ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА»

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве методических указаний

САМАРА
Издательство СГАУ
2008

УДК 514.742.4 (075)

Рецензент канд. техн. наук, доц. Н. Л. А к с е н о в а

Элементы векторного анализа в задачах и упражнениях: метод. указания / сост.: *Л. Г. Зубрина, Н.Ю. Поникарова*. - Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2008. – 52 с.

Содержат краткие теоретические сведения, задачи для проведения практических занятий, выполнения домашних заданий, варианты контрольной работы по векторному анализу. Приведены примеры решения типовых задач.

Методические указания выполнены на кафедре высшей математики и предназначены для студентов второго курса Самарского государственного аэрокосмического университета.

УДК 514.742.4 (075)

Содержание

1. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент

Скалярным полем называется плоская или пространственная область, с каждой точкой M которой связано определенное значение некоторой скалярной физической величины $U=U(M)$.

Задание скалярного поля равносильно заданию скалярной функции $U=U(M)$. Функция плоского скалярного поля зависит от двух переменных $U=U(x,y)$, а функция скалярного поля в пространстве зависит от трех переменных $U=U(x,y,z)$.

Геометрической характеристикой скалярных полей являются линии и поверхности уровня.

Линия уровня плоского скалярного поля определяется уравнением $U(x,y)=C$, а уравнение поверхности уровня пространственного скалярного поля имеет вид $U(x,y,z)=C$, где C – произвольное действительное число.

Производная скалярного поля $U=U(x,y,z)$ по направлению $\overline{\ell}=\ell_x\overline{i}+\ell_y\overline{j}+\ell_z\overline{k}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial U}{\partial \ell}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $|\overline{\ell}|=\sqrt{\ell_x^2+\ell_y^2+\ell_z^2}$ - длина вектора $\overline{\ell}$,

$$\cos\alpha=\frac{\ell_x}{|\overline{\ell}|},\quad \cos\beta=\frac{\ell_y}{|\overline{\ell}|},\quad \cos\gamma=\frac{\ell_z}{|\overline{\ell}|}$$ - направляющие косинусы.

Абсолютная величина $\left|\frac{\partial U}{\partial \ell}\right|$ определяет скорость изменения скалярного поля в точке M, а ее знак – характер его изменения (возрастания или убывания).

Градиентом скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точке M называется вектор

$$grad\,U=\frac{\partial U}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\overline{k}.$$

Направление градиента совпадает с направлением нормали к поверхности уровня, проходящей через точку M в сторону возрастания функции скалярного поля.

Единичный вектор градиента $\bar{1}_{grad\,U} = \dfrac{grad\,U}{|\,grad\,U\,|}$ является направлением наибыстрейшего возрастания функции скалярного поля $U = U(x, y, z)$.

Из всех производных функции скалярного поля $U = U(x, y, z)$, взятых по различным направлениям, наибольшее значение имеет производная по направлению градиента скалярного поля:

$$\max \frac{\partial U}{\partial \ell} = \frac{\partial U}{\partial\, gradU} = |\,gradU\,| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}\,.$$

Длина градиента равна наибольшей скорости изменения скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в точке M.

Аналогично определяются производные по направлению и градиент для плоских и n-мерных скалярных полей.

1. Определить линии уровня скалярного поля $z = x^2 + y^2$.

Решение: Линии уровня скалярного поля $z = z(x, y)$ определяются уравнением $z(x, y) = C$, где $C = const$, то есть $x^2 + y^2 = C$ $(C \geq 0)$.

Следовательно, линиями уровня данного плоского скалярного поля являются концентрические окружности с центром в начале координат.

В частности, при $C = 0$ получаем точку $O(0,0)$. Линиями уровня на плоскости xOy являются проекции линий, которые получаются в пересечении параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ с плоскостями $z = C$ (рис.1).

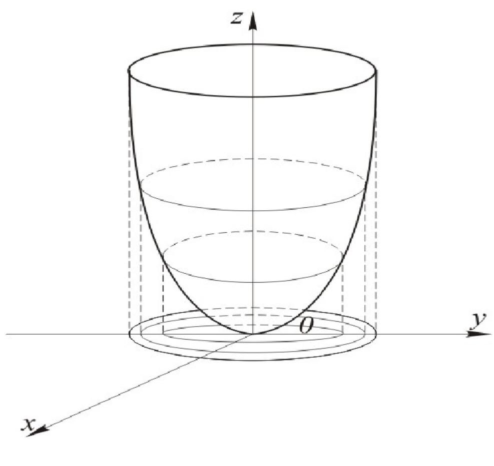

Рис.1

2. Дано скалярное поле $U = x^2 z + 3x^3 y + 5yz^2$. Вычислить производную функции скалярного поля в точке $M_0(1,-4,3)$ в направлении вектора $\overline{AB}$, где $A(1,2,3)$ и $B(3,3,1)$.

Решение: Производная функции скалярного поля $U = U(x,y,z)$ по направлению $\overline{\ell} = (\ell_x, \ell_y, \ell_z)$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha = \dfrac{\ell_x}{|\overline{\ell}|}$, $\cos\beta = \dfrac{\ell_y}{|\overline{\ell}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{\ell_z}{|\overline{\ell}|}$.

По условию задачи $\overline{\ell} = \overline{AB} = (2, 1, -2)$.

