A_1),$$

$$(y^*)'' = e^{2x}(4A_o x^2 + 8A_o x + 4A_1 x + 2A_o + 4A_1),$$

$$(y^*)''' = e^{2x}(8A_o x^2 + 24A_o x + 8A_1 x + 12A_o + 12A_1).$$

Подставляя $y^*; (y^*)'; (y^*)''; (y^*)'''$ в исходное уравнение, получаем равенство: $e^{2x}(20A_o x + 10A_1 + 14A_o) = 100xe^{2x}$.

Сокращая обе части этого равенства на $e^{2x} \neq 0$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему

$$\begin{array}{c|l} x & 20A_o = 100 \\ x^0 & 14A_o + 10A_1 = 0 \end{array}, \text{ откуда } A_o = 5,\ A_1 = -7.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y^*(x) = e^{2x}(5x^2 - 7x)$, а общее решение исходного уравнения есть функция

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 \ldots e^{2x} + 5x^2 e^{2x} - 7xe^{2x}.$$

Используя начальные условия, находим

$$\left\{\begin{array}{l} y(0) = 3 \\ y'(0) = 7 \\ y''(0) = -20 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3 = 3 \\ -3C_2 + 2C_3 - \quad 7 = 7 \\ 9C_2 + 4C_3 - 18 = -20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = -2 \\ C_3 = 4 \end{array}\right..$$

Подставим найденные значения C_1, C_2, C_3 в общее решение данного уравнения и получим искомое решение задачи Коши:

$$y(x) = 1 - 2e^{-3x} + 4e^{2x} + 5x^2e^{2x} - 7xe^{2x}.$$

Пример 7. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^x \cdot \cos\frac{x}{2}.$$

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. Составим для него характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, корнями которого являются числа $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $y^o(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Правая часть данного уравнения имеет специальный вид, приведённый в третьей строке таблицы 2.2. По её виду составляем число $\alpha + i\beta = 1 + \frac{1}{2}i$, которое не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде

$y^*(x) = e^x\left(A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2}\right)$, где A и B – неопределённые коэффициенты. Найдем производные:

$$(y^*)' = e^x \cdot \left(\left(A + \frac{B}{2}\right)\cos\frac{x}{2} + \left(B - \frac{A}{2}\right)\sin\frac{x}{2}\right),$$

$$(y^*)'' = e^x \cdot \left(\left(\frac{3A}{4} + B\right)\cos\frac{x}{2} + \left(\frac{3B}{4} - A\right)\sin\frac{x}{2}\right).$$

Подставляя $y^*; (y^*)'; (y^*)''$ в уравнение и сокращая на $e^x \neq 0$, получаем равенство $\left(-\frac{A}{4} - \frac{B}{2}\right)\cos\frac{x}{2} + \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{4}\right)\sin\frac{x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}$.

Приравнивая коэффициенты при $\cos\frac{x}{2}$ и $\sin\frac{x}{2}$ в обеих частях равенства, получаем систему

$$\begin{matrix} \cos\frac{x}{2}: \\ \sin\frac{x}{2}: \end{matrix} \quad \begin{cases} -\frac{A}{4}-\frac{B}{2}=2 \\ \frac{A}{2}-\frac{B}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{8}{5} \\ B=-\frac{16}{5} \end{cases}.$$

Таким образом, частное решение исходного дифференциального уравнения есть функция $y^*(x)=e^x\cdot\left(-\frac{8}{5}\cos\frac{x}{2}-\frac{16}{5}\sin\frac{x}{2}\right)$, а его общим решением является функция

$$y(x)=C_1 e^x+C_2 e^{2x}-\frac{8}{5}e^x\cdot\left(\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\right).$$

Замечание. Даже тогда, когда в правой части уравнения стоит выражение, содержащее только $\cos\beta x$ или только $\sin\beta x$, следует искать решение в полном виде, как это показано в таблице 2.2. Иными словами, из того, что правая часть не содержит $\cos\beta x$ или $\sin\beta x$, не следует, что частное решение уравнения не содержит этих функций. В этом мы убедились на рассмотренном примере: в правую часть уравнения входила только одна тригонометрическая функция $\cos\frac{x}{2}$, а общее решение содержит обе функции $\cos\frac{x}{2}$ и $\sin\frac{x}{2}$.

2.4.2. Принцип суперпозиции решений

Теорема 2.6.

Пусть $L[y]=y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n y$.

Если $y_1(x)$ – решение уравнения $L[y]=f_1(x)$, $y_2(x)$ – решение уравнения $L[y]=f_2(x)$, то сумма $y_1(x)+y_2(x)$ есть решение уравнения $L[y]=f_1(x)+f_2(x)$.

Принцип суперпозиции решений справедлив и для любого конечного числа решений, то есть если $y_i(x)$ – решение уравнения $L[y]=f_i(x)$, то сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i(x)$ является решением уравнения $L[y]=\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$.

Пример 8. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'''-100y'=20e^{10x}+100\cos 10x.$$

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y'''-100y'=0$. Составим для него характеристическое уравнение $\lambda^3-100\lambda=0$, корнями которого являются числа $\lambda_1=0, \lambda_2=10, \lambda_3=-10$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $y^o(x)=C_1+C_2e^{10x}+C_3e^{-10x}$. Правая часть $f(x)=20e^{10x}+100\cos 10x$ уравнения представляет собой сумму двух функций $f_1(x)=20e^{10x}$ и $f_2(x)=100\cos 10x$, имеющих специальный вид. Для нахождения частного решения уравнения воспользуемся принципом суперпозиции решений.

Найдём частное решение $y_1^*(x)$ уравнения

$$y'''-100y'=20e^{10x}. \tag{2.14}$$

Число $\alpha=10$ является простым корнем характеристического уравнения, поэтому, на основании таблицы 2.2, частное решение ищем в виде $y_1^*(x)=Axe^{10x}$. Подставляя $y_1^*(x)$ и его производные в уравнение (2.14), находим $A=\frac{1}{10}$, следовательно, $y_1^*(x)=\frac{1}{10}xe^{10x}$.

Теперь найдём частное решение $y_2^*(x)$ уравнения

$$y''' - 100y' = 100\cos 10x\ . \tag{2.15}$$

Число $\alpha + \beta i = 10i$ не является корнем характеристического уравнения, и согласно таблице 2.2, частное решение уравнения (2.15) имеет вид $y_2^*(x) = A\cos 10x + B\sin 10x$. Подставляя $y_2^*(x)$ и его производные в уравнение (2.15), находим $A = 0,\ B = -\frac{1}{20}$. Тогда $y_2(x) = -\frac{1}{20}\sin 10x$.

