Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации
Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П.Королева

О. Л. Старинова

Классическое вариационное исчисление

Учебное пособие по курсу «Вариационное исчисление и методы оптимизации»

Самара, 2001

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.

Изучение вариационного исчисления и методов оптимизации как одной из физико-математических дисциплин играет важную роль в подготовке специалистов по механико-математическим и инженерным механическим направлениям. Оно позволяет будущим специалистам не только получить глубокие знания, но и вырабатывает у них необходимые навыки для решения сложных естественно-научных и технических задач в которых требуется выбор оптимальных параметров построенных разнообразных механических систем, развивает способности к научным обобщениям и выводам.

Для закрепления навыков самостоятельного решения задач вариационного исчисления студенты СГАУ выполняют расчетные работы, в которых теоретические сведения из разделов курса применяются для решения конкретных задач оптимизации.

1. Элементы дифференциального исчисления и выпуклого анализа.

1.1. Предмет и краткое содержание курса. Связь с другими дисциплинами учебного плана.

Очень широкий класс задач составляют экстремальные задачи, в которых требуется найти значения параметров или функций, реализующих максимум или минимум некоторой зависящей от них величины. Во многих инженерных задачах, например, желательно найти максимум меры выполнения или минимум стоимости. Кроме того, можно, по крайней мере, приблизить решения многих задач, выбрав неизвестные значения параметров или функций так, чтобы они давали минимум ошибки в пробных решениях; иногда такой прием позволяет применить для решения данной задачи мощные методы численных приближений.

Примеры: решение задач о собственных значениях в теории колебаний и квантовой механике; принципы Гамильтона и Якоби в динамике.

1.2. Экстремумы функции одного действительного переменного.

Функция $f(x)$, определенная в точке $x=a$, имеет в этой точке локальный максимум (минимум) $f(a)$, если $\exists\delta>0 \quad \forall x\in D \quad 0<|x-a|<\delta \quad f(x)-f(a)<0$ $(\exists\delta>0 \quad \forall x\in D \quad 0<|x-a|<\delta \quad f(x)-f(a)>0)$.

Если в каждом из этих случаев выполняются нестрогие неравенства ($\le$ или $\ge$), то говорят о нестрогом максимуме (минимуме).

Локальный экстремум называется внутренним, если $a\in \operatorname{int} D$. Если $a\in\partial D$, то экстремум – граничный.

Теорема 1 (Необходимое условие экстремума). Для того чтобы, $f(x)$ имела экстремум в точке $x=a$ необходимо, чтобы в этой точке $f'(a)=0$.

Теорема 2 (Достаточное условие экстремума). Если в точке $x=a$ выполнены условия $f'(a)=0 \quad f''(a)<0$, то в этой точке $f(x)$ имеет максимум ($f'(a)=0 \quad f''(a)>0$ - минимум).

1.3. Экстремумы функции двух и более переменных.

Функция $f(x_1, \ \ldots, \ x_n)$, определенная в точке $\overline{x} = \overline{a}$, имеет в этой точке локальный максимум (минимум) $f(\overline{a})$, если $\exists \delta > 0 \quad \forall \overline{x} \in D \quad 0 < \|\overline{x} - \overline{a}\| < \delta \quad f(\overline{x}) - f(\overline{a}) < 0$
$\left(\exists \delta > 0 \quad \forall \overline{x} \in D \quad 0 < \|\overline{x} - \overline{a}\| < \delta \quad f(\overline{x}) - f(\overline{a}) > 0\right)$.

Если в каждом из этих случаев выполняются нестрогие неравенства ($\le$ или $\ge$), то говорят о нестрогом максимуме (минимуме).

Локальный экстремум называется внутренним, если $a \in \operatorname{int} D$. Если $a \in \partial D$, то экстремум – граничный.

Для функции нескольких переменных справедлива формула Тейлора

$$\Delta f = f(x_1, \ \ldots, \ x_n) - f(a_1, \ \ldots, \ a_n) = df + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \ldots =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}=\overline{a}} \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\overline{x}=\overline{a}} \Delta x_i \Delta x_j + o\left(\|\overline{x} - \overline{a}\|^2\right).$$

<u>Теорема 1 (Необходимое условие экстремума).</u> Для того чтобы, $f(\overline{x})$ имела экстремум в точке $\overline{x} = \overline{a}$ необходимо, чтобы в этой точке $df(\overline{a}) = 0$, т.е. чтобы $\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\overline{x}=\overline{a}} = 0, \\ \ldots, \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\overline{x}=\overline{a}} = 0 \end{cases}$.

<u>Теорема 2 (Достаточное условие экстремума).</u> Если в точке $\overline{x} = \overline{a}$ выполнено необходимое условие экстремума $df(\overline{a}) = 0$ и если второй дифференциал $d^2 f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\overline{x}=\overline{a}} \Delta x_i \Delta x_j$ отрицательно определенная квадратичная форма, то в этой точке $f(\overline{x})$ имеет максимум (если положительно определенная, то минимум). Если же $d^2 f$ - неопределенная квадратичная форма, то в точке $\overline{x} = \overline{a}$ нет ни максимума ни минимума.

Задача нахождения экстремума функции n переменных, подчиненных дополнительным $m < n$ условиям связи $\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ \ldots, \ x_n) = 0, \\ \ldots, \\ \varphi_m(x_1, \ \ldots, \ x_n) = 0 \end{cases}$ назыается задачей на условный экстремум.

<u>Теорема 3 (Необходимое условие условного экстремума).</u> Для того чтобы, $f(\overline{x})$ имела условный экстремум в точке $\overline{x} = \overline{a}$ необходимо, чтобы $\begin{cases} \left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right|_{\overline{x}=\overline{a}} = 0, \\ \ldots, \\ \left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right|_{\overline{x}=\overline{a}} = 0 \end{cases}$, где

$$\Phi(\overline{x}) = f(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(\overline{x}).$$

m параметров λ_j называются множителями Лагранжа. $n + m$ неизвестных $x_i = a_i$ и λ_j находят из $n + m$ уравнений.

1.4. Линейное программирование. Симплекс метод. Определение задачи нелинейного программирования.

Задача в которой требуется минимизировать линейную целевую функцию $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$ *при* $m < n$ *ограничениях – равенствах* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ *и* n *ограничениях неравенствах* $x_i \ge 0$ *называется задачей линейного программирования в стандартной форме.*

Большой интерес к задачам линейного программирования обусловлен их приложениями в экономике и управлении.

☺ Задача организации производства. Пусть в нашем распоряжении имеется m видов ресурсов (сырье, оборудование, энергия и т.д.). Объем i - го ресурса равен b_i. Из этих ресурсов можно производить n видов продукции. Известны нормы расхода a_{ij} i - го ресурса на единицу j - ой продукции и цены этой продукции c_j. Требуется определить такой план выпуска $x^* = \left(x_1^*, \quad ..., \quad x_n^*\right)$, при котором общая стоимость продукции будет максимальной.

Допустимое решение (допустимый план) задачи линейного программирования это $\overline{x}$, *удовлетворяющее ограничениям. Оптимальное решение (оптимальный план) – допустимое решение минимизирующее целевую функцию.*

<u>Теорема 1 (Теорема существования).</u> Для того, чтобы оптимальное решение существовало необходимо, чтобы система ограничений была совместна. Т.е. $r \le m < n$ - ранг матрицы системы ограничений не больше числа ограничений. Тогда $n - r$ переменных – свободные, остальные - базисные.

Если свободные переменные нулевые, а решение является допустимым, то это базисное допустимое решение (опорный план). Базисное допустимое решение называется невырожденным, если все базисные переменные больше нуля и вырожденным, если хотя бы одно из базисных переменных равно нулю.

<u>Теорема 2.</u> Если решение задачи линейного программирования существует, то оно достигается в одной из вершин многогранника решений.

Последние могут быть найдены совместным решением m уравнений связи и каких-то $n - m$ уравнений $x_k = 0$. Очевидно, что при большой размерности задачи этот процесс практически неосуществим ввиду крайне большого числа возможных вершин многогранника решений.

<u>Симплекс метод</u> доставляет вычислительную схему перехода от вершины к вершине (от одного базисного решения к другому) в направлении наименьшего значения z. Применение симплекс метода начинается с выбора какого либо допустимого базисного решения. Выбираются $n - m$ свободных переменных, а остальные m переменных (базисные переменные) выражаются через них. Если базисные переменные обозначены через $x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_m$, то уравнения связи могут быть записаны в следующей канонической форме
$$\begin{cases} x_1 + \left(\alpha_{1,m+1} x_{m+1} + ... + \alpha_{1n} x_n\right) = \beta_1 \\ \quad ... \\ x_m + \left(\alpha_{m,m+1} x_{m+1} + ... + \alpha_{mn} x_n\right) = \beta_m \\ z = \left(\gamma_{m+1} x_{m+1} + ... + \gamma_n x_n\right) + z_0 \end{cases}.$$

Если все β_i неотрицательны, то $x_i = \begin{cases} \beta_i, \_ i = 1, \quad ..., \quad m, \\ 0, \_ i = m+1, \quad ..., \quad n \end{cases}$ образуют базисное допустимое решение.

Если в выражении для целевой функции z все γ_i неотрицательны, то найденное решение является оптимальным.

Если среди γ_i есть отрицательные, то найденное решение не оптимально. Тогда выбираем наибольшее по абсолютной величине значение γ_k, среди всех отрицательных γ_i и в список базисных переменных вводится переменная x_k. Из списка базисных переменных исключается та переменная x_l, для которой $\dfrac{\beta_l}{\alpha_{lk}}$ принимает наименьшее положительное значение.

Процесс повторяется до тех пор пока не будет найдено оптимальное решение.

☺ Задача минимизации функции $z = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{3}X_2$ с ограничениями неравенствами

$$\begin{cases} 5X_1 + X_2 - 5 \geq 0, \\ 2X_1 + 5X_2 - 10 \geq 0, \\ X_1 \geq 0, \\ X_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Путем введения вспомогательных переменных $\begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = 5X_1 + X_2 - 5, \\ x_3 = 2X_1 + 5X_2 - 10, \\ x_4 = X_2. \end{cases}$ эта задача преобразуется к стандартной форме $\begin{cases} z = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_4 = \min \\ 5x_1 - x_2 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_3 + 5x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$. Отправляясь от x_1 и x_2 как базисных переменных получаем каноническую форму задачм $\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_4 = 5 > 0, \\ x_2 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{23}{2}x_4 = 20 > 0, \\ 24z = 3x_3 - 7x_4 + 30 \end{cases}$.

Коэффициент при x_4 в последнем выражении отрицателен, целевая функция убывает при возрастании x_4. При этом возрастании первой обращается в ноль переменная x_2 $\left(\frac{5}{5/2} = 2, \frac{20}{23/2} = \frac{40}{23} \right)$. Таким образом, x_4 заменяет базисную переменную x_2.

Новая каноническая форма задачи относительно x_1, x_4 есть $\begin{cases} x_1 - \frac{5}{23}x_2 + \frac{1}{23}x_3 = \frac{15}{23} > 0, \\ x_4 + \frac{2}{23}x_2 - \frac{5}{23}x_3 = \frac{40}{23} > 0 \\ 12 \cdot 23z = 7x_2 + 17x_3 + 205 \end{cases}$. В целевой функции коэффициенты при свободных переменных x_2, x_3 положительны, значит, получено оптимальное решение

$$z_{\min} = \frac{205}{12 \cdot 23} = \frac{205}{276}, \text{ при } x_2 = x_3 = 0, \_x_4 = \frac{40}{23}, \_x_1 = \frac{15}{23}.$$

В задачах линейного программирования область допустимых значений всегда выпуклая, экстремум (если существует) всегда находится на границе и является глобальным.

Если целевая функция и/или одно или более линейных ограничений в задаче линейного программирования заменены нелинейными, относительно переменных, то имеет место задача нелинейного программирования.

Задачи нелинейного программирования представляют большой практический интерес, но, за малым исключением, поддаются лишь численным методам решения.

☺ Расчетная работа 1. Задача линейного программирования. Симплекс метод.

Для своего варианта задания свести задачу линейного программирования к каноническому виду. Найти опорный план и базисное решение. Взяв этот базис за исходный, решить задачу симплекс методом. Привести графическую интерпретацию задачи и оптимального решения.

Варианты заданий.

Вариант 1 $z = -3x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$	Вариант 2 $z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$
Вариант 3 $z = x_1 - 4x_2 + 5x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 \le 2 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$	Вариант 4 $z = x_1 - 4x_2 + 5x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$
Вариант 5 $z = -x_1 + 4x_2 - 5x_3 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$	Вариант 6 $z = 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$
Вариант 7 $z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$	Вариант 8 $z = x_1 - x_2 - x_3 \to \max$ $\begin{cases} 10x_1 + x_3 = 10 \\ 10x_2 + x_3 \ge 10 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$
Вариант 9 $z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$ $\begin{cases} 10x_1 + x_3 \ge 10 \\ 10x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$	Вариант 10 $z = -x_1 - x_2 - 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} 10x_1 + x_3 \ge 1 \\ 10x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$
Вариант 11	Вариант 12

$z = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$	$z = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \le 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$
Вариант 13 $z = x_2 + x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \le 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$	Вариант 14 $z = -x_1 - x_2 + x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$
Вариант 15 $z = -x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \le 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$	Вариант 16 $z = x_1 - x_2 + 4x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$
Вариант 17 $z = -x_1 + 4x_2 - x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 0 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$	Вариант 18 $z = x_1 - 2x_2 - 4x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$
Вариант 19 $z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_2 + x_3 \le 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$	Вариант 20 $z = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 17 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$
Вариант 21 $z = x_1 + 4x_2 - 7x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 14x_3 \ge 2 \\ x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 0 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$	Вариант 22 $z = 8x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \ge -3 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$
Вариант 23 $z = 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 11x_3 \le 31 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$	Вариант 24 $z = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$
Вариант 25 $z = -x_1 - x_2 + 4x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 \le 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$	Вариант 26 $z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \ge 0 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$
Вариант 27	Вариант 28

$z = x_1 - x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$	$z = -x_1 - x_2 - x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \ge -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$
Вариант 29 $z = x_1 + x_2 - x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_3 \le 2 \\ x_1 + 0{,}5x_2 - x_3 = 0 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$	Вариант 30 $z = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \quad 2, \quad 3 \end{cases}$

2. Методы и задачи классического вариационного исчисления

2.1. Функционалы. Функциональные пространства.

Переменная величина J называется функционалом от функции f(x), если любой функции f(x) из некоторого класса функций ставиться в соответствие определенное значение $J \in \Re$.

Таким образом, можно сказать, что функционалы это функции, в которых роль независимого переменного играют кривые или функции. Примеры функционалов.

☺1 Каждой спрямляемой кривой на плоскости соответствует определенное число – ее длина. Таким образом длина кривой представляет собой функционал, определенный на множестве спрямляемых кривых: $J(y) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$.

☺2 Поставив в соответствие каждой спрямляемой кривой абсциссу ее центра тяжести, мы опять таки получим некоторый функционал: $J(y) = \dfrac{\int\limits_a^b x \cdot \sqrt{1 + y'^2}\, dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx}$.

☺3 Рассмотрим на плоскости всевозможные пути, соединяющие две данные точки A и B. Пусть некоторое тело движется по любому из этих путей. Поставив в соответствие каждому пути то время, за которое рассматриваемое тело проходит этот путь, мы опять получим, некоторый функционал.

☺4 Рассмотрим более общий пример. Пусть $y = y(x)$ - некоторая дифференцируемая на отрезке $[a, b]$функция, выражение $J(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx$ представляет собой функционал.

Раздел математики, связанный с нахождением наибольших и наименьших значений функционалов называется вариационным исчислением.

Каждую функцию $y = y(x)$, принадлежащую какому-либо классу, мы будем рассматривать, как точку некоторого пространства.

Пространства, элементами которых являются функции, называются функциональными пространствами.

В отличии от известных пространств, например, евклидова векторного пространства, функциональные пространства являются бесконечномерными. Т.е. существует бесконечно много различных функций, принадлежащих одному классу.

