ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

САМАРА 2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний*

САМАРА
Издательство СГАУ
2008

УДК 517.3
ББК 22.19

Составители: *О.А. Васильева, С.А. Михалкина*

Рецензент д-р техн. наук, проф. Б. А. Горлач

Криволинейные интегралы и их приложения: метод. указания / сост. *О.А. Васильева, С.А. Михалкина.* – Самара : Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008. – 40 с.

Методические указания содержат теоретические сведения по криволинейным интегралам первого и второго рода, а также образцы решения задач по теме «Криволинейные интегралы и их приложения». Предлагаются индивидуальные задания для выполнения типовых расчетов.

Методические указания выполнены на кафедре высшей математики и предназначены для студентов инженерно-технических специальностей Самарского государственного аэрокосмического университета.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Криволинейные интегралы первого рода

1.1. Определение и свойства криволинейного интеграла первого рода

Пусть на плоскости XOY задана кусочно-гладкая кривая l, в точках которой определена непрерывная функция $f(x, y)$.

Выполним следующие действия:

1) Кривую l произвольным образом разобьем на n элементарных (частичных) дуг l_i длиной Δl_i соответственно, $i = 1, 2, ..., n$.

Обозначим за $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i$ – максимальную длину частичной дуги l_i.

2) На каждой элементарной дуге l_i выберем произвольную точку (x_i, y_i) и вычислим в ней значение функции $f(x_i, y_i)$.

3) Составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i$.

Определение. Если существует предел последовательности интегральных сумм $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i$, не зависящий ни от способа разбиения дуги l на части l_i, ни от выбора точек $(x_i, y_i) \in l_i$, то этот предел называется **криволинейным интегралом первого рода по дуге l от функции $f(x, y)$** и обозначается

$$\int\limits_l f(x, y)\,dl = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i. \tag{1}$$

Аналогично, если l – кусочно-гладкая кривая в пространстве $\boldsymbol{R}^3$, а функция $f(x, y, z)$ непрерывна в точках этой кривой, то криволинейный интеграл по дуге l определяется равенством

$$\int\limits_l f(x, y, z)\,dl = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i. \tag{2}$$

Достаточные условия существования криволинейного интеграла: непрерывность функции f и гладкость кривой l.

Свойства криволинейного интеграла первого рода

1. Линейность.

Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ – функции, непрерывные в точках кривой l. Тогда для любых действительных чисел c_1 и c_2 справедливо соотношение

$$\int_l [c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)]\, dl = c_1 \int_l f(x, y)\, dl + c_2 \int_l g(x, y)\, dl .$$

2. Аддитивность.

Если кусочно-гладкая кривая l состоит из конечного числа непересекающихся дуг l_k, $k = 1, 2, ..., n$, то $\int_l f(x, y)\, dl = \sum_{k=1}^{n} \int_{l_k} f(x, y)\, dl$.

3. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования.

Если кривая l соединяет точки A и B, то криволинейный интеграл первого рода по дуге l от A до B равен интегралу по этой дуге от B до A. Это символически записывается в виде

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = \int_{BA} f(x, y)\, dl .$$

4. Оценка модуля интеграла.

Справедливо неравенство $\left| \int_l f(x, y)\, dl \right| \le \int_l |f(x, y)|\, dl$.

5. Теорема о среднем.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в точках кривой l, то существует точка $(\xi, \eta) \in l$ такая, что $\int_l f(x, y)\, dl = f(\xi, \eta) \cdot L$, где L – длина кривой l.

6. Масса дуги.

Рассмотрим в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ гладкую дугу l. Предположим, что в ее точках непрерывно распределена масса с линейной плотностью $\mu = \mu(x, y, z)$.

Тогда масса дуги l определяется равенством

$$m = \int_l \mu(x, y, z)\, dl . \qquad (3)$$

Если l – плоская кривая с линейной плотностью $\mu=\mu(x,y)$, то

$$m=\int\limits_{l}\mu(x,\,y)\,dl\,. \tag{4}$$

Дуга l называется **однородной**, если линейная плотность постоянна в каждой ее точке, т.е. $\mu=C$, где $C=\text{const}$.

7. Вычисление длины дуги.

Если линейная плотность $\mu=1$, то криволинейный интеграл 1-го рода численно равен длине дуги l, т.е.

$$\int\limits_{l}dl=L\,, \tag{5}$$

где L – длина дуги l.

8. Координаты центра тяжести кривой.

Пусть вдоль пространственной кривой l непрерывно распределена масса с линейной плотностью $\mu=\mu\,(x,\,y,\,z)$. Тогда центр тяжести такой пространственной кривой имеет координаты, вычисляемые по формулам:

$$x_C=\frac{1}{m}\int\limits_{l}x\,\mu(x,\,y,\,z)\,dl;\qquad y_C=\frac{1}{m}\int\limits_{l}y\,\mu(x,\,y,\,z)\,dl;$$

$$z_C=\frac{1}{m}\int\limits_{l}z\,\mu(x,\,y,\,z)\,dl,\qquad \text{где } m-\text{масса дуги.}$$

1.2. Вычисление криволинейных интегралов первого рода

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла. Рассмотрим случаи различного задания кривой l на плоскости.

1) Пусть кривая l задана параметрически в виде $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\ \ t\in[\alpha,\,\beta]$,

$x(t)$, $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, тогда дифференциал длины дуги dl будет равен $dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\,dt$.

Криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле

$$\int\limits_l f(x, y)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt\,. \qquad (6)$$

2) Пусть кривая l задается уравнением $y = g(x),\ x \in [a, b]$, а функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в точках этой кривой. Точки $(x, y) \in l$ имеют вид $(x, g(x)),\ x \in [a, b]$. Дифференциал длины дуги в этом случае равен $dl = \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx$, а криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_l f(x, y)\,dl = \int\limits_a^b f(x, g(x))\sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx\,. \qquad (7)$$

3) Пусть кривая l задана в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, где $\rho(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда дифференциал длины дуги $dl = \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$, а криволинейный интеграл 1-го рода будет вычисляться следующим образом:

$$\int\limits_l f(x, y)\,dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi\,. \qquad (8)$$

В пространстве $\boldsymbol{R}^3$ кривая l может быть задана параметрически уравнениями: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [t_1, t_2]$. В этом случае дифференциал длины дуги равен $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$. Тогда криволинейный интеграл (2) по пространственной кривой вычисляется по формуле:

$$\int\limits_l f(x, y, z)\,dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt\,. \qquad (9)$$

Разберем решение некоторых типовых задач.

Задача 1.

Найдите массу дуги верхней полуокружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, если ее линейная плотность в точке (x, y) равна y.

Решение.

Окружность задана в параметрическом виде. Дифференциал длины дуги найдем по формуле $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$, для этого вычислим производные: $x'(t) = -R\sin t$, $y'(t) = R\cos t$. Тогда $dl = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\, dt = R\,dt$. Так как рассматривается верхняя полуокружность, то $0 \le t \le \pi$. Линейная плотность $\mu(x, y) = y = R\sin t$. По формуле (4) масса дуги, заданной параметрически, будет равна

$$m = \int_l \mu(x, y)\, dl = \int_0^{\pi} R\sin t \cdot R\,dt = -R^2\cos t\Big|_0^{\pi} = 2R^2.$$

Задача 2.

Найдите массу части эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в первой координатной четверти, если линейная плотность $\mu(x, y) = xy$.

Решение.

Поскольку уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ задано в неявном виде, перейдем к параметрическому заданию эллипса: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$. Тогда дифференциал длины дуги $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$. По условию задачи эллипс лежит в первой координатной четверти, следовательно параметр t изменяется от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Линейная плотность $\mu(x, y) = xy = ab\cos t\sin t$.

Подставляя в формулу (4) дифференциал длины дуги и линейную плотность, найдем массу части эллипса:

$$m = \int_l \mu(x, y)\, dl = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{\frac{a^2}{2}(1-\cos 2t) + \frac{b^2}{2}(1+\cos 2t)}\, dt =$$

$$= -\frac{ab}{4\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^2+b^2)+(b^2-a^2)\cos 2t}\; d(\cos 2t) =$$

$$= -\frac{ab}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{b^2-a^2} \cdot \frac{2}{3}\Big((a^2+b^2)+(b^2-a^2)\cos 2t\Big)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

Задача 3.