По принципу суперпозиции решений, складывая решения $y_1^*(x)$ и $y_2^*(x)$, получаем частное решение $y^*(x)$ исходного уравнения:

$$y^*(x) = \frac{1}{10}xe^{10x} - \frac{1}{20}\sin 10x,$$

а общим решением является функция

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{10x} + C_3 e^{-10x} + \frac{1}{10}xe^{10x} - \frac{1}{20}\sin 10x.$$

2.4.3. Метод вариации произвольных постоянных

Метод вариации позволяет найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения, если известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения.

Пусть $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения. Тогда его общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \tag{2.16}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные числа.

Общее решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

будем искать в виде, сходном с функцией (2.16), считая, что коэффициенты $C_1, C_2, \dots, C_n$ являются уже не постоянными, а функциями от x:

$$y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + \dots + C_n(x)\, y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i(x),$$

где $C_i(x)$ – дифференцируемые функции, $i = 1, 2, \dots, n$.

Производные $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ неизвестных функций можно найти как решения системы

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) + \dots + C_n'(x) y_n(x) = 0; \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) + \dots + C_n'(x) y_n'(x) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x) y_2^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-2)}(x) = 0; \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \tag{2.17}$$

Эта система является линейной неоднородной системой алгебраических уравнений относительно функций $C_i'(x)$. Главный определитель этой системы $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$, так как это определитель Вронского, построенный на фундаментальной системе решений однородного уравнения. Поэтому система имеет единственное решение $C_i'(x) = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, откуда

$C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + D_i$, где D_i – произвольные постоянные.

В частности, для уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = f(x) \tag{2.18}$$

система (2.17) имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0; \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \end{cases}$$

Решим систему по правилу Крамера. Вычислим главный определитель:

$$\Delta = W[y_1; y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

и вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

По формулам Крамера найдем $C_1'(x) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $C_2'(x) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ найдем интегрированием:

$$C_1(x) = \int C_1'(x)dx + D_1 \quad ; \quad C_2(x) = \int C_2'(x)dx + D_2,$$

где D_1 и D_2 – произвольные постоянные. Общее решение уравнения (2.18) будет иметь вид: $y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)$.

Пример 9. Решите задачу Коши.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Решение. Правая часть уравнения $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ не является функцией специального вида. Поэтому для нахождения частного решения здесь нельзя применять метод неопределённых коэффициентов. Воспользуемся методом вариации произвольных постоянных.

Фундаментальной системой решений соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$ являются функции $y_1(x) = \cos x$,. $y_2(x) = \sin x$ Тогда общее решение исходного уравнения можно искать в виде

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x. \tag{2.19}$$

Для определения функций $C_1'(x), C_2'(x)$ составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0; \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Найдём определители

$$\Delta = W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1.$$

По формулам Крамера найдем $C_1'(x) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$; $C_2'(x) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1$.

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ найдем интегрированием:

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \ln|\cos x| + D_1,$$

$$C_2(x) = \int dx = x + D_2 .$$

Подставляя функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (2.19), получим общее решение данного уравнения:
$$y(x) = \left(\ln|\cos x| + D_1\right)\cos x + \left(x + D_2\right)\sin x. \tag{2.20}$$

Для нахождения решения задачи Коши предварительно найдём

$$y'(x) = -\left(\ln|\cos x| + D_1\right)\sin x + \left(x + D_2\right)\cos x .$$

С учетом начальных условий имеем:

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\ln 1+D_1\right)\cdot 1+D_2\cdot 0 \\ -\left(\ln 1+D_1\right)\cdot 0+D_2\cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1=1 \\ D_2=0 \end{cases}.$$

Подставим теперь найденные значения $D_1=1, D_2=0$ в общее решение (2.20) и получим решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения:

$$y(x)=\left(\ln\left|\cos x\right|+1\right)\cos x+x\sin x.$$

2.5. Системы дифференциальных уравнений

Нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными функциями $y_1(t), y_2(t),\ldots, y_n(t)$ называется система

$$\begin{cases} y_1'=f_1\left(t, y_1,\ldots, y_n\right); \\ y_2'=f_2\left(t, y_1,\ldots, y_n\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'=f_n\left(t, y_1,\ldots, y_n\right). \end{cases} \qquad (2.21)$$

Решением системы на интервале (a, b) называется совокупность n непрерывно дифференцируемых на (a, b) функций $y_1=y_1(t),\ y_2=y_2(t),\ldots,$ $y_n=y_n(t),$ которые при подстановке в каждое уравнение системы обращают это уравнение в тождество.

Задача Коши для системы формулируется следующим образом:

Найдите решение $y_1=y_1(t), y_2=y_2(t),\ldots, y_n=y_n(t)$ системы (2.21), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(t_0)=y_{10}, y_2(t_0)=y_{20},\ldots, y_n(t_0)=y_{n0}, \qquad (2.22)$$

где $y_{10}, y_{20},\ldots, y_{n0}$ – заданные числа.

Для нормальной системы имеет место

Теорема 2.7 (о существовании и единственности решения задачи Коши). Пусть функции $f_i\left(t, y_1, \ldots, y_n\right), i=1,2, \ldots, n,$ непрерывны в окрестности точки $M_o\left(t_o, y_{1o}, \ldots, y_{no}\right)$ и имеют в этой окрестности непрерывные частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}, j=1,2, \ldots, n$. Тогда найдётся интервал $\left(t_o-\delta, t_o+\delta\right)$, в котором существует единственное решение нормальной системы (2.21), удовлетворяющее начальным условиям (2.22).

Общим решением нормальной системы (2.21) называется совокупность, состоящая из n функций, каждая из которых зависит от n постоянных:

$$\begin{cases} y_1(t)=y_1\left(t, C_1, \ldots, C_n\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(t)=y_n\left(t, C_1, \ldots, C_n\right). \end{cases}$$

Эта совокупность функций должна удовлетворять условиям:

1) функции $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ являются решениями системы при любых значениях постоянных $C_1, \ldots, C_n$;
2) каковы бы ни были начальные условия, найдутся такие значения $C_1, \ldots, C_n$, при которых эти функции удовлетворяют системе (2.21) и начальным условиям (2.22).

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений, причём будем считать, что независимая переменная t есть время:

$$\begin{cases} x'=f_1(t, x, y) \\ y'=f_2(t, x, y). \end{cases} \tag{2.23}$$

Такая система называется динамической.

