

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

ИЗУЧЕНИЕ УПРУГОГО УДАРА ШАРОВ

*Методические указания
к лабораторной работе №1-8м (2 вариант)*

Самара 2004

Составители: *Т.В.Кривко.*

УДК 535.011

Изучение упругого удара шаров: Метод. указания к лаб. раб. №1-8м (2 вариант)/Самар. гос. аэрокосм.ун-т. Сост. *Т.В.Кривко.* Самара, 2004. 15 с.

Методические указания к лабораторной работе содержат краткие сведения о законах упругого удара тел и их использование для проверки законов сохранения импульса и энергии, определение коэффициента восстановления энергии и средней силы удара.

Приводятся описание экспериментальной установки; порядок выполнения лабораторной работы; методика обработки полученных результатов; перечень контрольных вопросов, необходимых для самостоятельной подготовки студентов; список рекомендуемой литературы.

Методические указания рекомендованы студентам дневных и вечерних отделений всех факультетов, а также могут быть использованы в аэрокосмическом лицее.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П.Королева.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор *В.В.Котляр*

ИЗУЧЕНИЕ УПРУГОГО УДАРА ШАРОВ

1. ВВОДНАЯ ЧАСТЬ

Настоящие методические указания (МУ) устанавливают методику выполнения измерений с помощью прибора ФПМ-08:

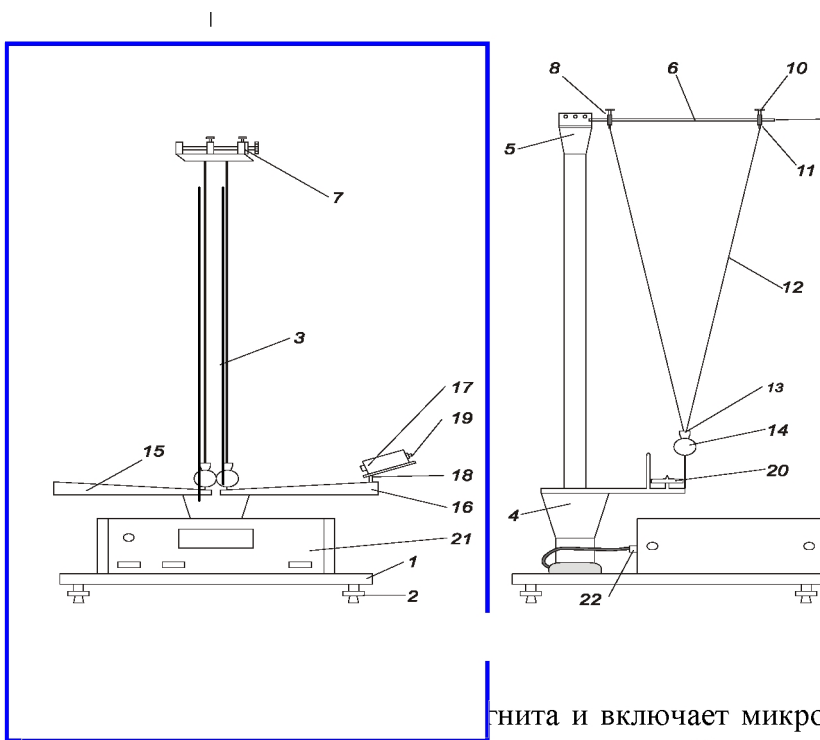
1. Средней силы соударения двух шаров с относительной погрешностью не более 3%;
 2. Суммы импульсов шаров –
 - до столкновения с относительной погрешностью не более 1%;
 - после столкновения с относительной погрешностью не более 5 %;
 - сравнения средних сумм импульсов шаров до и после столкновения для проверки закона сохранения импульса с относительной погрешностью не более 5 %;
- а также, методику изучения центрального соударения двух шаров и определения коэффициентов восстановления кинетической энергии и относительной скорости.

В процессе изучения МУ и выполнения измерений должны быть решены следующие задачи:

1. Изучены основные закономерности упругого и неупругого ударов тел; законы сохранения импульса и энергии; применение этих законов для получения формул измерений;
2. Определена средняя сила соударения двух шаров;
3. Выполнена проверка закона сохранения импульса;
4. Определены коэффициенты восстановления относительной скорости и энергии;
5. Изучены зависимости времени и средней силы соударения от начального угла отклонения одного из шаров;
6. Определены погрешности результатов измерений по правилам обработки прямых и косвенных измерений;
7. Составлен письменный отчет, включающий в себя название работы; фамилию и номер группы исполнителя; наименование средств измерений; систематизированные по измерительным задачам результаты экспериментов: сводные таблицы и графики; оценку погрешностей результатов измерений; окончательные результаты с учетом погрешности и общие выводы по работе.

2. СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

При выполнении измерений используется прибор FPM-08, общий вид которого представлен на рис.1. Основную часть установки представляют два металлических шара, подвешенных с помощью двойных токопроводящих нитей. Шары навинчены на стержни с указателями, которые служат для отсчета углов их отклонения по левой и правой шкалам 15.



ложение основания прибора.

К основанию прибора прикреплен микросекундомер, который предназначен для измерения времени удара шаров. На лицевой панели микросекундомера находятся следующие клавиши:

1. «Сеть» - выключатель сети. Нажатие этой клавиши вызывает включение питающего напряжения.
2. «Сброс» - вызывает при нажатии обнуление

Рис.1. Общий вид прибора FPM-08

3. «пуск» - отключает

питание и включает микросекундомер. После нажатия этой клавиши отклоненный шар приходит в движение. При соприкосновении шаров происходит замыкание цепи микросекундомера и производится отсчет времени удара. Время удара высвечивается на индикаторной панели.

3. ОПИСАНИЕ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН И ПРОВЕРЯЕМЫХ ЗАКОНОВ

3.1.Центральный удар, закон сохранения импульса, средняя сила соударения двух тел

Под соударением тел в механике понимается такое их взаимодействие, которое длится очень короткое время, много меньшее времени наблюдения. В процессе удара возникают кратковременные ударные силы взаимодействия между сталкивающимися телами, причем эти силы во много раз превосходят все внешние силы, действующие на тела. Поэтому систему соударяющихся тел во время удара можно считать замкнутой и применять к ней закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{U}_1 + m_2 \vec{U}_2, \quad (1)$$

где m_1 и m_2 - массы тел; \vec{V}_1 и \vec{V}_2 - их скорости до удара; \vec{U}_1 и \vec{U}_2 - их скорости после удара. Это утверждение подлежит экспериментальной проверке в данной работе.

Мерой механического взаимодействия тел при ударе служит импульс ударной силы \vec{F} за время τ

$$\int_0^{\tau} \vec{F} d\tau = \vec{F}_{cp} \cdot \tau, \quad (2)$$

где \vec{F}_{cp} - средняя сила удара.

Согласно второму закону Ньютона импульс ударной силы равен изменению импульса одного из сталкивающихся тел за время удара

$$\vec{F}_{cp} \cdot \tau = m_2 (\vec{U}_2 - \vec{V}_2) = -m_1 (\vec{U}_1 - \vec{V}_1). \quad (3)$$

Измеряя время удара τ и изменение импульса одного из сталкивающихся тел, можно определить среднюю силу удара по формуле:

$$\vec{F}_{cp} = m_2(\vec{U}_2 - \vec{V}_2) / \tau = m_1(\vec{V}_1 - \vec{U}_1) / \tau. \quad (4)$$

Общая нормаль к поверхности соударяющихся тел называется *линией удара*. Удар называется *прямым*, если перед ударом скорости центров масс соударяющихся тел параллельны линии удара. Удар называется *центральный*, если центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара.

3.2. Абсолютно упругий удар

В зависимости от упругих свойств тел соударения могут протекать различным образом. Принято выделять два предельных случая: *абсолютно упругий* и *абсолютно неупругий* удары.

Абсолютно упругим ударом называется столкновение тел, в результате которого их внутренние энергии не меняются, т.е. механическая энергия соударяющихся тел не преобразуется в другие, немеханические виды энергии. Кинетическая энергия сталкивающихся тел полностью или частично переходит в потенциальную энергию упругой деформации, которая затем опять переходит в кинетическую энергию тел после удара.

В случае *абсолютно упругого удара* выполняются:

закон сохранения механической энергии

$$\frac{m_1 \vec{V}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{V}_2^2}{2} = \frac{m_1 \vec{U}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{U}_2^2}{2} \quad (5)$$

и закон сохранения импульса (1).

Дальнейшее рассмотрение проведем в рамках следующей модели:

- удар центральный;
- движение одномерное вдоль оси OX (рис.2), т.е. далее обозначения сил, скоростей и импульсов подразумевают их проекции на ось OX.

