

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Любимов

КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Методические указания к курсовой работе по теории колебаний

САМАРА 2004

Составитель *Любимов Владислав Васильевич*

УДК 534.1

***Любимов В.В.* Колебания механической системы с двумя степенями свободы:**
Метод. указания к курс. работе по теории колебаний / Самар. гос.аэрокосм. ун-т. Самара,
2004. 31 с.

Рассматриваются свободные, вынужденные, параметрические колебания и автоколебания в механических системах с двумя степенями свободы. Методические указания написаны на основе курса лекций, читаемого автором для студентов старших курсов специальности "Механика" и служат вспомогательным материалом для выполнения курсовой работы по теории колебаний.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальности 010500 - Механика, а также могут быть полезны студентам других специальностей, изучающих теорию колебаний.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета

Рецензент: д-р техн. наук, проф. *Заболотнов Ю.М.*

* * *

Современные технические устройства часто работают в условиях колебаний, имеющих разнообразную физическую природу. Подробному изучению механических колебаний для студентов специальности «Механика» служит курс «Теория колебаний». Параллельно со слушанием лекций по данному курсу студенты выполняют курсовую работу. Целью курсовой работы является закрепление полученных теоретических знаний, осуществляемое путем исследования колебаний в конкретной механической системе с двумя степенями свободы.

Оформление курсовой работы выполняется в соответствии с общими правилами оформления технической документации на отдельных листах формата А4. Поля должны быть не менее 2 см с каждой стороны. Размер шрифта 14. Одинарный межстрочный интервал.

В качестве основного учебника по теории колебаний рекомендуется использовать курс лекций Заболотнова Ю.М. [1]. Кроме того, существует большое количество монографий по теории колебаний и асимптотическим методам их исследования, которые могут быть полезными при работе над курсовой работой [2-8].

Курсовая работа состоит из четырех частей:

1. Исследование свободных колебаний.
2. Исследование вынужденных колебаний.
3. Исследование автоколебаний.
4. Исследование параметрических колебаний.

В каждой из перечисленных частей должны содержаться необходимые теоретические выкладки и расчеты. Численные результаты иллюстрируются на графиках. В конце каждой части приводятся выводы по проделанной работе.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

1.1. Общие положения

В первой части курсовой работы рассматриваются свободные колебания линейной механической системы. Под собственными, или свободными, колебаниями понимаются колебания, которые возникают в системе, если на нее не действуют внешние силовые факторы, увеличивающие ее механическую энергию. Однако рассеяние энергии, например за счет действия консервативных сил трения, при свободных колебаниях может иметь место.

В первой части курсовой работы необходимо сделать следующее:

1. Выбрать две обобщенные координаты и записать кинетическую и потенциальную энергию в данных обобщенных координатах. Например, α и β - первая и вторая обобщенные координаты соответственно.

2. Записать выражения для кинетической и потенциальной энергий системы в выбранных обобщенных координатах. Линеаризовать выражения для кинетической и потенциальной энергий с учетом малости отклонений системы от положения устойчивого равновесия. Например, $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \beta \approx 1$, $\sin \beta \approx \beta$.

3. Упростить выражение для потенциальной энергии в соответствии с условием минимума данной энергии в положении устойчивого равновесия.

4. С помощью уравнений Лагранжа второго рода получить систему линейных уравнений, описывающих свободные колебания. Например,

$$a_{11}\ddot{\alpha} + a_{12}\ddot{\beta} + c_{11}\alpha + c_{12}\beta = 0, \quad (1.1)$$

$$a_{21}\ddot{\alpha} + a_{22}\ddot{\beta} + c_{21}\alpha + c_{22}\beta = 0. \quad (1.2)$$

Здесь a_{ij}, c_{ij} - известные функции параметров системы.

5. Составить характеристическое уравнение системы (1.1-1.2). Например, $(a_{11}\lambda^2 + c_{11})(a_{22}\lambda^2 + c_{22}) - (a_{12}\lambda^2 + c_{12})^2 = 0$. Решить характеристическое уравнение и найти две собственные частоты колебаний. Например, решая данное уравнение, получим $\lambda_1 = i\omega_1$, $\lambda_2 = -i\omega_1$, $\lambda_3 = i\omega_2$, $\lambda_4 = -i\omega_2$, где ω_1 и ω_2 - первая и вторая собственные частоты колебаний. Найти коэффициенты распределения, соответствующие частотам ω_1 и ω_2 .

$$\chi_1 = -\frac{-a_{11}\omega_1^2 + c_{11}}{-a_{12}\omega_1^2 + c_{12}} = -\frac{-a_{12}\omega_1^2 + c_{12}}{-a_{22}\omega_1^2 + c_{22}},$$

$$\chi_2 = -\frac{-a_{11}\omega_2^2 + c_{11}}{-a_{12}\omega_2^2 + c_{12}} = -\frac{-a_{12}\omega_2^2 + c_{12}}{-a_{22}\omega_2^2 + c_{22}}.$$

6. Записать общее решение системы (1.1-1.2) в виде

$$\alpha = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) + C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}), \quad (1.3)$$

$$\beta = C_1 \chi_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) + C_2 \chi_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}) \quad (1.4)$$

где произвольные постоянные C_1 , C_2 , $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ определяются из начальных условий.

7. Сделать выводы по проделанной работе.

1.2. Пример исследования свободных колебаний

Рассмотрим движение механической системы, изображенной на рис.1.1. Ее параметры приведены в табл. 1, где c_1 – крутильная жесткость диска, c_2 и c_3 – коэффициенты жесткости пружин, m_1 – масса диска, m_2 и m_3 – массы грузов 2 и 3 соответственно, R – радиус диска.

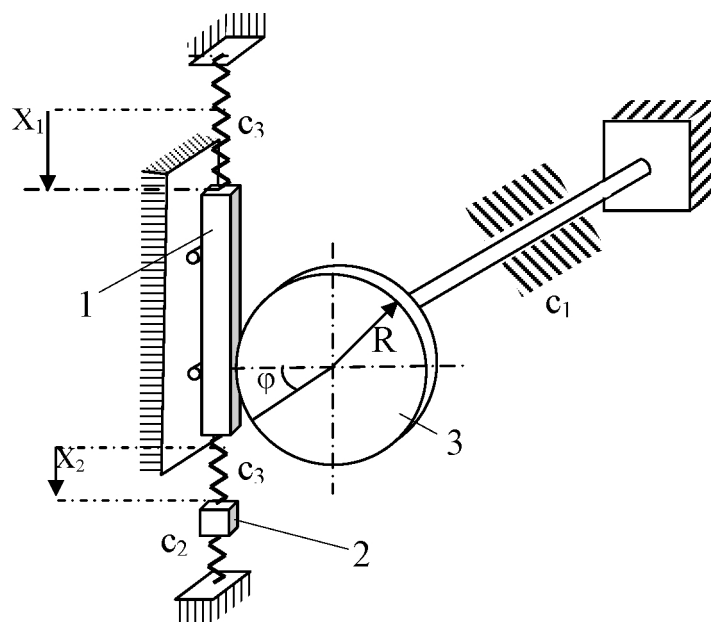


Рис. 1.1. Схема механической системы

Таблица 1

Параметры механической системы

m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	c_1 , Н*м/рад	c_2 , Н/м	c_3 , Н/м	R , м
20	10	40	$3 \cdot 10^4$	10^4	$1,5 \cdot 10^4$	0,5

1. Примем за обобщенные координаты системы абсолютные координаты смещения грузов x_1, x_2 , отсчитываемые от положения статического равновесия грузов. В состоянии покоя диск повернут на угол статической деформации $\varphi_{ст}$, верхняя пружина растянута на величину $f_{см3}$, средняя – сжата на величину $f_{см3}$, нижняя пружина сжата на величину $f_{см2}$.

2. Найдем кинетическую и потенциальную энергию системы. Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{m_3 \dot{x}_1^2}{4} + \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} = \frac{1}{2} \dot{x}_1^2 \left(\frac{m_3}{2} + m_1 \right) + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad (1.5)$$

или

$$T = \frac{1}{2} \left(a_{11} \dot{x}_1^2 + 2a_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + a_{22} \dot{x}_2^2 \right), \quad (1.6)$$

где a_{ij} – коэффициенты инерции: $a_{11} = \frac{m_3}{2} + m_1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = m_2$.

Потенциальная энергия всей системы запишется в виде

$$\begin{aligned} \Pi = & -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 + \frac{c_1 (x_1 + f_{cm3})^2}{2R^2} - \frac{c_1 f_{cm3}^2}{2R^2} + \frac{c_3 (x_1 + f_{cm3})^2}{2} - \frac{c_3 f_{cm3}^2}{2} + \\ & + \frac{c_3 (x_2 - x_1 + f_{cm3})^2}{2} - \frac{c_3 (f_{cm3})^2}{2} + \frac{c_2 (x_2 + f_{cm2})^2}{2} - \frac{c_2 f_{cm2}^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь $f_{cm3} = f_{cm2} - f_{cm3}$.

3. В положении устойчивого равновесия потенциальная энергия, согласно теореме Лагранжа-Дирихле, имеет минимум, поэтому вычисляя частные производные

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = -m_1 g + \frac{c_1 f_{cm3}}{R^2} + c_3 f_{cm3} - c_3 f_{cm3} = 0, \quad (1.8)$$

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = -m_2 g + c_3 f_{cm3} + c_2 f_{cm2} = 0, \quad (1.9)$$

получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -m_1 g + f_{cm3} \left(\frac{c_1}{R^2} + 2c_3 \right) - c_3 f_{cm2} = 0, \\ -m_2 g - c_3 f_{cm3} + (c_2 + c_3) f_{cm2} = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, получим $f_{cm2} = 5,009361 \cdot 10^{-3}$ м,
 $f_{cm3} = 1,808936 \cdot 10^{-3}$ м.