Решения $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ этой системы определяют в параметрическом виде траекторию движения точки в плоскости XOY. Траектория движения точки называется <u>фазовой траекторией</u>, а плоскость XOY – <u>фазовым пространством</u>. Координаты вектора скорости в каждой точке фазовой траектории согласно (2.23) равны

$$\bar{\upsilon}=\left(\frac{\partial x}{\partial t};\frac{\partial y}{\partial t}\right)\Rightarrow\ \bar{\upsilon}=\left(f_1;f_2\right)..$$

Таким образом, нормальная система (2.21) определяет поле скоростей движения точки по фазовой траектории. Если функции в правой части (2.21) зависят от времени, то фазовые траектории могут пересекаться.

В случае, когда эти функции не зависят явно от времени t, система

$$\begin{cases} x'=f_1(x,y) \\ y'=f_2(x,y) \end{cases}$$

называется автономной или <u>стационарной.</u> В этом случае поле скоростей не зависит от времени, то есть стационарно. Если выполнены условия теоремы Коши, то через каждую точку фазовой плоскости проходит единственная фазовая траектория, и эти траектории не пересекаются.

<u>2.5.1. Связь между дифференциальным уравнением и системой дифференциальных уравнений</u>

Дифференциальное уравнение n–го порядка в нормальной форме $y^{(n)}=f\left(t,\ y,\ y',\dots,\ y^{(n-1)}\right)$ можно свести к системе дифференциальных уравнений.

Обратно, нормальная система дифференциальных уравнений в большинстве случаев сводится к одному дифференциальному уравнению n–го порядка, решая которое можно найти и решение исходной системы.

На этом основан один из методов интегрирования системы – **метод исключения.**

Пример 10. Найдите методом исключения решение задачи Коши для системы

$$\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 3x + 1, \end{cases} \qquad x(0) = 2, \;\; y(0) = 0. \tag{2.24}$$

Решение. Продифференцируем по t первое уравнение системы: $x'' = 3y'$ и подставим в получившееся равенство y' из второго уравнения системы. Получим $x'' = 3(3x+1)$ или $x'' - 9x = 3$.

Решая это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами, находим неизвестную функцию

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} - \frac{1}{3}. \tag{2.25}$$

Из первого уравнения системы получаем $y = \frac{1}{3}x'$.

Дифференцируя функцию (2.25) и подставляя результат в выражение для y, находим вторую неизвестную функцию $y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-3t}$.

Таким образом, общее решение системы (2.24) имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} - \dfrac{1}{3} \\ y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-3t}. \end{cases}$$

Для нахождения частного решения системы запишем начальные условия:

$$\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 - \dfrac{1}{3} = 2 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \dfrac{7}{6} \\ C_1 = \dfrac{7}{6} \end{cases}.$$

Тогда решение задачи Коши для данной системы будет иметь вид:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{7}{6}e^{3t} + \dfrac{7}{6}e^{-3t} - \dfrac{1}{3} \\ y(t) = \dfrac{7}{6}e^{3t} - \dfrac{7}{6}e^{-3t}. \end{cases}$$

2.5.2. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Система
$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + \ldots + a_{1n}(t)y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + \ldots + a_{nn}(t)y_n \end{cases} \qquad (2.26)$$

называется линейной однородной системой дифференциальных уравнений.

В дальнейшем будем считать, что функции $a_{ij}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывны.

Введём обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов,

$$\overline{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ : \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad \overline{Y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ : \\ y_n'(t) \end{pmatrix}$$ – вектор -столбцы искомых функций

и их производных.

С учётом этих обозначений, систему (2.26) можно записать в виде

$$\overline{Y}' = A \cdot \overline{Y} \qquad (2.27)$$

<u>Теорема 2.8.</u> Система n–го порядка (2.27) имеет ровно n линейно независимых вектор -столбцов решений $\overline{Y}_1,\ldots,\overline{Y}_n$. Общее решение системы имеет вид $\overline{Y}(t)=C_1\overline{Y}_1(t)+\ldots+C_n\overline{Y}_n(t)$, где $C_1,\ldots,C_n$ – произвольные постоянные.

<u>Фундаментальной системой</u> решений системы называются любые n линейно независимых вектор -столбцов решений этой системы.

2.5.3. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Если коэффициенты a_{ij} линейной однородной системы $\overline{Y}'=A\cdot\overline{Y}$ постоянны, то фундаментальную систему решений можно искать в виде

$$y_1(t)=k_1e^{\lambda t},\ y_2(t)=k_2e^{\lambda t},\ldots,\ y_n(t)=k_ne^{\lambda t}$$

или в векторной форме

$$\overline{Y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t)\\ \vdots\\ y_n(t)\end{pmatrix}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix} k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=e^{\lambda t}\cdot\overline{K}.$$

Найдем $\overline{Y}'=\lambda e^{\lambda t}\overline{K}$, подставим в систему (2.27) и сократим на $e^{\lambda t}\neq 0$. Получим уравнение $\lambda\cdot\overline{K}=A\cdot\overline{K}$, откуда

$$\left(A-\lambda E\right)\cdot\overline{K}=0, \tag{2.28}$$

где E – единичная матрица.

Однородная система (2.28) может иметь ненулевое решение $\overline{K}$, в том и только в том случае, когда её определитель равен нулю, то есть

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.29)$$

Полученное уравнение (2.29) называется характеристическим уравнением системы (2.27). Его решения называются собственными числами матрицы A. Подставляя собственные числа λ в систему (2.28), получим систему в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)k_1 + a_{12}k_2 + \dots + a_{1n}k_n = 0 \\ a_{21}k_1 + (a_{22}-\lambda)k_2 + \dots + a_{2n}k_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)k_n = 0 \end{cases}, \qquad (2.30)$$

из которой можно найти собственные векторы $\overline{K} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ матрицы A.

Рассмотрим подробнее характеристическое уравнение (2.29). Вычислив определитель, получим многочлен степени n, который имеет n действительных или комплексных корней. Рассмотрим возможные случаи.

- **Действительные простые собственные числа матрицы.**

Корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения действительны и различны. В этом случае матрица A имеет n линейно независимых собственных векторов $\overline{K}_1, \dots, \overline{K}_n$. Каждому простому действительному корню λ_i характеристического уравнения (2.29) соответствует собственный вектор $\overline{K}_i$ и решение системы (2.27):

$$\overline{Y}_i(t) = \overline{K}_i \cdot e^{\lambda_i t} = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_i t} \\ k_2 e^{\lambda_i t} \\ \dots\dots \\ k_n e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}. \qquad (2.31)$$

<u>**Пример 11.**</u> Найдите общее решение однородной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 3x \end{cases}$.