Тогда символы векторов можно опустить и все геометрические суммы в (1) и (5) заменить алгебраическими:

$$m_1 (V_1^2 - U_1^2) = m_2 (U_2^2 - V_2^2), \quad (6)$$

$$m_1 (V_1 - U_1) = m_2 (U_2 - V_2). \quad (7)$$

Разделив почленно первое из этих уравнений на второе, получаем:

$$V_1 + U_1 = V_2 + U_2. \quad (8)$$

Решая уравнения (7) и (8), получим для скоростей U_1 и U_2 тел после удара следующие выражения

$$U_1 = \frac{2m_2 V_2 + (m_1 - m_2) V_1}{m_1 + m_2}, \quad (9)$$

$$U_2 = \frac{2m_1 V_1 + (m_2 - m_1) V_2}{m_1 + m_2}. \quad (10)$$

При упругом центральном ударе двух тел одинаковой массы $m_1 = m_2$ тела просто обмениваются скоростями $U_1 = V_2$ и $U_2 = V_1$.

3.3. Абсолютно неупругий удар

Прямой центральный удар называется *абсолютно неупругим*, если после удара тела движутся как единое твердое тело в произвольной лабораторной системе отсчета, т.е. это удар, при котором потенциальной энергии упругой деформации не возникает.

При *абсолютно неупругом ударе* выполняются закон сохранения импульса (1) и закон сохранения *полной* энергии системы - механической и внутренней. Закон сохранения механической энергии не выполняется.

Для определения общей скорости тел после удара достаточно одного уравнения - закона сохранения импульса (1):

$$m_1V_1 + m_2V_2 = (m_1 + m_2)U, \quad (11)$$

$$U = U_1 = U_2 = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2}. \quad (12)$$

3.4. Коэффициент восстановления относительной скорости при соударении двух тел

При соударении реальных тел всегда имеют место и упругие, и остаточные деформации, и поэтому удар будет *частично неупругим*. При таких столкновениях часть кинетической энергии тел переходит в потенциальную энергию упругой деформации, часть – во внутреннюю энергию тел, а часть механической энергии превращается в механическую энергию звуковой волны, которую мы слышим во время удара.

При абсолютно упругом ударе, согласно (8), относительная скорость шаров после удара равна по величине и направлена противоположно их относительной скорости до удара:

$$U_1 - U_2 = -(V_1 - V_2). \quad (13)$$

При абсолютно неупругом ударе эта относительная скорость после удара равна нулю, так как

$$U_1 = U_2 = U.$$

При частично неупругом ударе относительная скорость после удара равна некоторой доле относительной скорости до удара:

$$U_1 - U_2 = -\varepsilon \cdot (V_1 - V_2), \quad (14)$$

где ε ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) есть *коэффициент восстановления относительной скорости*.

При ударе стальных шаров $\varepsilon = 0,56$; для шаров из слоновой кости $\varepsilon = 0,89$; для свинца ε близок к нулю.

3.5. Коэффициент восстановления энергии при ударе

Рассеяние механической энергии тел при ударе характеризуется также коэффициентом восстановления энергии K . Он определяется как отношение суммарной кинетической энергии тел после удара T' к суммарной кинетической энергии тел до удара T

$$K = \frac{T'}{T} = \frac{m_1 U_1^2 + m_2 U_2^2}{m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2}. \quad (15)$$

Как следует из формулы (15), коэффициент восстановления энергии K зависит от выбора системы отсчета.

Наиболее наглядный смысл имеет коэффициент восстановления энергии K_c , вычисленный в системе центра инерции сталкивающихся тел.

При абсолютно упругом ударе $K_c = 1$, при абсолютно неупругом ударе $K_c = 0$, в реальных случаях $0 < K_c < 1$.

Для того, чтобы выразить коэффициент восстановления энергии K_c в системе центра инерции, нужно воспользоваться формулой преобразования кинетической энергии при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую

$$T_c = T - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot V_c^2, \quad (16)$$

где T_c – суммарная кинетическая энергия сталкивающихся тел в системе их центра инерции, T – их кинетическая энергия в лабораторной системе отсчета, V_c – скорость центра инерции системы относительно лабораторной системы отсчета

$$V_c = \frac{m_1 U_1 + m_2 U_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}. \quad (17)$$