Найдите массу участка цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ между точками с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = a$, если плотность распределения массы в каждой ее точке обратно пропорциональна ординате точки.

Решение.

Из условия следует, что $\mu(x, y) = \dfrac{k}{y}$, где k – коэффициент пропорциональности. Поскольку кривая задается явно, дифференциал длины дуги $dl = \sqrt{1+(y'(x))^2}\, dx$. Для его вычисления находим $y'(x) = \left(a\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}\right)' = \mathrm{sh}\dfrac{x}{a}$. Тогда $dl = \sqrt{1+\left(\mathrm{sh}\dfrac{x}{a}\right)^2}\, dx = \mathrm{ch}\dfrac{x}{a}\, dx$. Здесь мы воспользовались тождеством $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$. Линейная плотность $\mu(x, y) = \dfrac{k}{a\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}}$, по условию $x_1 = 0$ и $x_2 = a$.

Для массы цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ по формуле (4) получаем:

$$m = \int_l \mu(x, y)\, dl = k\int_0^a \frac{\mathrm{ch}(x/a)}{a\,\mathrm{ch}(x/a)}\, dx = \frac{k}{a}\int_0^a dx = k.$$

Задача 4.

Найдите массу дуги кардиоиды $\rho = 4(1-\cos\varphi)$, $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$ (рис. 1), если линейная плотность $\mu = 2$.

Решение.

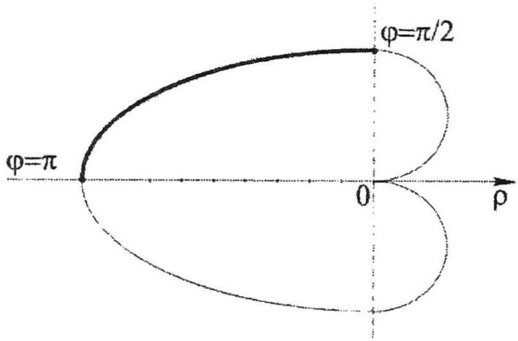

Рис. 1

Найдем дифференциал длины дуги, заданной в полярной системе координат. Для этого вычислим производную $\rho'(\varphi) = 4\sin\varphi$. Тогда

$$dl = \sqrt{\rho(\varphi)^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi = \sqrt{16(1-\cos\varphi)^2 + 16\sin^2\varphi}\;d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,d\varphi = 4\sqrt{2-2\cos\varphi}\,d\varphi = 8\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi = 8\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi,$$

т.к. $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$ при $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$. Теперь по формулам (4) и (8) находим массу дуги кардиоиды:

$$m = \int_l 2\,dl = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cdot 8\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = -32\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 16(2-\sqrt{2}).$$

Задача 5.

Найдите длину дуги пространственной кривой $x = \sqrt{t}\cos t$, $y = \sqrt{t}\sin t$, $z = t$ от $t_1 = 1$ до $t_2 = 4$.

Решение.

Для вычисления длины дуги используем формулы (5) и (9). Так как кривая задана в пространстве, то формула (5) примет вид:

$$L=\int\limits_{l}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

Найдем производные $x'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos t-\sqrt{t}\sin t$, $y'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}\sin t+\sqrt{t}\cos t$, $z'(t)=1$. Подставим производные и упростим выражение под корнем, получим

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=\sqrt{t+\frac{1}{4t}+1}\,dt=\frac{|2t+1|}{2\sqrt{t}}dt=\frac{2t+1}{2\sqrt{t}}dt,$$

т.к. $1\le t\le 4$. В результате длина дуги пространственной кривой $x=\sqrt{t}\cos t$, $y=\sqrt{t}\sin t$, $z=t$, при изменении параметра t от $t_1=1$ до $t_2=4$ равна

$$L=\int\limits_1^4\frac{(2t+1)}{2\sqrt{t}}dt=\frac{2}{3}\sqrt{t}(t-1)\Bigg|_1^4=4.$$

Задача 6.

Вычислите $\int\limits_{AB}(x^2+y^2)\,dl$, где AB – первый виток винтовой линии, $x=b\cos t$, $y=b\sin t$, $z=ct$, $0\le t\le 2\pi$.

Решение.

Вычислим производные от функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ по переменной t и найдем дифференциал длины дуги

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=\sqrt{b^2+c^2}\,dt.$$

Так как $x^2+y^2=b^2$, то по формуле (9) криволинейный интеграл 1-го рода равен $\int\limits_{AB}(x^2+y^2)\,dl=\int\limits_0^{2\pi}b^2\sqrt{c^2+b^2}\,dt=2\pi b^2\sqrt{c^2+b^2}$.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача № 1.

Найдите массу m плоской дуги кривой l, линейная плотность которой меняется по закону $\mu = \mu(x, y)$:

1) $l:\ x^2 + y^2 = R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0;\quad \mu(x, y) = x$.

2) $l: \begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi;\quad \mu(x, y) = x^2 + y^2$.

3) $l: \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi;\quad \mu(x, y) = \sqrt{2y}$.

4) $l: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi;\quad \mu(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$.

5) $l:\ x^2 + y^2 = 25;\quad \mu(x, y) = x^2 + y^2$.

6) $l: \begin{cases} x = t \\ y = t^2/2 \end{cases},\ 0 \le t \le 1;\quad \mu(x, y) = \sqrt{2y}$.

7) $l: \begin{cases} x = \sqrt{3}t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases},\ 0 \le t \le 1;\quad \mu(x, y) = xy$.

8) $l:\ x^2 + y^2 = R^2;\quad \mu(x, y) = |y|$.

9) $l:\ x^2 + y^2 = 1;\quad \mu(x, y) = |xy|$.

10) $l: \begin{cases} x = t^6/6 \\ y = t^4/4 \end{cases},\ 0 \le t \le 2^{3/4};\quad \mu(x, y) = y$.

11) $l:\ y = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x},\ 0 \le x \le 4;\quad \mu(x, y) = \sqrt{(1+x)^3}$.

12) $l:\ y = \dfrac{4}{5}x^2\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1;\quad \mu(x, y) = x^2$.

13) $l:\ y^3 = x^2,\ 0 \le y \le 3;\quad \mu(x, y) = x$.

14) l – отрезок прямой, заключенной между точками $A(0, 2)$ и $B(4, 0)$;

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x - y}.$$

15) $l: y=2\sqrt{x},\ 0\le x\le\frac{16}{9};\quad \mu(x,y)=y.$

16) l – отрезок прямой, заключенной между точками $A(1, 2)$ и $B(3, 6)$;

$\mu(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

17) $l: y=4x^2$ от точки $A(1, 4)$ до точки $B(3, 36)$; $\quad \mu(x,y)=\sqrt{1+16x^2}.$

18) $l: y=\ln(x^2-1),\ -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2};\quad \mu(x,y)=\mathrm{e}^{y+\ln x}.$

19) $l: y=\ln x$ от точки $A\left(\sqrt{3},\ \frac{\ln 3}{2}\right)$ до точки $B\left(\sqrt{8},\ \frac{\ln 8}{2}\right)$; $\mu(x,y)=x^4.$

20) $l: y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ от точки $A\left(3,\ \sqrt{3}\right)$ до точки $B\left(8,\ \frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$; $\mu(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x}}.$

21) $l: y=\frac{x^3}{3}$ от точки $O(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$; $\quad \mu(x,y)=x^3.$

22) $l: \rho=\sqrt{\cos 2\varphi},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4};\quad \mu=6\sin 2\varphi.$

23) $l: \rho=\mathrm{e}^{\varphi},\ 0\le\varphi\le 2;\quad \mu=3\varphi+1.$

24) $l: \rho=\frac{4}{\varphi},\ 0\le\varphi\le 1;\quad \mu=\varphi^5.$

25) $l: \rho=4\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6};\quad \mu=\mathrm{tg}2\varphi.$

26) $l: \rho=2(1-\cos\varphi),\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2};\quad \mu=5\cos\frac{\varphi}{2}.$

27) $l: \rho=5(1+\cos\varphi),\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2};\quad \mu=3\sin\frac{\varphi}{2}.$

28) $l: \rho=\sqrt{\sin 2\varphi},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4};\quad \mu=8\cos 2\varphi.$

29) $l: \rho=2(1-\cos\varphi),\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2};\quad \mu=5\cos\frac{\varphi}{2}.$

30) $l: \rho=4\varphi,\ 0\le\varphi\le 2;\quad \mu=9\varphi.$

31) $l: \rho=8\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le 2;\quad \mu=2^{\varphi}.$

Задача № 2.