Потенциальная энергия системы с учетом условий экстремума имеет вид

$$\Pi = \frac{c_1 x_1^2}{2R^2} + \frac{c_3 x_1^2}{2} + \frac{c_3 (x_2 - x_1)^2}{2} + \frac{c_2 x_2^2}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_1}{R^2} + 2c_3 \right) x_1^2 - 2c_3 x_1 x_2 + (c_2 + c_3) x_2^2 \right]$$

или

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(c_{11} x_1^2 + 2c_{12} x_1 x_2 + c_{22} x_2^2 \right), \quad (1.10)$$

где c_{ij} – коэффициенты жесткости: $c_{11} = \frac{c_1}{R^2} + 2c_3$, $c_{12} = -c_3$, $c_{22} = c_2 + c_3$.

4. Подставим выражения для кинетической и потенциальной энергий (1.6) и (1.10) в уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right] - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right] - \frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}. \quad (1.11)$$

В результате получим дифференциальные уравнения свободных колебаний системы в окрестности устойчивого положения равновесия:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{x}_1 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 = 0, \\ a_{22}\ddot{x}_2 + c_{12}x_1 + c_{22}x_2 = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

или

$$\begin{cases} \left(\frac{m_3}{2} + m_1 \right) \ddot{x}_1 + \left(\frac{c_1}{R^2} + 2c_3 \right) x_1 - c_3 x_2 = 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_3 x_1 + (c_2 + c_3) x_2 = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

5. Уравнение собственных частот, вытекающее из данной системы дифференциальных уравнений: $(a_{11}\lambda^2 + c_{11})(a_{22}\lambda^2 + c_{22}) - c_{12}^2 = 0$. Корни этого биквадратного уравнения соответствуют квадратам собственных частот системы: $\lambda_1 = i\omega_1$, $\lambda_2 = -i\omega_1$, $\lambda_3 = i\omega_2$, $\lambda_4 = -i\omega_2$. В нашем случае $\omega_1 = 46,354 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 64,041 \text{ с}^{-1}$.

Коэффициенты распределения, соответствующие частотам ω_1 и ω_2 , имеют вид:

$$\chi_1 = -\frac{-a_{11}\omega_1^2 + c_{11}}{-a_{12}\omega_1^2 + c_{12}} = -\frac{-a_{12}\omega_1^2 + c_{12}}{-a_{22}\omega_1^2 + c_{22}},$$

$$\chi_2 = -\frac{-a_{11}\omega_2^2 + c_{11}}{-a_{12}\omega_2^2 + c_{12}} = -\frac{-a_{12}\omega_2^2 + c_{12}}{-a_{22}\omega_2^2 + c_{22}}.$$

Коэффициенты распределения для рассматриваемой системы будут иметь следующие значения:

$$\chi_1 = 4,27, \quad \chi_2 = -0,937.$$

Следовательно, первой частоте соответствуют колебания в одной фазе, а второй – противофазные.

6. Общее решение системы (1.13) запишется в виде:

$$x_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) + C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}), \quad (1.14)$$

$$x_2 = C_1 \chi_1 \cos(\omega_1 t + \varphi^{(1)}) + C_2 \chi_2 \cos(\omega_2 t + \varphi^{(2)}), \quad (1.15)$$

где произвольные постоянные C_1 , C_2 , $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ определяются из начальных условий. На рис. 1.2 показаны свободные колебания согласно выражениям (1.15) при $x_1 = 0$, $x_2 = -0.2 \text{ м/с}$, $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$.

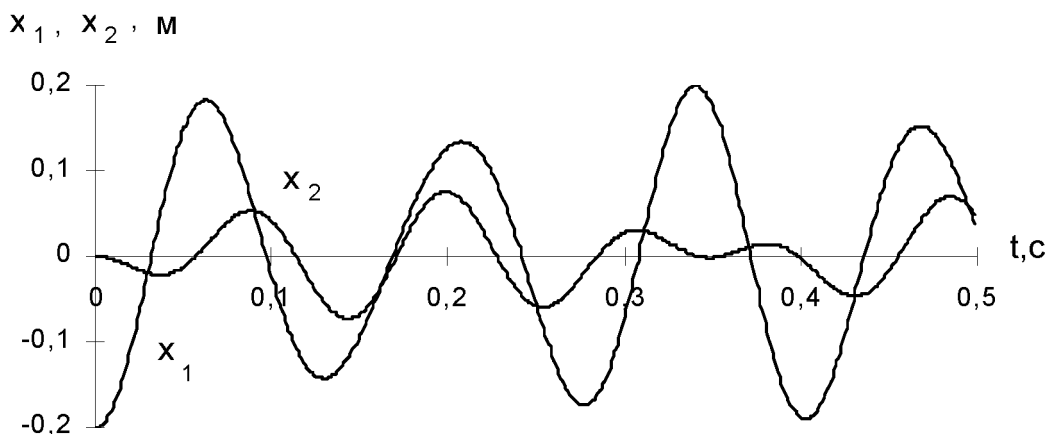


Рис.1.2. Свободные колебания в механической системе

7. Итак, свободные колебания системы с двумя степенями свободы являются гармоническими и описываются двумя гармониками по каждой из переменных.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

2.1. Общие положения

Рассмотрим вынужденные колебания в линейной механической системе с двумя степенями свободы. Под вынужденными колебаниями понимается колебательное движение системы при силовом или кинематическом воздействии, явным образом зависящем от времени и не зависящем от движений данной системы.

Рассмотрим вначале случай, когда на одну из частей конструкции действует сила, имеющая гармонический характер, например вида $Q = f \sin pt$, где f и p – амплитуда и частота внешней силы Q .

При исследовании вынужденных колебаний требуется выполнить следующее:

1. Если внешнее воздействие кинематическое, то требуется учесть его величину при вычислении потенциальной энергии системы. Если воздействие силовое, то надо учесть его величину при вычислении обобщенных сил.

2. Используя уравнения Лагранжа второго рода, записать уравнения малых колебаний системы. Например, в виде

$$a_{11}\ddot{\alpha} + a_{12}\ddot{\beta} + c_{11}\alpha + c_{12}\beta = f \sin pt, \quad (2.1)$$

$$a_{21}\ddot{\alpha} + a_{22}\ddot{\beta} + c_{21}\alpha + c_{22}\beta = 0. \quad (2.2)$$

Здесь a_{ij}, c_{ij} - функции параметров системы (аналогично первому разделу).

3. Определить частное решение системы. Для системы (2.1)-(2.2) получим:

$$\alpha = A_{\alpha} \sin pt, \quad \beta = A_{\beta} \sin pt. \quad (2.3)$$

4. Решая систему уравнений (2.1)-(2.2) найти амплитудно-частотные характеристики системы. Для системы (2.1)-(2.2) имеем:

$$A_{\alpha} = \frac{f(-a_{22}p^2 + c_{22})}{(a_{11}a_{22} + a_{12}^2)(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)}, \quad (2.4)$$

$$A_{\beta} = \frac{-f(-a_{12}p^2 + c_{12})}{(a_{11}a_{22} + a_{12}^2)(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)}. \quad (2.5)$$

5. Используя выражения для полученных амплитудных характеристик, построить графики $A_{\alpha}(p), A_{\beta}(p)$ и $A_{\alpha} / A_{\beta}(p)$ и найти имеющиеся в системе резонансы и парциальные частоты движения. Сделать выводы.

2.2. Пример исследования вынужденных колебаний

Рассмотрим вынужденные колебания в механической системе следующего вида (рис.2.1). Параметры данной системы содержатся в табл. 2.1.