Линейным пространством А называется совокупность элементов $x, y, z, \ldots \in A$ *, для которых определены операции сложения и умножения на число, обладающие следующими свойствами (аксиомы линейного пространства).*

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. *В А существует нулевой элемент, такой что для любого* $x \in A$ *выполняется* $x + 0 = x$.
4. *Для любого* $x \in A$ *существует противоположный элемент* $-x$ *, такой что выполняется* $x + (-x) = 0$.
5. *В А существует единичный элемент, такой что для любого* $x \in A$ *выполняется* $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Линейное пространство А называется нормированным, если каждому $x \in A$ *поставлено в соответствие число* $\|x\|$*, такое что выполняется:*

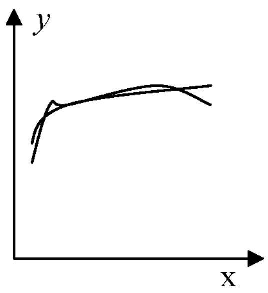
1. $\|x\| \ge 0$ *, причем* $\|x\| = 0$ *только если* $x = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Расстоянием между элементами х и у нормированного линейного пространства А называется величина $\|x - y\|$.

Элементами линейного нормированного пространства могут быть объекты различной природы: числа, векторы, матрицы, функции и т.д.

Для нас важны следующие функциональные пространства.

☺ Пространство $C_{[a,b]}$ - пространство всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$.



Сложение функций и умножение их на число определено обычным образом, а норма функции $y = y(x) \in C_{[a,b]}$ определяется следующим образом $\|y\| = \max\limits_{a \le x \le b} |y(x)|$. Таким образом, в пространстве $C_{[a,b]}$ расстояние между двумя функциями $y(x)$ и $y_o(x)$ не больше ε , если расстояние между графиками функций при любом фиксированном $x \in [a, b]$ не превосходит ε .

☺ Пространство $D^1_{[a,b]}$ - пространство функций, определенных на отрезке $[a, b]$, имеющих непрерывную первую производную. Норма вводится по формуле $\|y\|_1 = \max\limits_{a \le x \le b} |y(x)| + \max\limits_{a \le x \le b} |y'(x)|$.

☺ Простронство $D^n_{[a,b]}$ - пространство функций, определенных на отрезке $[a, b]$, имеющих непрерывные производные до n –го порядка включительно. Норма вводится по формуле $\|y\|_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \max\limits_{a \le x \le b} \left|y^{(k)}(x)\right|$.

Теперь легко вводится понятие непрерывности функционала.

Функционал $J(y), y \in A$ *называется непрерывным в точке* $y_0(x)$, *если выполняется* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |J(y) - J(y_0)| < \varepsilon \quad \|y - y_0\| < \delta$.

Если A – линейное нормированное функциональное пространство, то непрерывный функционал $J(y), y \in A$ *называется линейным, если для любых чисел* α, β *и для любых* $y_1, y_2 \in A$ *выполняется* $J(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha J(y_1) + \beta J(y_2)$.

Примеры линейных функционалов в пространстве $C_{[a,b]}$.

☺ $J(y) = \int_a^b y(x)dx$.

☺ $J(y) = \int_a^b a(x)y(x)dx$, где $a(x)$- фиксированная функция.

☺ $J(y) = y(x_0)$, где $x_0 \in [a,b]$- фиксированная точка.

В $D^1_{[a,b]}$ линейным, например, будет функционал $\int_a^b [a(x)y(x) + b(x)y'(x)]dx$.

2.2. Сильный и слабый экстремум. Необходимое условие экстремума функционала.

Функционал $J(y)$, $y \in D^1[a,b]$ *достигает при* $y = y_0$ *слабого экстремума, если* $\exists \varepsilon > 0$, *такое что* $J(y) - J(y_0)$ *сохраняет знак при всех* $\|y - y_0\|_1 < \varepsilon$.

Функционал $J(y)$, $y \in C_{[a,b]}$ *достигает при* $y = y_0$ *сильного экстремума, если* $\exists \varepsilon > 0$, *такое что* $J(y) - J(y_0)$ *сохраняет знак при всех* $\|y - y_0\| < \varepsilon$.

Ясно, что всякий сильный экстремум будет в то же время и слабым экстремумом. Действительно, если $\|y - y_0\|_1 < \varepsilon$, то подавно и $\|y - y_0\| < \varepsilon$, поэтому если $J(y_0)$ - экстремум по отношению ко всем y таким, что $\|y - y_0\| < \varepsilon$, то $J(y)$ тем более будет экстремумом по отношению к тем y, для которых $\|y - y_0\|_1 < \varepsilon$. Обратное, вообще говоря, неверно, т.е. слабый экстремум может сильным экстремумом и не быть. Нахождение слабого экстремума является, как правило, задачей более простой, чем нахождение сильного экстремума. Причина этого состоит в том, что, как правило, функционалы, рассматриваемые обычно в вариационном исчислении, непрерывны в пространстве $D^1_{[a,b]}$. Поэтому в теории слабого экстремума можно пользоваться непрерывностью функционалов. В то же время эти функционалы могут быть не непрерывны по отношению к норме пространства $C_{[a,b]}$.

Вариацией (или дифференциалом) δJ *функционала* $J(y)$ *называется главная линейная часть приращения функционала* ΔJ. *То есть, если* $\Delta J = J(y_0(x) + \delta y) - J(y_0(x)) = L(y_0(x), \delta y) + \alpha(y_0(x), \delta y) \cdot \|\delta y\|$, *где* $L(y_0(x), \delta y)$ *- линейный по отношению к* δy *функционал, а* $\alpha(y_0(x), \delta y) \xrightarrow{\|\delta y\| \to 0} 0$, *то* $\delta J = L(y_0(x), \delta y)$ *- вариация функционала.*

<u>Теорема1.</u> (Необходимое условие экстремума). Для того, чтобы функционал $J(y)$ при $y = y_0$ достигал экстремума, необходимо, чтобы его вариация (если она существует) обращалась в ноль при $y = y_0$, т.е. $\delta J \equiv 0$ при $y = y_0$.

Доказательство. Рассмотрим для определенности минимум. Если $J(y)$ при $y = y_0$ достигает минимума, то это значит, что $\Delta J = J(y_0(x) + \delta y) - J(y_0(x)) \geq 0$ для всех δy для которых $\|\delta y\|_1$ достаточно мала. Но, по определению вариации,

$\Delta J = \delta J(y_0(x), \delta y) + \alpha(y_0(x), \delta y) \cdot \|\delta y\|$ и $\alpha(y_0(x), \delta y) \xrightarrow{\|\delta y\| \to 0} 0$. Если $\delta J \neq 0$, то, при достаточно малых $\|\delta y\|_1$, знак выражения ΔJ определяется знаком главной части приращения δJ. Но δJ - линейный функционал, поэтому $\delta J(y_0(x), -\delta y) = -\delta J(y_0(x), \delta y)$, и, следовательно, при $\delta J \neq 0$ выражение ΔJ может быть, как положительным, так и отрицательным при сколь угодно малых $\|\delta y\|_1$, т.е. экстремум в данном случае невозможен. Что и требовалось доказать.

Замечание. В анализе, помимо условия $df = 0$, рассматривается и другое необходимое условие экстремума, состоящее в том, что второй дифференциал функции должен быть неотрицателен.

2.3. Основные леммы вариационного исчисления. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

Лемма 1 (лемма Лагранжа). Если $a(x)$- непрерывная функция и $\int_a^b a(x)y(x)dx = 0$ для любой непрерывной функции $y(x)$, имеющей непрерывную производную и удовлетворяющую условию $y(a) = y(b) = 0$, то $a(x) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть в некоторой точке $x = c$ $a(c) \neq 0$, например $a(c) > 0$, тогда найдется интервал $\xi_1 < c < \xi_2$, содержащийся в $[a, b]$, в котором $a(x) > 0$. Положим $y(x) = (\xi_1 - x)^2 (\xi_2 - x)^2$ на интервале (ξ_1, ξ_2) и $y(x) = 0$ вне этого интервала. Очевидно, что $y(x)$ удовлетворяет условиям леммы. В то же время

$\int_a^b a(x)y(x)dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} a(x)(\xi_1 - x)^2 (\xi_2 - x)^2 dx > 0$, так как под интегралом стоит положительная непрерывная функция. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. Если $\int_a^b b(x)y'(x)dx = 0$ для каждой функции $y(x)$ из $D^1_{[a,b]}$ такой, что $y(a) = y(b) = 0$, то $b(x) = const$.

Доказательство. Положим $y'(x) = g(x)$, тогда $y(x) = \int_a^x g(\tau)d\tau$, $\quad \int_a^b g(\tau)d\tau = 0$. Выберем постоянную c так, что $\int_a^b (b(x) - c)dx = 0$, и покажем, что $\int_a^b (b(x) - c)f(x)dx = 0$ для любой непрерывной $f(x)$. Всякую непрерывную функцию можно представить в виде

$f(x) = \lambda(x) + \alpha$, где $\int_a^b \lambda(x)dx = 0, \quad \alpha = const$. Получаем

$\int\limits_a^b (b(x)-c)f(x)dx = \int\limits_a^b (b(x)-c)\lambda(x)dx + \alpha\int\limits_a^b (b(x)-c)dx$. Первое слагаемое справа равно нулю, так как $\lambda(x)$ есть проиводная от функции $\int\limits_a^x \lambda(\tau)d\tau$, удовлетворяющей всем условим, наложенным на $y(x)$, а второе равно нулю в силу выбора c . Таким образом, $\int\limits_a^b (b(x)-c)f(x)dx = 0$ для любой непрерывной функции $f(x)$. Положив $f(x) = b(x)-c$, получаем $\int\limits_a^b (b(x)-c)^2 dx = 0$, откуда $b(x)-c \equiv 0$, т.е. $b(x)$ есть постоянная. Что и требовалось доказать.

Лемма 3. Если $\int\limits_a^b (a(x)y(x)+b(x)y'(x))dx = 0$ для каждой функции $y(x)$ из $D^1_{[a,b]}$ такой, что $y(a) = y(b) = 0$, то $b(x)$ - дифференцируема и $a(x)-b'(x) = 0$.

Доказательство. Действительно, положив $\int\limits_a^t a(\tau)\cdot d\tau = A(t)$, получаем с помощью интегрирования по частям, что $\int\limits_a^b a(x)y(x)dx = -\int\limits_a^b A(x)y'(x)dx$, т.е. равенство из леммы можно переписать в виде $\int\limits_a^b (-A(x)+b(x))y'(x)dx = 0$, но отсюда по лемме 2 следует, что $b(x)-A(x) = const$, или дифференцируя $a(x)-b'(x) = 0$. Подчеркнем, что здесь дифференцируемость функции $b(x)$ заранее не предполагалась. Что и требовалось доказать.

Задача нахождения экстремума функционала $J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ *(1) на множестве всех функций* $y(x)$ *из* $D^1_{[a,b]}$ *таких, что* $y(a) = A, y(b) = B$ *, называется простейшей задачей вариационного исчисления.*

Иначе говоря, простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании слабого экстремума функционала вида (1) на множестве всех гладких кривых, соединяющих две заданные точки.

Теорема 1 (уравнение Эйлера). Для того, чтобы функционал $J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$, определенный на множестве функций $y(x)$ из $D^1_{[a,b]}$ и удовлетворяющих условиям $y(a) = A, y(b) = B$, достигал экстремума на данной функции $y(x)$, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$.

Доказательство. Дадим функции $y(x)$ некоторое приращение δy . Для того чтобы функция $y(x)+\delta y(x)$ по-прежнему удовлетворяла граничным условиям, нужно, чтобы $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. Вычислим приращение функционала (1). Оно равно

$$\Delta J=\int_a^b F\left(x,\quad y+\delta y,\quad y'+(\delta y)'\right)dx-\int_a^b F(x,\quad y,\quad y')dx=\int_a^b\left(F'_y(x,\quad y,\quad y')\delta y+F'_{y'}(x,\quad y,\quad y')(\delta y)'\right)dx+\ldots$$

где многоточие обозначает члены порядка выше первого, относительно δy и $(\delta y)'$.

Выражение $\int_a^b\left(F'_y(x,\quad y,\quad y')\delta y+F'_{y'}(x,\quad y,\quad y')(\delta y)'\right)dx$ представляет собой главную линейную часть приращения функционала ΔJ, т.е. вариацию функционала. По теореме 1 необходимым условием экстремума функционала является равенство $\delta J=\int_a^b\left(F'_y\delta y+F'_{y'}(\delta y)'\right)dx=0$. Но в силу леммы 3 из этого равенства вытекает, что $\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$. Что и требовалось доказать.

Подчеркнем, что существование производной $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)$ здесь заранее не предполагается, а вытекает из той же самой леммы 3.

Интегральные кривые уравнения Эйлера называются экстемалями.

Уравнение Эйлера представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение должно зависеть, вообще говоря, от двух произвольных постоянных, которые определяются из двух краевых условий $y(a)=A, y(b)=B$.

Теорема 2. Все сказанное выше непосредственно обобщается на случай функционалов, зависящих от нескольких функций

$$J(y_1,\quad \ldots,\quad y_n)=\int_a^b F(x,y_1,\quad \ldots,\quad y_n,y'_1,\quad \ldots,\quad y'_n)dx$$

при условиях $y_i(a)=A_i,\quad y_i(b)=B_i,\quad (i=1,\quad 2,\quad \ldots,\quad n)$.

В этом случае необходимыми условиями экстремума будут условия

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_i}\right)=0,\ (i=1,\quad 2,\quad \ldots,\quad n).$$

Доказательство для этого общего случая по существу не отличается от изложенного выше, и мы не будем его приводить.

Теорема 3 (Эйлера-Пуассона). Для того, чтобы функционал $J(y)=\int_a^b F(x,y,y',y'')dx$, определенный на множестве функций $y(x)$ из $D^2_{[a,b]}$ и удовлетворяющих условиям $y(a)=A, y(b)=B$ и $y'(a)=A_1, y'(b)=B_1$, достигал экстремума на данной функции $y(x)$, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера-Пуассона

$$F_y-\frac{dF_{y'}}{dx}+\frac{d^2F_{y''}}{dx^2}=0.$$

Доказательство. Как и для других задач, необходимым условием экстремума функционала является равенство нулю его вариации, вычисленной на экстремали $y_0(x)$: $\delta J(y_0)=0$. В силу граничных условий на концах интервала $\delta y(\mathrm{a})=\delta y(\mathrm{b})=\delta y'(\mathrm{a})=\delta y'(\mathrm{b})=0$. Вычислим δJ как линейную часть приращения. Разложим первое слагаемое в ряд Тейлора в окрестности экстремали, и удержим только линейные члены. Слагаемое, содержащее 1-ю производную, проинтегрируем по частям один раз, а слагаемое, содержащее 2-ю производную – 2 раза.

$$\delta J(y)=\int_a^b\left(F(x,y+\delta y,y'+\delta y',y''+\delta y'')-F(x,y,y',y'')\right)dx=\int_a^b\left(F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+F_{y''}\delta y''\right)dx=$$

$$=\int_a^b F_y\delta y dx+\left(F_{y'}\delta y\right)\Big|_a^b-\int_a^b\frac{dF_{y'}}{dx}\delta y dx+\left(F_{y''}\delta y'\right)\Big|_a^b-\int_a^b\frac{dF_{y''}}{dx}\delta y' dx=$$

$$=\int_a^b\left(F_y-\frac{dF_{y'}}{dx}\right)\delta y dx-\left(\frac{dF_{y''}}{dx}\delta y\right)\Bigg|_a^b+\int_a^b\frac{d^2F_{y''}}{dx^2}\delta y dx=\int_a^b\left(F_y-\frac{dF_{y'}}{dx}+\frac{d^2F_{y''}}{dx^2}\right)\delta y dx=0.$$

В силу произвольности вариации функции $\delta y(x)$ по основной лемме вариационного исчисления первый сомножитель под интегралом должен равняться нулю. Таким образом, экстремаль должна удовлетворять уравнению $F_y-\frac{dF_{y'}}{dx}+\frac{d^2F_{y''}}{dx^2}=0$, которое называется уравнением Эйлера-Пуассона. Оно является в общем случае уравнением 4-го порядка и дополняется граничными условиями.

Замечание. Если функционал зависит от производных более высоких порядков, то уравнение Эйлера-Пуассона выводится аналогично. Оно будет иметь вид

$F_y-\frac{dF_{y'}}{dx}+\frac{d^2F_{y''}}{dx^2}-\ldots+(-1)^n\frac{d^nF_{y^{(n)}}}{dx^n}=0$ и дополняться $2n$ граничными условиями: значения искомой функции и её производных до $n-1$–го порядка включительно на концах интервала x_1 и x_2 должны равняться заданным величинам.

2.4. Частные случаи уравнения Эйлера. Задача о брахистохроне.