Найдите длину дуги пространственной кривой l при изменении параметра t $t_1 \le t \le t_2$:

1) $l: x = 4\cos t,\ y = 4\sin t,\ z = 8t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

2) $l: x = 2t,\ y = 3t,\ z = -4t,\ 0 \le t \le 3$.

3) $l: x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3,\ 0 \le t \le 3$.

4) $l: x = e^{-t}\cos t,\ y = e^{-t}\sin t,\ z = e^{-t},\ 0 \le t < +\infty$.

5) $l: x = 5t,\ y = 3\cos t,\ z = 3\sin t,\ 0 \le t \le \dfrac{3\pi}{2}$.

6) $l: x = t,\ y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}t^2,\ z = t^3,\ 0 \le t \le 1$.

7) $l: x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

8) $l: x = 2t,\ y = 3\sqrt{2}t^2,\ z = 2t^3,\ 1 \le t \le 3$.

9) $l: x = 7t,\ y = 2t + 1,\ z = 4 - t,\ 3 \le t \le 5$.

10) $l: x = 2e^t\cos t,\ y = 2e^t\sin t,\ z = 2e^t,\ 0 \le t \le 1$.

11) $l: x = 2t^2,\ y = \dfrac{2}{3}t^3,\ z = 2t^2,\ 0 \le t \le 1$.

12) $l: x = 5\cos t,\ y = 5\sin t,\ z = 2,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$.

13) $l: x = 3t\cos t,\ y = 3t\sin t,\ z = 5,\ 0 \le t \le \pi$.

14) $l: x = 3t,\ y = 6\cos t,\ z = 6\sin t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$.

15) $l: x = -t - 1,\ y = 2t + 5,\ z = -3t - 1,\ 0 \le t \le 2$.

16) $l: x = 2t + 1,\ y = -3t^2,\ z = 2t^3,\ 0 \le t \le 2$.

17) $l: x = 8e^t\cos t,\ y = 8e^t\sin t,\ z = 3e^t,\ 0 \le t \le \ln 7$.

18) $l: x = 4t^2,\ y = \dfrac{4}{3}t^3,\ z = 4t^2,\ 0 \le t \le 1$.

19) $l: x = 4\cos t,\ y = 2t,\ z = 4\sin t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$.

20) $l:\ x=7\cos t,\ y=7\sin t,\ z=2t,\ 0\le t\le\frac{3\pi}{2}$.

21) $l:\ x=3e^{-t}\cos t,\ y=3e^{-t}\sin t,\ z=3e^{-t},\ 0\le t\le 1$.

22) $l:\ x=6t,\ y=9\sqrt{2}t^2,\ z=3t^3,\ 0\le t\le 1$.

23) $l:\ x=8t^2,\ y=\frac{8}{3}t^2+1,\ z=8t+5,\ 0\le t\le 3$.

24) $l:\ x=5t\cos t,\ y=5t\sin t,\ z=5,\ -\pi\le t\le 0$.

25) $l:\ x=2t-6,\ y=4t-2,\ z=-3t-2,\ 2\le t\le 6$.

26) $l:\ x=5t,\ y=5t\sin t,\ z=5t\cos t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

27) $l:\ x=4e^{t},\ y=4e^{t}\cos t,\ z=4e^{t}\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{4}$.

28) $l:\ x=4t+1,\ y=-2t-5,\ z=3t,\ 0\le t\le 2$.

29) $l:\ x=9\cos t,\ y=9\sin t,\ z=7,\ 0\le t\le\pi$.

30) $l:\ x=7t,\ y=7\cos t,\ z=7\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{3}$.

31) $l:\ x=4t+3,\ y=9-t,\ z=5t+1,\ 4\le t\le 6$.

2. Криволинейные интегралы второго рода

2.1. Определение и свойства криволинейного интеграла второго рода

Пусть в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ в точках дуги AB кусочно-гладкой кривой l задано векторное поле $\overline{a}=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$, координаты которого – непрерывные функции.

Зададим направление на кривой l от точки A к точке B, в этом случае кривую l_{AB} будем называть **ориентированной**.

Выполним следующие действия:

1) Кривую l_{AB} произвольным образом разобьем в направлении от A к B на n элементарных (частичных) дуг.

2) На каждой элементарной дуге $A_{i-1}A_i$ выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ и вычислим в ней значение векторного поля

$$\overline{a}(M_i) = P(x_i, y_i, z_i)\overline{i} + Q(x_i, y_i, z_i)\overline{j} + R(x_i, y_i, z_i)\overline{k}.$$

3) Зададим приращение радиус-вектора $\overline{r_i}$ на концах частичной дуги:

$$\Delta\overline{r_i} = \overline{r}(A_i) - \overline{r}(A_{i-1}) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} = \Delta x_i\,\overline{i} + \Delta y_i\,\overline{j} + \Delta z_i\,\overline{k}.$$

Обозначим $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} \left|\Delta\overline{r_i}\right|$ – максимальную длину радиус-вектора.

4) Найдем скалярное произведение

$$\left(\overline{a}(M_i), \Delta\overline{r_i}\right).$$

5) Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{a}(M_i), \Delta\overline{r_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i. \quad (10)$$

Определение. Если существует предел интегральной суммы (10) при $\Delta \to 0$ и при $n \to \infty$, который не зависит ни от способа разбиения дуги AB на частичные дуги, ни от выбора точек M_i в этих частичных дугах, то этот предел называется **криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции** $\overline{a} = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$ **по кривой** l_{AB} и обозначается

$$\int\limits_{l_{AB}} (\overline{a}, d\overline{r}) = \int\limits_{l_{AB}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \lim_{\Delta \to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{a}(M_i), \Delta\overline{r_i}\right). \quad (11)$$

Аналогично, если на плоскости задано векторное поле $\overline{a} = P(x, y)\overline{i} + Q(x, y)\overline{j}$ и его координаты – непрерывные функции в точках ориентированной кривой l_{AB}, то криволинейный интеграл второго рода определяется равенством:

$$\int\limits_{l_{AB}} (\overline{a}, d\overline{r}) = \int\limits_{l_{AB}} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \lim_{\Delta \to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\right). \quad (12)$$

Здесь $\left(\overline{a}, d\overline{r}\right)$ и $\left(\overline{a}(M_i), \Delta\overline{r_i}\right)$ -- скалярные произведения векторов.

Достаточное условие существования криволинейного интеграла второго рода: если вектор-функция $\overline{a}(M)$ непрерывна в точках гладкой кривой l_{AB}, то криволинейные интегралы (11) и (12) существуют.

Свойства криволинейных интегралов второго рода

1. Линейность.

Если векторное поле $\overline{a} = c_1\overline{a}_1 + c_2\overline{a}_2$, то для любых действительных чисел c_1 и c_2 получаем $\int\limits_{l_{AB}}\left(c_1\overline{a}_1 + c_2\overline{a}_2, d\overline{r}\right) = c_1\int\limits_{l_{AB}}\left(\overline{a}_1, d\overline{r}\right) + c_2\int\limits_{l_{AB}}\left(\overline{a}_2, d\overline{r}\right)$.

2. Аддитивность.

Если кусочно-гладкая кривая l состоит из конечного числа непересекающихся дуг l_k, $k = 1, 2, ..., n$, то $\int\limits_{l}(\overline{a}, d\overline{r}) = \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{l_k}(\overline{a}, d\overline{r})$.

3. Зависимость криволинейного интеграла второго рода от направления интегрирования вдоль кривой.

Криволинейный интеграл второго рода по кривой l меняет знак при изменении ориентации кривой: $\int\limits_{l_{AB}}(\overline{a}, d\overline{r}) = -\int\limits_{l_{BA}}(\overline{a}, d\overline{r})$.

4. Работа силового поля вдоль кривой.