Подставляя выражения (16) и (17) в формулу (15), получим после преобразований:

$$K_c = \frac{T'}{T} = \frac{(U_2 - U_1)^2}{(V_2 - V_1)^2}. \quad (18)$$

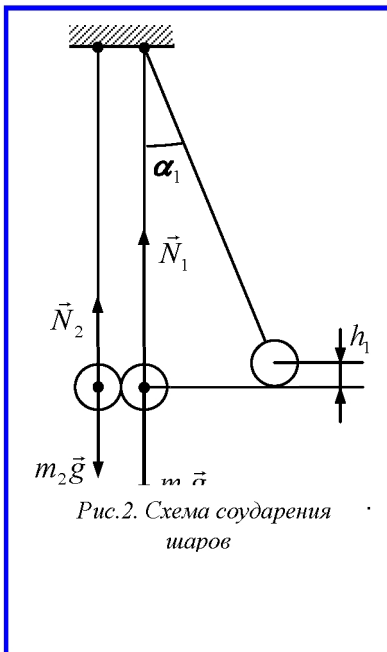
Сравнивая (18) с (14), приходим к выводу, что коэффициент восстановления энергии в системе центра инерции равен квадрату коэффициента восстановления относительной скорости:

$$K_c = \varepsilon^2. \quad (19)$$

4. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

4.1. Экспериментальное определение скоростей шаров до и после удара

В настоящей работе рассматривается удар стальных шаров равных масс, подвешенных на нитях, т.е. $m_1 = m_2 = m$.



Для осуществления удара один шар (правый) отводится из положения равновесия на угол α_1 и отпускается. Второй шар (левый) до удара покоится: $V_2 = 0$. Скорость V_1 первого шара к моменту удара можно найти из закона сохранения энергии для первого шара:

$$m_1 \cdot g \cdot h_1 = \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2}, \quad (20)$$

где h_1 - высота подъема центра инерции шара при его отклонении из положения равновесия на угол α_1 .

Высота h_1 выражается через угол α_1 и через расстояние L от точки подвеса шара до его центра инерции (рис.2) следующим образом:

$$h_1 = L \cdot (1 - \cos \alpha_1) = 2 \cdot L \cdot \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}. \quad (21)$$

Из (20) и (21) имеем:

$$2 \cdot \sqrt{g \cdot L} \cdot \sin \frac{\alpha_1}{2}. \quad (22)$$

Аналогично, величины скоростей U_1 и U_2 шаров после удара выражаются через углы β_1 и β_2 их отклонения из положения равновесия по формулам:

$$U_1 = 2 \cdot \sqrt{g \cdot L} \cdot \sin \frac{\beta_1}{2}, \quad (23)$$

$$U_2 = 2 \cdot \sqrt{g \cdot L} \cdot \sin \frac{\beta_2}{2}. \quad (24)$$

4.2. Определение средней силы взаимодействия шаров при центральном ударе

Учитывая, что скорости шаров U_1 и U_2 после удара направлены в одну сторону, скорость второго шара до удара $V_2 = 0$ и углы отклонения шаров в опытах малы из формулы (4) получим:

$$F_{cp} = \frac{m_2 U_2}{\tau} = \frac{2m_2 \sqrt{gL}}{\tau} \sin \frac{\beta_2}{2} = \frac{2m \sqrt{gL}}{\tau} \sin \frac{\beta_2}{2} \approx \frac{m \beta_2 \sqrt{gL}}{\tau}. \quad (25)$$

4.3. Экспериментальная проверка закона сохранения импульса

Суммарные импульсы шаров P и P' до и после удара запишутся в виде (при равенстве масс шаров):

$$P = m_1 V_1 = 2m \sqrt{gL} \cdot \sin \frac{\alpha_1}{2}, \quad (26)$$

$$P' = m_1 U_1 + m_2 U_2 = 2m \sqrt{gL} \left(\sin \frac{\beta_1}{2} + \sin \frac{\beta_2}{2} \right). \quad (27)$$

Проверка закона сохранения импульса (1) сводится в данном случае к проверке следующего соотношения для скоростей шаров до и после удара:

$$V_1 = U_2 + U_1, \quad (28)$$

или через измеряемые в эксперименте углы отклонения шаров

$$\sin \frac{\alpha_1}{2} = \sin \frac{\beta_2}{2} + \sin \frac{\beta_1}{2} \quad (29)$$

Углы отклонения шаров в эксперименте не превышают 12° . Представим синусы малых углов двумя первыми членами разложения в ряд Тэйлора:

$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$. В опытах величина $\frac{x^3}{6} \leq 0,0014 \text{ рад}$. Инструментальная погрешность измерения углов составляет величину порядка $0,002$ рад. Отсюда следует, что можно пренебречь вторым членом разложения и привести формулу измерений (29) к простейшему виду:

$$\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2. \quad (30)$$

Методика экспериментальной проверки закона сохранения импульса в нашем простейшем случае равенства масс шаров и на данной лабораторной установке заключается в следующем.