Уравнение Эйлера, выведенное нами в этом параграфе. Играет фундаментальную роль во всем вариационном исчислении. Оно представляет собой, вообще говоря, дифференциальное уравнение второго порядка. Рассмотрим теперь некоторые частные случаи, в которых это уравнение может быть сведено к уравнению первого порядка или даже полностью проинтегрированы.

Распишем уравнение Эйлера более подробно $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot y'-\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot y''=0.$$

Подынтегральная функция не зависит от $\underline{y}$. Предположим, что рассматриваемый функционал имеет вид $\int_a^b F(x,y')dx$. В этом случае уравнение Эйлера принимает вид $\frac{\partial F}{\partial y}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$ и имеет, очевидно, первый интеграл $\frac{\partial F}{\partial y'}=C$. Это – уравнение первого порядка, не содержащее y. Решив его относительно y', получаем соотношение вида $y'=f(x,\quad C)$, откуда y находится интегрированием.

☺ $J(y)=\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}\cdot dx}{x}$, $y(1)=0$, $y(2)=1$. Подыинегральная функция не содержит y, поэтому уравнение Эйлера имеет вид $\frac{\partial F}{\partial y'}=C$, т.е. $\frac{y'}{x\cdot\sqrt{1+(y')^2}}=C$, откуда

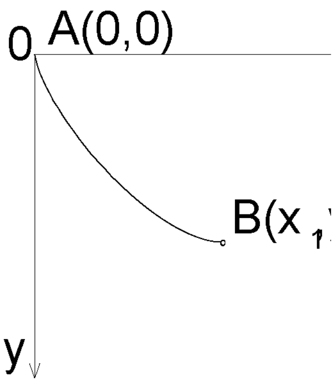
$(y')^2\cdot\left(1-x^2C^2\right)=C^2x^2$, т.е. $y'=\frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}$, и следовательно

$y=\int\frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}\cdot dx=\frac{1}{C}\sqrt{1-C^2x^2}+C_1$, т.е. $(y-C_1)^2+x^2=\frac{1}{C^2}$. Таким образом, решение представляет собой окружность с центром на оси y. Из условий $y(1)=0$, $y(2)=1$ получаем, что $C=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $C_1=2$. Итак, окончательное решение $(y-2)^2+x^2=5$.

Подынтегральная функция не зависит от x . Предположим, что рассматриваемый функционал имеет вид $\int\limits_a^b F(y,y')dx$. В этом случае уравнение Эйлера примет вид

$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot y'-\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot y''=0$. Умножив этоуравнение на y' , получим выражение, которое можно записать в виде $\frac{d}{dx}\left(F-y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$, откуда получаем, что в рассматриваемом случае уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F-y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}=C$.

☺ Задача о брахистохроне. Пусть A и B - две фиксированные точки. Время, в течение которого материальная точка скатывается под действием силы тяжести вдоль некоторого пути, соединяющего точки A и B , зависит от выбора этого пути, т.е. представляет собой функционал. Кривая, вдоль которой точка скатывается быстрее всего, носит название брахистохроны. Задача о брахистохроне была поставлена И.Бернулли в 1696 г. и сыграла важную роль в развитии вариационного исчисления. Ее решение было дано И.Бернулли, Я.Бернулли, Ньютоном и Лопиталем.



Введем на вертикальной плоскости, проходящей через точки A и B систему координат так как показано на рисунке. Пусть $y(x)$ - кривая по которой происходит движение точки. Время движения материальной точки из A в B можно вычислить по формуле $T(y)=\int\limits_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx$. Уравнение Эйлера для этого функционала имеет вид $\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}-\frac{y'\cdot y'}{\sqrt{2gy}\cdot\sqrt{1+(y')^2}}=\tilde{c}$ (первый интеграл взят). Выполнив преобразования и переобозначив произвольную постоянную получим уравнение $y\left(1+(y')^2\right)=\tilde{c}$. Уравнение решается в параметрическом виде. Пусть $\frac{dy}{dx}=ctg\,\tau$, тогда $1+(y')^2=1+ctg^2\tau=\frac{1}{\sin^2\tau}$.

Отсюда $y=\dfrac{\widetilde{c}}{1+(y')^2}=\dfrac{\widetilde{c}}{2}(1-\cos 2\tau)$, отсюда $dy=\widetilde{c}\cdot\sin 2\tau\cdot d\tau$, следовательно

$dx=tg\tau\cdot dy=\widetilde{c}2\sin^2\tau\cdot d\tau$. Интегрируя, получаем $x=\dfrac{\widetilde{c}}{2}(2\tau-\sin 2\tau)+c_2$.

Еще раз переобозначим $\dfrac{\widetilde{c}}{2}=c,\quad 2\tau=\theta$ и с учетом начальных условий ($c_2=0$)

получим $\begin{cases}x=c\cdot(\theta-\sin\theta)\\ y=c\cdot(1-\cos\theta)\end{cases}$. Постоянная однозначно определяется из начальных условий.

Брахистохрона представляет собой циклоиду, лежащую в вертикальной плоскости, проходящей через A и B.

Если F не зависит от y' или зависит от нее линейно, то уравнение Эйлера принимает вид $\dfrac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}=0$, т.е. представляет собой не дифференциальное, а конечное уравнение, определяющее одну или несколько кривых. В решении нет произвольных постоянных и оно может не удовлетворять граничным условиям. Если граничные условия выполняются, то получена экстремаль, если нет, то нет и решений у данной вариационной задачи.

В случае, если подынтегральную функцию можно представить в виде $F(x,\ y)=P(x,\ y)+y'\cdot Q(x,\ y)$, причем $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. В этом случае уравнение Эйлера обращается в тождество 0=0, и экстремалью будет любая кривая, удовлетворяющая граничным условиям. В этом случае функционал не зависит от линии интегрирования, и вариационная задача теряет смысл.

☺ Рассмотрим функционал $J(y)=\int\limits_a^b (x-y)^2\,dx$. Здесь уравнение Эйлера сводится к конечному уравнению, его решение – прямая $y=x$ (вдоль нее интеграл равен нулю).

☺ Расчетная работа 2. Простейшая задача вариационного исчисления.

Для своего варианта функционалов a), b), c) найти экстремали и построить их графики.

Варианты заданий

Вариант 1.

a). $J(y)=\int\limits_{-1}^{1}\left(y'^2+4y^2-8xy+2x^2\right)dx;\quad y(-1)=3;\quad y(1)=1;$

b). $J(y)=\int\limits_{0}^{2}\left(y'^2-4y'e^{2x}+\sin^2 x\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=-2;$

c). $J(y)=\int\limits_{0}^{1}y\sqrt{1+y'^2}\,dx;\quad y(0)=2;\quad y(1)=3;$

Вариант 2.

a). $J(y)=\int\limits_{-1}^{1}\left(y'^2-4y^2+2xy-x^2\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=4;$

b). $J(y)=\int\limits_{0}^{2}\left(y'^2-4y'\sin 2x-x^2\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=-1;$

c). $J(y)=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx;\quad y(0)=2;\quad y(1)=1;$

Вариант 3.

a). $J(y)=\int\limits_{-1}^{1}\left(y'^2+4y^2+4x^2y+x\cos x\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=0.5;$

b). $J(y)=\int\limits_{0}^{2}\left(y'^2-4y'\cos 2x+5\sin 3x\right)dx;\quad y(0)=2;\quad y(2)=-3;$

c). $J(y)=\int_0^1 yy'^2\,dx;\quad y(0)=2;\quad y(1)=1;$

Вариант 4. a). $J(y)=\int_0^2\left(y'^2+9y^2+2xy-x\sin x\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=2;$

b). $J(y)=\int_1^3\left(y'^2-\frac{4y'}{x}+x\sin x\right)dx;\quad y(1)=1;\quad y(3)=-2;$

c). $J(y)=\int_0^1\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}dx;\quad y(0)=1;\quad y(1)=3;$

Вариант 5. a). $J(y)=\int_{-2}^0\left(y'^2-4y^2+2y+xe^{2x}\right)dx;\quad y(-2)=0;\quad y(0)=1;$

b). $J(y)=\int_{-1}^1\left(y'^2-2y'e^x+\cos x\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=3;$

c). $J(y)=\int_1^3 y\sqrt{y'}dx;\quad y(1)=2;\quad y(3)=8;$

Вариант 6. a). $J(y)=\int_0^1\left(y'^2-9y^2+2y\sin x-x^2e^x\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(1)=-1;$

b). $J(y)=\int_{-1}^1\left(y'^2-\frac{2y'}{1+x^2}+e^{2x}\right)dx;\quad y(-1)=0;\quad y(1)=3;$

c). $J(y)=\int_0^2 y\sqrt{1+y'^2}\,dx;\quad y(0)=-1;\quad y(2)=-3;$

Вариант 7. a). $J(y)=\int_{-1}^1\left(y'^2+4y^2+6ye^x+2x\cos x\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=3;$

b). $J(y)=\int_{-1}^1\left(y'^2+4y'e^x\cos x-\sin x\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=2;$

c). $J(y)=\int_0^2 yy'^2\,dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=3;$

Вариант 8. a). $J(y)=\int_{-1}^1\left(y'^2+y^2+4ye^x-x\sin x\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=3;$

b). $J(y)=\int_1^3\left(y'^2-y'\ln x+2x\right)dx;\quad y(1)=2;\quad y(3)=-1;$

c). $J(y)=\int_0^2\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx;\quad y(0)=4;\quad y(2)=2;$

Вариант 9. a). $J(y)=\int_{-1}^1\left(y'^2+4y^2+8ye^{2x}+3x^2\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=3;$

b). $J(y)=\int_{-1}^1\left(y'+y'^2\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=-2;$

c). $J(y)=\int_0^2 y\sqrt{y'}dx;\quad y(0)=2;\quad y(2)=4;$

Вариант 10. a). $J(y)=\int_0^2\left(2y'^2+2y^2+y\cos x-5x\right)dx;\quad y(0)=2;\quad y(2)=2;$

b). $J(y)=\int_1^3\left(y'+y'^2\sin^2 x+e^{2x}\right)dx;\quad y(1)=-1;\quad y(3)=4;$

c). $J(y)=\int_0^2\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}dx;\quad y(0)=2;\quad y(2)=1;$

Вариант 11. a). $J(y)=\int_0^2\left(2y'^2+2y^2+xy\sin x+6xe^x\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=2;$

b). $J(y)=\int_0^2\left(y'+y'^2 e^x-\sin x\right)dx;\quad y(0)=2;\quad y(2)=-1;$

c). $J(y)=\int_1^3 y\sqrt{1+y'^2}\,dx;\quad y(1)=2;\quad y(3)=3;$

Вариант 12. a). $J(y)=\int_0^2\left(2y'^2-2y^2+y\sin 2x-x^2\sin x\right)dx;\quad y(0)=-1;\quad y(2)=4;$

b). $J(y)=\int_{0.5}^{1.5}\left(y'+y'^2\sin 2x-\cos 2x\right)dx;\quad y(0.5)=1;\quad y(1.5)=2;$

c). $J(y)=\int_1^3 yy'^2\,dx;\quad y(1)=2;\quad y(3)=5;$

Вариант 13. a). $J(y)=\int_0^2\left(2y'^2-2y^2+y\cos x+xe^{2x}\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=2;$

b). $J(y)=\int_1^2\left(y'+xy'^2-x^2y'\right)dx;\quad y(1)=2;\quad y(2)=-1;$

c). $J(y)=\int_{0.5}^{2.5}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx;\quad y(0.5)=2;\quad y(2.5)=1;$

Вариант 14. a). $J(y)=\int_1^2\left(2y'^2-2y^2+ye^{2x}\sin 3x-x\sin x\right)dx;\quad y(1)=2;\quad y(2)=3;$

b). $J(y)=\int_{-1}^1\left(y'+e^x y'^2-xy'\right)dx;\quad y(-1)=0;\quad y(3)=2;$

c). $J(y)=\int_1^3 y\sqrt{y'}dx;\quad y(1)=2;\quad y(3)=6;$

Вариант 15. a). $J(y)=\int_{-1}^1\left(2y'^2+2y^2+ye^x+4xe^{2x}\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=2;$

b). $J(y)=\int_{-1}^1\left(y'+y'^2\sec^2 x+xy'\right)dx;\quad y(-1)=-1;\quad y(1)=0;$

c). $J(y)=\int_1^3\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}dx;\quad y(1)=1;\quad y(3)=4;$

Вариант 16. a). $J(y)=\int_{-1}^1\left(2y'^2+2y^2+3ye^x\cos x-5x^2e^{2x}\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=1;$

b). $J(y)=\int_0^2\left(y'+y'^2+x^2y'^2\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=-2;$

c). $J(y)=\int_1^4 y\sqrt{1+y'^2}\,dx;\quad y(1)=3;\quad y(4)=8;$

Вариант 17. a). $J(y)=\int_{-1}^1\left(2y'^2+2y^2+ye^{2x}+4\sin x\right)dx;\quad y(-1)=4;\quad y(1)=3;$

b). $J(y)=\int_{-0.5}^{0.5}\left(y'+y'^2\cos 2x-\sin 2x\right)dx;\quad y(-0.5)=1;\quad y(0.5)=0.5;$

c). $J(y)=\int_0^4 yy'^2\,dx;\quad y(0)=2;\quad y(4)=4;$

Вариант 18. a). $J(y)=\int_{-1}^1\left(2y'^2+2y^2+3ye^{2x}\sin x-5\cos x\right)dx;\quad y(-1)=3;\quad y(1)=4;$

b). $J(y)=\int_{-1}^1\left(y'+y'^2e^{2x}-2xy'\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=1;$

c). $J(y)=\int_1^4\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx;\quad y(1)=4;\quad y(4)=2;$

Вариант 19. a). $J(y)=\int_0^2\left(y'^2+4y^2+6ye^{2x}\cos x-x^2\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=3;$

b). $J(y)=\int_{0.5}^{1.5}\left((2-6x)y'+y'^2\cos^2 x\right)dx;\quad y(0.5)=-1;\quad y(1.5)=-2;$

c). $J(y)=\int_0^4 y\sqrt{y'}dx;\quad y(0)=2;\quad y(4)=5;$

Вариант 20. a). $J(y)=\int_0^2\left(y'^2+4y^2+4ye^x\sin x+x^2\sin x\right)dx;\quad y(0)=2;\quad y(2)=3;$

b). $J(y)=\int_0^2\left(y'^2-\frac{2y'}{\sqrt{1+x^2}}+\sin 3x\right)dx;\quad y(0)=-1;\quad y(2)=3;$

c). $J(y)=\int_0^4\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}dx;\quad y(0)=4;\quad y(4)=1;$

Вариант 21. a). $J(y)=\int_0^2\left(y'^2+4y^2-8y\cos x+4x^2\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=3;$

b). $J(y)=\int_2^4\left(y'^2+\frac{2y'}{1-x^2}+e^{3x}\right)dx;\quad y(2)=-1;\quad y(4)=2;$

c). $J(y)=\int_1^5 y\sqrt{1+y'^2}\,dx;\quad y(1)=3;\quad y(5)=6;$

Вариант 22. a). $J(y)=\int_2^4\left(y'^2-4y^2+4y\cos 2x-3x^2\right)dx;\quad y(2)=1;\quad y(4)=4;$

b). $J(y)=\int_{2.5}^4\left(y'^2+\frac{4y'}{4-x^2}+\sin 2x\right)dx;\quad y(2.5)=2;\quad y(4)=4;$

c). $J(y)=\int_1^5 yy'^2\,dx;\quad y(1)=2;\quad y(5)=6;$

Вариант 23. a). $J(y)=\int_0^2\left(y'^2-4y^2+4ye^x\sin 2x+x^2\right)dx;\quad y(0)=2;\quad y(2)=3;$

b). $J(y)=\int_2^4\left(\sqrt{x^2-1}\,y'^2+y'-e^x\right)dx;\quad y(2)=1;\quad y(4)=-2;$

c). $J(y)=\int_1^5\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx;\quad y(1)=4;\quad y(5)=2;$

Вариант 24. a). $J(y)=\int_{-1}^0\left(y'^2-9y^2+4y\sin 3x+5x^2\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(0)=0;$

b). $J(y)=\int_1^3\left(y'^2+2xy'\ln x-\ln x\right)dx;\quad y(1)=-1;\quad y(3)=2;$

c). $J(y)=\int_1^5 y\sqrt{y'}dx;\quad y(1)=1;\quad y(5)=7;$

Вариант 25. a). $J(y)=\int_0^1\left(y'^2-9y^2+4ye^{2x}\cos 3x\right)dx;\quad y(0)=3;\quad y(1)=2;$

b). $J(y)=\int_{-1}^1\left(y'^2+2y'e^x\sin x-e^x\cos x\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=3;$

c). $J(y)=\int_1^5\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}dx;\quad y(1)=6;\quad y(5)=1;$