Пусть в каждой точке пространства $\boldsymbol{R}^3$ задано непрерывное **силовое (векторное)** поле $\overline{F} = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$, где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – непрерывные функции. Тогда при перемещении материальной точки вдоль гладкой кривой l поле $\overline{F}$ совершает работу A, определяемую по формуле

$$A = \int\limits_{l_{AB}}\left(\overline{F}, d\overline{r}\right) = \int\limits_{l_{AB}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz. \tag{13}$$

Аналогично, если непрерывное силовое поле $\overline{F} = P(x, y)\overline{i} + Q(x, y)\overline{j}$ плоское, то

$$A = \int\limits_{l_{AB}}\left(\overline{F}, d\overline{r}\right) = \int\limits_{l_{AB}} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{14}$$

5. Связь криволинейного интеграла второго рода с криволинейным интегралом первого рода.

Пусть l_{AB} – кусочно-гладкая кривая в пространстве $\boldsymbol{R}^2$, поле $\overline{a} = (P, Q)$ – плоское. Запишем единичный вектор касательной к кривой l: $\overline{r}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta)$, где $\cos\alpha, \cos\beta$ – направляющие косинусы этого вектора (рис. 2).

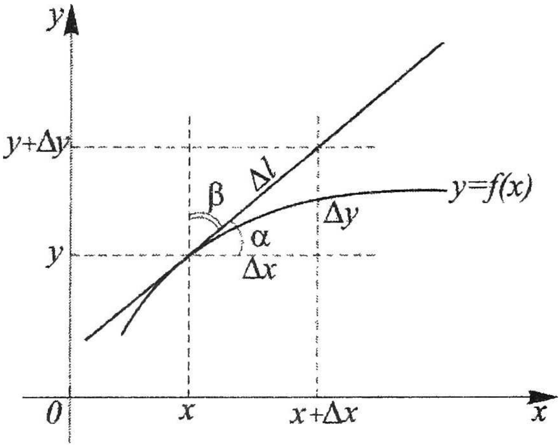

Рис. 2

Очевидно, что $dx = \Delta x = \Delta l \cos\alpha = dl\cos\alpha$, $dy = \Delta y = \Delta l \cos\beta = dl\cos\beta$, тогда $Pdx + Qdy = P\cos\alpha\, dl + Q\cos\beta\, dl = (P\cos\alpha + Q\cos\beta)dl$.

В результате получаем

$$\int\limits_{l_{AB}} (\overline{a}, d\overline{r}) = \int\limits_{l_{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{l_{AB}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)dl. \qquad (15)$$

Формула (15) устанавливает *связь между криволинейными интегралами первого и второго родов.*

В пространственном случае формула (15) принимает вид

$$\int\limits_{l_{AB}} (\overline{a}, d\overline{r}) = \int\limits_{l_{AB}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl = \int\limits_{l_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz. \qquad (15')$$

2.2. Вычисление криволинейных интегралов второго рода

1) Пусть кривая l_{AB} задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем изменению параметра t от t_1 до t_2 соответствует движение точки по кривой AB в направлении от точки $A\left(x(t_1), y(t_1), z(t_1)\right)$ к точке $B\left(x(t_2), y(t_2), z(t_2)\right)$.

Тогда вычисление криволинейного интеграла второго рода (11) сводится к вычислению определенного интеграла по формуле

$$\int\limits_{l_{AB}} (\bar{a}, d\bar{r}) = \int\limits_{l_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot x'(t) + Q\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot y'(t) + R\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot z'(t) \right] dt. \quad (16)$$

2) Если кривая l задана в плоскости XOY параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, и $\bar{a} = (P(x, y), Q(x, y))$ – вектор-функция, определенная в точках этой кривой, то получаем формулу

$$\int\limits_{l_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P\left(x(t), y(t)\right) \cdot x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right) \cdot y'(t) \right] dt. \quad (17)$$

3) Пусть плоская кривая l задана явно уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на $[a, b]$, функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны на кривой l. Тогда

$$\int\limits_{l_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{a}^{b} \left[P\left(x, f(x)\right) + Q\left(x, f(x)\right) \cdot f'(x) \right] dx. \quad (18)$$

Разберем решение типовых задач.

Пример 1.

Вычислите $\int\limits_{l_{AB}} (2x + z)dx + (y + 1)dy + x^2 dz$, где l_{AB} – отрезок прямой, соединяющий точки $A(2, 0, 4)$ и $B(2, 2, -3)$.

Решение.

Запишем параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2, 0, 4)$ с направляющим вектором $\overline{AB} = \{0, 2, -7\}$: $x = 2,\ y = 2t,\ z = -7t + 4$, $0 \le t \le 1$. Производные $x'(t) = 0,\ y'(t) = 2,\ z'(t) = -7$ непрерывны при $t \in [0, 1]$. По формуле (15)

$$\int\limits_{l_{AB}} (2x + z)dx + (y+1)dy + x^2 dz = \int\limits_0^1 ((4 - 7t + 4)\cdot 0 + (2t+1)\cdot 2 + 4\cdot(-7))dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (4t - 26)dt = -24.$$

Пример 2.

Вычислите $\int\limits_l \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}$, где l – верхняя полуокружность $x(t) = 4\cos t$, $y(t) = 4\sin t$, пробегаемая против хода часовой стрелки (рис. 3).

Решение.

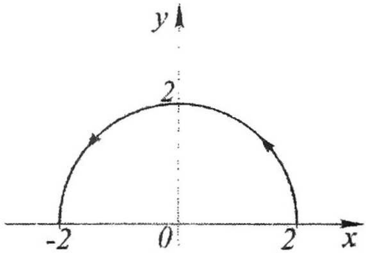

Рис. 3

При обходе верхней полуокружности против часовой стрелки параметр t меняется от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$. Производные $x'(t) = -4\sin t$ и $y'(t) = 4\cos t$ непрерывны на отрезке $[0, \pi]$.

Для вычисления криволинейного интеграла второго рода используем формулу (17):

$$\int\limits_l \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y} = \int\limits_0^{\pi}\left(\frac{4\cos t}{4\cos t} + \frac{4\sin t}{4\sin t}\right)dt = 2\int\limits_0^{\pi} dt = 2\pi.$$

Пример 3.

Вычислите $\int\limits_{l_{OA}} (2y-6xy^3)dx+(2x-9x^2y^2)dy$, где l_{OA} – часть параболы $2y=x^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(2, 2)$ (рис. 4).

Решение.

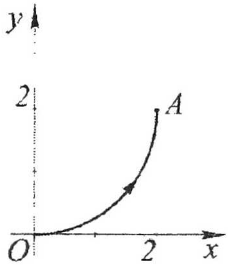

Рис. 4

Так как $y=f(x)=\dfrac{x^2}{2}$, $f'(x)=x$, $x\in[0;2]$, то по формуле (7) для криволинейного интеграла 2-го рода имеем

$$\int\limits_{l_{OA}} (2y-6xy^3)dx+(2x-9x^2y^2)dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left[x^2-6x\left(\frac{x^2}{2}\right)^3+\left(2x-9x^2\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right)\cdot x\right]dx=$$

$$=\int\limits_0^2(x^2-\frac{3}{4}x^7+2x^2-\frac{9}{4}x^7)dx=-88.$$

Пример 4.

Вычислите работу A силового поля $\overline{F}=(y-z)\overline{i}+(z-x)\overline{j}+(x-y)\overline{k}$ по перемещению материальной точки вдоль одного витка винтовой линии $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$, $z(t)=\dfrac{t}{2\pi}$. (Обход контура против часовой стрелки).

Решение.

По формулам (13) и (16) работа A силового поля $\overline{F}=(y-z)\overline{i}+(z-x)\overline{j}+(x-y)\overline{k}$ по перемещению материальной точки вдоль одного витка винтовой линии вычисляется по формуле

$$A=\int_l(\overline{F},d\overline{r})=\int_l(y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz.$$

Производные $x'(t)=-\sin t$, $y'(t)=\cos t$, $z'(t)=\dfrac{1}{2\pi}$ – непрерывные функции при $0\le t\le 2\pi$. Тогда работа

$$A=\int_l(\overline{F},d\overline{r})=\int_l(y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\left(\sin t-\frac{t}{2\pi}\right)(-\sin t)+\left(\frac{t}{2\pi}-\cos t\right)\cos t+(\cos t-\sin t)\frac{1}{2\pi}\right]dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\sin^2 t+\frac{t}{2\pi}\sin t+\frac{t}{2\pi}\cos t-\cos^2 t+\frac{1}{2\pi}\cos t-\frac{1}{2\pi}\sin t\right]dt=$$

$$=-\int_0^{2\pi}dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t\sin t\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t\cos t\,dt=-2\pi-1=-(1+2\pi).$$

То, что работа получилась отрицательной, говорит о том, что на самом деле силовое поле перемещает материальную точку в противоположном направлении (в направлении убывания параметра t).