Выдвигается гипотеза о том, что расхождение в значениях P и P' случайно и далее проверяем эту гипотезу методами математической статистики. Для этого:

1. Проводится серия равноточных измерений величин β_1 и β_2 при постоянном наибольшем значении α_1 и находятся средние значения углов $\langle \beta_1 \rangle$, $\langle \beta_2 \rangle$ и их дисперсии:

$$S_{\langle \beta_1 \rangle}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\beta_{1i} - \langle \beta_1 \rangle)^2}{n(n-1)}, \quad S_{\langle \beta_2 \rangle}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\beta_{2i} - \langle \beta_2 \rangle)^2}{n(n-1)}$$

по правилам обработки результатов прямых многократных измерений.

2. По результатам измерений вычисляется среднее значение случайной величины:

$$\langle \beta \rangle = \langle \beta_1 \rangle + \langle \beta_2 \rangle. \quad (31)$$

3. Вычисляется дисперсия $S_{\langle \beta \rangle}^2$ по формуле:

$$S_{\langle \beta \rangle}^2 = S_{\langle \beta_1 \rangle}^2 + S_{\langle \beta_2 \rangle}^2. \quad (32)$$

4. Вычисляется дисперсия инструментальной погрешности величины

$\langle \alpha \rangle = \alpha_1$:

$$S_{\langle \alpha \rangle}^2 = \frac{\Theta_\alpha^2}{3}, \quad (33)$$

где $\Theta_\alpha = 0,002 \text{ рад}$ - инструментальная погрешность α .

5. Находится суммарное среднее квадратическое отклонение (СКО) по формуле:

$$S = \sqrt{S_{\langle \beta \rangle}^2 + S_{\langle \alpha \rangle}^2} \quad (34)$$

6. Для заданного уровня доверительной вероятности $P=0,95$ и числа ν степеней свободы, определяемых как: $\nu = 2(n-1)$, - находится по таблицам квантилей распределения Стьюдента коэффициент $t_{(1+P)/2, \nu}$, который для $n=5$ равен $t_{(1+P)/2, \nu} = 2,306$.

7. Гипотеза о равенстве величин $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle$ принимается с доверительной вероятностью $P = 0,95$, если:

$$|\langle \alpha \rangle - \langle \beta \rangle| \leq t_{(1+P)/2, \nu} \cdot S \quad (35)$$

4.4. Определение коэффициентов восстановления энергии и относительной скорости

Учитывая, что $m_1 = m_2 = m$, а также, что скорости шаров U_1 и U_2 после удара направлены в одну сторону, а скорость второго шара до удара $V_2 = 0$ из формулы (14) получим формулу измерений для ε :

$$\varepsilon = \frac{U_2 - U_1}{V_1} = \frac{\sin \frac{\beta_2}{2} - \sin \frac{\beta_1}{2}}{\sin \frac{\alpha_1}{2}} \approx \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1}. \quad (36)$$

Коэффициент восстановления энергии в системе центра инерции определяется по формуле (19). Полученные числовые значения коэффициентов позволяют сделать качественный вывод о характере удара и о том, сохраняется ли механическая энергия системы шаров во время столкновения.

5. ПОДГОТОВКА ПРИБОРА К ИЗМЕРЕНИЯМ

1. Ознакомьтесь с внешним видом лабораторной установки и приведите, при необходимости, колонну прибора 3 в вертикальное положение с помощью винтов основания 2.
2. Установите с помощью винта 7 шары так, чтобы они соприкасались друг с другом. Убедитесь, что нити подвеса вертикальны и риски на шарах находятся на одном уровне. Убедитесь, что указатель угла правого шара в состоянии покоя, соответствует нулевому отсчету.
3. Определите начальное положение левого шара O_2 (с точностью до 30 минут) по левой шкале и запишите в таблицу 1.
4. Занесите в таблицу 1 данные установки: массу шаров m и длину нити подвеса L (см. на лабораторном столе).
5. Включите сетевой шнур установки в сеть питания и нажмите клавишу "Сеть". При этом должна засветиться индикаторная панель.
6. Отведите правый шар до его соприкосновения с электромагнитом, оставляя левый шар неподвижным в положении равновесия.
7. Отрегулируйте положение электромагнита таким образом, чтобы его ось совпала с рискной подведенного к нему шара и он правильно ориентировал качение шара в плоскости шкалы (но не касался указателем шкалы). Следите за выполнением этого пункта при выполнении каждого опыта.
8. Отрегулируйте с помощью винта 19 силу притяжения так, чтобы шар удерживался в отклоненном положении.
9. Нажмите клавишу «Сброс». При этом на индикаторной панели должны высветиться нули.