Решение. Матрица системы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$ имеет вид $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 3 \\ 3 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Вычисляя этот определитель и решая уравнение, получим собственные числа матрицы $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$, которые являются действительными и простыми корнями характеристического уравнения. Подставляя эти значения в систему $(A - \lambda E) \cdot \overline{K} = 0$, найдём соответствующие этим значениям собственные векторы. Например, для $\lambda_1 = 3$ получим систему

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3k_1 + 3k_2 = 0; \\ 3k_1 - 3k_2 = 0, \end{cases}$$

Уравнения этой системы линейно зависимы, поэтому система эквивалентна первому уравнению: $-3k_1 + 3k_2 = 0$. Придадим k_1 любое ненулевое значение, например, $k_1 = 1$, найдём из этого уравнения k_2 и запишем ненулевой собственный вектор: $\overline{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Для $\lambda_2 = -3$ получим систему

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k_1 + 3k_2 = 0\,; \\ 3k_1 + 3k_2 = 0, \end{cases}$$ из которой аналогично

определяем второй собственный вектор $\overline{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Так как корни характеристического уравнения действительны и различны, фундаментальной системой решений соответствующей линейной однородной системы согласно (2.31) являются вектор – функции

$$\overline{Y}_1(t) = \overline{K}_1 \cdot e^{3t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3\,t} = \begin{pmatrix} e^{3\,t} \\ e^{3\,t} \end{pmatrix},$$

$$\overline{Y}_2(t) = \overline{K}_2 \cdot e^{-3t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение данной системы имеет вид

$$\overline{Y}(t) = C_1\,\overline{Y}_1(t) + C_2\,\overline{Y}_2(t) = C_1\,e^{3t}\,\overline{K}_1 + C_2\,e^{-3t}\,\overline{K}_2\,;$$

$$\overline{Y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\,e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или в развёрнутом виде $\begin{cases} x(t) = C_1\,e^{3t} + C_2\,e^{-3t} \\ y(t) = C_1\,e^{3t} - C_2\,e^{-3t} \end{cases}$.

- **Комплексные простые собственные числа матрицы.**

Среди корней характеристического уравнения есть пара комплексно-сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\,\beta$ кратности 1.

Каждой такой паре соответствует два действительных решения системы

$$\overline{Y}_1(t) = \mathrm{Re}\left(\overline{K} \cdot e^{(\alpha + i\,\beta)t}\right), \quad \overline{Y}_2(t) = \mathrm{Im}\left(\overline{K} \cdot e^{(\alpha + i\,\beta)t}\right), \tag{2.32}$$

где $\overline{K}$ – собственный вектор, соответствующий значению $\lambda = \alpha + i\beta$.

<u>Пример 12.</u> Найдите общее решение однородной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3y - 2x \end{cases}$.

Решение. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Для нахождения собственного вектора, соответствующего корню $\lambda = 2+i$, составим систему $\left(A - \lambda E\right) \cdot \overline{K} = 0$: $\begin{cases} (-1-i)k_1 + k_2 = 0, \\ -2k_1 + (1-i)k_2 = 0. \end{cases}$

Уравнения этой системы линейно зависимы, поэтому система эквивалентна первому уравнению. Придадим k_1 любое ненулевое значение, например, $k_1 = 1$, найдём из этого уравнения k_2 и запишем ненулевой собственный вектор: $\overline{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

Так как корни характеристического уравнения комплексные, фундаментальной системой решений соответствующей линейной однородной системы согласно (2.32) являются вектор – функции:

$$\overline{Y}_1(t) = \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)\,t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix},$$

$$\overline{Y}_2(t) = \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)\,t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\sin t \\ e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}..$$

Общее решение данной системы имеет вид

$$\overline{Y}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}$$

или в развёрнутом виде

$$\begin{cases}x(t)=C_1e^{2t}\cos t+C_2e^{2t}\sin t,\\ y(t)=(C_1+C_2)\,e^{2t}\cos t+(C_2-C_1)\,e^{2t}\sin t.\end{cases}$$

- **Кратные действительные собственные числа матрицы.**

Пусть λ – действительный корень характеристического уравнения кратности $p\ge 2$. Для каждого такого корня соответствующее решение системы ищем в виде

$$\overline{Y}(t)=\begin{pmatrix}k_{11}+k_{12}\,t+\ldots+k_{1p}\,t^{\,p-1}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ k_{n1}+k_{n2}\,t+\ldots+k_{np}\,t^{\,p-1}\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda\,t},\tag{2.33}$$

где коэффициенты $k_{i\,j}$ находятся из системы алгебраических уравнений, получающейся с помощью приравнивания коэффициентов при равных степенях при подстановке вектора $\overline{Y}$ в исходную систему.

В частности, при $p=1$ решение следует искать в виде $\overline{Y}(t)=\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda\,t}$, при $p=2$ - в виде $\overline{Y}(t)=\begin{pmatrix}k_{11}+k_{12}\,t\\ k_{21}+k_{22}\,t\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda\,t}$.

Пример 13. Найдите общее решение однородной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases}x'=2x-y\\ y'=4x+6y\end{cases}$.

Решение. Матрица системы $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 6\end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 4 & 6-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2=0$ имеет корень $\lambda=4$ кратности 2. Поэтому согласно (2.33) решение системы ищем в виде

$$\overline{Y}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_{11}+k_{12}t\\ k_{21}+k_{22}t\end{pmatrix}\cdot e^{4t}.$$

Тогда $$\overline{Y}'(t)=\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_{12}\\ k_{22}\end{pmatrix}\cdot e^{4t}+4\cdot\begin{pmatrix}k_{11}+k_{12}t\\ k_{21}+k_{22}t\end{pmatrix}\cdot e^{4t}$$

Подставляем эти выражение в исходную систему и сокращаем на $e^{4t}\neq 0$:

$$\begin{pmatrix}k_{12}\\ k_{22}\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}k_{11}\\ k_{21}\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}k_{12}\\ k_{22}\end{pmatrix}\cdot t=\begin{pmatrix}2k_{11}-k_{21}\\ 4k_{11}+6k_{21}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2k_{12}-4k_{22}\\ 4k_{12}+6k_{22}\end{pmatrix}\cdot t.$$

Приравнивая коэффициенты при свободных членах, не содержащих t, и при членах, содержащих t, получаем систему:

$$\begin{array}{l} t^o: \\ t^o: \\ t^1: \\ t^1: \end{array}\quad\begin{cases}k_{12}+2k_{11}+k_{21}=0,\\ k_{22}-4k_{11}-2k_{21}=0\\ 2k_{12}+k_{22}=0,\\ -2k_{22}-4k_{12}=0.\end{cases}$$

Уравнения системы линейно зависимы, ранг системы равен 2, поэтому система имеет бесконечно много решений, причем 2 неизвестных являются свободными. Полагая, например, $k_{11}=C_1$; $k_{12}=C_2$, из системы получим $k_{21}=-2C_1-C_2$; $k_{22}=-2C_2$.

Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид:

$$\overline{Y}(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1+C_2t\\ -(2C_1+C_2)-2C_2t\end{pmatrix}\cdot e^{4t}.$$

2.5.4. Метод вариации произвольных постоянных

Зная фундаментальную систему решений $\overline{Y_1}(t),\ldots,\overline{Y_n}(t)$ однородной системы $\overline{Y}'=A\cdot\overline{Y}$, методом вариации произвольных постоянных можно найти решение неоднородной системы

$$\overline{Y}'=A\cdot\overline{Y}+\overline{F}, \tag{2.34}$$

где $\overline{F}(t)=\begin{pmatrix} f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}$ – вектор неоднородных частей системы.

Метод вариации произвольных постоянных состоит в том, что решение системы (2.34) ищется в виде

$$\overline{Y}(t)=C_1(t)\cdot\overline{Y_1}(t)+\ldots+C_n(t)\cdot\overline{Y_n}(t), \tag{2.35}$$

где $C_i(t)$ – некоторые непрерывно – дифференцируемые функции. Учитывая, что $\overline{Y_i}'=A\cdot\overline{Y_i}$, функции $C_i'(t)$ можно найти из системы

$$C_1'(t)\cdot\overline{Y_1}(t)+\ldots+C_n'(t)\cdot\overline{Y_n}(t)=\overline{F}(t). \tag{2.36}$$

<u>**Пример 14.**</u> Найдите решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных

$$\begin{cases} x'=3y,\\ y'=3x+1,\end{cases}\qquad x(0)=2,\ y(0)=0.$$

Решение. Перепишем систему в виде (2.34):

$$\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

В этом случае вектор неоднородных частей системы имеет вид $\overline{F}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

В примере 11 найдена фундаментальная система решений и общее решение соответствующей однородной системы:

$$\overline{Y}^{o}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Согласно (2.35) будем искать решение неоднородной системы в виде:

$$\overline{Y}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=C_1(t)\cdot e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2(t)\cdot e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}. \tag{2.37}$$

Неизвестные функции $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$ согласно (2.36) найдём из системы

$$\begin{cases}C_1'(t)\,e^{3t}+C_2'(t)\,e^{-3t}=0\\C_1'(t)\,e^{3t}-C_2'(t)\,e^{-3t}=1\end{cases}.$$

Решая эту систему, находим $C_1'(t)=\frac{1}{2}e^{-3t}$, $\quad C_2'(t)=-\frac{1}{2}e^{3t}$, откуда

$$C_1(t)=\frac{1}{2}\int e^{-3t}dt=-\frac{1}{6}e^{-3t}+D_1,$$

$$C_2(t)=-\frac{1}{2}\int e^{3t}dt=-\frac{1}{6}e^{3t}+D_2.$$

Здесь D_1 и D_2 - произвольные постоянные.

Подставляя найденные функции в систему (2.37), получаем общее решение:

$$\begin{cases}x(t)=D_1e^{3t}+D_2e^{-3t}-\dfrac{1}{3}\\y(t)=D_1e^{3t}-D_2e^{-3t}.\end{cases}$$

Найдем значения D_1 и D_2 из начальных условий:

$$\begin{cases} x(0)=2 \\ y(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1+D_2-\dfrac{1}{3}=2 \\ D_1-D_2=0 \end{cases}, \qquad \text{откуда } D_1=D_2=\frac{7}{6}.$$

Запишем теперь решение задачи Коши для исходной системы:

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{7}{6}e^{3t}+\dfrac{7}{6}e^{-3t}-\dfrac{1}{3}, \\ y(t)=\dfrac{7}{6}e^{3t}-\dfrac{7}{6}e^{-3t}. \end{cases}$$

2.5.5. Метод неопределённых коэффициентов

Если коэффициенты системы $\overline{Y}'=A\cdot\overline{Y}+\overline{F}$ постоянны, а координаты вектора $\overline{F}$ неоднородных частей имеют вид $f_i(t)=e^{\alpha t}\left(P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t\right)$, где $P(t), Q(t)$ – многочлены, то вектор частных решений системы $\overline{Y}^*(t)$ можно найти методом неопределённых коэффициентов. Общее решение системы запишется в виде

$$\overline{Y}(t)=\overline{Y}^o(t)+\overline{Y}^*(t), \qquad (2.38)$$

где $\overline{Y}(t)$ – общее решение линейной неоднородной системы,

$\overline{Y}^o(t)$ – общее решение соответствующей линейной однородной системы,

$\overline{Y}^*(t)$ – частное решение линейной неоднородной системы. Аналогичный метод был подробно разобран при решении дифференциальных уравнений.

Пример 15. Решите задачу Коши для системы дифференциальных уравнений методом неопределённых коэффициентов

$$\begin{cases} x'=3y, \\ y'=3x+1, \end{cases} \qquad x(0)=2,\ y(0)=0.$$

Решение. Перепишем систему в виде (2.34):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В примере 11 найдена фундаментальная система решений и общее решение соответствующей однородной системы:

$$\overline{Y}^{o}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\, e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение $\overline{Y}^{*}(t)$ системы определяется так же, как и для дифференциального уравнения. Так как вектор неоднородных частей системы состоит из многочленов: $\overline{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение $\overline{Y}^{*}(t)$ ищется в виде $\overline{Y}^{*}(t) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} x^{*}(t) = A \\ y^{*}(t) = B \end{cases}$. Для определения чисел A, B найдем производные и подставим $x^{*}(t)$ и $y^{*}(t)$ в исходную систему. Получим $\begin{cases} 0 = 3B \\ 0 = 3A + 1 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = 0 \end{cases}$.