Пример 5.

Найдите работу силового поля $\overline{F}=(2+xy^2)\overline{i}+(x^2y-3)\overline{j}$ по перемещению материальной точки вдоль эллипса $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ от точки $A(-2,\ 0)$ до точки $B(0,\ 3)$ по кратчайшей дуге эллипса (рис. 5).

Решение.

Работа плоского силового поля $\overline{F}=(2+xy^2)\overline{i}+(x^2y-3)\overline{j}$ по перемещению материальной точки вдоль эллипса по формулам (14) и (17) будет равна

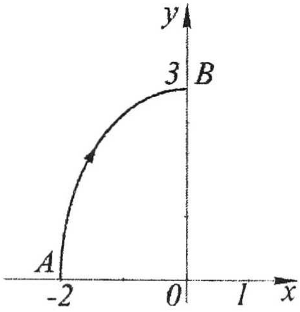

Рис. 5

$$A = \int\limits_{l_{AB}} (2 + xy^2)dx + (x^2 y - 3)dy.$$

Запишем параметрические уравнения эллипса: $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 3\sin t$. Из этих уравнений находим, что точке A(-2, 0) соответствует значение параметра $t_1 = \pi$, а точке B(0, 3) – значение параметра $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Под действием силы $\overline{F}$ материальная точка перемещается по дуге АВ в направлении от А к В. Производные $x'(t) = -2\sin t$ и $y'(t) = 3\cos t$ непрерывны на отрезке $\left[\pi, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$A = \int\limits_{l_{AB}} (2 + xy^2)dx + (x^2 y - 3)dy =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} ((2 + 2\cos t \cdot 9\sin^2 t)(-2\sin t) + (4\cos^2 t \cdot 3\sin t - 3)3\cos t)dt =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (-4\sin t - 36\sin^3 t\cos t + 36\cos^3 t\sin t - 9\cos t)dt = -5.$$

Тот факт, что работа оказалась отрицательной, означает, что силовое поле перемещает материальную точку от B к A.

Пример 6.

Найдите работу силового поля $\overline{F} = y\overline{i} + (y-x)\overline{j}$ по перемещению материальной точки вдоль дуги AB параболы $y = 1 - x^2$ в направлении от точки $A(-1, 0)$ до точки $B(0, 1)$.

Решение.

Работа плоского векторного поля $\overline{F} = y\overline{i} + (y-x)\overline{j}$ по перемещению материальной точки вдоль дуги AB определяется формулой (14):

$$A = \int\limits_{l_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{l_{AB}} y\,dx + (y-x)\,dy.$$

Параметрические уравнения пути AB имеют вид $x = x,\ \ y = f(x) = 1 - x^2,\ -1 \le x \le 0$. Производная $f'(x) = -2x$ непрерывна на $[-1;\,0]$, поэтому по формуле (18) работа равна

$$A = \int\limits_{l_{AB}} y\,dx + (y-x)\,dy = \int\limits_{-1}^{0}\Big[(1-x^2) + (1-x^2-x)(-2x)\Big]dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0}(2x^3 + x^2 - 2x + 1)\,dx = \frac{11}{6}$$

2.3. Циркуляция. Связь криволинейного интеграла 2-го рода с двойным интегралом

Если $\overline{a} = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$ – произвольное векторное поле, а l – *замкнутая кривая* в пространстве $\boldsymbol{R}^3$, то криволинейный интеграл второго рода (11) или (12) называется **циркуляцией векторного поля** $\overline{a}$ вдоль контура l и обозначается символом

$$C = \oint\limits_{l}(\overline{a}, d\overline{r}). \qquad (19)$$

Направление обхода контура указывается заранее.

Пусть D – некоторая замкнутая область на плоскости XOY, ограниченная контуром l. Будем называть направление обхода контура l *положительным*, если область, лежащая внутри контура, остается слева по отношению к точке, совершающей обход (рис. 6). Если область остается справа, то направление обхода называется *отрицательным* (рис. 7).

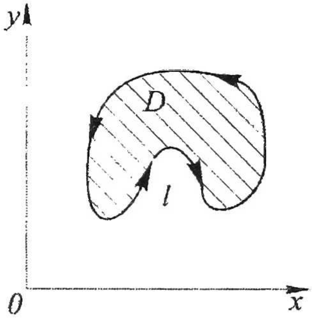

Рис. 6

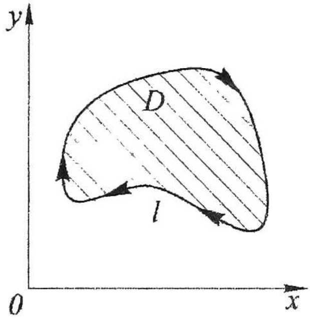

Рис. 7

Поле $\overline{a}$ называется *потенциальным*, если для непрерывно дифференцируемых функций $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ выполняются условия $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$; $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$,

называемые *условиями потенциальности*.

Утверждение: если векторное поле $\overline{a}$ потенциально, то циркуляция вдоль замкнутого контура l равна нулю:

$$C = \oint_l (\overline{a}, d\overline{r}) = 0.$$

Формула Грина

Пусть D – некоторая замкнутая область на плоскости XOY, ограниченная контуром l, и в ней заданы функции $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$, непрерывные в D вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ Тогда имеет место *формула Грина*

$$\oint_l P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \tag{20}$$

где на замкнутом контуре l выбирается положительное направление.

Формула Грина связывает криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой с двойным интегралом по области, ограниченной этой кривой.

Вычисление площади

Полагая в формуле (20) $P(x,y)=-y$, $Q(x,y)=x$, получаем

$$\oint_l -ydx+xdy=\iint_D 2dxdy=2\iint_D dxdy=2S.$$

Тогда S – площадь плоской фигуры D определяется по формуле:

$$S=\frac{1}{2}\oint_l xdy-ydx. \qquad (21)$$

Пример 7.

Вычислите $\oint_l 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$, где l – контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(1,1)$, $B(2,2)$ и $C(1,3)$. Обход выбирается положительным (рис. 8).

Решение.

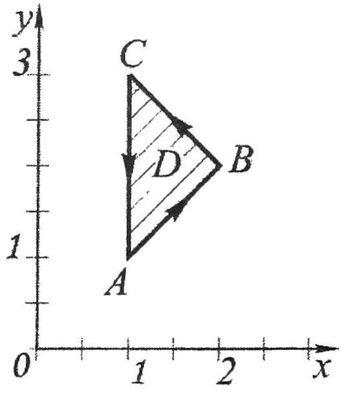

Рис. 8

Контур треугольника ABC – замкнутый, функции $P(x,y)=2(x^2+y^2)$ и $Q(x,y)=(x+y)^2$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области D, где D – область, ограниченная треугольником ABC. Поэтому для вычисления данного интеграла по замкнутому контуру воспользуемся формулой Грина (20).

Для определения пределов интегрирования составим уравнения прямых AB и BC. $AB: y = x$, а $BC: \dfrac{x-2}{1-2} = \dfrac{y-2}{3-2}$; $x - 2 = -y + 2 \Rightarrow y = 4 - x$.

Тогда $1 \le x \le 2$, $x \le y \le 4 - x$.

Подынтегральное выражение $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x + 2y - 4y = 2x - 2y = 2(x - y)$.

Подставляя в формулу (20), имеем

$$\oint_l 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy = 2\iint_D (x - y)dxdy = 2\int_1^2 dx \int_x^{4-x} (x - y)dy =$$

$$= 2\int_1^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_x^{4-x} dx = 2\int_1^2 \left(x(4 - x) - \frac{(4 - x)^2}{2} - x^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= 2\left(2x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{(4 - x)^3}{6} \right)\Bigg|_1^2 = -\frac{4}{3}.$$

Пример 8.

Вычислите площадь области D, ограниченной параболами $y = x^2$, $x = y^2$ и гиперболой $8xy = 1$ (область, примыкающая к началу координат) (рис. 9).

Решение.