Вариант 26. a). $J(y)=\int_0^2\left(y'^2+4y^2-8y\cos x+4x^2\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=3;$

b). $J(y)=\int_2^4\left(y'^2+\frac{2y'}{1-x^2}+e^{3x}\right)dx;\quad y(2)=-2;\quad y(4)=2;$

c). $J(y)=\int_2^5 y\sqrt{1+y'^2}\,dx;\quad y(2)=4;\quad y(5)=6;$

Вариант 27. a). $J(y)=\int_2^4\left(y'^2-4y^2+4y\cos 2x-3x^2\right)dx;\quad y(2)=2;\quad y(4)=3;$

b). $J(y)=\int_3^5\left(y'^2+\dfrac{4y'}{4-x^2}+\sin 3x\right)dx;\quad y(3)=5;\quad y(5)=1;$

c). $J(y)=\int_2^5 yy'^2\,dx;\quad y(2)=3;\quad y(5)=6;$

Вариант 28. a). $J(y)=\int_0^2\left(y'^2-4y^2+4ye^x\sin\dfrac{x}{2}+2x^2\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=3;$

b). $J(y)=\int_2^4\left(\sqrt{x^2-1}\,y'^2+2y'-e^x\right)dx;\quad y(2)=1;\quad y(4)=-2;$

c). $J(y)=\int_2^5\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx;\quad y(2)=3;\quad y(5)=2;$

Вариант 29. a). $J(y)=\int_0^1\left(y'^2-9y^2+6y\sin 3x+5x^2\right)dx;\quad y(0)=3;\quad y(1)=1;$

b). $J(y)=\int_1^4\left(y'^2+2xy'\ln x-\ln x\right)dx;\quad y(1)=-1;\quad y(4)=3;$

c). $J(y)=\int_2^5 y\sqrt{y'}\,dx;\quad y(2)=4;\quad y(5)=7;$

Вариант 30. a). $J(y)=\int_0^3\left(y'^2+4y^2+4ye^x\sin x+x^2\sin x\right)dx;\quad y(0)=2;\quad y(3)=4;$

b). $J(y)=\int_0^3\left(y'^2-\dfrac{2y'}{\sqrt{1+x^2}}+\sin 3x\right)dx;\quad y(0)=-1;\quad y(3)=2;$

c). $J(y)=\int_0^3\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}\,dx;\quad y(0)=4;\quad y(3)=2;$

☺ <u>Расчетная работа 3. </u>Экстремаль функционала, зависящего от нескольких функций. Для своего варианта функционала найти экстремаль и построить её график.

Варианты заданий

Вариант 1. $J(y,z)=\int_0^1\left(2y'z'-y^2+z^2-2ye^x\right)dx;\quad \begin{matrix} y(0)=0; & z(0)=1; \\ y(1)=1; & z(1)=0; \end{matrix}$

Вариант 2. $J(y,z)=\int_0^1\left(2y'z'+y^2+z^2-z\sin x\right)dx;\quad \begin{matrix} y(0)=0; & z(0)=1; \\ y(1)=1; & z(1)=0; \end{matrix}$

Вариант 3. $J(y,z)=\int_0^1\left(2y'z'+y^2-z^2+2z\cos x\right)dx;\quad \begin{matrix} y(0)=0; & z(0)=1; \\ y(1)=1; & z(1)=0; \end{matrix}$

Вариант 4. $J(y,z)=\int_0^1\left(y^2+z^2+2y'z'+ye^x\right)dx;\quad \begin{matrix} y(0)=0; & z(0)=1; \\ y(1)=1; & z(1)=0; \end{matrix}$

Вариант 5. $J(y,z)=\int_0^1\left(y^2+4yz+z^2+y'^2+z'^2+2ze^x\right)dx;\quad \begin{matrix} y(0)=0; & z(0)=1; \\ y(1)=1; & z(1)=0; \end{matrix}$

Вариант 6. $J(y,z)=\int_0^1\left((y+z)^2+y'^2+z'^2+2y\sin x\right)dx;\quad \begin{matrix} y(0)=0; & z(0)=1; \\ y(1)=1; & z(1)=0; \end{matrix}$

Вариант 7. $J(y,z)=\int_0^1\left((y-z)^2+y'^2-z'^2+2z\cos x\right)dx;\quad \begin{matrix} y(0)=0; & z(0)=1; \\ y(1)=1; & z(1)=0; \end{matrix}$

Вариант 8. $J(y,z)=\int_{-1}^1\left(2y'z'-y^2+z^2-2y\cos x\right)dx;\quad \begin{matrix} y(-1)=2; & z(-1)=1; \\ y(1)=0; & z(1)=2; \end{matrix}$

Вариант 9. $J(y,z)=\int\limits_{-1}^{1}\left(2y'z'+y^2+z^2+2ze^x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-1)=3; & z(-1)=0; \\ y(1)=1; & z(1)=2; \end{matrix}$

Вариант 10. $J(y,z)=\int\limits_{-1}^{1}\left(2y'z'+y^2-z^2-2z\sin x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-1)=2; & z(-1)=0; \\ y(1)=0; & z(1)=2; \end{matrix}$

Вариант 11. $J(y,z)=\int\limits_{-1}^{1}\left(y^2+z^2-2y'z'-y\cos x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-1)=2; & z(-1)=0; \\ y(1)=0; & z(1)=2; \end{matrix}$

Вариант 12. $J(y,z)=\int\limits_{-1}^{1}\left(y^2+4yz+z^2-y'^2-z'^2+2ye^{-x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-1)=2; & z(-1)=0; \\ y(1)=0; & z(1)=2; \end{matrix}$

Вариант 13. $J(y,z)=\int\limits_{-1}^{1}\left((y+z)^2-y'^2-z'^2+2xz\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-1)=2; & z(-1)=0; \\ y(1)=0; & z(1)=2; \end{matrix}$

Вариант 14. $J(y,z)=\int\limits_{-1}^{1}\left((y-z)^2+y'^2-z'^2+2xy\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-1)=1; & z(-1)=0; \\ y(1)=0; & z(1)=2; \end{matrix}$

Вариант 15. $J(y,z)=\int\limits_{0}^{2}\left(2y'z'-y^2+z^2+2y\sin x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=1; & z(0)=-2; \\ y(2)=-1; & z(2)=1; \end{matrix}$

Вариант 16. $J(y,z)=\int\limits_{0}^{2}\left(2y'z'+y^2+z^2+2z\cos x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=1; & z(0)=-2; \\ y(2)=-1; & z(2)=1; \end{matrix}$

Вариант 17. $J(y,z)=\int\limits_{0}^{2}\left(2y'z'+y^2-z^2+2ze^x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=1; & z(0)=-2; \\ y(2)=-1; & z(2)=1; \end{matrix}$

Вариант 18. $J(y,z)=\int\limits_{0}^{2}\left(y^2+z^2+2y'z'+z\sin x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=1; & z(0)=-2; \\ y(2)=-1; & z(2)=1; \end{matrix}$

Вариант 19. $J(y,z)=\int\limits_{0}^{2}\left(y^2+4yz+z^2-y'^2-z'^2+ze^{3x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=1; & z(0)=-2; \\ y(2)=-1; & z(2)=1; \end{matrix}$

Вариант 20. $J(y,z)=\int\limits_{0}^{2}\left((y+z)^2-y'^2-z'^2+2ye^{2x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=1; & z(0)=-2; \\ y(2)=-1; & z(2)=1; \end{matrix}$

Вариант 21. $J(y,z)=\int\limits_{0}^{2}\left((y-z)^2+y'^2-z'^2+x^2z\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=1; & z(0)=-2; \\ y(2)=-1; & z(2)=1; \end{matrix}$

Вариант 22. $J(y,z)=\int\limits_{-2}^{2}\left(2y'z'-y^2+z^2+ze^{2x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-2)=0; & z(-2)=2; \\ y(2)=3; & z(2)=1; \end{matrix}$

Вариант 23. $J(y,z)=\int\limits_{-2}^{2}\left(2y'z'+y^2+z^2+2ye^{-x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-2)=0; & z(-2)=2; \\ y(2)=3; & z(2)=1; \end{matrix}$

Вариант 24. $J(y,z)=\int\limits_{-2}^{2}\left(2y'z'+y^2-z^2+2ye^x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-2)=0; & z(-2)=2; \\ y(2)=3; & z(2)=1; \end{matrix}$

Вариант 25. $J(y,z)=\int\limits_{-2}^{2}\left(y^2+z^2-2y'z'+2ze^{-x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-2)=0; & z(-2)=2; \\ y(2)=3; & z(2)=1; \end{matrix}$

Вариант 26. $J(y,z)=\int\limits_{-1}^{2}\left(2y'z'+y^2-z^2+2z\sin x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-1)=2; & z(-1)=0; \\ y(2)=0; & z(2)=2; \end{matrix}$

Вариант 27. $J(y,z)=\int\limits_{-2}^{2}\left(y^2+z^2+2y'z'-y\cos x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-2)=2; & z(-2)=0; \\ y(2)=0; & z(2)=2; \end{matrix}$

Вариант 28. $J(y,z)=\int\limits_{-2}^{2}\left(y^2+4yz+z^2-y'^2-z'^2+2ye^{-2x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-2)=3; & z(-2)=0; \\ y(2)=1; & z(2)=2; \end{matrix}$

Вариант 29. $J(y,z)=\int\limits_{-2}^{2}\left((y+z)^2-y'^2-z'^2+4xz\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-2)=2; & z(-2)=0; \\ y(2)=0; & z(2)=2; \end{matrix}$

Вариант 30. $J(y,z)=\int\limits_{-2}^{2}\left((y-z)^2+y'^2-z'^2+4xy\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-2)=1; & z(-2)=0; \\ y(2)=0; & z(2)=2; \end{matrix}$

☺ Расчетная работа 4. Экстремаль функционала, зависящего от производных высших порядков.

Для своего варианта функционала найти экстремаль и построить её график.

Варианты заданий

Вариант 1. $J(y)=\int_0^1\left(y''^2-2y'^2+y^2-2ye^x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=2; & y(1)=0; \\ y'(0)=1; & y'(1)=-1; \end{matrix}$

Вариант 2. $J(y)=\int_0^1\left(y''^2-y^2+2y\sin x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=2; & y(1)=0; \\ y'(0)=1; & y'(1)=-1; \end{matrix}$

Вариант 3. $J(y)=\int_0^1\left(y''^2+4y'y''+y'^2-2ye^x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=2; & y(1)=0; \\ y'(0)=1; & y'(1)=-1; \end{matrix}$

Вариант 4. $J(y)=\int_0^1\left(y''^2-y'y''+y'^2-2ye^{-x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=2; & y(1)=0; \\ y'(0)=1; & y'(1)=-1; \end{matrix}$

Вариант 5. $J(y)=\int_0^1\left(y''^2-y'^2-4ye^{-x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=2; & y(1)=0; \\ y'(0)=1; & y'(1)=-1; \end{matrix}$

Вариант 6. $J(y)=\int_0^1\left(y''^2-y'^2+yy'-yx\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=2; & y(1)=0; \\ y'(0)=1; & y'(1)=-1; \end{matrix}$

Вариант 7. $J(y)=\int_0^1\left(y''^2-2y'^2+y^2+2ye^{-x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=2; & y(1)=0; \\ y'(0)=1; & y'(1)=-1; \end{matrix}$

Вариант 8. $J(y)=\int_0^1\left(y''^2-y^2+ye^x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=2; & y(1)=0; \\ y'(0)=1; & y'(1)=-1; \end{matrix}$

Вариант 9. $J(y)=\int_0^1\left(y''^2+3y'y''+y'^2+2xy\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=2; & y(1)=0; \\ y'(0)=1; & y'(1)=-1; \end{matrix}$

Вариант 10. $J(y)=\int_0^1\left(y''^2-4y'y''+y'^2+2y\sin x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=2; & y(1)=0; \\ y'(0)=1; & y'(1)=-1; \end{matrix}$

Вариант 11. $J(y)=\int_0^1\left(y''^2-y'^2+2ye^x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=2; & y(1)=0; \\ y'(0)=1; & y'(1)=-1; \end{matrix}$

Вариант 12. $J(y)=\int_0^1\left(y''^2-y'^2+4yy'+2ye^{-x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=3; & y(1)=1; \\ y'(0)=0; & y'(1)=1; \end{matrix}$

Вариант 13. $J(y)=\int_{-1}^1\left(y''^2-2y'^2+y^2+2y\sin x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-1)=1; & y(1)=2; \\ y'(-1)=-1; & y'(1)=1; \end{matrix}$

Вариант 14. $J(y)=\int_{-1}^1\left(y''^2-y^2+2y\cos x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-1)=1; & y(1)=2; \\ y'(-1)=-1; & y'(1)=1; \end{matrix}$

Вариант 15. $J(y)=\int_{-1}^1\left(y''^2+4y'y''+y'^2+2ye^{-x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-1)=1; & y(1)=2; \\ y'(-1)=-1; & y'(1)=1; \end{matrix}$

Вариант 16. $J(y)=\int_{-1}^1\left(y''^2-y'y''+y'^2+ye^x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-1)=1; & y(1)=2; \\ y'(-1)=-1; & y'(1)=1; \end{matrix}$

Вариант 17. $J(y)=\int_{-1}^1\left(y''^2-y'^2+4xy\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-1)=1; & y(1)=2; \\ y'(-1)=-1; & y'(1)=1; \end{matrix}$

Вариант 18. $J(y)=\int_{-1}^1\left(y''^2-y'^2+2yy'+ye^x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-1)=1; & y(1)=2; \\ y'(-1)=-1; & y'(1)=1; \end{matrix}$

Вариант 19. $J(y)=\int_0^2\left(y''^2-2y'^2+y^2+2ye^x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=1; & y(2)=4; \\ y'(0)=0; & y'(2)=-1; \end{matrix}$

Вариант 20. $J(y)=\int_0^2\left(y''^2-y^2+2ye^{-x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=1; & y(2)=4; \\ y'(0)=0; & y'(2)=-1; \end{matrix}$

Вариант 21. $J(y)=\int_0^2\left(y''^2+3y'y''+y'^2+4ye^x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=1; & y(2)=4; \\ y'(0)=0; & y'(2)=-1; \end{matrix}$

Вариант 22. $J(y)=\int_0^2\left(y''^2-4y'y''+y'^2+4ye^{-x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=1; & y(2)=4; \\ y'(0)=0; & y'(2)=-1; \end{matrix}$

Вариант 23. $J(y)=\int_0^2\left(y''^2-y'^2+2ye^{-x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=1; & y(2)=4; \\ y'(0)=0; & y'(2)=-1; \end{matrix}$

Вариант 24. $J(y)=\int\limits_0^2 \left(y''^2-y'^2+2yy'+2xy\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=1; & y(2)=4; \\ y'(0)=0; & y'(2)=-1; \end{matrix}$

Вариант 25. $J(y)=\int\limits_0^2 \left(y''^2-2y'^2+y^2+4xy\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=1; & y(2)=4; \\ y'(0)=0; & y'(2)=1; \end{matrix}$

Вариант 26. $J(y)=\int\limits_0^1 \left(y''^2-4y'y''+y'^2+2y\sin x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=2; & y(1)=0; \\ y'(0)=1; & y'(1)=-1; \end{matrix}$

Вариант 27. $J(y)=\int\limits_0^1 \left(y''^2-y'^2+2ye^x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=2; & y(1)=0; \\ y'(0)=1; & y'(1)=-1; \end{matrix}$

Вариант 28. $J(y)=\int\limits_0^1 \left(y''^2-y'^2+4yy'+2ye^{-x}\right)dx;$ $\begin{matrix} y(0)=3; & y(1)=1; \\ y'(0)=0; & y'(1)=1; \end{matrix}$

Вариант 29. $J(y)=\int\limits_{-1}^1 \left(y''^2-2y'^2+y^2+2y\sin x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-1)=1; & y(1)=2; \\ y'(-1)=-1; & y'(1)=1; \end{matrix}$

Вариант 30. $J(y)=\int\limits_{-1}^1 \left(y''^2-y^2+2y\cos x\right)dx;$ $\begin{matrix} y(-1)=1; & y(1)=2; \\ y'(-1)=-1; & y'(1)=1; \end{matrix}$

2.5. Основная формула для вариации функционала для задачи со свободными концами. Задача со свободными концами.