Таблица 2

Параметры системы

m_1 , кг	m_2 , кг	c_1 , Н/м	c_2 , Н/м	c_3 , Н/м	ℓ , м
5	2	800	600	700	0,5

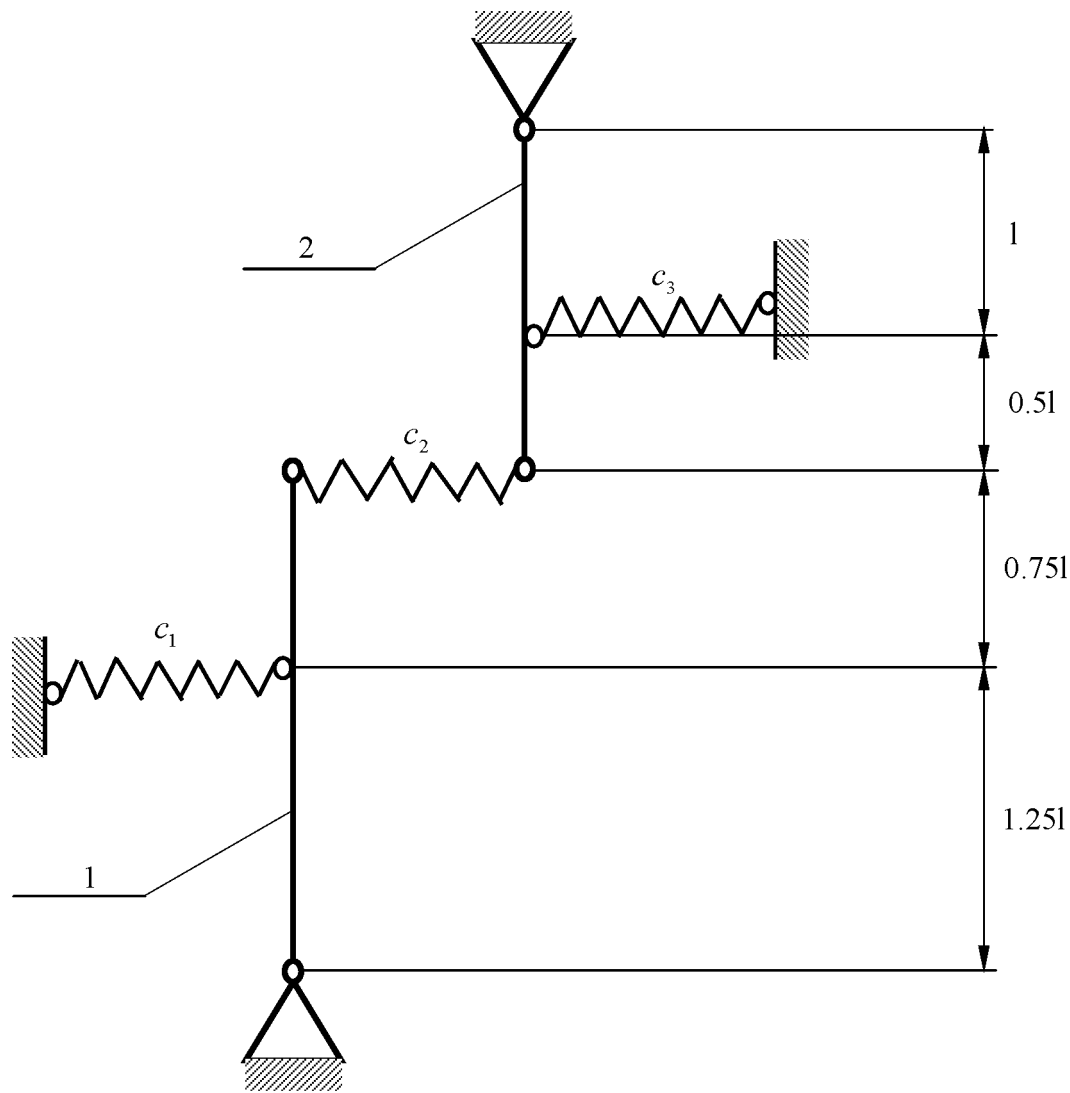


Рис.2.1. Колебательная система

Рассмотрим движение данной системы при кинематическом внешнем воздействии, приложенном к одной из опор, а именно в точке А (рис. 2.2). Зададим обобщённые координаты φ и ψ (рис. 2.2). При этом происходит колебание (вибрация) опоры А по закону $x_A = f \cdot \sin(p \cdot t)$. Здесь f и p – соответственно амплитуда и частота вибрации.

1. Выражение для кинетической энергии заданной системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{\varphi}^2 + a_{22} \dot{\psi}^2), \quad (2.6)$$

где $a_{11} = \frac{4m_1 \ell^2}{3}$, $a_{22} = \frac{(1.5)^2 m_2 \ell^2}{3}$ – коэффициенты инерции.

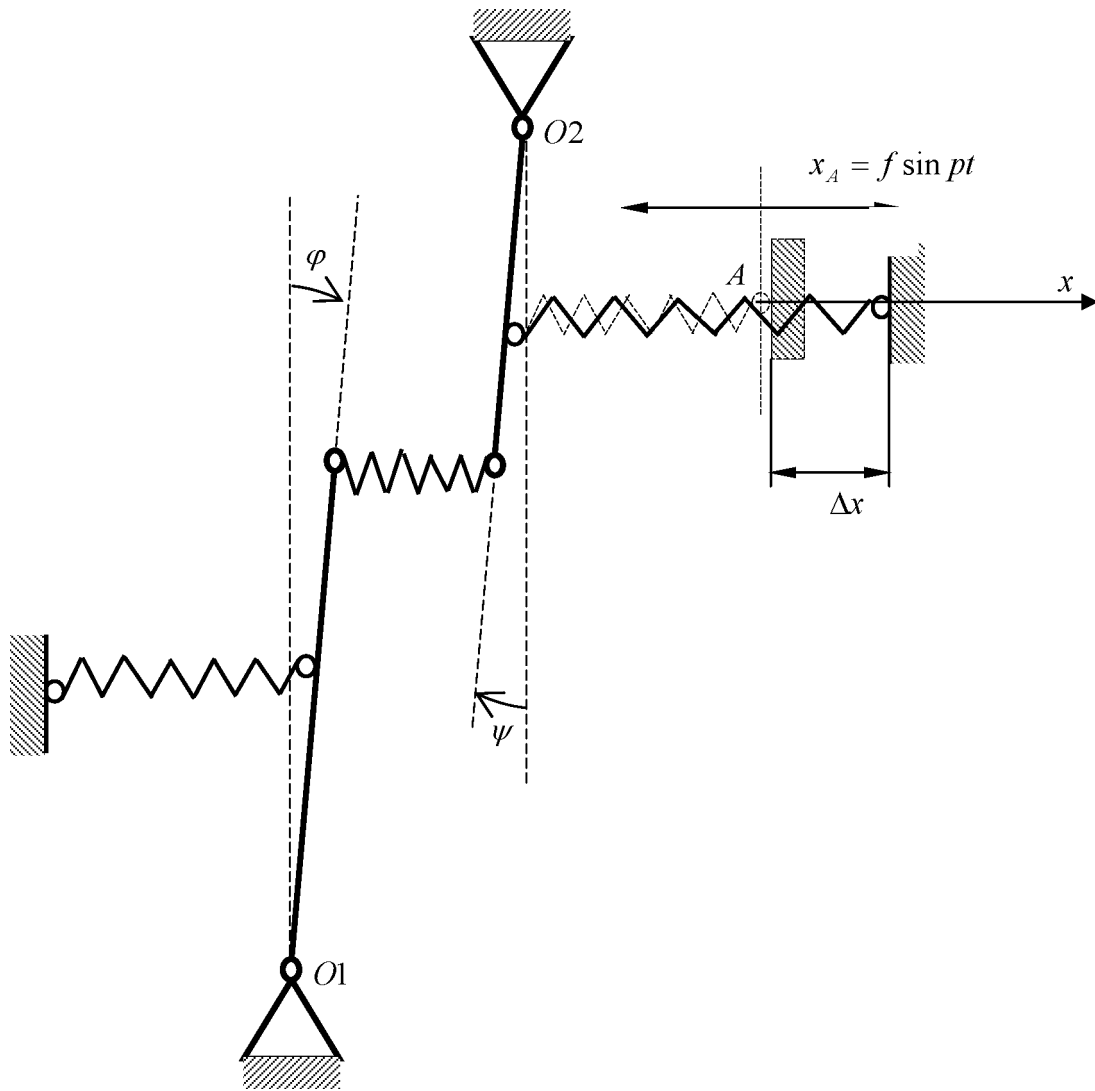


Рис. 2.2. Система с приложенной к ней вибрацией

Запишем потенциальную энергию для пружины с жёсткостью

$$c = c_3: \quad \Pi_{C3} = \frac{c_3 (f \sin pt - l \sin \psi)^2}{2}, \quad \text{где } f \sin pt - l \sin \psi = \Delta' - \text{деформация}$$

пружины с учётом вибрации.

Раскрывая скобки в последнем выражении и учитывая, что рассматриваются малые колебания, получим

$$\Pi_{C3} = \frac{c_3 (f \sin pt)^2 - 2c_3 fl \sin pt \psi + c_3 l^2 \psi^2}{2}. \quad (2.7)$$

Запишем потенциальную энергию системы аналогично случаю свободных колебаний, но с учётом выражения (2.7):

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}\varphi^2 + 2c_{12}\varphi\psi + c_{22}\psi^2 + c_3(f \sin pt)^2 - 2c_3 fl \psi \sin pt), \quad (2.8)$$

где $c_{11} = (c_1(1.25)^2 + 4c_2)l^2$, $c_{12} = c_{21} = 3c_2l^2$, $c_{22} = (c_2(1.5)^2 + c_3)l^2$ – коэффициенты жёсткости.

Собственные частоты, определенные при свободных колебаниях системы, равны: $\omega_1 = 15,995 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_2 = 40,723 \text{ с}^{-1}$. Коэффициенты собственных форм χ_1 и χ_2 для частот ω_1 и ω_2 : $\chi_1 = -1,08$ и $\chi_2 = 4,114$.

2. Используя выражение для кинетической энергии (2.6), с учётом последнего выражения для потенциальной энергии (2.8) составим уравнения малых вынужденных колебаний системы в окрестности нулевого положения равновесия. Видно, что все выкладки аналогичны случаю свободных колебаний за исключением производной

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = 3c_2 l^2 \varphi + ((1.5)^2 c_2 + c_3) l^2 \psi - c_3 fl \sin pt,$$

или

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = c_{22}\psi + c_{12}\varphi - c_3 fl \sin pt, \quad (2.9)$$

где коэффициенты жёсткости c_{11} , c_{12} , c_{22} определяются аналогично первому этапу.

Запишем уравнения малых вынужденных колебаний системы в окрестности нулевого положения равновесия:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{\varphi} + c_{11}\varphi + c_{12}\psi = 0, \\ a_{22}\ddot{\psi} + c_{12}\varphi + c_{22}\psi = c_3 fl \sin pt. \end{cases} \quad (2.10)$$

3. Частное решение этой системы, определяющее вынужденные колебания, имеет вид

$$\varphi = A_\varphi \sin pt \quad \text{и} \quad \psi = A_\psi \sin pt, \quad (2.11)$$

где A_φ и A_ψ – амплитуды вынужденных колебаний.