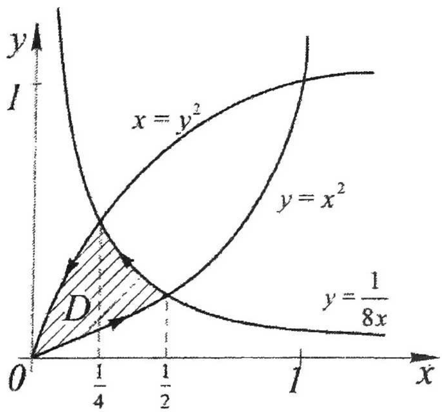

Рис. 9

Площадь области D может быть вычислена как с помощью одномерного, так и с помощью двойного интегралов. Покажем вычисление этой площади посредством криволинейного интеграла второго рода.

Область D ограничена замкнутым контуром, состоящим из трех частей $l = l_1 \cup l_2 \cup l_3$, направление обхода контура показано на рис. 9. Воспользуемся свойством аддитивности, тогда

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{l} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_{l_1} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int\limits_{l_2} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int\limits_{l_3} xdy - ydx.$$

Найдем пределы интегрирования. Для этого определим абсциссы точек пересечения соответствующих кривых.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{1}{8x} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}; \qquad \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \dfrac{1}{8x} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Вычислим $\int\limits_{l} -ydx + xdy$ по кривой $l_1 : y = x^2$, $\quad y'(x) = 2x$, x изменяется от 0 до $\frac{1}{2}$. Так как кривая l_1 задана явным образом, используем формулу (18):

$$\int\limits_{l_1} -ydx + xdy = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \frac{1}{24}.$$

По кривой $l_2 : y = \frac{1}{8x}$, $\quad y'(x) = -\frac{1}{8x^2}$, x меняется от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{4}$ и интеграл

$$\int\limits_{l_2} -ydx + xdy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} -\frac{1}{4x} dx = \frac{1}{4}\ln|x|\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\ln 2.$$

По кривой $l_3 : y = \sqrt{x}$, $\quad y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, x изменяется от $\frac{1}{4}$ до 0 и интеграл

$$\int\limits_{l_3} -ydx + xdy = -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{4}}^{0} \sqrt{x} dx = \frac{1}{24}.$$

Окончательно площадь области D по формуле (21) равна

$$S=\frac{1}{2}\oint_{l} xdy-ydx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\ln 2\right)=\frac{1+3\ln 2}{24}.$$

Пример 9.

Найдите циркуляцию векторного поля $\overline{a}=(xz+y)\overline{i}+(zy-x)\overline{j}-(x^2+y^2)\overline{k}$ вдоль замкнутого контура l: $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$, $z(t)=3$ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

Решение.

Циркуляция векторного поля $\overline{a}$ вдоль замкнутого контура l по формуле (19) будет равна

$$C=\oint_{l}(\overline{a},d\overline{r})=\oint_{l}(xz+y)dx+(zy-x)dy-(x^2+y^2)dz.$$

Возрастая, параметр t меняется от 0 до 2π. Производные $x'(t)=-\sin t$, $y'(t)=\cos t$, $z'(t)=0$ непрерывны при $0\le t\le 2\pi$, по формуле (16)

$$C=\oint_{l}(xz+y)dx+(zy-x)dy-(x^2+y^2)dz=$$

$$=\int_{0}^{2\pi}(-3\cos t\sin t-\sin^2 t+3\sin t\cos t-\cos^2 t)dt=-\int_{0}^{2\pi}dt=-2\pi.$$

Пример 10.

Найдите циркуляцию векторного поля $\overline{a}=y^2\overline{i}-x^2\overline{j}+z^2\overline{k}$ по замкнутому контуру $ABCA$, полученному при пересечении параболоида $x^2+z^2=1-y$ с координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ (рис. 10).

Решение.

В нашем случае координаты векторного поля $P(x,y,z)=y^2$, $Q(x,y,z)=-x^2$, $R(x,y,z)=z^2$ – непрерывно дифференцируемые функции.

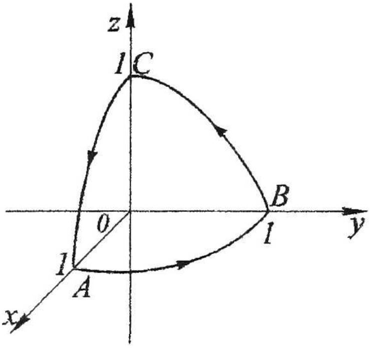

Рис. 10

Контур $ABCA$ – замкнутый, состоит из трех частей $AB \cup BC \cup CA$, направление обхода показано на рис. 10. Тогда по формуле (19) и по свойству аддитивности криволинейного интеграла второго рода

$$C = \oint_l (\overline{a}, d\overline{r}) = \oint_l y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz =$$

$$= \int_{AB} y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz + \int_{BC} y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz + \int_{CA} y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz .$$

Вычислим интеграл по дуге AB. Здесь $z = 0$, поле $\overline{a} = y^2 \overline{i} - x^2 \overline{j}$. Поскольку AB – линия пересечения параболоида $x^2 + z^2 = 1 - y$ с плоскостью $z = 0$, ее уравнение имеет вид $y = 1 - x^2$. Найдем производную $y'(x) = -2x$, переменная x меняется от 1 до 0. Тогда

$$\int_{AB} y^2 dx - x^2 dy = \int_1^0 \left((1 - x^2)^2 - x^2(-2x) \right) dx = -\frac{31}{30}.$$

Теперь найдем интеграл по дуге BC. Здесь $x = 0;\ dx = 0$, поле $\overline{a} = y^2 \overline{i} + z^2 \overline{k}$. Дуга BC – линия пересечения параболоида $x^2 + z^2 = 1 - y$ с плоскостью $x = 0$, ее уравнение имеет вид $y = 1 - z^2$. Переменная z меняется от 0 до 1 и интеграл

$$\int_{BC} z^2 dz = \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3}.$$

Вычислим интеграл по дуге CA – линии пересечения параболоида $x^2+z^2=1-y$ с плоскостью $y=0$, ее уравнение имеет вид $x^2+z^2=1$. Переменная z меняется от 1 до 0. Здесь $y=0$, $dy=0$. Интеграл по дуге CA

$$\int_{CA} z^2dz=\int_1^0 z^2dz=-\frac{1}{3}.$$

Окончательно циркуляция векторного поля $\bar{a}=y^2\bar{i}-x^2\bar{j}+z^2\bar{k}$ по замкнутому контуру $ABCA$ будет равна $C=-\frac{31}{30}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{31}{30}$.

2.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача №1.

Найдите работу силы $\overline{F}$ при перемещении материальной точки вдоль линии l от точки M к точке N

1) $\overline{F}=\left(x^2-2y\right)\bar{i}+\left(y^2-2x\right)\bar{j}$, l: отрезок MN, $M(-4,0)$, $N(0,2)$.

2) $\overline{F}=\left(x^2+2y\right)\bar{i}+\left(y^2+2x\right)\bar{j}$, l: отрезок MN, $M(-4,0)$, $N(0,2)$.

3) $\overline{F}=\left(x^2+2y\right)\bar{i}+\left(y^2+2x\right)\bar{j}$, l: $2-\frac{x^2}{8}=y$, $M(-4,0)$, $N(0,2)$.

4) $\overline{F}=(x+y)\bar{i}+2x\bar{j}$, l: $x^2+y^2=4$ $(y\ge 0)$, $M(2,0)$, $N(-2,0)$.

5) $\overline{F}=x^3\bar{i}-y^3\bar{j}$, l: $x^2+y^2=4$ $(x\ge 0,\, y\ge 0)$, $M(2,0)$, $N(0,2)$.

6) $\overline{F}=(x+y)\bar{i}+(x-y)\bar{j}$, l: $y=x^2$, $M(-1,1)$, $N(1,1)$.

7) $\overline{F}=x^2y\bar{i}-y\bar{j}$, l: отрезок MN, $M(-1,0)$, $N(0,1)$.

8) $\overline{F}=(2xy-y)\bar{i}+\left(x^2+x\right)\bar{j}$, l: $x^2+y^2=9$ $(y\ge 0)$, $M(3,0)$, $N(-3,0)$.

9) $\overline{F}=(x+y)\bar{i}+(x-y)\bar{j}$, l: $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ $(x\ge 0,\, y\ge 0)$, $M(1,0)$, $N(0,3)$.