Простейшая задача вариационого исчисления, которую мы рассматривали до сих пор, является далеко не единственно возможной.

Задачей со свободными концами называется задача об отыскании экстремума функционала $J(y)=\int\limits_a^b F(x,y(x),y^{/}(x))dx$ *среди всех кривых* $y(x)$ *из* $D^1_{[a,b]}$ *концы которых лежат на двух заданных вертикалях* $x=a,\quad x=b$.

Вычислим вариацию функционала δJ, учитывая, что теперь могут изменяться и концы кривой, т.е. $\delta y(a)\neq 0,\quad \delta y(b)\neq 0$. Приращение функционала равно

$$\Delta J=\int\limits_a^b F\left(x,\quad y+\delta y,\quad y'+(\delta y)'\right)dx-\int\limits_a^b F(x,\quad y,\quad y')dx=\int\limits_a^b \left(F'_y(x,\quad y,\quad y')\delta y+F'_{y'}(x,\quad y,\quad y')(\delta y)'\right)dx+\ldots$$

где многоточие обозначает члены порядка выше первого, относительно δy и $(\delta y)'$.

Выражение $\int\limits_a^b \left(F'_y(x,\quad y,\quad y')\delta y+F'_{y'}(x,\quad y,\quad y')(\delta y)'\right)dx$ представляет собой главную линейную часть приращения функционала ΔJ, т.е. вариацию функционала. Интегрируя это выражение по частям $U=\dfrac{\partial F}{\partial y'},\quad \delta y'dx=dV$ получаем основную формулу для вариации функционала

$$\delta J=\int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\cdot\delta y\cdot dx+\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b}\cdot\delta y(b)-\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=a}\cdot\delta y(a).$$

Теорема 1. Кривая $y(x)$ является решением задачи со свободными концами, если для нее выполняется уравнение Эйлера и краевые условия $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b}=0,\quad \left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=a}=0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала функции δy, для которых $\delta y(a)=0,\quad \delta y(b)=0$. Тогда, как и в простейшей задаче, из условия $\delta J=0$ и основной формулы для вариации функционала получаем уравнение Эйлера. Пусть теперь $y(x)$ - экстремаль. Тогда в основной формуле для вариации функционала интегральный член исчезает и условие $\delta J = 0$ в силу произвольности δy принимает вид $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0,\quad \left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=a} = 0$. Что и требовалось доказать.

Наряду с закрепленными и свободными концами можно рассматривать смешанный случай, т.е. считать, что один конец закреплен, а другой свободен. Пусть, например, ищется экстремум функционала $J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ на классе кривых, соединяющих данную точку и произвольную точку прямой $x = b$. В этом случае из двух краевых условий одно: $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0$, а второе $y(a) = A$.

☺ Расчетная работа 5. Задача вариационного исчисления со свободными концами. Естественные граничные условия. Для своего варианта заданий 2а и 3 найти экстремали, если граничные условия на правом конце не заданы. Сравнить полученные решения с решениями примеров 2а и 3.

2.6. Вариационная производная.

Понятие вариации функционала является аналогом понятия дифференциала числовой функции n переменных. Аналогично, вариационной производной называется выражение, играющее для функционалов ту же роль, что и частные производные для функций n переменных.

Введем понятие вариационной производной для функционалов вида $J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$. Для этой цели перейдем от вариационной задачи к конечномерной, а затем совершим предельный переход. Разобьем отрезок $[a, b]$ на $n+1$ равных частей точками $x_0 = a,\quad x_1,\quad \ldots,\quad x_n,\quad x_{n+1} = b,\quad x_{i+1} - x_i = \Delta x$ и заменим гладкую функцию $y(x)$ ломаной с вершинами $(x_0,\quad y_0)$, $(x_1,\quad y_1)$, $\ldots$, $(x_n,\quad y_n)$. Функционал при этом можно приближенно заменить суммой $J(y_0,\quad y_1,\quad \ldots,\quad y_n) = \sum\limits_{i=0}^{n} F\left(x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \cdot \Delta x$, представляющую собой функцию n переменных $y_0,\quad y_1,\quad \ldots,\quad y_n$. Вычислим частные производные $\dfrac{\partial J(y_0,\quad \ldots,\quad y_n)}{\partial y_j}$ и посмотрим, что происходит с этими производными при неограниченном увеличении числа точек деления. Заметим, что в выражении $J(y_0,\quad y_1,\quad \ldots,\quad y_n) = \sum\limits_{i=0}^{n} F\left(x_i, y_i, \dfrac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \cdot \Delta x$ каждое переменное y_j входит ровно в два слагаемых (при $i = j$ и при $i = j-1$), получаем

$$\frac{\partial J(y_0,\quad \ldots,\quad y_n)}{\partial y_j} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} F\left(x_j,\quad y_j,\quad \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x}\right) \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y'} F\left(x_{j-1},\quad y_{j-1},\quad \frac{y_j - y_{j-1}}{\Delta x}\right) - \frac{\partial}{\partial y'} F\left(x_j,\quad y_j,\quad \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x}\right).$$

Правая часть написанного выражения при $\Delta x \to 0$ стремиться к нулю, представляя собой величину порядка Δx . Вычислим предел отношения этого выражения к Δx при $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\partial J(y_0, \ \ldots, \ y_n)}{\partial y_j} \cdot \frac{1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} F\left(x_j, \ y_j, \ \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x} \right) + \left[\frac{\partial}{\partial y'} F\left(x_{j-1}, \ y_{j-1}, \ \frac{y_j - y_{j-1}}{\Delta x} \right) - \frac{\partial}{\partial y'} F\left(x_j, \ y_j, \ \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x} \right) \right] \cdot \right.$$

$$= \frac{\partial F(x, \ y, \ y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x, \ y, \ y')}{\partial y'} \right)$$

Этот предел и называется вариационной производной функционала и обозначается символом $\frac{\delta J}{\delta y}$. Мы видим, что полученное нами выражение вариационной производной представляет собой левую часть уравнения Эйлера. Следовательно, уравнение Эйлера означает не что иное, как равенство нулю в каждой точке вариационной производной соответствующего функционала, точно так же, как в анализе необходимым условием экстремума функции функцию n переменных является равенство нулю всех ее частных производных.

Сформулируем теперь определение вариационной производной в общем случае. Пусть имеется некоторый функционал $J(y)$. *Дадим функции приращение, отличное от нуля лишь в окрестности некоторой точки* x_0, *и вычислим соответствующее приращение функционала* $\Delta J = J(y + \delta y) - J(y)$. *Разделив это приращение на площадь* ΔS, *ограниченную кривой* δy *и осью* x, *рассмотрим отношение* $\frac{J(y + \delta y) - J(y)}{\Delta s}$. *Пусть теперь площадь* ΔS, *ограниченная кривой* δy, *стремиться к нулю, причем так, что и* $|\delta y(x)|$ *и длина того интервала, в котором* δy *отлична от нуля, стремиться к нулю. Если при этом отношение* $\frac{J(y + \delta y) - J(y)}{\Delta s}$ *существует и стремиться к некоторому пределу, то этот предел называется вариационной производной функционала* $J(y)$ *в точке* x_0.

Из определения вариационной производной ясно, что если δy отлична от нуля в некоторой окрестности точки x_0 и ограничивает площадь ΔS, то

$\Delta J = J(y + \delta y) - J(y) = \left(\left. \frac{\delta J}{\delta y} \right|_{x = x_0} + \varepsilon \right) \cdot \Delta s$, где $\varepsilon \to 0$, когда стремяться к нулю и $|\delta y(x)|$ и длина интервала на котором δy отлична от нуля.

2.7. Изопериметрические задачи. Задача Дидоны.

В простейшей задаче вариационного исчисления, класс допустимых линий, помимо тех или иных требований гладкости, определялся условиями, задаваемых на концах этих линий. Однако ряд приложений вариационного исчисления приводит к задачам, в которых на допустимые кривые, кроме граничных условий, накладываются условия другого типа.

Задача отыскания среди всех кривых $y(x)$ *из* $D^1_{[a,b]}$, *удовлетворяющих условиям* $y(a) = A, y(b) = B$, *кривой доставляющей экстремум функционалу (целевой функционал)*

$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$, *при выполнении условия (условие связи)*

$K(y) = \int_a^b G(x, y(x), y'(x))dx = l$ *называется изопериметрической задачей.*

Первоначально под изопериметрической задачей понималась следующая частная задача (задача Дидоны): среди всех замкнутых кривых, имеющих заданную длину, найти ту, которая охватывает наибольшую площадь (задача с фиксированным периметром).

Аналогично, известному из математического анализа функций нескольких переменных, методу множителей Лагранжа в вариационном исчислении справедлива теорема, позволяющая находить решение изопериметрической задачи.

Теорема 1. Если кривая $y(x)$ дает экстремум функционалу $J(y)=\int\limits_a^b F(x,y(x),y^{/}(x))dx$, удовлетворяет условиям $K(y)=\int\limits_a^b G(x,y(x),y^{/}(x))dx=l$ $y(a)=A, y(b)=B$ и не является экстремалью функционала $K(y)$, то существует такая постоянная λ, что эта кривая $y(x)$ является экстремалью функционала $\int\limits_a^b (F+\lambda G)dx$.

Доказательство. Пусть кривая $y(x)$ дает экстремум функционалу $J(y)$ при условию, что $K(y)=l$. Возмем в интервале $[a, \quad b]$ две произвольные точки x_1 и x_2 и придадим $y(x)$ приращение $\delta y(x)=\delta_{x_1}y+\delta_{x_2}y$, отличное от нуля лишь в окрестностях этих точек. Соответствующее приращение ΔJ функционала можно представить в виде

$$\Delta J=\left(\left.\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\right|_{x=x_1}+\varepsilon_1\right)\cdot\sigma_1+\left(\left.\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\right|_{x=x_2}+\varepsilon_2\right)\cdot\sigma_2,$$ где

$\sigma_1=\int\limits_a^b \delta_{x_1}y\cdot dx, \quad \sigma_2=\int\limits_a^b \delta_{x_2}y\cdot dx$ и $\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2\to 0$ при $\sigma_1, \quad \sigma_2\to 0$. Потребуем теперь, чтобы провариированная кривая $y_1(x)=y(x)+\delta_{x_1}y+\delta_{x_2}y$ удовлетворяла условию $K(y_1)=K(y)=l$. Вариацию ΔK можно представить в аналогичном виде

$$\Delta K=K(y_1)-K(y)=\left(\left.\left(\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\right|_{x=x_1}+\varepsilon_1'\right)\cdot\sigma_1+\left(\left.\left(\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\right|_{x=x_2}+\varepsilon_2'\right)\cdot\sigma_2=0,$$

где $\varepsilon_1', \quad \varepsilon_2'\to 0$ при $\sigma_1, \quad \sigma_2\to 0$. Выберем теперь точку x_2 так, что $\left.\left(\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\right|_{x=x_2}\neq 0$. Такая точка существует, так как по условию $y(x)$ не является экстремалью функционала – условия связи. При таком выборе точки x_2 условию $\Delta K=0$ можно придать вид $\sigma_2=-\left(\frac{\left.\left(\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\right|_{x=x_1}}{\left.\left(\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\right|_{x=x_2}}+\varepsilon'\right)\cdot\sigma_1$, где $\varepsilon' \to 0$ при $\sigma_2\to 0$.

Положив $\lambda = -\dfrac{\left.\left(\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\right|_{x=x_2}}{\left.\left(\dfrac{\partial G}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\right|_{x=x_2}}$ и подставив в формулу для ΔJ вместо σ_2 выражение для него, получим

$\Delta J = \left(\left.\left(\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\right|_{x=x_1} + \lambda\left.\left(\dfrac{\partial G}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\right|_{x=x_1}\right)\cdot \sigma_1 + \varepsilon \cdot \sigma_1$. Первое слагаемое справа представляет собой главную линейную относительно δy часть приращения функционала, т.е. вариацию функционала J. Так как равенство нулю вариации функционала – необходимое условие экстремума и так как σ_1 отлично от нуля, то

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \lambda \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right) = 0 \quad (*).$$

Что и требовалось доказать.

Полученный результат используется при решении той или иной изопериметрической задачи следующим образом. Составляется дифференциальное уравнение (*), находим его общее решение, которое будет содержать пораметр λ и еще две произвольные постоянные. Эти три величины определяются из граничных условий $y(a) = A, \quad y(b) = B,$ и условия $K(y) = l$.

☺ <u>Задача Дидоны.</u> Найти кривую в верхней полуплоскости, проходящую через точки $(-a, \quad 0)$ и $(a, \quad 0)$, имеющую заданную длину $2l \quad (l > a)$ и охватывающую вместе с отрезком $[-a, \quad a]$ максимальную площадь.

Решение. Мы ищем функцию $y(x)$ для которой $y(-a) = 0, \quad y(a) = 0,$ $K(y) = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx = 2l$, а интеграл $J(y) = \int_{-a}^{a} y dx$ принимает максимальное значение. Мы имеем, таким образом изопериметрическую задачу. По теореме 1 составляет функционал $J(y) + \lambda K(y) = \int_{-a}^{a} \left(y + \lambda \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\right) \cdot dx$ и пишем для него уравнение Эйлера

$1 + \lambda \cdot \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\right) = 0$, отсюда находим $x + \lambda \cdot \dfrac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = c_1$. Интегрируя, получаем уравнение $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2$ семейства окружностей. Значения $c_1, \quad c_2, \quad \lambda$ определяются из условий $y(-a) = 0, \quad y(a) = 0,$ $K(y) = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx = 2l$.

<u>Теорема 2</u>. Все сказанное выше непосредственно обобщается на случай функционалов, зависящих от нескольких функций

$$J(y_1, \quad \ldots, \quad y_n) = \int_a^b F(x, y_1, \quad \ldots, \quad y_n, y_1', \quad \ldots, \quad y_n') dx$$

при условиях $y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i, \quad (i = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n)$, и нескольких связях вида $K(y)=\int\limits_a^b G_j(x,y_i,y_i')dx=l_j$, $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$.

В этом случае необходимым условием экстремума будет

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(F+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j G_j\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y_i'}\left(F+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j G_j\right)\right)=0,\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

$2n$ произвольных постоянных, входящих в решение этой системы и значения k параметров $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k$ определяются из $2n$ граничных условий и k условий связи. Доказательство для этого общего случая по существу не отличается от изложенного выше, и мы не будем его приводить.

☺ Расчетная работа 6. Задача вариационного исчисления с ограничениями. Изопериметрическая задача.

Решить пример **2а** при заданном изопериметрическом условии. Сравнить результат с решением примера **2а**.

Вариант 1. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=1$

Вариант 2. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=4$

Вариант 3. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=0.5$

Вариант 4. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=2$

Вариант 5. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=1$

Вариант 6. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=1$

Вариант 7. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=3$

Вариант 8. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=3$

Вариант 9. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=2$

Вариант 10. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=2$

Вариант 11. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=2$

Вариант 12. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=6$

Вариант 13. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=4$

Вариант 14. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=4$

Вариант 15. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=1$

Вариант 16. $\int\limits_{x_1}^{x_2} (x+y) dx=4$

Вариант 17. $\int\limits_{x_1}^{x_2} y dx=6$

Вариант 18. $\int\limits_{x_1}^{x_2} (x^2+y) dx=4$

Вариант 19. $\int\limits_{x_1}^{x_2} (x^2+y) dx=5$

Вариант 20. $\int\limits_{x_1}^{x_2} (\sin x+y) dx=5$

Вариант 21. $\int\limits_{x_1}^{x_2} (\sin x+y) dx=5$

Вариант 22. $\int\limits_{x_1}^{x_2} (x^2+y) dx=8$

Вариант 23. $\int\limits_{x_1}^{x_2} (y+y') dx=3$

Вариант 24. $\int\limits_{x_1}^{x_2} (y+y') dx=3$

Вариант 25. $\int\limits_{x_1}^{x_2} (y+y') dx=16$

Вариант 26. $\int\limits_{x_1}^{x_2} (x+y+y') dx=8$

Вариант 27. $\int\limits_{x_1}^{x_2} (x+y+y') dx=8$

Вариант 28. $\int\limits_{x_1}^{x_2} (x^2+y+y') dx=6$

Вариант 29. $\int_{x_1}^{x_2}(\sin x+y+y')dx=10$ Вариант 30. $\int_{x_1}^{x_2}(\sin x+y+y')dx=8$

2.8. Задача на условный экстремум. Геодезические кривые.