4. Амплитудно – частотные характеристики определяются по формулам

$$A_\varphi = - \frac{c_{12}c_3 lf}{a_{11}a_{22}(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)}, \quad (2.12)$$

и

$$A_\psi = \frac{c_3 lf (c_{11} - a_{11}p^2)}{a_{11}a_{22}(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)}. \quad (2.13)$$

5. Рассмотрим поведение амплитуд для трёх случаев изменения частоты вынужденных колебаний: $0 \leq p < \omega_1$, $\omega_1 < p < \omega_2$, $\omega_2 < p < \infty$. Построим графики, воспользовавшись пакетом Mathcad. Примем, что $f=1$. Получим:

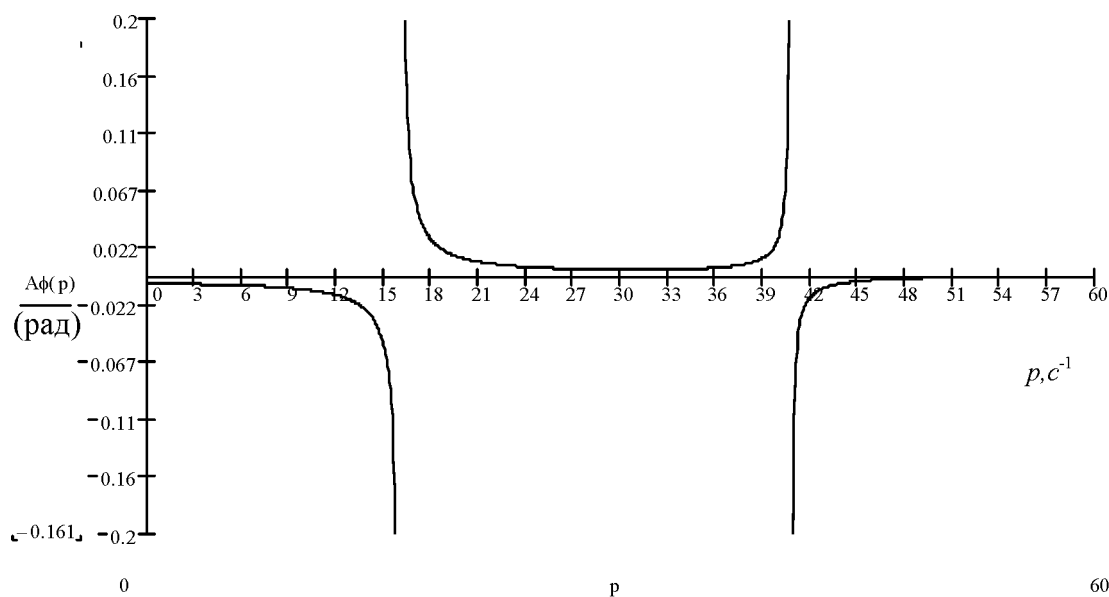


Рис. 2.3. Зависимость амплитуды A_ϕ от частоты p

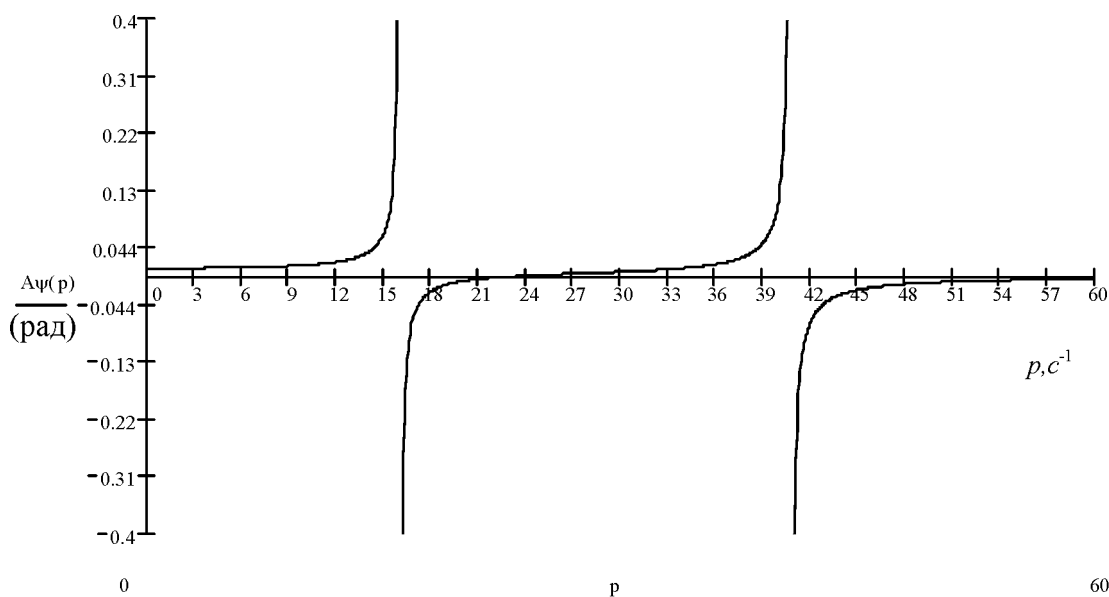


Рис. 2.4. Зависимость амплитуды A_ψ от частоты p

а) $0 \leq p < \omega_1$. Так как $\omega_1 < \omega_2$, то $p^2 - \omega_1^2 < 0$ и $p^2 - \omega_2^2 < 0$; следовательно, знаменатель формул (2.12) и (2.13) положителен. Из этого вытекает, что в первом интервале частоты p $A_\phi < 0$ и $A_\psi > 0$. С ростом величины p амплитуды колебаний стержней возрастают, при этом колебания

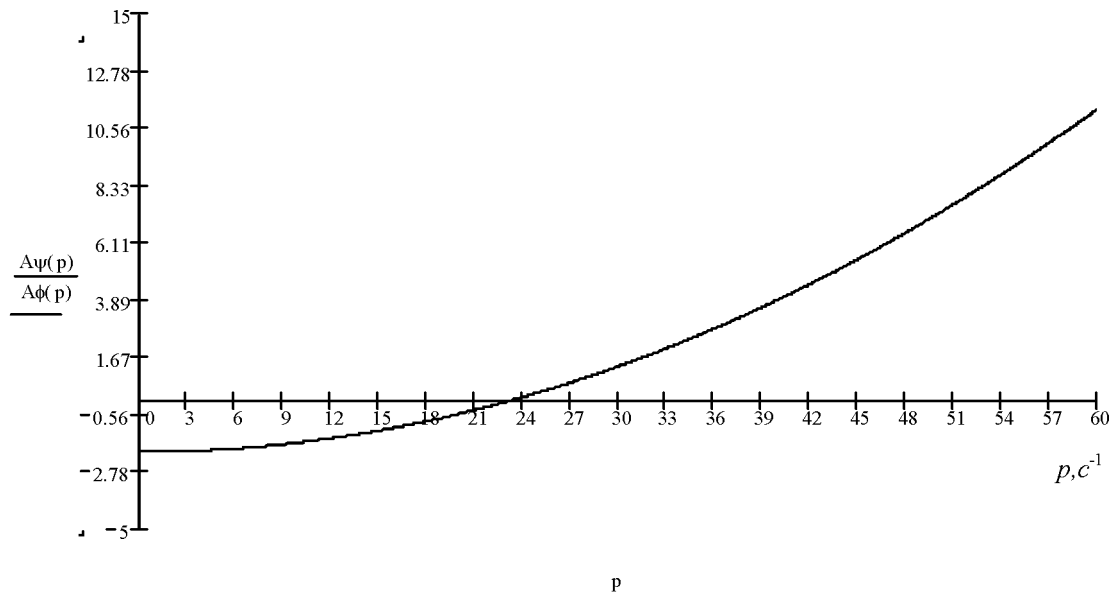


Рис. 2.5. Зависимость $\frac{A_{\psi}}{A_{\phi}}$ от частоты p

второго стержня происходят в одной фазе с изменением вибрации, а колебания первого стержня – в противофазе.

При $p=0$ имеем амплитуды невозмущённого движения:

$$A_{\phi} = -0,00594 \text{ рад и } A_{\psi} = 0,012 \text{ рад.}$$

При $p=\omega_1 = 15,995 \text{ c}^{-1}$ в системе наступает первый резонанс и функции A_{ϕ} и A_{ψ} претерпевают бесконечный разрыв;

б) $\omega_1 < p < \omega_2$. Так как $\omega_1 < \omega_2$, то $p^2 - \omega_1^2 > 0$ и $p^2 - \omega_2^2 < 0$; следовательно, знаменатель формул (2.12) и (2.13) отрицателен. Из этого следует, что во втором интервале $A_{\phi} > 0$, т.е. колебания первого стержня происходят синфазно с изменением вибрации. При определении знака функции

A_{ψ} необходимо рассмотреть числитель формулы (2.13). Если $\omega_1 < p < \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}$, то

$A_{\psi} < 0$ и колебания второго стержня происходят в противофазе с вибрацией.

Если $\sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}} < p < \omega_2$, то $A_{\psi} > 0$ и колебания второго стержня, так же как и первого,

совпадают по фазе с внешним воздействием. При частоте $p = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}} = 23,399 \text{ c}^{-1}$

амплитуда вынужденных колебаний второго стержня равна нулю ($A_\psi=0$ – случай антирезонанса). В этом случае первый стержень может рассматриваться как гаситель колебаний второго: $A_\phi = 0,007778$ рад.

Амплитуда колебаний первого стержня $|A_\phi|$ убывает при возрастании p от ω_1 до $\sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}$, а затем с увеличением p от $\sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}$ до ω_2 возрастает. При частоте

$p = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}} = 36,968 \text{ с}^{-1}$ амплитуды вынужденных колебаний A_ϕ и A_ψ , определяемые по формулам (2.12) и (2.13), равны: $A_\phi = 0,007778$ рад ; $A_\psi = 0,024$ рад.

При изменении p в интервале от ω_1 до ω_2 функция A_ϕ для амплитуды вынужденных колебаний первого стержня имеет минимум, соответствующий максимуму знаменателя формул (2.12) и (2.13). Взяв от этого выражения производную по p и приравняв её нулю, найдём значение p , при котором A_ϕ достигает минимума: $p = 30,937 \text{ с}^{-1}$. При $p = \omega_2 = 40,723 \text{ с}^{-1}$ в системе наступает второй резонанс;

в) $\omega_2 < p < \infty$. Так как $\omega_1 < \omega_2$, то $p^2 - \omega_1^2 > 0$ и $p^2 - \omega_2^2 > 0$; следовательно, знаменатель формул (2.12) и (2.13) положителен. Учитывая, что $\omega_2 > \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}$,

можно заключить, что в этом интервале и $A_\phi < 0$, и $A_\psi < 0$, т.е. колебания происходят в противофазе с вибрацией. С возрастанием p амплитуды вынужденных колебаний $|A_\phi|$ и $|A_\psi|$ уменьшаются, стремясь к нулю. Отношение функций A_ϕ и A_ψ , определяющих амплитуды вынужденных колебаний,

получим, разделив (2.12) и (2.13): $\frac{A_\psi}{A_\phi} = -2,03 + 0,0037 p^2$.