10) $\overline{F} = y\overline{i} - x\overline{j}$, $l:\ x^2 + y^2 = 1\ (y \ge 0)$, $M(1,0)$, $N(-1,0)$.

11) $\overline{F} = \left(x^2 + y^2\right)\overline{i} + \left(x^2 - y^2\right)\overline{j}$, $l:\ \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1; \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2; \end{cases}$ $M(2,0)$, $N(0,0)$.

12) $\overline{F} = y\overline{i} - x\overline{j}$, $l:\ x^2 + y^2 = 2\ (y \ge 0)$, $M\left(\sqrt{2},0\right)$, $N\left(-\sqrt{2},0\right)$.

13) $\overline{F} = xy\overline{i} + 2y\overline{j}$, $l:\ x^2 + y^2 = 1\ (x \ge 0, y \ge 0)$, $M(1,0)$, $N(0,1)$.

14) $\overline{F} = y\overline{i} - x\overline{j}$, $l:\ 2x^2 + y^2 = 1\ (y \ge 0)$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

15) $\overline{F} = \left(x^2 + y^2\right)\left(\overline{i} + 2\overline{j}\right)$, $l:\ x^2 + y^2 = R^2\ (y \ge 0)$, $M(R,0)$, $N(-R,0)$.

16) $\overline{F} = \left(x + y\sqrt{x^2 + y^2}\right)\overline{i} + \left(y - x\sqrt{x^2 + y^2}\right)\overline{j}$,
$l:\ x^2 + y^2 = 1\ (y \ge 0)$, $M(1,0)$, $N(-1,0)$.

17) $\overline{F} = x^2y\overline{i} - xy^2\overline{j}$, $l:\ x^2 + y^2 = 4\ (x \ge 0, y \ge 0)$, $M(2,0)$, $N(0,2)$.

18) $\overline{F} = \left(x + y\sqrt{x^2 + y^2}\right)\overline{i} + \left(y - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\overline{j}$,
$l:\ x^2 + y^2 = 16\ (x \ge 0, y \ge 0)$, $M(4,0)$, $N(0,4)$.

19) $\overline{F} = y^2\overline{i} - x^2\overline{j}$, $l:\ x^2 + y^2 = 9\ (x \ge 0, y \ge 0)$, $M(3,0)$, $N(0,3)$.

20) $\overline{F} = (x + y)^2\overline{i} - \left(x^2 + y^2\right)\overline{j}$, l: отрезок MN, $M(1,0)$, $N(0,1)$.

21) $\overline{F} = \left(x^2 + y^2\right)\overline{i} + y^2\overline{j}$, l: отрезок MN, $M(2,0)$, $N(0,2)$.

22) $\overline{F} = x^2\overline{j}$, $l:\ x^2 + y^2 = 9\ (x \ge 0, y \ge 0)$, $M(3,0)$, $N(0,3)$.

23) $\overline{F} = \left(y^2 - y\right)\overline{i} + (2xy + x)\overline{j}$, $l:\ x^2 + y^2 = 9\ (y \ge 0)$, $M(3,0)$, $N(-3,0)$.

24) $\overline{F} = xy\overline{i}$, $l:\ y = \sin x$, $M(\pi,0)$, $N(0,0)$.

25) $\overline{F}=\left(xy-y^2\right)\overline{i}+x\overline{j},\ l: y=2x^2,\ M(0,0),\ N(1,2).$

26) $\overline{F}=x\overline{i}+y\overline{j},\ l:$ отрезок MN, $M(1,0),\ N(0,3).$

27) $\overline{F}=(xy-x)\overline{i}+\dfrac{x^2}{2}\overline{j},\ l: y=2\sqrt{x},\ M(0,0),\ N(1,2).$

28) $\overline{F}=-x\overline{i}+y\overline{j},\ l: x^2+\dfrac{y^2}{9}=1\ (x\geq 0,\ y\geq 0),\ M(1,0),\ N(0,3).$

29) $\overline{F}=-y\overline{i}+x\overline{j},\ l: y=x^3,\ M(0,0),\ N(2,8).$

30) $\overline{F}=\left(x^2-y^2\right)\overline{i}+\left(x^2+y^2\right)\overline{j},\ l: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (y\geq 0),\ M(3,0),\ N(-3,0).$

31) $\overline{F}=(x-y)\overline{i}+\overline{j},\ l: x^2+y^2=4\ (y\geq 0),\ M(2,0),\ N(-2,0).$

Задача №2.

Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}$ вдоль контура l (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

1) $\overline{a}=y\overline{i}-x\overline{j}+z^2\overline{k},\ l: \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t,\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \\ z=\sin t. \end{cases}$

2) $\overline{a}=-x^2y^3\overline{i}+\overline{j}+z\overline{k},\ l: \begin{cases} x=\sqrt[3]{4}\cos t,\ y=\sqrt[3]{4}\sin t, \\ z=3. \end{cases}$

3) $\overline{a}=(y-z)\overline{i}+(z-x)\overline{j}+(x-y)\overline{k},\ l: \begin{cases} x=\cos t,\ y=\sin t, \\ z=2(1-\cos t). \end{cases}$

4) $\overline{a}=x^2\overline{i}+y\overline{j}-z\overline{k},\ l: \begin{cases} x=\cos t,\ y=\left(\sqrt{2}\sin t\right)/2, \\ z=\left(\sqrt{2}\cos t\right)/2. \end{cases}$

5) $\overline{a}=(y-z)\overline{i}+(z-x)\overline{j}+(x-y)\overline{k},\ l: \begin{cases} x=4\cos t,\ y=4\sin t, \\ z=1-\cos t. \end{cases}$

6) $\overline{a}=2y\overline{i}-3x\overline{j}+x\overline{k},\ l: \begin{cases} x=2\cos t,\ y=2\sin t, \\ z=2-2\cos t-2\sin t. \end{cases}$

7) $\bar{a} = 2z\bar{i} - x\bar{j} + y\bar{k}$, $l: \begin{cases} x = 2\cos t,\ y = 2\sin t, \\ z = 1. \end{cases}$

8) $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + z\bar{k}$, $l: \begin{cases} x = \cos t,\ y = \sin t, \\ z = 3. \end{cases}$

9) $\bar{a} = x\bar{i} + z^2\bar{j} + y\bar{k}$, $l: \begin{cases} x = \cos t,\ y = 2\sin t, \\ z = 2\cos t - 2\sin t - 1. \end{cases}$

10) $\bar{a} = 3y\bar{i} - 3x\bar{j} + x\bar{k}$, $l: \begin{cases} x = 3\cos t,\ y = 3\sin t, \\ z = 3 - 3\cos t - 3\sin t. \end{cases}$

11) $\bar{a} = -x^2y^3\bar{i} + 2\bar{j} + xz\bar{k}$, $l: \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t,\ y = \sqrt{2}\sin t, \\ z = 1. \end{cases}$

12) $\bar{a} = 6z\bar{i} - x\bar{j} + xy\bar{k}$, $l: \begin{cases} x = 3\cos t,\ y = 3\sin t, \\ z = 3. \end{cases}$

13) $\bar{a} = z\bar{i} + y^2\bar{j} - x\bar{k}$, $l: \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t,\ y = 2\sin t, \\ z = \sqrt{2}\cos t. \end{cases}$

14) $\bar{a} = x\bar{i} + 2z^2\bar{j} + y\bar{k}$, $l: \begin{cases} x = \cos t,\ y = 3\sin t, \\ z = 2\cos t - 3\sin t - 2. \end{cases}$

15) $\bar{a} = x\bar{i} - \frac{1}{3}z^2\bar{j} + y\bar{k}$, $l: \begin{cases} x = (\cos t)/2,\ y = (\sin t)/3, \\ z = \cos t - (\sin t)/3 - 1/4. \end{cases}$

16) $\bar{a} = 4y\bar{i} - 3x\bar{j} + x\bar{k}$, $l: \begin{cases} x = 4\cos t,\ y = 4\sin t, \\ z = 4 - 4\cos t - 4\sin t. \end{cases}$

17) $\bar{a} = -z\bar{i} - x\bar{j} + xz\bar{k}$, $l: \begin{cases} x = 5\cos t,\ y = 5\sin t, \\ z = 4. \end{cases}$

18) $\bar{a} = z\bar{i} + x\bar{j} + y\bar{k}$, $l: \begin{cases} x = 2\cos t,\ y = 2\sin t, \\ z = 0. \end{cases}$