Задачей Лагранжа или задачей на условный экстремум называется задача отыскания среди всех кривых $y_i(x)$ *из* $D^1_{[a,b]}$, *удовлетворяющих граничным условиям* $y_i(a)=A, y_i(b)=B$ $(i=1, \; 2, \; \ldots, \; n)$ *кривых доставляющих экстремум функционалу* $\int_a^b F(x, \; y_1, \; \ldots, \; y_n, \; y_1', \; \ldots, \; y_n')dx$ *и удовлетворяющих условиям связи* $g_j(x, \; y_1, \; \ldots, \; y_n)=0$, $(j=1, \; 2, \; \ldots, \; k)$.

Иначе говоря, функционал рассматривается здесь не на всех кривых, удовлетворяющих граничным условиям, а только на тех из них, которые лежат на некотором $n-k$ –мерном многообразии. Ограничимся для простоты случаем $n=2, \quad k=1$.

Теорема 1. Если кривые $y=y(x)$, $z=z(x)$ дает условный экстремум функционалу $\int_a^b F(x, \; y, \; z, \; y', \; z')dx$ в классе кривых, лежащих на поверхности $g(x, \; y, \; z)=0$, причем ни в одной ее точке $\frac{\partial g}{\partial y}$ и $\frac{\partial g}{\partial z}$ не обращаются в нуль одновременно, то существует такая функция $\lambda(x)$, что кривая $y=y(x)$, $z=z(x)$ является экстремалью функционала $\int_a^b [F(x, \; y, \; z, \; y', \; z')+\lambda(x)\cdot g(x, \; y, \; z)]dx$, т.е. удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=0 \end{cases}.$$

Доказательство. Пусть $y=y(x)$, $z=z(x)$ - кривая, реализующая экстремум функционала при указанных условиях, а $\overline{y}=\overline{y}(x)$, $\overline{z}=\overline{z}(x)$ - близкая к ней кривая, удовлетворяющая условиям, но не являющаяся экстремалью. Причем $\delta y(x)=\overline{y}(x)-y(x)$ и $\delta z(x)=\overline{z}(x)-z(x)$ отличны от нуля лишь в малой окрестности $(x_0, \; x_1)$ некоторой точки $x^{(1)}\in[a, \; b]$. Положим $\sigma_1=\int_a^b \delta y\cdot dx, \quad \sigma_2=\int_a^b \delta z\cdot dx$. Так как $\overline{y}=\overline{y}(x)$, $\overline{z}=\overline{z}(x)$ - удовлетворяет условию $g(x, \; y, \; z)=0$, то можно записать

$$\int_a^b [g(x, \; \overline{y}, \; \overline{z})-g(x, \; y, \; z)]\cdot dx = \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\delta y+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\delta z\right)\cdot dx=\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x=x^{(1)}}\cdot\sigma_1+\left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{x=x^{(1)}}\cdot\sigma_2+\varepsilon_1=0$$

и $\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2\to 0$ при $\sigma_1, \quad \sigma_2\to 0$. По условию теоремы хотя бы один из коэффициентов

$\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x=x^{(1)}}$, $\left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{x=x^{(1)}}$ отличен от нуля. Тогда $\sigma_2 = -\frac{\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x=x^{(1)}}}{\left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{x=x^{(1)}}} \cdot \sigma_1 + \varepsilon_2$. Теперь приращение функционала $\Delta J = \left.\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\right|_{x=x^{(1)}} \cdot \sigma_1 + \left.\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right)\right|_{x=x^{(1)}} \cdot \sigma_2 + \varepsilon_3$ можно представить в виде $\Delta J = \left.\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x=x^{(1)}}}{\left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{x=x^{(1)}}} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right)\right]\right|_{x=x^{(1)}} \cdot \sigma_1 + \varepsilon_4$, где величины $\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \varepsilon_4$ - величины порядка выше первого относительно σ_1. Для того, чтобы имел место экстремум, необходимо, чтобы главная линейная часть этого приращения равнялась нулю. Таким образом получаем $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right) = 0$ или

$\frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \lambda(x)$. Что и требовалось доказать.

Теорема 2. Предыдущая теорема остается в силе и в случае, если условие выглядит следующим образом $g(x, \quad y, \quad z, \quad y', \quad z') = 0$.

Без доказательства.

Задачу Лагранжа можно рассматривать в некотором смысле как предельный случай изопериметрической задачи. Действительно, если мы предположим, что условие $g(x, \quad y, \quad z) = 0$ выполняется не всюду, а лишь в некоторой фиксированной точке x_0, то мы получим условие, левую часть которого можно рассматривать как функционал от y, z, т.е. условие того типа, который участвует в изопериметрической задаче. Таким образом, условие можно рассматривать, как совокупность бесконечного множества условий типа функционала. В изопериметрической задаче, как мы видели, число множителей Лагранжа $\lambda_1, \quad \ldots, \quad \lambda_k$ равно числу условий связи. В задаче Лагранжа, в соответствии с только что сказанным, появляется функция $\lambda(x)$, т.е. свой множитель λ в каждой точке x_0.

☺ Задача о геодезических кривых. Из всех кривых, лежащих на поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и проходящих через две заданные точки $(x_0, \quad y_0, \quad z_0)$ и $(x_1, \quad y_1, \quad z_1)$, найти ту, которая имеет наименьшую длину.

Решение. Длина кривой записывается интегралом $\int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\, dx$. Составляем вспомогательный функционал $\int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} + \lambda(x) \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right] dx$ и пишем соответствующие уравнения Эйлера $\begin{cases} 2\cdot\lambda(x)\cdot y-\dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}=0 \\ 2\cdot\lambda(x)\cdot z-\dfrac{d}{dx}\dfrac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}=0 \end{cases}$. Решая эти уравнения, мы получаем семейство линий, зависящее от четырех постоянных, значения которых определяются из граничных условий $y(x_0)=y_0,\quad z(x_0)=z_0$ и $y(x_1)=y_1,\quad z(x_1)=z_1$.

Замечание. Задачу на нахождение условного экстремума функции нескольких переменных можно, как известно, свести к задаче на безусловный экстремум, выразив переменные, на которые наложены связи, через соответствующее число независимых переменных. Например, задачу о нахождении геодезических на некоторой поверхности можно рассматривать как задачу на условный экстремум, но можно, представив координаты $x,\quad y,\quad z$ как функции двух параметров, свести эту задачу к отысканию безусловного экстремума.

2.9. Основная формула для вариации функционала для задачи с подвижными концами. Канонические переменные. Задача с подвижными концами. Условия трансверсальности.

Выведем общую формулу для вариации функционала $\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,\quad y,\quad y')\cdot dx$ считая при этом, что концы тех кривых, на которых определен этот функционал могут сдвигаться произвольным образом. Все рассматриваемые кривые будем предполагать гладкими, а за расстояние между кривыми $y(x)$ и $\overline{y}(x)$ мы назовем величину $\rho(y,\quad \overline{y})=\max|y-\overline{y}|+\max|y'-\overline{y}'|+\rho(p_0,\quad \overline{p}_0)+\rho(p_1,\quad \overline{p}_1)$, где $p_0,\quad \overline{p}_0$ и $p_1,\quad \overline{p}_1$ - левые, соответственно правые концы кривых $y(x)$ и $\overline{y}(x)$. Так как функции $y(x)$ и $\overline{y}(x)$ определены, вообще говоря, на разных интервалах, то для того чтобы формула для расстояния между кривыми имела смысл, эти кривые нужно продолжить на весь интервал, проведя, например, для этого касательные в конечных точках кривых.

Вариацией функционала называется линейное относительно приращения δy функции $y(x)$ и относительно приращений координат концов и отличающееся от полного приращения функционала на величину выше первого порядка малости по сравнению с расстоянием между функциями $y(x)$ и $y(x)+\delta y(x)$.

Обозначим координаты концов кривой $y(x)$ через $(x_0,\quad y_0)$ и $(x_1,\quad y_1)$, а координаты концов провариированной кривой $y(x)+\delta y(x)$ через $(x_0+\delta x_0,\quad y_0+\delta y_0)$ и $(x_1+\delta x_1,\quad y_1+\delta y_1)$ соответственно.

Найдем явное выражение для вариации. Для этого сперва найдем приращение функционала

$$\Delta J(y) = J(y+\delta y) - J(y) = \int\limits_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F\left(x, \quad y+\delta y, \quad y' + (\delta y)'\right)dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, \quad y, \quad y')dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F\left(x, \quad y+\delta y, \quad y'+(\delta y)'\right) - F(x, \quad y, \quad y')\right]dx +$$

$$+ \int\limits_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F\left(x, \quad y+\delta y, \quad y'+(\delta y)'\right)dx - \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta x_0} F\left(x, \quad y+\delta y, \quad y'+(\delta y)'\right)dx$$

Воспользовавшись формулой Тейлора и отбрасывая члены выше первого порядка малости, получим отсюда, что

$$\delta J = \int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot(\delta y)'\right]\cdot dx + F(x, \quad y, \quad y')\Big|_{x=x_1}\cdot\delta x_1 - F(x, \quad y, \quad y')\Big|_{x=x_0}\cdot\delta x_0 =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\cdot\delta y\cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} + F(x, \quad y, \quad y')\Big|_{x=x_1}\cdot\delta x_1 - F(x, \quad y, \quad y')\Big|_{x=x_0}\cdot\delta x_0$$

Но, как ясно из рисунка $\delta y(x_0) \sim \delta y_0 - y'\cdot\delta x_0$, $\delta y(x_1) \sim \delta y_1 - y'\cdot\delta x_1$, где ~ означает равенство с точностью до малых порядка выше первого. Поэтому окончательно имеем:

$$\delta J = \int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y(x)dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_1}\delta y_1 + \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\Big|_{x=x_1}\delta x_1 - \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_0}\delta y_0 - \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\Big|_{x=x_0}\delta x_0$$

Мы получили общую формулу для вариации функционала, зависящего от одной функции. Она содержит в качестве частных случаев формулу ворииации для задачи со свободными концами (в этом случае $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$) и формулу вариации для простейшей задачи (в этом случае $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$ и $\delta y_0 = \delta y_1 = 0$).

Для функционала, зависящего от нескольких функций аналогично можно получить

$$\delta J = \int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)\right]\delta y_i(x)\right)dx + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i'}\cdot\delta y_i\Bigg|_{x_0}^{x_1} + \left(F - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i'}\cdot y_i'\right)\delta x\Bigg|_{x_0}^{x_1}.$$

Введем обозначения: $p_i = \dfrac{\partial F}{\partial y_i'}$, $H = -F + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i'\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y_i'} = -F + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i'\cdot p_i$. В этих новых обозначениях основная формула для вариации функционала запишется следующим образом $\delta J = \int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\dfrac{\partial F}{\partial y_i} - \dfrac{dp_i}{dx}\right]\delta y_i(x)\right)dx + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i\cdot\delta y_i - H\cdot\delta x\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1}$. Заметим, что если определитель, составленный из производных $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y_i'\partial y_j'}$ отличен от нуля, то величину y_i' можно выразить из равенств $p_i = \dfrac{\partial F}{\partial y_i'}$ через p_i и y_i, и мы можем в функционале $J = \int\limits_a^b F(x, y_1, \quad ..., \quad y_n, y_1', \quad ..., \quad y_n')dx$ от переменных x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n' и функции F перейти к переменным $x, \quad y_1, \quad ..., \quad y_n, \quad p_1, \quad ..., \quad p_n$ и функции H. Переменные $x, \quad y_1, \quad ..., \quad y_n, \quad p_1, \quad ..., \quad p_n$ и H называются каноническими переменными. Они играют важную роль в самых разных вопросах вариационного исчисления, и мы будем еще неоднократно с ними встречаться.

Задача нахождения экстремума функционала $J(y)=\int\limits_a^b F(x,y(x),y^{/}(x))dx$ *(1) на множестве всех функций* $y(x)$ *из* $D^1_{[a,b]}$, *концы которых* p_0 *и* p_1 *лежат на двух фиксированных линиях* $y=\varphi(x)$ *и* $y=\psi(x)$, *называется задачей с подвижными концами.*

Теорема 1. Кривая $y(x)$ из $D^1_{[a,b]}$, является решением задачи с подвижными концами, если для нее выполняется уравнение Эйлера и условия трансверсальности

$$F+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot(\psi'-y')\Big|_{x=x_1}=0,\quad F+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot(\varphi'-y')\Big|_{x=x_0}=0.$$

Доказательство. Воспользуемся выражением для вариации функционала:

$$\delta J=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y(x)dx+\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_1}\delta y_1+\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\Big|_{x=x_1}\delta x_1-\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_0}\delta y_0-\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\Big|_{x=x_0}\delta x_0$$

Если некоторая кривая дает экстремум рассматриваемому функционалу среди всех допустимых кривых, то она тем более будет давать экстремум и по отношению ко всем кривым, имеющим те же концевые точки. Следовательно, эта кривая должна быть экстремалью, т.е. удовлетворять уравнению Эйлера. Поэтому в выражении для вариации функционала интегральный член обратиться в нуль, и мы получим следующее условие экстремума $\delta J=\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_1}\delta y_1+\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\Big|_{x=x_1}\delta x_1-\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_0}\delta y_0-\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\Big|_{x=x_0}\delta x_0=0$. Так как $\delta y_1=\psi'\delta x_1+\alpha_1$, $\delta y_0=\varphi'\delta x_0+\alpha_0$, где α_1 и α_0 - бесконечно малые порядка выше первого, то окончательно условие экстремума можно переписать так

$\delta J=\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\psi'+F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\Big|_{x=x_1}\delta x_1-\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\varphi'+F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\Big|_{x=x_0}\delta x_0=0$. Так как δx_0 и δx_1 - независимые переменные, то отсюда получаем условия $\begin{cases}F+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot(\psi'-y')\Big|_{x=x_1}=0\\ F+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot(\varphi'-y')\Big|_{x=x_0}=0\end{cases}$

называемые условиями трансверсальности.

Про кривую $y(x)$ из $D^1_{[a,b]}$, удовлетворяющую этим условиям, говорят, что она трансверсальна кривым линиям $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$.

Итак для решения вариационной задачи с подвижными концами нужно сперва записать и решить соответствующее уравнение Эйлера, а затем найти значения входящих в его общее решение двух произвольных постоянных из условий трансверсальности.

Для функционалов, зависящих от нескольких функций (например двух) задача с подвижными концами сводится к отысканию экстремалей, концы которых лежат на двух фиксированных поверхностях $x=\varphi(y,\quad z)$ и $x=\psi(y,\quad z)$. Для такой постановки задачи кривая должна удовлетворять уравнениям Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0,\ \frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=0$$

и условиям трансверсальности запишутся следующим образом

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\left(F-y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}-z'\cdot\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right|_{x=x_0}=0$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z'}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\left(F-y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}-z'\cdot\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right|_{x=x_0}=0$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\left(F-y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}-z'\cdot\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right|_{x=x_1}=0$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z'}+\frac{\partial \psi}{\partial z}\cdot\left(F-y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}-z'\cdot\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right|_{x=x_1}=0$$

☺ Расчетная работа 7. Задача вариационного исчисления с подвижными концами. Условия трансверсальности.

Для функционала **2а** найти экстремаль, при условии, что правый конец движется по заданной линии.

Вариант 1.	$\varphi(x)=e^{x}-2;$	Вариант 2.	$\varphi(x)=e^{2x}-9;$
Вариант 3.	$\varphi(x)=e^{x+0.5}-3;$	Вариант 4.	$\varphi(x)=e^{x}-10;$
Вариант 5.	$\varphi(x)=2-e^{2x};$	Вариант 6.	$\varphi(x)=2-e^{2x};$
Вариант 7.	$\varphi(x)=e^{x}-2;$	Вариант 8.	$\varphi(x)=e^{x+0.5}-2;$
Вариант 9.	$\varphi(x)=e^{2x}-5;$	Вариант 10.	$\varphi(x)=0.5e^{x}-2;$
Вариант 11.	$\varphi(x)=e^{x}-5;$	Вариант 12.	$\varphi(x)=-e^{0.5x};$
Вариант 13.	$\varphi(x)=5-e^{x};$	Вариант 14.	$\varphi(x)=e^{x}-2;$
Вариант 15.	$\varphi(x)=2-e^{2x};$	Вариант 16.	$\varphi(x)=3-e^{x};$
Вариант 17.	$\varphi(x)=4-e^{x};$	Вариант 18.	$\varphi(x)=6-e^{x};$
Вариант 19.	$\varphi(x)=10-e^{2x};$	Вариант 20.	$\varphi(x)=e^{x}-2;$
Вариант 21.	$\varphi(x)=5-e^{0.5x};$	Вариант 22.	$\varphi(x)=10-2e^{x-2};$
Вариант 23.	$\varphi(x)=5-e^{x};$	Вариант 24.	$\varphi(x)=50-e^{x+3};$
Вариант 25.	$\varphi(x)=50-e^{x+3};$	Вариант 26.	$\varphi(x)=0.5e^{x}-2;$
Вариант 27.	$\varphi(x)=50-e^{x};$	Вариант 28.	$\varphi(x)=e^{2x-2}-5;$
Вариант 29.	$\varphi(x)=5-e^{2x};$	Вариант 30.	$\varphi(x)=25-e^{x};$

2.10. Не гладкие экстремали и условия Вейерштрасса-Эрдмана.