При $p=0$ $\frac{A_\psi}{A_\phi} = -2,03$. При $p=\omega_1=15,995 \text{ с}^{-1}$ $\frac{A_\psi}{A_\phi} = \chi_1 = -1,08$.

При $p = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}} = 23,399 \text{ с}^{-1}$ $\frac{A_\psi}{A_\phi} = 0$. При $p=\omega_2=40,723 \text{ с}^{-1}$ $\frac{A_\psi}{A_\phi} = \chi_2 = 4,114$.

Причем при резонансах формы вынужденных и свободных колебаний совпадают.

Таким образом, при вынужденных колебаниях в линейной системе с двумя степенями свободы возможна реализация резонансов, приводящих к значительному увеличению амплитуды колебаний. Кроме того, при некоторых найденных в работе частотах происходит гашение амплитуды колебаний по одной из двух обобщенных координат.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ

3.1. Общие положения

Рассмотрим возможные автоколебательные движения в линейной системе с двумя степенями свободы. Пусть в данной системе кроме потенциальных сил действуют известные малые нелинейные демпфирующие обобщенные силы, зависящие явным образом от обобщенных координат и скоростей $\varepsilon Q_1(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta})$ и $\varepsilon Q_2(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta})$.

Предельным циклом на фазовой плоскости называется изолированная замкнутая траектория. Под автоколебаниями понимается устойчивый предельный цикл, при котором в системе реализуются периодические колебания. Причем, период этих движений не зависит от начальных условий и определяется лишь значениями параметров системы.

Движение данной системы описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right] - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} + \varepsilon Q_1, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} \right] - \frac{\partial T}{\partial \beta} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \beta} + \varepsilon Q_2. \quad (3.1)$$

Будем считать, что невозмущенная система ($\varepsilon = 0$) имеет устойчивое положение равновесия $\alpha = \beta = 0$ и $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$, а функции T и Π в окрестности точки покоя представляются в виде положительно определенных квадратичных форм: $T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{\alpha}^2 + 2a_{12}\dot{\alpha}\dot{\beta} + a_{22}\dot{\beta}^2)$, $\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}\alpha^2 + 2c_{12}\alpha\beta + c_{22}\beta^2)$.

Для исследования автоколебаний требуется сделать следующее.

1. Записать дифференциальные уравнения движения системы в координатах α и β . С этой целью подставим выражения для энергий T и Π в уравнения (3.1). Получим:

$$a_{11}\ddot{\alpha} + a_{12}\ddot{\beta} + c_{11}\dot{\alpha} + c_{12}\dot{\beta} = \varepsilon Q_1(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}), \quad (3.2)$$

$$a_{21}\ddot{\alpha} + a_{22}\ddot{\beta} + c_{21}\dot{\alpha} + c_{22}\dot{\beta} = \varepsilon Q_2(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}). \quad (3.3)$$

2. Представим уравнения (3.2)-(3.3) в форме, удобной для применения метода Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= q_1, \quad \dot{\beta} = q_2, \\ a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= \varepsilon Q_1, \\ a_{21}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= \varepsilon Q_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В системе (3.4) сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} \alpha = K_1 \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi^{(1)}) + K_2 \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi^{(2)}), \\ \beta = \chi_1 K_1 \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi^{(1)}) + \chi_2 K_2 \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi^{(2)}), \\ q_1 = -\omega_1 K_1 \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi^{(1)}) - \omega_2 K_2 \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi^{(2)}), \\ q_2 = -\chi_1 \omega_1 K_1 \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi^{(1)}) - \chi_2 \omega_2 K_2 \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi^{(2)}). \end{cases} \quad (3.5)$$

В системе (3.4) с учетом выражений (3.5) в качестве новых переменных используются амплитуды K_1 , K_2 и начальные фазы $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$.

3. После подстановки выражений (3.5) в уравнения (3.4) имеем систему линейных алгебраических уравнений относительно \dot{K}_1 , \dot{K}_2 , $K_1\dot{\varphi}^{(1)}$ и $K_2\dot{\varphi}^{(2)}$, решая которую относительно этих переменных, получим:

$$\begin{cases} \frac{dK_1}{dt} = -\frac{\varepsilon(D_4 \cdot Q_1 - D_2 \cdot Q_2) \sin \varphi_1}{\omega_1(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}, \\ \frac{dK_2}{dt} = \frac{\varepsilon(D_3 \cdot Q_1 - D_1 \cdot Q_2) \sin \varphi_2}{\omega_2(\chi_2 - \chi_1)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}, \end{cases} \quad (3.6)$$

где $\varphi_1 = 22,8 \cdot t + \varphi_1^{(0)}$, $\varphi_2 = 32,5 \cdot t + \varphi_2^{(0)}$, $D_1 = a_{11} + a_{12}\chi_1$,

$$D_2 = a_{11} + a_{12}\chi_2, \quad D_3 = a_{12} + a_{22}\chi_1, \quad D_4 = a_{12} + a_{22}\chi_2.$$

4. Выражения в числителях правых частей (3.6) усредняем по быстрым фазам φ_1 и φ_2 :

$$A_1(K_1^0, K_2^0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (D_4 Q_1 - D_2 Q_2) \sin \varphi_1 d\varphi_1 d\varphi_2,$$

$$A_2(K_1^0, K_2^0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (D_3 Q_1 - D_1 Q_2) \sin \varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_2,$$

где K_1^0, K_2^0 - усредненные значения для соответствующих амплитуд.

5. При одновременном выполнении условий $A_1(K_1^*, K_2^*) = 0$ и $A_2(K_1^*, K_2^*) = 0$ находят особые точки системы (K_1^*, K_2^*) .

6. Для исследования типа и устойчивости особых точек (K_1^*, K_2^*) составляется и решается характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3.7)$$

где $d_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial K_j^o}(K_{*1}^o, K_{*2}^o)$, $(i, j = 1, 2)$.

Из решения уравнения (3.7) определяются корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 . Разновидности особых точек (K_1^*, K_2^*) могут быть следующие: $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ – неустойчивый узел; $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$ – устойчивый узел; $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ или наоборот – особая точка типа «седло»; λ_1 и λ_2 – комплексные числа – особая точка типа «фокус».

7. Построить фазовый портрет усредненной системы в переменных K_1 , K_2 и сделать выводы.

Из перечисленных особых точек устойчивым предельным циклом является устойчивый узел, поэтому длительные автоколебательные движения в системе возможны в малой окрестности устойчивого узла.

3.2. Пример исследования автоколебаний

Рассмотрим автоколебания в механической системе, показанной на рис.3.1.

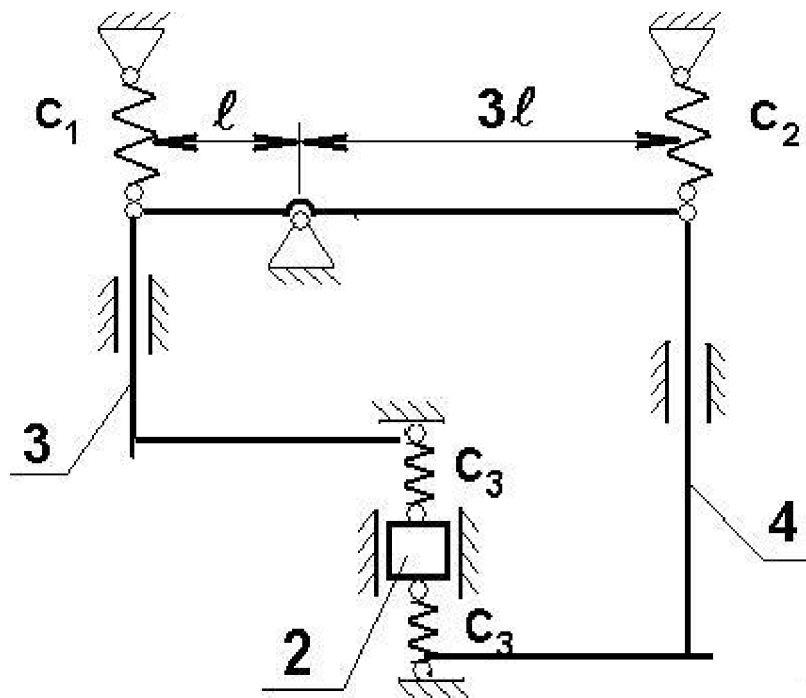


Рис.3.1. Колебательная система

В качестве обобщенных координат выберем угол поворота первого стержня φ и отклонение второго тела от положения покоя z (см. рис. 3.2-3.3).

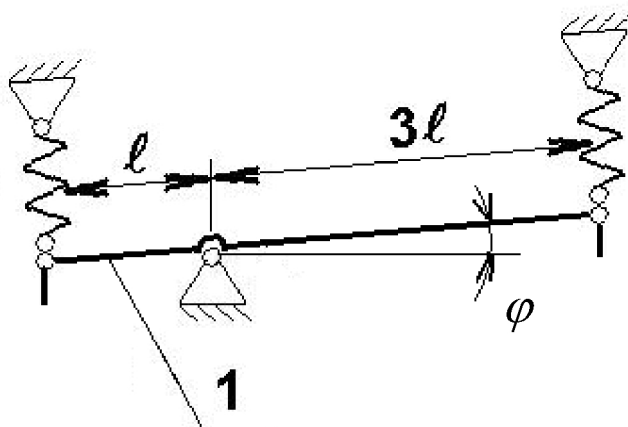


Рис.3.2. Обобщенная координата φ

Параметры данной механической системы представлены в табл. 3.1.