Таблица 1.

Данные лабораторной установки

Начальное положение левого шара O_2 , град	Масса шара m , кг	Длина нити подвеса L , м

6. ВЫПОЛНЕНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

6.1. Экспериментальное определение времени и средней силы взаимодействия шаров при упругом центральном ударе

1. Установите электромагнит так, чтобы начальное отклонение правого шара составило $\alpha_1 = 12^\circ$. Занесите значение угла в радианах в таблицу 2.
2. Нажмите клавишу «Пуск». После того как произойдет соударение шаров, отождмите клавишу «Пуск». Прочитайте время соударения шаров τ на индикаторной панели и запишите результат измерения в таблицу 2. Нажмите клавишу «Сброс» для обнуления показаний микросекундомера.
3. Повторите соударение шаров для того же значения угла α_1 начального отклонения правого шара. Снимите отсчет N_2 с левой шкалы для максимального отклонения левого шара после удара. Определите угол отклонения β_2 левого шара после удара по формуле: $\beta_2 = N_2 - O_2$. Значение

шаров до удара $\langle \alpha \rangle = \alpha_1$, рад	$S^2_{\langle \alpha \rangle}$, рад ²	$\langle \beta \rangle$, рад	$S^2_{\langle \beta \rangle}$, рад ²	отклонение S , рад

6.3. Определение коэффициентов восстановления энергии и относительной скорости

1. По данным $\alpha_1, \langle \beta_1 \rangle, \langle \beta_2 \rangle$ таблицы 2 и формуле (36) определите среднее значение коэффициента восстановления относительной скорости ε .
2. Вычислите из соотношения (19) значение коэффициента восстановления механической энергии.
3. Сделайте вывод о характере удара и о том, выполняется ли закон сохранения механической энергии системы шаров при столкновении.

6.4. Экспериментальное изучение зависимостей времени удара и средней силы взаимодействия от значения начального угла отклонения шара (выполняется по указанию преподавателя)

1. Повторите серии пяти измерений β_1, β_2 и τ для двух других положений электромагнита, меняя значение угла α_1 на $1-2^\circ$ в пределах от 8° до 12° . Все результаты измерений запишите в таблицу 4 (аналогичную таблице 2).
2. В осях координат $y = \tau$ и $x = \alpha_1$ нанесите экспериментальные точки с указанием доверительных интервалов и сделайте вывод о характере изменения среднего времени соударения $\langle \tau \rangle = f(\alpha_1)$ от значения начального угла отклонения правого шара.
3. Аналогично, в осях координат $y = \langle F_{cp} \rangle$ и $x = \alpha_1$ нанесите экспериментальные точки с указанием доверительных интервалов и сделайте вывод о характере изменения средней силы удара $F_{cp} = \varphi(\alpha_1)$ от значения начального угла отклонения правого шара.

7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте условия, при которых сохраняется импульс системы. Что такое внешние и внутренние силы?
2. Что такое удар упругий и неупругий? Какие законы справедливы при абсолютно упругом и абсолютно неупругом ударах?
3. В каких направлениях будут двигаться шары после абсолютно упругого удара, если: а) $m_1 = m_2$; б) $m_1 > m_2$; в) $m_1 < m_2$?
4. Как движутся тела после абсолютно неупругого удара в системе их центра инерции и в лабораторной системе отсчета?
5. Выведите расчётные формулы для импульса и кинетической энергии при упругом и неупругом соударении шаров.
6. Выведите расчётную формулу для определения средней силы взаимодействия при ударе.

8. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И.В. Курс общей физики. - М.: Астрель, 2003. Т.1.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. - М.: Физматлит, 2002.
3. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. – М.: Наука, 1972.
4. Изучение упругого удара шаров: Метод. указания к лаб. раб. №1-8м/ Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Сост. Ю.М.Дубинкин, В.А.Решетов. Самара, 1988.

Учебное издание

ИЗУЧЕНИЕ УПРУГОГО УДАРА ШАРОВ

Методические указания

Составители: Т.В.Кривко

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П.Королева.

443086 Самара, Московское шоссе, 34.