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления. Необходимо найти такие кривые $y(x)$ из $D^1_{[a,b]}$, доставляющие минимум функционалу $J=\int\limits_0^2 (y')^2(1-y')^2\,dx$, чтобы $y(0)=0$, $y(2)=1$. Подинтегральная функция больше или равна нулю и достигает минимума, когда $y'=0$ или $1-y'=0$. Следовательно, семейство экстремалей - это два семейства параллельных прямых $\overline{y}=c_1$ и $\overline{y}=x+c_2$. Однако ни одна гладкая экстремаль не удовлетворяет заданным граничным условиям.

Задача о нахождении экстремума функционала $J(y)=\int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$ *, в классе допустимых кривых, которые удовлетворяют граничным условиям* $y(a)=A$ *,* $y(b)=B$ *и могут иметь излом в некоторой точке с,* $c\in[a,\quad b]$ *называется задачей с негладкими экстремалями.*

Теорема 1 (Условия Вейерштрасса-Эрдмана). Решение задачи с негладкими экстремалями $y(x)$ удовлетворяет уравнениям Эйлера, граничным условиям, а в точке излома условиям Вейерштрасса-Эрдмана: $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c-0}-\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c+0}=0$,

$\left.\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{x=c-0}-\left.\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{x=c+0}=0$.

Доказательство. На каждом из отрезков $[a,\quad c]$ и $[c,\quad b]$ та кривая, на которой исходный функционал достигает экстремума, удовлетворяет уравнению Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$. Представим рассматриваемый функционал в виде суммы

$J(y)=\int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))dx=\int\limits_a^c F(x,y(x),y'(x))dx+\int\limits_c^b F(x,y(x),y'(x))dx=J_1(y)+J_2(y)$ и

вычислим вариацию для каждого из этих двух функционалов в отдельности. На каждом из отрезков $[a,\quad c]$ и $[c,\quad b]$ граничные условия состоят в том, что один конец допустимой кривой закреплен, а другой свободен. Поэтому, принимая во внимание уравнение Эйлера, получаем $\delta J_1=\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c-0}\delta y_1+\left.\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\right|_{x=c-0}\delta x_1$,

$\delta J_2=-\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c+0}\delta y_1-\left.\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\right|_{x=c+0}\delta x_1$. Если имеет место экстремум, то

$\delta J=\delta J_1+\delta J_2=0$, т.е.

$\left(\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c-0}-\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c+0}\right)\delta y_1+\left[\left.\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\right|_{x=c-0}-\left.\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\right|_{x=c+0}\right]\delta x_1=0$, откуда в силу произвольности δy_1 и δx_1 получаем $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c-0}-\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c+0}=0$,

$\left.\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{x=c-0}-\left.\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{x=c+0}=0$. Что и требовалось доказать.

Эти условия выглядят особенно просто, если воспользоваться каноническими переменными. Действительно, условия Вейерштрасса-Эрдмана просто означают, что канонические переменные $p=\frac{\partial F}{\partial y'}$, $H=-F+y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}$ должны быть непрерывны в точке излома.

☺ Необходимо найти такие кривые $y(x)$ из $D^1_{[a,b]}$, доставляющие минимум функционалу $J=\int\limits_0^2 (y')^2(1-y')^2\,dx$, чтобы $y(0)=0$, $y(2)=1$. Экстремали: $\overline{y}=c_1$ и $\overline{y}=x+c_2$.

Условия Вейерштрасса-Эрдмана: $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \cdot (1-y')^2 - 2(y')^2(1-y')$ выполняются,

следовательно $\overline{y} = \begin{cases} 0, & x \in [0,\ 1] \\ t-1, & x \in [1,\ 2] \end{cases}$ является экстремалью.

2.11. Канонический вид уравнений Эйлера.

Уравнения Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0$ отвечающие функционалу

$J = \int\limits_a^b F(x, y_1,\ \ldots,\ y_n, y_1',\ \ldots,\ y_n')dx$, зависящему от n функций, образуют систему n уравнений второго порядка. Такую систему можно, и притом различными способами, свести к системе $2n$ уравнений первого порядка, например можно принять $y_1',\ \ldots,\ y_n'$ за n новых неизвестных функций и рассматривать систему $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0 \\ \frac{dy_i}{dx} = y_i' \end{cases}$, где $y_1,\ \ldots,\ y_n,\ y_1',\ \ldots,\ y_n'$ - неизвестные функции, а x - независимое переменное.

Более удобную и симметричную форму для уравнений Эйлера можно получить, введя вместо $x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n$ канонические переменные $p_i = \frac{\partial F}{\partial y_i'}$ и функцию Гамильтона $H = -F + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i' \cdot p_i$. С их помощью мы получили компактное выражение для вариации функционала $\delta J = \int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{dp_i}{dx}\right]\delta y_i(x)\right)dx + \left.\left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot \delta y_i - H \cdot \delta x\right)\right|_{x_0}^{x_1}$, а также наглядную интерпретацию условий Вейерштрасса-Эрдмана (непрерывность канонических переменных в точке излома). Напомним, что переход от старых координат к каноническим возможен, если определитель, составленный из производных $\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_j'}$ отличен от нуля.

Чтобы эту замену произвести в уравнениях Эйлера, нужно частные производные $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ (взятые при постоянных $y_1',\ \ldots,\ y_n'$) выразить через частные производные $\frac{\partial H}{\partial y_i}$ (взятые при постоянных $p_1,\ \ldots,\ p_n$). Вычислим для этого дифференциал функции Гамильтона $dH = -dF + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i dy_i' + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i' dp_i = -\frac{\partial F}{\partial x}dx - \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i}dy_i - \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i'}dy_i' + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i dy_i' + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i' dp_i$. Из определения канонических переменных $p_i = \frac{\partial F}{\partial y_i'}$ следует, что члены, содержащие dy_i', взаимно уничтожаются и мы получаем $dH = -\frac{\partial F}{\partial x}dx - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i}dy_i + \sum_{i=1}^{n}y_i' dp_i$. Таким образом частные производные от функции Гамильтона равны $\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial y_i} = -\frac{\partial F}{\partial y_i}$, $\frac{\partial H}{\partial p_i} = y_i'$.

Пользуяь этими выражениями, можно переписать уравнения Эйлера в виде $\begin{cases} \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$. *Эти* $2n$ *уравнений первого порядка образуют систему, называемую канонической системой уравнений Эйлера для функционала*

$$J = \int_a^b F(x, y_1, \ \ldots, \ y_n, y_1', \ \ldots, \ y_n')dx\ .$$

Напомним, что первым интегралом некоторой системы дифференциальных уравнений называется функция, сохраняющая постоянные значения вдоль каждой интегральной кривой этой системы. Выясним, какие первые интегралы может иметь каноническая система (а следовательно, и эквивалентная ей первоначальная система). Рассмотрим сначала случай, когда функция *F*, определяющая функционал, не зависит от *x* явно, т. е. $F(y_1, \ \ldots, \ y_n, y_1', \ \ldots, \ y_n')$. Тогда функция $H = -F + \sum_{i=1}^{n} y_i' \cdot p_i$ не содержит *x* явно и следовательно, $\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dx}$ воспользовавшись каноническими уравнениями Эйлера, получаем $\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial H}{dp_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial y_i} = 0$ откуда $H = const$ вдоль каждой экстремали. Таким образом, если *F* не зависит от *x* явно, то функция $H = const$ является первым интегралом уравнений Эйлера.

Если *H* зависит от *x*, то имеет место формула $\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x}$ которая получается таким же рассуждением.

Рассмотрим теперь некоторую произвольную функцию вида $\Phi(y_1, \ \ldots, \ y_n, \ p_1, \ \ldots, \ p_n)$ и выясним, при каких условиях она будет первым интегралом канонической системы уравнений Эйлера. При этом мы уже не будем предполагать, что *F* не зависит от *x* явно, а рассмотрим общий случай. Вдоль каждой интегральной кривой системы имеем $\frac{d\Phi}{dx} = \sum\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dx}\right) = \sum\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\frac{dH}{dp_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{dH}{dy_i}\right)$. Выражение $[\Phi, \ H] = \sum\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\frac{dH}{dp_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{dH}{dy_i}\right)$ называется скобкой Пуассона функций Φ и *H*. Мы получаем следующую формулу: $\frac{d\Phi}{dx} = [\Phi, \ H]$. Таким образом, для того чтобы была первым интегралом системы канонических уравнений Эйлера, необходимо и достаточно, чтобы скобка Пуассона была тождественно равна нулю.

Если же не только H, но и Φ может явно зависеть от *x*, то справедлива, как легко проверить, следующая формула: $\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + [\Phi, \ H]$.

2.12. Некоторые приложения к задачам механики и ракетодинамики. Принцип наименьшего действия.

Рассмотрим применение полученных результатов к некоторым задачам механики.

Пусть нам дана некоторая система материальных точек с массами $m_1, \quad m_2, \quad ..., \quad m_n$ и координатами $x_i, \quad y_i, \quad z_i, \quad (i=1, \quad 2, \quad ..., \quad n)$. Будем предполагать при этом, что никаких связей при этом на систему не наложено. Кинетическая энергия такой системы равна $T=\sum \frac{m_i}{2}\left(\dot{x}_i^{\,2}+\dot{y}_i^{\,2}+\dot{z}_i^{\,2}\right)$. Предположим также, что система обладает потенциальной энергией, т.е. что существует такая функция $\Pi=\Pi(t, \quad x_i, \quad y_i, \quad z_i)$, что компоненты силы, действующей на i - ю точку, равны $F_{x\,i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad F_{y_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, \quad F_{z\,i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}$.

Выражение $L=T-\Pi$ называется функцией Лагранжа для рассматриваемой механической системы.

Пусть в момент времени t_0 система находится в некотором фиксированном положении. Эволюция рассматриваемой системы с течением времени описывается некоторой кривой в $3n$ мерном пространстве, определяемой уравнениями $x_i(t), \quad y_i(t), \quad z_i(t), \quad (i=1, \quad 2, \quad ..., \quad n)$. Среди всех кривых, проходящих через начальную точку, та, которая описывает фактическое движение рассматриваемой системы под влиянием действующих на нее сил, удовлетворяет следующему условию, называемому <u>принципом наименьшего действия:</u>

Движение системы за промежуток времени $(t_0, \quad t_1)$ описавается теми функциями $x_i(t), \quad y_i(t), \quad z_i(t), \quad (i=1, \quad 2, \quad ..., \quad n)$, которые дают минимум интегралу $\int_{t_0}^{t_1} L dt$. Сам интеграл называется действием.

Покажем, что этот принцип эквивалентен обычным уравнениям движения системы n точек. Если функционал достигает минимума, то должны удовлетворяться уравнения Эйлера $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=0, \\ \frac{\partial L}{\partial y_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}=0, \_\, i=1, \quad 2, \quad ..., \quad n. \\ \frac{\partial L}{\partial z_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}=0, \end{cases}$ Принимая во внимание, что потенциальная энергия $\Pi=\Pi(t, \quad x_i, \quad y_i, \quad z_i)$ зависит только от координат (и не зависит от скоростей), а кинетическая энергия – только от скоростей, получим $\begin{cases} -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}m_i\dot{x}_i=0, \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}-\frac{d}{dt}m_i\dot{y}_i=0, \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}-\frac{d}{dt}m_i\dot{z}_i=0. \end{cases}$ Так как производные потенциальной энергии это компоненты силы, действующей на i -ю точку, окончательно получим $\begin{cases} m_i\ddot{x}_i=F_{xi}, \\ m_i\ddot{y}_i=F_{yi}, \\ m_i\ddot{z}_i=F_{zi}. \end{cases}$.

А это и есть обычные уравнения движения для системы из n свободных материальных точек.

Принцип наименьщего действия справедлив и в том случае, когда на рассматриваемую систему наложены некоторые связи. В этом случае допустимые кривые, на которых рассматривается функционал, должны удовлетворять наложенным связям, т.е. применение принципа наименьшего действия к системе со связями, приводит к вариационной задаче на условный экстремум.

Рассмотрим, что представляют собой для интеграла-действия канонические переменные. Для нашего случая имеем $\begin{cases} p_x^i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i, \\ p_y^i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i, \\ p_z^i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i \end{cases}$, т.е. $p_x^i, \quad p_y^i, \quad p_z^i$ - представляют собой компоненты количества движения (импульса) i - ой частицы, и функция Гамильтона $H = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{x}_i p_x^i + \dot{y}_i p_y^i + \dot{z}_i p_z^i \right) - L = 2T - (T - \Pi) = T + \Pi$ - представляет собой полную энергию системы.

Закон сохранения энергии. Пусть рассматриваемая система консервативна, т.е. ее функция Лагранжа L не зависит явно от времени (это означает, что Π - не зависит от времени). В этом случае, как было показано выше, $H = const$ вдоль каждой экстремали, т.е. полная энергия консервативной системы остается при движении постоянной.

Задача об оптимальном выведении на орбиту спутника Земли.

Рассмотрим задачу об оптимальном по расходу топлива выведении спутника на заданную орбиту Земли. Введем следуюшие допущения.

1. Двигатель работает без выключения, тяга постоянна, ракета одноступенчатая. Тогда закон изменения массы ракеты можно записать: $m(t) = m_o - \beta \cdot t$, где m_0 - стартовая масса ракетоносителя, $\beta = \dfrac{P}{c}$ - секундный расход топлива, P - тяга двигателей, с – скорость истнчения топлива.
2. Движение будем рассматривать в плоскопараллельном гравитационном поле, т.е. $\bar{g} = const$.
3. Сопротивление воздуха отсутствует, траектория выведения плоская.

В этой постановке задачу оптимизации можно рассматривать, как задачу минимизации функционала $J = \int_{t_0}^{t_k} \beta \cdot dt$, при выполнении следующих дифференциальных условий (уравнения движения): $\begin{aligned} &\dot{x} = V_x, \\ &\dot{y} = V_y, \\ &\dot{V}_x = \frac{P}{m_0 - \beta \cdot t} \cos \upsilon, \\ &\dot{V}_y = \frac{P}{m_0 - \beta \cdot t} \sin \upsilon - g, \end{aligned}$. Вспомогательный функционал имеет вид

$$R = \int_{t_0}^{t_k} \left[\beta + \lambda_1(x) \cdot (\dot{x} - V_x) + \lambda_2(x) \cdot (\dot{y} - V_y) + \lambda_3(x) \cdot \left(\dot{V}_x - \frac{P}{m_0 - \beta \cdot t} \cos \upsilon \right) + \lambda_4(x) \cdot \left(\dot{V}_y - \frac{P}{m_0 - \beta \cdot t} \sin \upsilon + g \right) \right] dt$$

Система уравнений Эйлера для этой задачи $\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = 0 \\ -\lambda_1 - \dot{\lambda}_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \dot{\lambda}_4 = 0 \\ \lambda_3 \sin\upsilon - \lambda_4 \cos\upsilon = 0 \end{cases}$ - система однородных дифференциальных уравнений, решение которой: $\begin{cases} \lambda_1 = c_1 \\ \lambda_2 = c_2 \\ \lambda_3 = -c_1 t + c_3 \\ \lambda_4 = -c_2 t + c_4 \\ tg\,\upsilon = \dfrac{-c_2 t + c_4}{-c_1 t + c_3} \end{cases}$. Произвольные постоянные можно найти из граничных условий – параметров орбиты спутника..

2.13. Понятие о поле экстремалей. Уравнение Гамильтона-Якоби.