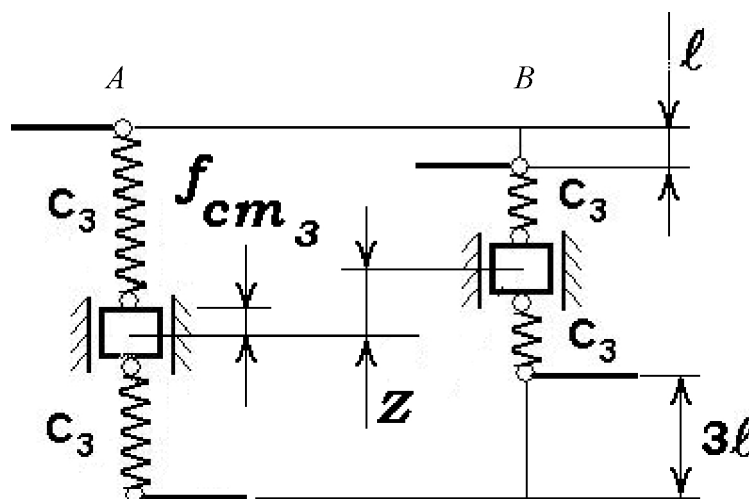


Рис.3.3 Обобщенная координата z

Таблица 3.1

Параметры механической системы

$m_1, m_4, \text{кг}$	$m_2, \text{кг}$	$m_3, \text{кг}$	$c_1, \text{Н/см}$	$c_2, \text{Н/см}$	$c_3, \text{Н/см}$	$l, \text{м}$
6	2	3	40	30	10	0,2

1. Кинетическую энергию системы можно представить в форме

$$T = \frac{1}{2} a_{22} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} a_{11} \dot{z}^2, \quad (3.8)$$

где $a_{11} = m_2$, $a_{22} = \left(\frac{34}{3} m_1 + m_3 \right) l^2$.

Потенциальная энергия примет вид

$$П = \frac{1}{2}(c_1 + 9c_2 + 10c_3)l^2\varphi^2 + c_3z^2 - 2c_3zl\varphi. \quad (3.9)$$

Собственные частоты системы: $\omega_1 = 22,8 \text{ c}^{-1}$, $\omega_2 = 32,5 \text{ c}^{-1}$.

Коэффициенты распределения: $\chi_1 = 2,401$, $\chi_2 = -0,281$.

Предположим, что на рассматриваемую механическую систему помимо потенциальных сил действуют малые нелинейные возмущающие силы следующего вида:

$$\begin{cases} Q_1 = b_1\dot{\varphi} + b_2\dot{z} + b_3\dot{z}^3, \\ Q_2 = b_4z^2\dot{z}, \end{cases}$$

где b_1, b_2, b_3, b_4 – малые параметры.

Зададимся значениями параметров b_1, b_2, b_3, b_4 :

$$b_1 = 0,01; b_2 = 0,1; b_3 = -0,1; b_4 = -0,1.$$

Уравнения колебаний механической системы в окрестности положения равновесия с учетом возмущающих сил можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{z} + c_{11}z + c_{12}\varphi = b_1\dot{\varphi} + b_2\dot{z} + b_3\dot{z}^3, \\ a_{22}\ddot{\varphi} + c_{21}z + c_{22}\varphi = b_4z^2\dot{z}. \end{cases} \quad (3.10)$$

2. Произведем замену переменных:

$$\begin{cases} z = K_1 \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1^{(0)}) + K_2 \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2^{(0)}), \\ \varphi = \chi_1 K_1 \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1^{(0)}) + \chi_2 K_2 \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2^{(0)}), \\ \dot{z} = -\omega_1 K_1 \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1^{(0)}) - \omega_2 K_2 \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi_2^{(0)}), \\ \dot{\varphi} = -\chi_1 \omega_1 K_1 \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1^{(0)}) - \chi_2 \omega_2 K_2 \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi_2^{(0)}). \end{cases}$$

3. Используя известные преобразования (см. [1]), получим систему уравнений для амплитуд колебаний K_1 и K_2 в виде (3.6), где:

$$\begin{aligned} Q_1 = & b_1(-54,7428 \cdot K_1 \sin \varphi_1 + 9,1325 \cdot K_2 \sin \varphi_2) + \\ & + b_2(-22,8 \cdot K_1 \sin \varphi_1 - 32,5 \cdot K_2 \sin \varphi_2) + \\ & + b_3(-22,8 \cdot K_1 \sin \varphi_1 - 32,5 \cdot K_2 \sin \varphi_2)^3, \end{aligned}$$

$$Q_2 = b_4(K_1 \cos \varphi_1 + K_2 \cos \varphi_2)^2(-22,8 \cdot K_1 \sin \varphi_1 - 32,5 \cdot K_2 \sin \varphi_2).$$

4. Проведем усреднение системы (3.6) по быстрым переменным φ_1 и φ_2 .

Учитывая особенности рассматриваемой системы, получим следующий результат:

$$\begin{cases} \frac{dK_1^0}{dt} = -\frac{K_1}{8(\chi_1 - \chi_2)a_{11}a_{22}} [4a_{22}\chi_2(\chi_1b_1 + b_2) + \\ + (3 \cdot \chi_2 a_{22} \omega_1^2 b_3 - a_{11} b_4) K_1^2 + 2(3 \cdot \chi_2 a_{22} \omega_2^2 b_3 - a_{11} b_4) K_2^2], \\ \frac{dK_2^0}{dt} = \frac{K_2}{8(\chi_1 - \chi_2)a_{11}a_{22}} [4a_{22}\chi_1(\chi_2b_1 + b_2) + \\ + 2(3 \cdot \chi_1 a_{22} \omega_1^2 b_3 - a_{11} b_4) K_1^2 + (3 \cdot \chi_1 a_{22} \omega_2^2 b_3 - a_{11} b_4) K_2^2], \end{cases} \quad (3.11)$$

Введем обозначения:

$$C = \frac{1}{8(\chi_1 - \chi_2)a_{11}a_{22}}, \beta_1 = 4a_{22}\chi_2(\chi_1b_1 + b_2), \beta_2 = 4a_{22}\chi_1(\chi_2b_1 + b_2),$$

$$\gamma_1 = (3 \cdot \chi_2 a_{22} \omega_1^2 b_3 - a_{11} b_4), \quad \gamma_2 = 2(3 \cdot \chi_1 a_{22} \omega_1^2 b_3 - a_{11} b_4),$$

$$\delta_1 = 2(3 \cdot \chi_2 a_{22} \omega_2^2 b_3 - a_{11} b_4), \quad \delta_2 = (3 \cdot \chi_1 a_{22} \omega_2^2 b_3 - a_{11} b_4).$$

В новых обозначениях усредненные уравнения примут вид

$$\begin{cases} \frac{dK_1^0}{dt} = -K_1 C [\beta_1 + \gamma_1 K_1^2 + \delta_1 K_2^2], \\ \frac{dK_2^0}{dt} = K_2 C [\beta_2 + \gamma_2 K_1^2 + \delta_2 K_2^2]. \end{cases} \quad (3.12)$$

5. Полученная система уравнений может иметь четыре особые точки, которые находятся из условия

$$\begin{cases} \frac{dK_1^0}{dt} = 0, \\ \frac{dK_2^0}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Получаем четыре характерных случая:

а) $K_{*1} = 0$, $K_{*2} = 0$ - тривиальный случай.

б) $K_{*1} = 0$, $K_{*2} = \sqrt{-\frac{\beta_2}{\gamma_2}}$, если $\frac{\beta_2}{\gamma_2} < 0$.

в) $K_{*1} = \sqrt{-\frac{\beta_1}{\gamma_1}}$, $K_{*2} = 0$, если $\frac{\beta_1}{\gamma_1} < 0$.

г) $K_{*1} = \sqrt{\frac{\beta_2 \delta_1 - \beta_1 \delta_2}{\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1}}$, $K_{*2} = \sqrt{\frac{\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1}{\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1}}$, если $\begin{cases} \frac{\beta_2 \delta_1 - \beta_1 \delta_2}{\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1} > 0, \\ \frac{\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1}{\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1} > 0. \end{cases}$

Обобщенные силы с учетом вышеприведенных значений параметров примут вид

$$\begin{cases} Q_1 = 0,1 \cdot (0,1 \cdot \dot{\phi} + \dot{z} - \dot{z}^3), \\ Q_2 = -0,1 \cdot z^2 \dot{z}. \end{cases}$$

6. Для определения типа и устойчивости найденных особых точек составим уравнения в отклонениях:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta K_1}{dt} = d_{11}\Delta K_1 + d_{12}\Delta K_2, \\ \frac{d\Delta K_2}{dt} = d_{21}\Delta K_1 + d_{22}\Delta K_2, \end{cases} \quad (3.14)$$

где $d_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial K_j^0}(K_{*1}, K_{*2})$; $\Delta K_1 = K_1 - K_{*1}$, $\Delta K_2 = K_2 - K_{*2}$;

$$d_{11} = -C[\beta_1 + 3\gamma_1 K_{*1}^2 + \delta_1 K_{*2}^2], \quad d_{12} = -2 \cdot C \delta_1 K_{*1} K_{*2},$$

$$d_{21} = 2 \cdot C \gamma_2 K_{*1} K_{*2}, \quad d_{22} = C[\beta_2 + \gamma_2 K_{*1}^2 + 3\delta_2 K_{*2}^2].$$

Характеристическое уравнение системы (3.17) имеет вид (3.7). Корни характеристического уравнения определяются следующим образом:

$$\lambda_{1,2} = \frac{d_{11} + d_{22}}{2} \pm \left[\frac{(d_{11} + d_{22})^2}{4} - (d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}) \right]^{1/2}.$$

Для рассматриваемой системы, после подстановки численных значений, получим следующие результаты:

а) $K_{*1} = 0$, $K_{*2} = 0$: $\lambda_1 = 0,0218$, $\lambda_2 = 0,0032$;

б) $K_{*1} = 0$, $K_{*2} = 0,0353$: $\lambda_1 = -0,0019$, $\lambda_2 = -0,0445$;

в) $K_{*1} = 0,0564$, $K_{*2} = 0$: $\lambda_1 = -0,0065$, $\lambda_2 = -0,0337$;

г) $K_{*1} = 0,0246$, $K_{*2} = 0,0252$: $\lambda_1 = 0,0031$, $\lambda_2 = -0,0268$.