19) $\bar{a} = (y - z)\bar{i} + (z - x)\bar{j} + (x - y)\bar{k}$, $l: \begin{cases} x = 3\cos t,\ y = 3\sin t, \\ z = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

20) $\bar{a} = 2y\bar{i} - z\bar{j} + x\bar{k}$, $l: \begin{cases} x = \cos t,\ y = \sin t, \\ z = 4 - \cos t - \sin t. \end{cases}$

21) $\overline{a} = xz\overline{i} + x\overline{j} + z^2\overline{k}$, $l: \begin{cases} x = \cos t,\ y = \sin t, \\ z = \sin t. \end{cases}$

22) $\overline{a} = -x^2y^3\overline{i} + 3\overline{j} + y\overline{k}$, $l: \begin{cases} x = \cos t,\ y = \sin t, \\ z = 5. \end{cases}$

23) $\overline{a} = 7z\overline{i} - x\overline{j} + yz\overline{k}$, $l: \begin{cases} x = 6\cos t,\ y = 6\sin t, \\ z = 1/3. \end{cases}$

24) $\overline{a} = xy\overline{i} + x\overline{j} + y^2\overline{k}$, $l: \begin{cases} x = \cos t,\ y = \sin t, \\ z = \sin t. \end{cases}$

25) $\overline{a} = x\overline{i} - z^2\overline{j} + y\overline{k}$, $l: \begin{cases} x = 2\cos t,\ y = 3\sin t, \\ z = 4\cos t - 3\sin t - 3. \end{cases}$

26) $\overline{a} = (y - z)\overline{i} + (z - x)\overline{j} + (x - y)\overline{k}$, $l: \begin{cases} x = 2\cos t,\ y = 2\sin t, \\ z = 3(1 - \cos t). \end{cases}$

27) $\overline{a} = -2z\overline{i} - x\overline{j} + x^2\overline{k}$, $l: \begin{cases} x = (\cos t)/3,\ y = (\sin t)/3, \\ z = 8. \end{cases}$

28) $\overline{a} = x\overline{i} - 3z^2\overline{j} + y\overline{k}$, $l: \begin{cases} x = \cos t,\ y = 4\sin t, \\ z = 2\cos t - 4\sin t + 3. \end{cases}$

29) $\overline{a} = x\overline{i} - 2z^2\overline{j} + y\overline{k}$, $l: \begin{cases} x = 3\cos t,\ y = 4\sin t, \\ z = 6\cos t - 4\sin t + 1. \end{cases}$

30) $\overline{a} = -x^2y^3\overline{i} + 4\overline{j} + x\overline{k}$, $l: \begin{cases} x = 2\cos t,\ y = 2\sin t, \\ z = 4. \end{cases}$

31) $\overline{a} = y\overline{i}/3 - 3x\overline{j} + x\overline{k}$, $l: \begin{cases} x = 2\cos t,\ y = 2\sin t, \\ z = 1 - 2\cos t - 2\sin t. \end{cases}$

Задача №3.

Найдите модуль циркуляции векторного поля $\overline{a}$ вдоль контура l.

1) $\overline{a} = (x^2 - y)\overline{i} + x\overline{j} + \overline{k}$, $l: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$

2) $\overline{a} = xz\overline{i} - \overline{j} + y\overline{k}$, $l: \begin{cases} z = 5(x^2 + y^2) - 1, \\ z = 4. \end{cases}$

3) $\overline{a} = yz\overline{i} + 2xz\overline{j} + xy\overline{k}$, l: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9 \ (z > 0). \end{cases}$

4) $\overline{a} = x\overline{i} + yz\overline{j} - x\overline{k}$, l: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

5) $\overline{a} = (x - y)\overline{i} + x\overline{j} - z\overline{k}$, l: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$

6) $\overline{a} = y\overline{i} - x\overline{j} + z^2\overline{k}$, l: $\begin{cases} z = 3\left(x^2 + y^2\right) + 1, \\ z = 4. \end{cases}$

7) $\overline{a} = yz\overline{i} + 2xz\overline{j} + y^2\overline{k}$, l: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16 \ (z > 0). \end{cases}$

8) $\overline{a} = xy\overline{i} + yz\overline{j} + xz\overline{k}$, l: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

9) $\overline{a} = y\overline{i} + (1 - x)\overline{j} - z\overline{k}$, l: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 1 \ (z > 0). \end{cases}$

10) $\overline{a} = y\overline{i} - x\overline{j} + z^2\overline{k}$, l: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4. \end{cases}$

11) $\overline{a} = 4x\overline{i} + 2\overline{j} - xy\overline{k}$, l: $\begin{cases} z = 2\left(x^2 + y^2\right) + 1, \\ z = 7. \end{cases}$

12) $\overline{a} = 2y\overline{i} - 3x\overline{j} + z^2\overline{k}$, l: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 1. \end{cases}$

13) $\overline{a} = -3z\overline{i} + y^2\overline{j} + 2y\overline{k}$, l: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$

14) $\overline{a} = 2y\overline{i} + 5z\overline{j} + 3x\overline{k}$, l: $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

15) $\overline{a} = 2y\overline{i} + \overline{j} - 2yz\overline{k}$, l: $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 2. \end{cases}$

16) $\overline{a}=(x-y)\overline{i}+x\overline{j}+z^2\overline{k},\ l:\ \begin{cases} x^2+y^2-4z^2=0, \\ z=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

17) $\overline{a}=xz\overline{i}-\overline{j}+y\overline{k},\ l:\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ z=1. \end{cases}$

18) $\overline{a}=2yz\overline{i}+xz\overline{j}-x^2\overline{k},\ l:\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x^2+y^2=9\ (z>0). \end{cases}$

19) $\overline{a}=4x\overline{i}-yz\overline{j}+x\overline{k},\ l:\ \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y+z=1. \end{cases}$

20) $\overline{a}=-y\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k},\ l:\ \begin{cases} x^2+y^2-z^2=0, \\ z=1. \end{cases}$

21) $\overline{a}=y\overline{i}+3x\overline{j}+z^2\overline{k},\ l:\ \begin{cases} z=x^2+y^2-1, \\ z=3. \end{cases}$

22) $\overline{a}=2yz\overline{i}+xz\overline{j}+y^2\overline{k},\ l:\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x^2+y^2=16\ (z>0). \end{cases}$

23) $\overline{a}=(2-xy)\overline{i}-yz\overline{j}-xz\overline{k},\ l:\ \begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+y+z=1. \end{cases}$

24) $\overline{a}=-y\overline{i}+x\overline{j}+3z^2\overline{k},\ l:\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x^2+y^2=1\ (z>0). \end{cases}$

25) $\overline{a}=y\overline{i}-x\overline{j}+2z\overline{k},\ l:\ \begin{cases} x^2+y^2-\dfrac{z^2}{4}=0, \\ z=2. \end{cases}$

26) $\overline{a}=x^2\overline{i}+yz\overline{j}+2z\overline{k},\ l:\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=4. \end{cases}$

27) $\overline{a}=y\overline{i}-2x\overline{j}+z^2\overline{k},\ l:\ \begin{cases} z=4\left(x^2+y^2\right)+2, \\ z=6. \end{cases}$

28) $\bar{a} = 3z\bar{i} - 2y\bar{j} + 2y\bar{k}$, $l:\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ 2x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$

29) $\bar{a} = (x + y)\bar{i} - x\bar{j} + 6\bar{k}$, $l:\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 2. \end{cases}$

30) $\bar{a} = 4\bar{i} + 3x\bar{j} + 3xz\bar{k}$, $l:\ \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 3. \end{cases}$

31) $\bar{a} = yz\bar{i} - xz\bar{j} + xy\bar{k}$, $l:\ \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров, Я.С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Жевняк, Р.М. Высшая математика: учеб. пособие для втузов. Ч. IV / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук – Минск: Вышэйш. шк., 1987. – 240 с.
3. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты / Л.А.Кузнецов – СПб: Лань, 2005. – 240 с.

Учебное издание

Составители: ***Васильева Ольга Альбертовна,***
Михалкина Светлана Алексеевна

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Методические указания

Редактор Н. С. К у п р и я н о в а
Компьютерная верстка С. А. М и х а л к и н а

Подписано в печать 21.07.2008 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,5.
Тираж 50 экз. Заказ 65

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.