Рассмотрим функционал $J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ определенный на кривых, лежащих в некоторой области G, и предположим, что через любые две точки A и B из G проходит одна и только одна экстремаль функционала. Величину $S = J(y)$ где интеграл берется вдоль экстремали, соединяющей точки A и B из G назовем геодезическим расстоянием между этими точками. S представляет собой, очевидно, однозначную функцию координат точек A и B. Рассмотрим простейшие примеры.

1. Пусть функционал J означает длину кривой, тогда S — расстояние (в обычном смысле) между A и B.
2. Рассмотрим механическую систему с некоторой функцией Лагранжа L. Интеграл взятый вдоль экстремали, проходящей через заданные точки A и B представляет собой действие, отвечающее переходу рассматриваемой системы из одного состояния в другое.

Будем считать начальную точку A фиксированной, а точку B переменной. Тогда S будет представлять собой в области G однозначную функцию координат точки B. Выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $S(x, \ y_1, \ \ldots, \ y_n)$. Вычислим с этой целью ее частные производные Для этого найдем полный дифференциал функции ***S***, т. е. главную линейную часть приращения Но ΔS есть, по определению, разность $\Delta S = J(\tilde{\gamma}) - J(\gamma)$ где γ - экстремаль, идущая из A в точку $(x, \ y_1, \ \ldots, \ y_n)$, а $\tilde{\gamma}$ - экстремаль, идущая в точку $(x, \ y_1 + \delta y_1, \ \ldots, \ y_n + \delta y_n)$. Следовательно $dS = \delta J$, где за начальную кривую берется экстремаль γ, а начальная точка A остается неподвижной. Воспользовавшись формулой для вариации функционала в канонических переменных, получаем $dS(x, \ y_1, \ \ldots, \ y_n) = \delta J = \sum p_i \delta y_i - H\delta x$ (все величины берутся в точке B).

Следовательно, $\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial x} = -H, \\ \dfrac{\partial S}{\partial y_i} = p_i \end{cases}$ где под $p_i = p_i(x, \ y_1, \ \ldots, \ y_n)$ понимается выражение $\dfrac{\partial F}{\partial y_i'}$ в котором y_i' - значение производной $\dfrac{dy_i}{dx}$ в точке B для идущей из A в B экстремали, и $H = H(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\ p_1(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n),\ \ldots,\ p_n(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n))$.

Получаем, что S -как функция от координат точки B удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial S}{\partial x} + H\left(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\ \dfrac{\partial S}{\partial y_1},\ \ldots,\ \dfrac{\partial S}{\partial y_n}\right) = 0$. Это уравнение в частных производных (вообще говоря, нелинейное) называется *уравнением Гамильтона — Якоби.*

Канонические уравнения Эйлера представляют собой характеристическую систему для уравнения Гамильтона – Якоби.

Выясним связь между решениями уравнения Гамильтона - Якоби и первыми интегралами системы уравнений Эйлера.

<u>Теорема 1.</u> Пусть $S = S(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n, \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k)$ - некоторое решение уравнений Гамильтона - Якоби, зависящее от параметров $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k$. Тогда каждая из производных $\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i},\quad i = 1,\ \ldots,\ k$ является интегралом системы уравнений Эйлера $\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{dp_i}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i} \end{cases}$, т.е. $\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i} = const$ вдоль каждой экстремали.

Доказательство. Нам нужно показать, что вдоль каждой экстремали $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i}\right) = 0$.

Вычислим эту производную. Имеем $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i}\right) = \dfrac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha_i} + \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial \alpha_i} \cdot \dfrac{dy_j}{dx}$ (1). Далее, подставив $S = S(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n, \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k)$ в уравнение Гамильтона - Якоби и продифференцировав полученное равенство по α_i, находим $\dfrac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha_i} = -\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \dfrac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial \alpha_i}$.

Подставляя это выражение в (1) получаем

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i}\right) = -\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \dfrac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial \alpha_i} + \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial \alpha_i} \cdot \dfrac{dy_j}{dx} = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial \alpha_i}\left(\dfrac{dy_j}{dx} - \dfrac{\partial H}{\partial p_j}\right) = 0$, так как $\dfrac{dy_j}{dx} - \dfrac{\partial H}{\partial p_j} = 0$ вдоль экстремалей. Теорема доказана.

<u>Теорема 2 (Якоби).</u> Пусть $S = S(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n, \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k)$ - полный интеграл уравнения Гамильтона - Якоби $\dfrac{\partial S}{\partial x} + H\left(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\ \dfrac{\partial S}{\partial y_1},\ \ldots,\ \dfrac{\partial S}{\partial y_n}\right) = 0$ и пусть детерминант матрицы $matr\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial y_j}\right)$ отличен от нуля. Пусть, наконец, $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n$ - n произвольных постоянных. Тогда функции $y_i = y_i(x,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_n)$ определяемые соотношениями $\dfrac{\partial S(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)}{\partial \alpha_i} = \beta_i$ вместе с функциями

$p_i = \dfrac{\partial S(x, \ y_k(x, \ \alpha_j, \ \beta_j), \ \alpha_k)}{\partial y_i}$ образуют общее решение канонической системы уравнений Эйлера $\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{dp_i}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i} \end{cases}$.

Доказательство. Если нам известен полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби $S = S(x, \ y_1, \ \ldots, \ y_n, \alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_k)$, т. е. его решение зависящее от n параметров, то мы можем согласно сказанному выше написать n первых интегралов $\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$ (2) канонической системы уравнений Эйлера, которых, вообще говоря, достаточно для получения общего решения канонической системы. Действительно, пусть эти первые интегралы независимы, т. е. детерминант матрицы, составленной из производных $matr\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial y_j}\right)$, отличен от нуля. Тогда из соотношений (2) мы можем определить функции $y_i = y_i(x, \ \alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n, \ \beta_1, \ \ldots, \ \beta_n)$ положив затем $p_i = \dfrac{\partial S(x, \ y_k(x, \ \alpha_j, \ \beta_j), \ \alpha_k)}{\partial y_i}$ мы получим общее решение канонической системы $\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{dp_i}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i} \end{cases}$.

Что и требовалось доказать.

2.14. Вторая вариация функционала. Формула для второй вариации в задаче с закрепленными концами. Необходимые условия Лежандра и Якоби.

Билинейным функционалом называется функционал $J(x, \ y)$, *если* $\begin{cases} J(\alpha x_1 + \beta x_2, \ y) = \alpha J(x_1, \ y) + \beta J(x_2, \ y), \\ J(x, \ \gamma y_1 + \delta y_2) = \gamma J(x, \ y_1) + \delta J(x, \ y_2) \end{cases}$. *Полагая в билинейном функционале* $y = x$, *получаем выражение, называемое квадратичным функционалом.*

☺ Выражение $\int\limits_a^b x(t)y(t)dt$ представляет собой билинейный функционал, а $\int\limits_a^b x^2(t)dt$ - квадратичный функционал в пространстве $C[a, \ b]$.

☺ Выражение $\int\limits_a^b \left(A(t)x^2(t) + B(t)x(t)x'(t) + C(t)x'^2(t)\right)dt$ представляет собой квадратичный функционал в пространстве $D^1[a, \ b]$.

Второй вариацией $\delta^2 J(\delta y)$ *функционала* $J(y)$ *будем называть квадратичный функционал* $L_2(\delta y)$ *в разложении* $\Delta J = J(y + \delta y) - J(y) = L_1(\delta y) + L_2(\delta y) + \beta\|\delta y\|^2$, *где* $L_1(\delta y) = \delta J$ *- линейный функционал (вариация функционала), а* $\beta \to 0$ *при* $\|\delta y\| \to 0$.

Теорема 1 (второе необходимое условие экстремума функционала). Для того, чтобы функционал $J(y)$ на кривой $y_0(x)$ имел минимум (максимум), необходимо, чтобы при $y = y_0(x)$ выполнялось условие $\delta^2 J(\delta y) \ge 0, \quad (\le 0)$.

Доказательство. В выражении $\Delta J = \delta J(\delta y) + \delta^2 J(\delta y) + \beta\|\delta y\|^2$ $\delta J(\delta y) = 0$ в точке экстремума, поэтому при достаточно малом $\|\delta y\|$ знак ΔJ определяется знаком $\delta^2 J(\delta y)$. Предположим (от противного), что $\delta^2 J(\delta y_0) < 0$ при некотором δy_0. Тогда при любом $\varepsilon \ne 0$ имеем $\delta^2 J(\varepsilon \cdot \delta y_0) = \varepsilon^2 \cdot \delta^2 J(\delta y_0) < 0$, и следовательно, $\Delta J = J(y_0 + \varepsilon \cdot \delta y_0) - J(y_0) < 0$ при достаточно малом ε, т.е. при $y = y_0(x)$ минимума нет (противоречие). Что и требовалось доказать.

Найдем явное выражение второй вариации для функционала $J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ (1), определенного для кривых $y(x) \in D^2_{[a,\ b]}$ с закрепленными концами $y(a) = A$, $y(b) = B$. Дадим функции $y(x) \in D^2_{[a,\ b]}$ приращение $\delta y(x)$, удовлетворяющее условиям $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. Используя формулу Тейлора представим приращение функционала в виде

$$\Delta J = J(y + \delta y) - J(y) = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \delta y' \right) dx + \frac{1}{2} \int\limits_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot \delta y \cdot \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \delta y'^2 \right) dx + \varepsilon$$

где $\varepsilon \to 0$ весконечно малая высшего порядка по сравнению с $\|\delta y\|^2$. Первое интегральное слагаемое в этом выражении – первая вариация функционала, а второе – квадратичное относительно $\delta y(x)$ - представляет собой вторую вариацию функционала $\delta^2 J$. Таким образом для функционала из простейшей задачи имеем

$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int\limits_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot \delta y \cdot \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \delta y'^2 \right) dx$. Приведем это выражение к более удобному виду. Интегрируя по частям и учитывая, что $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, получаем

$\int\limits_a^b 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot \delta y \cdot \delta y' dx = -\int\limits_a^b \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \delta y^2 dx$. Окончательно для второй вариации функционала имеем $\delta^2 J = \frac{1}{2} \int\limits_a^b \left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \cdot \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \delta y'^2 \right) dx$.

Замечание. Если $y(x)$ - экстремаль и $y(x) + \delta y(x)$ - некоторая допустимая кривая, то приращение функционала можно записать в виде

$\Delta J = \frac{1}{2} \int\limits_a^b \left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \cdot \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \delta y'^2 \right) dx + \int\limits_a^b \left(\xi \cdot \delta y^2 + \eta \cdot \delta y'^2 \right) dx$, где $|\xi| \to 0$ и $|\eta| \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$.

Теорема 2 (необходимое условие Лежандра). Для того, чтобы функционал $J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ достигал на кривой $y(x) \in D^2_{[a,\ b]}$ с закрепленными концами

$y(a)=A$, $y(b)=B$ минимума, необходимо, чтобы вдоль этой кривой выполнялось условие $\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y'} \geq 0$.

Доказательство. Согластно второму необходимому условию для достижения минимума функционала его вторая вариация должна быть неотрицательна $\delta^2 J(\delta y) \geq 0$, то есть $\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \cdot \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \delta y'^2 \right) dx \geq 0$ при любых функциях $\delta y(x)$, удовлетворяющий условиям $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$.

Предположим, что необходимое условие Лежандра не выполнено, то есть в некоторой точке x_0 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right|_{x=x_0} < 0$. Пусть $\delta y(x) = \begin{cases} \sqrt{\sigma}\left(1 + \frac{x - x_0}{\sigma}\right), & x_0 - \sigma \leq x \leq x_0 \\ \sqrt{\sigma}\left(1 - \frac{x - x_0}{\sigma}\right), & x_0 \leq x \leq x_0 + \sigma \\ 0, & x \notin [x_0 - \sigma, \quad x_0 + \sigma] \end{cases}$, $(\delta y(x))^2 \leq \sigma$,

$(\delta y'(x))^2 = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}, & x_0 - \sigma \leq x \leq x_0 + \sigma \\ 0, & x \notin [x_0 - \sigma, \quad x_0 + \sigma] \end{cases}$. Если при таком выборе $\delta y(x)$ положить $\sigma \to 0$, то первое слагаемое в $\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \cdot \delta y^2 \cdot dx + \frac{1}{2}\int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \delta y'^2 \cdot dx$ будет стремиться к нулю, а второе к $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right|_{x=x_0}$. Но так как по предположению $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right|_{x=x_0} < 0$, то получим, что при указанных выше $\delta y(x)$ и достаточно малом σ $\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \cdot \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \delta y'^2 \right) dx < 0$. Получили противоречие. Следовательно, наше предположение неверно и теорема доказана.

Как было показано выше

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \cdot \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \delta y'^2 \right) dx = \int_a^b \left(Q \cdot \delta y^2 + P \cdot \delta y'^2 \right) \cdot dx .$$

Уравнение Эйлера $Q \cdot \delta y - \frac{d}{dx}(P \cdot \delta y') = 0$ *квадратичного функционала* $\int_a^b \left(Q \cdot \delta y^2 + P \cdot \delta y'^2 \right) \cdot dx$ *(2) называется уравнением Якоби исходного функционала.*

Рассмотрим квадратичный функционал $\int_a^b \left(Q \cdot \delta y^2 + P \cdot \delta y'^2 \right) \cdot dx$ на множестве функций, удовлетворяющих условиям $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. В теореме 2 было показано, что для неотрицательности такого квадраничного функционала необходимо условие

$P(x) \geq 0, \quad (a \leq x \leq b)$. Запишем уравнение Эйлера для этого функционала

$$Q \cdot \delta y - \frac{d}{dx}(P \cdot \delta y') = 0 \quad (3)$$

Точка $\tilde{x}$ называется сопряженной с точкой $x = a$, если уравнение (3) имеет решение, не равное нулю тождественно, обращающееся в нуль при $x = a$ и при $x = \tilde{x}$.

Теорема 3. Для того, чтобы квадратичный функционал $\int_a^b \left(Q \cdot \delta y^2 + P \cdot \delta y'^2\right) \cdot dx$ при $P(x) > 0, \quad (a \leq x \leq b)$ был положительно определен на отрезке $[a, \quad b]$ для всех $\delta y(x)$, таких, что $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы внутренние точки отрезка не содержал точек, сопряженных с $x = a$.

Без доказательства.

Точка $\tilde{x}$ называется сопряженной с точкой $x = a$ по отнощению к функционалу $J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$, если она сопряжена с $x = a$ по отношению к квадратичному функционалу $\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right) \cdot \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \delta y'^2\right) dx = \int_a^b \left(Q \cdot \delta y^2 + P \cdot \delta y'^2\right) \cdot dx$.

Теорема 4 (необходимое условие Якоби). Для того, чтобы экстремаль $y = y(x)$ доставляла минимум функционалу $J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$, необходимо, чтобы интервал $(a, \quad b)$ не содержал точек, сопряженных с $x = a$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1.

2.15. Сводка необходимых и достаточных условий слабого экстремума.

Необходимые условия. Если вдоль кривой $y = y(x)$ функционал $J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ достигает экстремума, то:

1. Кривая $y = y(x)$ является экстремалью, т.е. удовлетворяет уравнению Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$.
2. Вдоль этой кривой выполняются условия Лежандра $\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} \geq 0$ в случае минимума и $\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} \leq 0$ в случае максимума.
3. Интервал $(a, \quad b)$ не содержит точек, сопряженных с a (условие Якоби).

Достаточные условия. Для того, чтобы кривая $y = y(x)$ доставляла функционалу $J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ слабый минимум достаточно, чтобы выполнялась совокупность условий (все три сразу):

1. Данная кривая является экстремалью, т.е. удовлетворяет уравнению Эйлера.

2. Вдоль кривой выполняется усиленное условие Лежандра $\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} > 0$ (в случае минимума).
3. Отрезок $[a, \quad b]$ не содержит точек, сопряженных с точкой $x = a$ (усиленное условие Якоби).

Литература

1. Ахнезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению.-М., Гостехиздат, 1955.
2. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление.-М., Наука, 1969.
3. Краснов Л.М., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариацианное исчисление.-М., Наука, 1973.
4. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление и интергальные уравнения.- М., Наука, 1965
5. Иглин С.П. Вариационное исчисление с применением MATLAB.- Украина, Харьков, Издательство национального технического университета, 2000.
6. Лабораторный практикум по методам оптимизации. А.Г.Коваленко, И.А.Власова, А.Ф.Федечев Самара, Издательство Самарского государственного университета, 1998.