7. Таким образом, первая точка является неустойчивым узлом (см. рис.3.4), вторая и третья точки являются устойчивыми узлами, а четвертая представляет собой седло. В рассматриваемой системе возможны устойчивые автоколебания с амплитудами, близкими к значениям $K_{*1} = 0,0564$, $K_{*2} = 0$ и $K_{*1} = 0$, $K_{*2} = 0,0353$. В двух других точках также существуют предельные циклы, однако они неустойчивы.

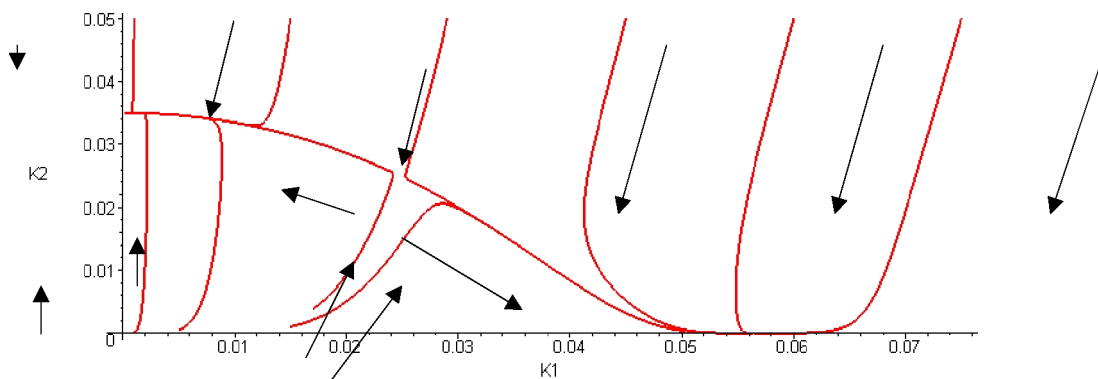


Рис. 3.4. Фазовый портрет усредненной системы

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ.

4.1. Общие положения

Рассмотрим параметрические колебания в линейной колебательной системе с двумя степенями свободы. Параметрическими называются колебания, возникающие в системе, некоторые параметры которой зависят от времени.

Допустим, что на рассматриваемую механическую систему помимо потенциальных сил действует периодическое параметрическое возмущение вида $c_1 = c_1^0 + \varepsilon \varphi^2 \sin pt$, где c_1 - жесткость первой пружины, c_1^0 - невозмущенное значение жесткости, ε - малый параметр, p - частота параметрического возмущения.

Для исследования параметрических колебаний требуется сделать следующее:

1. Рассмотрим колебания системы в окрестности устойчивого положения равновесия ($\alpha = 0$, $\beta = 0$). Учитывая известные из предыдущих разделов выражения для кинетической и потенциальной энергий, запишем уравнения параметрических колебаний:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{\alpha} + a_{12}\ddot{\beta} + c_{11}\alpha + c_{12}\beta = 0, \\ a_{21}\ddot{\alpha} + a_{22}\ddot{\beta} + c_{21}\alpha + c_{22}^0\beta = \varepsilon Q_2, \end{cases} \quad (4.1)$$

где коэффициент c_{22}^0 и обобщенная сила Q_2 определяются с учетом параметрического возмущения c_1 .

2. Преобразуем систему (4.1) к переменным амплитуда – фаза по формулам:

$$\begin{cases} \alpha = K_1 \cos \varphi_1 + K_2 \cos \varphi_2, \\ \beta = \chi_1 K_1 \cos \varphi_1 + \chi_2 K_2 \cos \varphi_2, \\ \dot{\alpha} = -\omega_1 K_1 \sin \varphi_1 - \omega_2 K_2 \sin \varphi_2, \\ \dot{\beta} = -\chi_1 \omega_1 K_1 \sin \varphi_1 - \chi_2 \omega_2 K_2 \sin \varphi_2, \end{cases} \quad (4.2)$$

где $\varphi_1 = (\omega_2 \cdot t + \varphi_2^{(0)})$, $\varphi_2 = (\omega_1 \cdot t + \varphi_1^{(0)})$.

После ряда преобразований (см. монографию [1]) можно получить следующий результат:

$$\begin{cases} \frac{dK_1}{dt} = \frac{\varepsilon \cdot Q_2 \sin \varphi_1}{\omega_1(\chi_2 - \chi_1)a_{22}}, \\ \frac{dK_2}{dt} = -\frac{\varepsilon \cdot Q_2 \sin \varphi_2}{\omega_2(\chi_2 - \chi_1)a_{22}}, \\ \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 + \frac{\varepsilon \cdot Q_2 \cos \varphi_1}{K_1\omega_1(\chi_2 - \chi_1)a_{22}}, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 - \frac{\varepsilon \cdot Q_2 \cos \varphi_2}{K_2\omega_2(\chi_2 - \chi_1)a_{22}}, \\ \frac{d\psi}{dt} = p. \end{cases} \quad (4.3)$$

3. Для определения резонансов, возможных в рассматриваемой системе, разложим правые части системы (4.3) в ряд Фурье.

4. Анализируя выражения для правых частей полученных уравнений, определим коэффициенты ряда Фурье $\left(\sum_{s_1 \dots s_m} b_{s_1 \dots s_m}(x^0) \exp[i(s_1\varphi_1 + \dots + s_m\varphi_m)] \right)$, отличные от нуля.

5. Выписать резонансные знаменатели, соответствующие найденным коэффициентам (см. монографию [1]).

6. Выбирая из данных знаменателей те, которые могут обращаться в ноль при $p > 0$, $\omega_2 > \omega_1 > 0$, получаем резонансы, возможные в системе:

7. Рассмотрим подробнее один из резонансов. Например $4\omega_1 - p = 0$. Обозначим резонансную фазу $\vartheta = 4\varphi_1 - \psi$ и амплитуду колебаний $K_1 = K$. Получим дифференциальные уравнения для ϑ и K .

8. Приравнявая правые части полученных уравнений к нулю, получаем зависимости ϑ и K от расстройки частот h . Изображаем эти зависимости на графиках $\vartheta(h)$, $K(h)$ – фазовой и амплитудной характеристиках системы. Делаем выводы.

4.2. Пример исследования параметрических колебаний

1. Рассмотрим колебания системы в окрестности устойчивого положения равновесия ($\varphi = 0$, $z = 0$). Кинетическая и потенциальная энергии системы будут иметь вид (3.8) и (3.9) соответственно. При этом уравнения параметрических колебаний выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{z} + c_{11}z + c_{12}\varphi = 0, \\ a_{22}\ddot{\varphi} + c_{21}z + c_{22}^0\varphi = -2\varepsilon l^2 \varphi^3 \sin pt = \varepsilon Q_2, \end{cases} \quad (4.4)$$

где $c_{22}^0 = c_1^0 + 9c_2 + 10c_3$.

2. Преобразуем систему (4.4) к переменным амплитуда – фаза по формулам:

$$\begin{cases} z = K_1 \cos \varphi_1 + K_2 \cos \varphi_2, \\ \varphi = \chi_1 K_1 \cos \varphi_1 + \chi_2 K_2 \cos \varphi_2, \\ \dot{z} = -\omega_1 K_1 \sin \varphi_1 - \omega_2 K_2 \sin \varphi_2, \\ \dot{\varphi} = -\chi_1 \omega_1 K_1 \sin \varphi_1 - \chi_2 \omega_2 K_2 \sin \varphi_2, \end{cases} \quad (4.5)$$

где $\varphi_1 = (\omega_2 \cdot t + \varphi_2^{(0)})$, $\varphi_2 = (\omega_1 \cdot t + \varphi_1^{(0)})$.

После ряда преобразований получим систему уравнений (4.3), в которой $Q_2 = -2\varepsilon l^2 (\chi_1 K_1 \cos \varphi_1 + \chi_2 K_2 \cos \varphi_2)^3 \sin \psi$.

3. Разложим правые части системы (4.3) в ряд Фурье с помощью математического пакета Maple:

$$\frac{dK_1}{dt} = \frac{1}{8} \frac{\varepsilon l^2}{\omega_1(\chi_2 - \chi_1)a_{22}} F_1(K_1, K_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi), \quad (4.6)$$

$$\frac{dK_2}{dt} = \frac{1}{8} \frac{\varepsilon l^2}{\omega_2(\chi_2 - \chi_1)a_{22}} F_2(K_1, K_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi), \quad (4.7)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 + \frac{1}{8} \frac{\varepsilon l^2}{K_1 \omega_1(\chi_2 - \chi_1)a_{22}} F_3(K_1, K_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi), \quad (4.8)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 + \frac{1}{8} \frac{\varepsilon l^2}{K_2 \omega_2(\chi_2 - \chi_1)a_{22}} F_4(K_1, K_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi). \quad (4.9)$$

Здесь F_1, F_2, F_3, F_4 - известные функции своих переменных.