Согласно (2.38), общее решение данной системы имеет вид:

$$\overline{Y}(t) = \overline{Y}^{o}(t) + \overline{Y}^{*}(t) = C_1\, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\, e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x(t) = C_1\, e^{3t} + C_2\, e^{-3t} - \dfrac{1}{3}, \\ y(t) = C_1\, e^{3t} - C_2\, e^{-3t}. \end{cases}$$

Такой же результат был получен в примере 14. Следовательно, и решение задачи Коши будет иметь этот же вид:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{7}{6}e^{3t} + \dfrac{7}{6}e^{-3t} - \dfrac{1}{3}, \\ y(t) = \dfrac{7}{6}e^{3t} - \dfrac{7}{6}e^{-3t}. \end{cases}$$

2.6. Элементы теории устойчивости

Пусть некоторое явление описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n), \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (2.39)$$

с начальными условиями $y_i(t_o) = y_{oi}$., $i = 1, 2, ..., n$

Эти условия обычно являются результатом измерений и получены с некоторой точностью. Если сколь угодно малые изменения начальных условий способны сильно изменить решение, то решение системы с выбранными неточными начальными условиями не имеет никакого значения и не может описывать явление даже приближённо.

Изучением характера поведения решения при изменении начальных условий занимается теория устойчивости.

Если переменная t изменяется на некотором малом промежутке $|t - t_o| \le T$, то справедлива

Теорема 2.9. (о непрерывной зависимости решения от начальных условий).

Пусть дана система дифференциальных уравнений $\dfrac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, ..., y_n)$,

$i = 1, 2, ..., n$. Пусть $\overline{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ .... \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ - решение системы, удовлетворяющее начальным условиям $y_i(t_o) = y_{oi}$. Если функции $f_i(t, y_1, ..., y_n)$ непрерывны в некоторой области $D \subset R^{n+1}$ и имеют в этой области ограниченные частные производные $\left|\dfrac{\partial f_j}{\partial y_i}\right| \le N$, то решение системы $\overline{Y}(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $y_i(t_o) = y_{oi}$, непрерывно зависит от начальных данных. А именно, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, такое, что для любого решения системы $\tilde{\overline{Y}}(t)$, начальные значения которого по каждой из координат отличаются на δ :

$\left|y_{oi} - \tilde{y}_{oi}\right| < \delta$ на промежутке $\left|t - t_o\right| \le T$ выполняются неравенства: $\left|y_i(t) - \tilde{y}_i(t)\right| < \varepsilon$, $i = 1, 2, ..., n$.

Если аргумент изменяется на бесконечном промежутке $t \in (t_o; +\infty)$, то вводится

<u>Определение</u>. Решение $\overline{Y}(t)$ системы (2.39) с начальными условиями $y_i(t_o) = y_{oi}$ $\quad i = 1, 2, ..., n$ называется <u>устойчивым по Ляпунову</u>, если $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0$ такое, что для любого другого решения системы $\tilde{\overline{Y}}(t)$, начальные значения которого по каждой из координат отличаются на δ :

$\left|y_i(t_o) - \tilde{y}_i(t_o)\right| < \delta$, $\quad i = 1, 2, ..., n \quad$ на промежутке $t \in (t_o; +\infty)$

справедливы неравенства: $\quad \left|y_i(t_o) - \tilde{y}_i(t_o)\right| < \varepsilon$, $\quad i = 1, 2, ..., n$.

Таким образом, решение $\overline{Y}(t)$ устойчиво по Ляпунову, если близкие к нему по начальным условиям решения остаются близкими и для всех $t \ge t_o$ (рис.1).

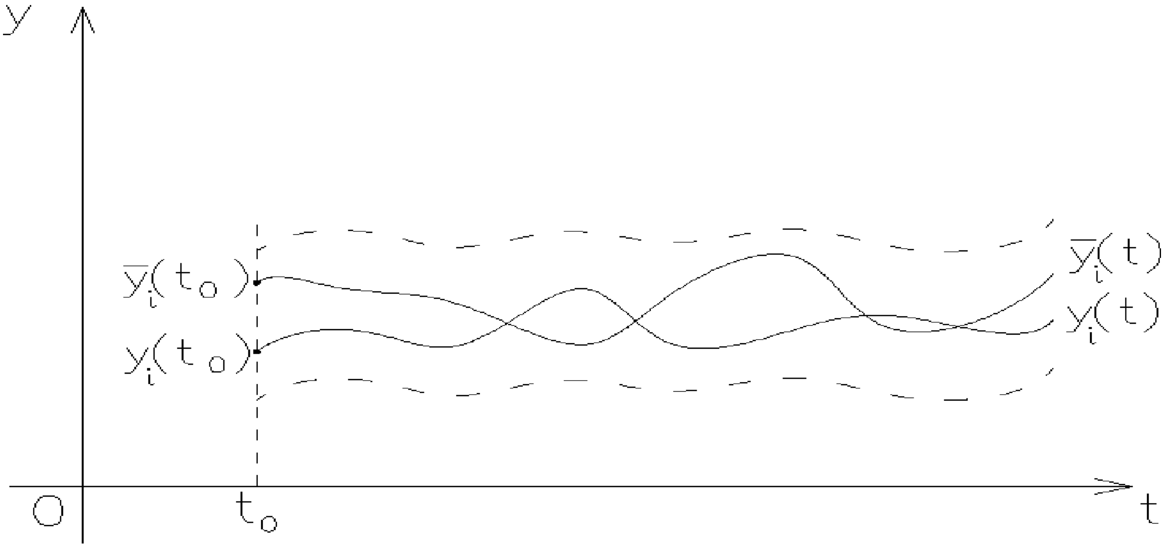


Рис.1
Устойчивость по Ляпунову

Если вектор решений системы $\overline{Y}(t)$ удовлетворяет условиям:

1) решение $\overline{Y}(t)$ устойчиво по Ляпунову;

2) для любого другого вектора решений системы $\tilde{\overline{Y}}(t)$, начальные значения которого по каждой из координат отличаются на δ: $\left|y_i(t_o) - \tilde{y}_i(t_o)\right| < \delta$, $i = 1,2,...,n$, на промежутке $t \in (t_o; +\infty)$ выполняются условия $\lim\limits_{t\to\infty}\left| y_i(t) - \tilde{y}_i(t)\right| = 0$, $i = 1,2,...,n$,