4. Анализируя последние выражения, определим коэффициенты ряда Фурье $\left(\sum_{s_1 \dots s_m} b_{s_1 \dots s_m} (x^0) \exp[i(s_1 \varphi_1 + \dots + s_m \varphi_m)] \right)$, которые отличны от нуля для рассматриваемой системы (4.4)-(4.7):

$$\begin{aligned} & b_{0,0,1}, b_{2,0,1}, b_{2,0,-1}, b_{0,2,1}, b_{0,2,-1}, b_{0,4,1}, b_{0,4,-1}, b_{4,0,1}, b_{4,0,-1}, \\ & b_{1,1,1}, b_{1,-1,-1}, b_{1,1,-1}, b_{1,-1,1}, b_{1,3,1}, b_{1,-3,1}, b_{1,3,-1}, b_{1,-3,-1}, \\ & b_{2,2,1}, b_{2,-2,1}, b_{2,2,-1}, b_{2,-2,-1}, b_{3,1,1}, b_{3,-1,1}, b_{3,1,-1}, b_{3,-1,-1}. \end{aligned}$$

5. Данные коэффициенты Фурье порождают в асимптотических рядах знаменатели вида: $p; 2\omega_1+p; 2\omega_1-p; 4\omega_1+p; 4\omega_1-p; 2\omega_2+p; 2\omega_2-p; 4\omega_2+p; 4\omega_2-p; \omega_1+\omega_2+p; \omega_1-\omega_2+p; \omega_1+\omega_2-p; \omega_1-\omega_2-p; \omega_1+3\omega_2+p; \omega_1-3\omega_2+p; \omega_1+3\omega_2-p; \omega_1-3\omega_2-p; 2\omega_1+2\omega_2+p; 2\omega_1-2\omega_2+p; 2\omega_1+2\omega_2-p; 2\omega_1-2\omega_2-p; 3\omega_1+\omega_2+p; 3\omega_1-\omega_2+p; 3\omega_1+\omega_2-p; 3\omega_1-\omega_2-p$.

6. Выбираем из этих знаменателей те, которые могут обращаться в ноль при $p>0, \omega_2>\omega_1>0$. Получаем резонансы, возможные в системе: $2\omega_1-p=0; 4\omega_1-p=0; 4\omega_2-p=0; 2\omega_2-p=0; \omega_1+\omega_2-p=0; \omega_1-\omega_2-p=0; \omega_1-\omega_2+p=0; \omega_1-3\omega_2+p=0; \omega_1+3\omega_2-p=0; \omega_1-3\omega_2-p=0; 2\omega_1-2\omega_2+p=0; 2\omega_1+2\omega_2-p=0; 2\omega_1-2\omega_2-p=0;$

$$3\omega_1 - \omega_2 + p = 0; \quad 3\omega_1 + \omega_2 - p = 0; \quad 3\omega_1 - \omega_2 - p = 0.$$

7. Исследуем один из этих резонансов. Рассмотрим: $2\omega_1 - p = 0$.

Введём резонансную фазу: $\vartheta = 2\varphi_1 - \psi$. Подставляя выражения (4.6) – (4.9) в уравнения (4.3) и сохраняя в них только члены, соответствующие данному резонансу, получим частично усреднённую систему:

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{4} \frac{\alpha K_1}{\omega_1} (\chi_1^2 K_1^2 + 3\chi_2^2 K_2^2) \cos \vartheta, \\ \frac{dK_2}{dt} &= 0, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= (2\omega_1 - p) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\alpha}{\omega_1} [\chi_1^2 K_1^2 + 3\chi_2^2 K_2^2] \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\text{где } a = \frac{l^2 \chi_1}{(\chi_2 - \chi_1) a_{22}}.$$

Сделаем замены в усреднённой системе $K_1 = K$, $\omega_1 = \omega$, $3\chi_2^2 K_2^2 = C^2$, а также добавим усреднённую диссипативную силу, которая линейно зависит от K . Такая сила была получена в третьем пункте данной курсовой работы. Перепишем полученную систему в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= -|N|K - \frac{\varepsilon}{4} \frac{\alpha K}{\omega} (\chi_1^2 K^2 + C^2) \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= h + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\alpha}{\omega} [\chi_1^2 K^2 + C^2] \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $h = 3\omega_1 - p$ – расстройка частот, $N = \frac{\chi_2(\chi_1 b_1 + b_2)}{2(\chi_1 - \chi_2) a_{11}}$.

8. В системе (4.11) приравняем правые части нулю и определим зависимости амплитуды K и резонансной фазы ϑ от частотной расстройки h . Получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned} K &= \pm \frac{1}{\chi_1} \sqrt{-\left[2\omega \sqrt{4N^2 + h^2} + \varepsilon \alpha C^2\right]}, \\ \vartheta &= \arctg \frac{h}{2|N|}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

Для исходных данных построим графики (рис. 4.1, 4.2) полученных зависимостей $K(h)$, $\vartheta(h)$. На рис.4.1 область значений K , расположенная выше кривой $K(h)$, соответствует зоне неустойчивости по амплитуде K параметрических колебаний.

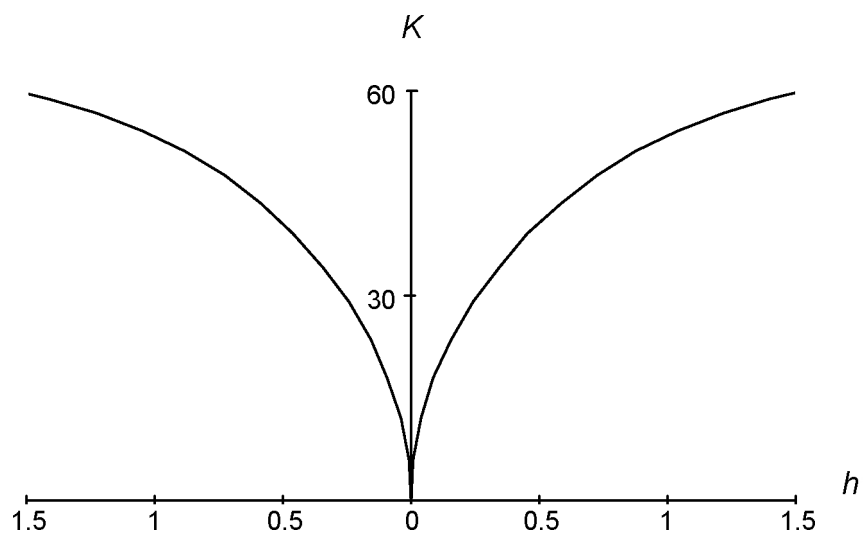


Рис. 4.1. Зависимость амплитуды K от частотной расстройки h

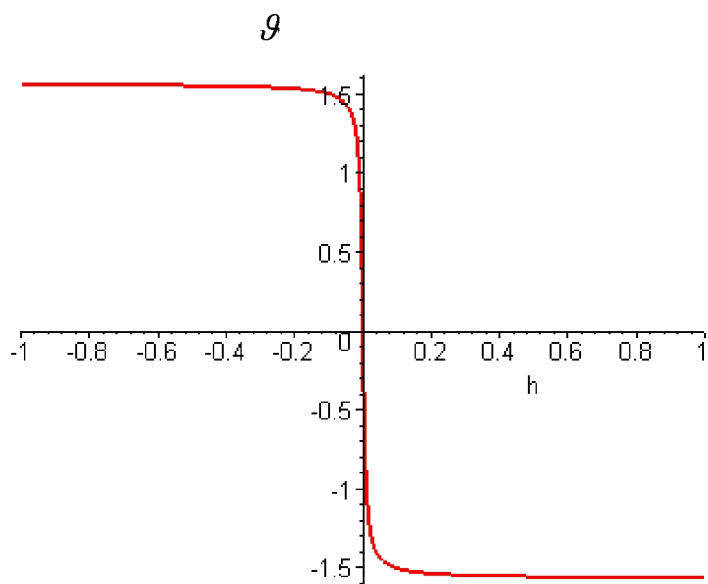


Рис. 4.2 . Зависимость резонансной фазы ϑ от частотной расстройки h

Данная область неустойчивости определяется и аналогична области неустойчивости уравнения Матье. Аналогично могут быть рассмотрены и другие резонансы системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В методических указаниях подробно рассмотрены вопросы, связанные с выполнением курсовой работы по теории колебаний для студентов специальности «Механика». Здесь содержатся общие требования к выполнению работы и представлена четкая последовательность действий при выполнении курсовой работы. Кроме того, в конце каждого раздела приводится конкретный пример выполнения данной части курсовой. В методических указаниях представлены все необходимые типы графиков, которые необходимо построить. В конце работы приводится список литературы, рекомендованной для выполнения работы.

В первом разделе рассмотрены свободные колебания в механической системе. Получены аналитические выражения, описывающие изменение обобщенных координат по времени. Кроме того, найдены собственные частоты и коэффициенты форм свободных колебаний.

Во втором разделе проанализированы вынужденные колебания в системе. Получены решения уравнений движения, содержащих внешнее кинематическое воздействие. Построены амплитудно-частотные характеристики системы. Определены возможные в системе резонансы и парциальные частоты.

В третьем разделе изучены автоколебательные движения в механической системе. Методом Ван-дер-Поля было произведено усреднение исходных уравнений. Определены особые точки системы. Исследовались тип и устойчивость этих точек.

В четвертом разделе рассмотрены параметрические колебания в системе. Уравнения движения были представлены в координатах амплитуда-фаза. Были получены возможные в системе резонансы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заболотнов Ю.М.* Теория колебаний: Конспект лекций / Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 1999. 168 с.
2. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
3. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1991. 256 с.
4. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988.
5. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
6. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
7. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986. 191 с.
8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под. ред. А.А. Яблонского. М.: Наука, 1982. 230 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ	4
1.1. Общие положения	4
1.2. Пример исследования свободных колебаний	5
2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ	8
2.1. Общие положения	8
2.2. Пример исследования вынужденных колебаний	9
3. ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ	16
3.1. Общие положения	16
3.2. Пример исследования автоколебаний	18
4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ	23
4.1. Общие положения	23
4.2. Пример исследования параметрических колебаний	24
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	28
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	29

Учебное издание

КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Методические указания к курсовой работе по теории колебаний

Составитель Любимов Владислав Васильевич

Редактор Л. Я. Ч е г о д а е в а
Корректор Л. Я. Ч е г о д а е в а

Подписано в печать 09.03.04. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ.л. 1,8. Усл. кр.-отт. 1,9. Уч.-издл 2,0.
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. С-28/2004.

Самарский государственный аэрокосмический
университет. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.

РИО Самарского государственного аэрокосмического
университета. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.