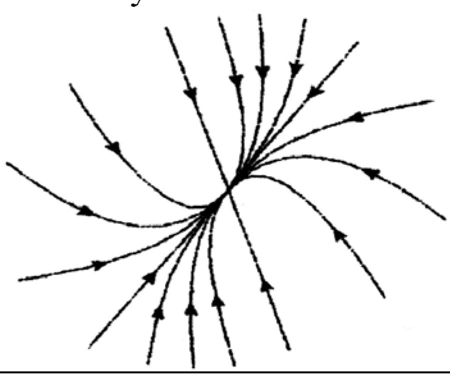
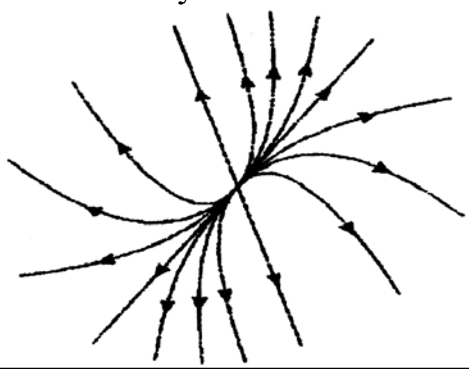
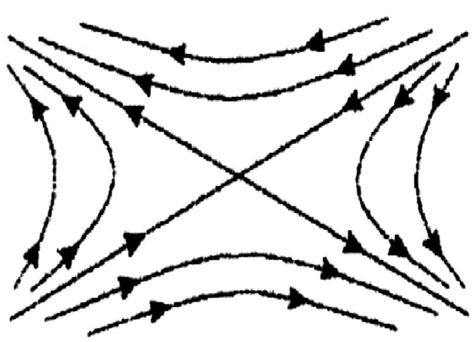
то решение системы $\overline{Y}(t)$ называется асимптотически устойчивым.

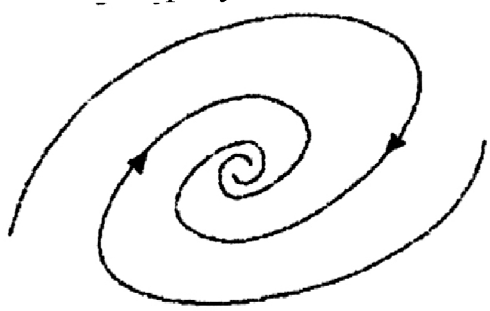
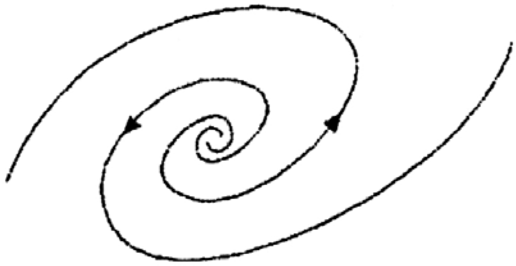
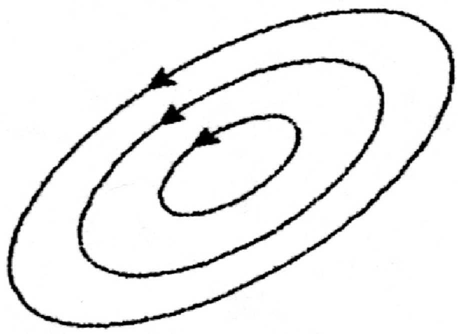
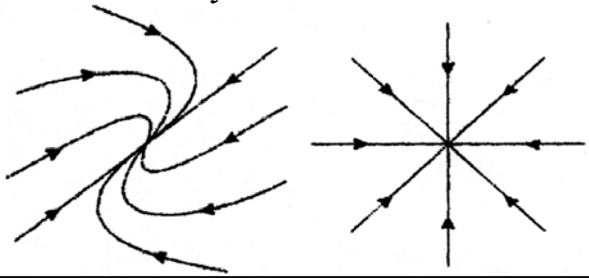
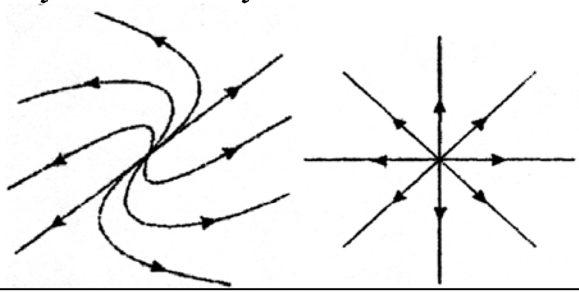
Исследование решения неоднородной системы на устойчивость по Ляпунову сводится к исследованию на устойчивость тривиального решения соответствующей однородной системы согласно следующей теореме.

Теорема 2.10. . Решение линейной неоднородной системы (2.34) $\overline{Y}' = A \cdot \overline{Y} + \overline{F}$ устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) нулевое решение (точка покоя) соответствующей однородной системы $\overline{Y}' = A \cdot \overline{Y}$.

В общем случае исследование на устойчивость проводится с помощью функций Ляпунова. Однако, для системы двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вывод об устойчивости можно сделать на основании классификации точек покоя, приведенной в таблице 2.2.

Таблица 2.2.

Корни λ_1,λ_2		Характер точки покоя	Устойчивость точки покоя
Действитель-ные: $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$	Устойчивый узел 	Асимптотически устойчива
Действитель-ные: $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$	Неустойчивый узел 	Неустойчива
Действитель-ные: $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	Седло 	Неустойчива

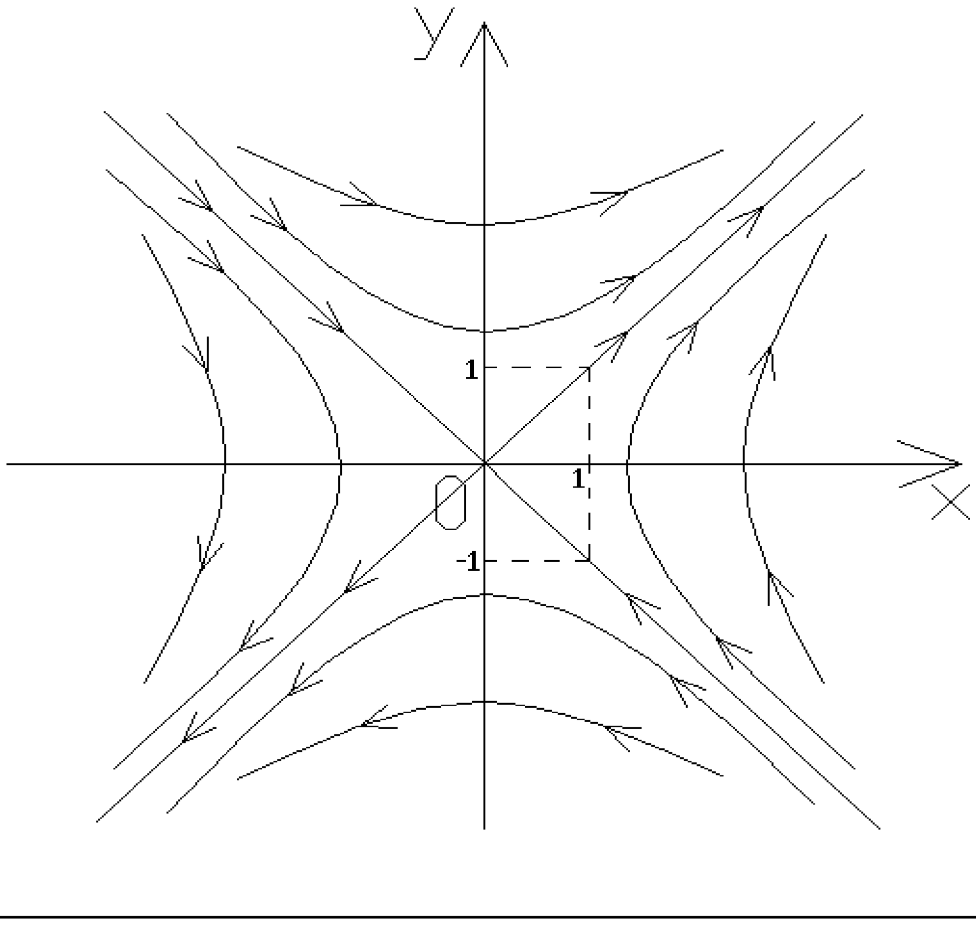
Корни λ_1,λ_2		Характер точки покоя	Устойчивость точки покоя
Комплексные корни $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\alpha < 0$ $\beta \neq 0$	Устойчивый фокус 	Асимптотически устойчива
Комплексные корни $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\alpha > 0$ $\beta \neq 0$	Неустойчивый фокус 	Неустойчива
Комплексные корни $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\alpha = 0$ $\beta \neq 0$	Центр 	Устойчива
Действительные, кратности 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\lambda < 0$	Устойчивый узел 	Асимптотически устойчива
	$\lambda > 0$	Неустойчивый узел 	Неустойчива

Пример 16 . Исследовать решение системы из примера 15 на устойчивость.

Решение. В примере 11 для соответствующей однородной системы были найдены собственные числа $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$ и собственные векторы

$\overline{Y_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{Y_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Так как характеристические числа $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$ действительны и имеют разные знаки, то по приведённой таблице 2.2 точка покоя соответствующей однородной системы представляет собой седло.

С помощью собственных векторов, которые образуют асимптоты гипербол, изобразим фазовые траектории однородной системы вблизи точки покоя на фазовой плоскости:



Точка покоя однородной системы типа «седло» является неустойчивой, следовательно, по теореме 2.10 неустойчивым будет и решение данной неоднородной системы.

Заключение

Во втором этапе курсовой работы по математике рассмотрены основные методы интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков: методы понижения порядка, интегрирование однородных и неоднородных линейных уравнений с переменными и постоянными коэффициентами. Изучены методы интегрирования нормальных систем дифференциальных уравнений: метод исключения, метод собственных чисел и векторов, метод вариации произвольных постоянных, метод подбора частного решения для систем со специальной правой частью. Рассмотрены элементы теории устойчивости и способы анализа решений систем дифференциальных уравнений на устойчивость.

Задача № 17 (2 этап курсовой работы)

Проверьте, что функция $y_1(x) = x$ является частным решением данного уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения

1. $y'' \cdot (x^2 + 2) - 2x \cdot y' + 2y = 0$
2. $y'' \cdot (1 - 3x) + 9x \cdot y' - 9y = 0$
3. $y'' \cdot (ln\, 2x - 1) \cdot x^2 - x \cdot y' + y = 0$
4. $y'' \cdot (sin\, x - x\, cos\, x) - x\, sin\, x \cdot y' + y \cdot sin\, x = 0$
5. $y'' \cdot (2x^3 + 1) - 6x^2 \cdot y' + 6xy = 0$
6. $y'' \cdot (1 - x^2) + 2x \cdot y' - 2y = 0$
7. $y'' \cdot (4x + 1) + 16x \cdot y' - 16y = 0$
8. $y'' \cdot (ln\, 3x - 1) \cdot x^2 - x \cdot y' + y = 0$
9. $y'' \cdot (shx - xchx) + xshx \cdot y' - y \cdot shx = 0$
10. $y'' \cdot (1 - 2x^3) + 6x^2 \cdot y' - 6xy = 0$
11. $y'' \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot y' + 2y = 0$

12. $y''\cdot(1-5x)+25x\cdot y'-25y=0$

13. $y''\cdot(1-ln\,4x)\cdot x^2+x\cdot y'-y=0$

14. $y''\cdot(cos\,x+x\,sin\,x)-x\,cos\,x\cdot y'+y\cdot cos\,x=0$

15. $y''\cdot\left(2x^3+2\right)-6x^2\cdot y'+6xy=0$

16. $y''\cdot\left(3-x^2\right)+2x\cdot y'-2y=0$

17. $y''\cdot(1+6x)+36x\cdot y'-36y=0$

18. $y''\cdot(ln\,x-1)\cdot x^2-x\cdot y'+y=0$

19. $y''\cdot(chx-xshx)+xchx\cdot y'-y\cdot chx=0$

20. $y''\cdot\left(2-2x^3\right)+6x^2\cdot y'-6xy=0$

21. $y''\cdot\left(2-x^2\right)+2x\cdot y'-2y=0$

22. $y''\cdot(1-x)-x\cdot y'-y=0$

23. $y''\cdot(1-\ln 5x)\cdot x^2+x\cdot y'-y=0$

24. $y''\cdot\left(\sin^2 x-x\sin 2x\right)+2x\cos 2x\cdot y'-2y\cdot\cos 2x=0$

25. $y''\cdot\left(3-2x^3\right)+6x^2\cdot y'-6xy=0$

26. $y''\cdot\left(6-x^2\right)+2x\cdot y'-2y=0$

27. $y''\cdot(1-7x)+49x\cdot y'-49y=0$

28. $y''\cdot(\ln 6x-1)\cdot x^2-x\cdot y'+y=0$

29. $y''\cdot\left(\cos^2 x+x\sin 2x\right)-2x\cos 2x\cdot y'+2y\cdot\cos 2x=0$

30. $y''\cdot(1+8x)+64x\cdot y'-64y=0$

31. $y''\cdot(1+2x)+4x\cdot y'-4y=0$

Учебное издание

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К КУРСОВОЙ РАБОТЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
(Этап 2)

Составители: *Бушков Станислав Владимирович*
Коломиец Людмила Вадимовна