Тогда $|\overline{\ell}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$, $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$.

Найдем частные производные функции скалярного поля и вычислим их значения в точке $M_0(1,-4,3)$:

$\dfrac{\partial U}{\partial x} = 2xz + 9x^2 y,$ $\qquad \left.\dfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} = -30,$

$\dfrac{\partial U}{\partial y} = 3x^3 + 5z^2,$ $\qquad \left.\dfrac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} = 48,$

$\dfrac{\partial U}{\partial z} = x^2 + 10yz,$ $\qquad \left.\dfrac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0} = -119.$

Подставляя найденные значения частных производных и направляющих косинусов в $\dfrac{\partial U}{\partial \ell}$, найдем производную функции скалярного поля в точке M_0 в направлении вектора $\overline{\ell} = \overline{AB}$:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \ell}\right|_{M_0} = (-30)\cdot\frac{2}{3} + 48\cdot\frac{1}{3} + (-119)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{226}{3}.$$

Так как $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \ell}\right|_{M_0} > 0$, то функция поля в точке M_0 в направлении вектора $\overline{AB}$ возрастает.

3. Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания функции $z = x\,y\,z$ в точке $M_0\left(1, 2, -2\right)$.

Решение: Направление градиента в точке M_0 есть направление наибыстрейшего возрастания функции поля в этой точке. Наибольшая скорость изменения поля в данной точке определяется по формуле

$$\max \frac{\partial U}{\partial \ell} = \frac{\partial U}{\partial\, gradU} = \left|\; gradU\left(M_0\right)\right| ,$$

где $\quad gradU = \dfrac{\partial U}{\partial x}\,\overline{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\,\overline{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\,\overline{k}$.

Найдем частные производные функции поля в точке $M_0(1, 2, -2)$:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} = y\,z\big|_{M_0} = -4 \;, \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} = x\,z\big|_{M_0} = -2, \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0} = x\,y\big|_{M_0} = 2 .$$

Следовательно, $grad\,U\left(M_0\right) = -4\,\overline{i} - 2\,\overline{j} + 2\overline{k}$.

Скорость наибыстрейшего возрастания функции поля в точке M_0

$$\max \frac{\partial U}{\partial \ell} = \sqrt{16 + 4 + 4} = 2\sqrt{6} .$$

Она достигается в направлении вектора

$$\overline{1}_{grad\,U(M_0)} = \frac{grad\,U\left(M_0\right)}{\left|\; grad\,U\left(M_0\right)\right|} = -\frac{2}{\sqrt{6}}\,\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\overline{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\,\overline{k} .$$

4. Построить графики и линии уровня следующих функций:

1) $\quad z = x + y - 1$; $\qquad$ 2) $\quad z = 4 - x^2 - y^2$.

Ответ: 1) плоскость, линии уровня – прямые, параллельные прямой $x + y = 0$;

2) параболоид вращения, линии уровня – концентрические окружности с центром в начале координат.

5. Найти поверхности уровня для следующих скалярных полей:

1) $U = x + y + z$; 2) $U = x^2 + y^2 + z^2$; 3) $U = 5^{\,2x+3y-z}$.

Ответ: 1) плоскости $x + y + z = C$;

2) концентрические сферы с центром в начале координат $x^2 + y^2 + z^2 = C$;

3) плоскости $2x + 3y - z = C$.

6. Дано скалярное поле $U = x^2 + 2y^2 + 3\,z^2$.

1) Написать уравнение поверхности уровня, проходящей через точку $M(\,2,1,1\,)$.
2) Найти модуль и направление градиента скалярного поля в точке M.
3) Вычислить производную поля в точке M по направлению радиуса - вектора точки M.
4) Найти производную поля в точке M по направлению внешней нормали к поверхности уровня.

Ответ: 1) $x^2 + 2y^2 + 3\,z^2 = 9$;

2) $|\,grad\,U(M)\,| = 2\sqrt{17}$, $\qquad \overline{1}_{\,gradU(M)} = \dfrac{2\,\overline{i} + 2\,\overline{j} + 3\,\overline{k}}{\sqrt{17}}$;

3) $\left.\dfrac{\partial U}{\partial r}\right|_M = 3\sqrt{6}$; $\qquad$ 4) $\left.\dfrac{\partial U}{\partial n}\right|_M = 2\sqrt{17}$.

7. Найти производную скалярного поля $U(M) = y^2 z - 2x\,y\,z + z^2$ в точке $M_0(3,1,1)$ по направлению вектора $\overline{\ell}$, если $\overline{\ell}$ образует с координатными осями острые углы α, β, γ, причем $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, $\beta = \dfrac{\pi}{4}$. Установить характер изменения скалярного поля в данном направлении.

Ответ: $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \ell}\right|_{M_0} = -\dfrac{5 + 4\sqrt{2}}{2}$.

Скалярное поле $U(M)$ убывает в направлении вектора $\overline{\ell}$.

8. Найти производную поля $U(M)$ в точке M_0 по направлению, идущему от этой точки к точке M_1, если

1) $U(M) = x^2 y - xyz + z^3$, $M_0(1,1,2)$, $M_1(3,-1,3)$;

2) $U(M) = x^2 + y^2 - 3x + 2y$, $M_0(0,0,0)$, $M_1(3,4,0)$.

Ответ: 1) $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \ell}\right|_{M_0} = \dfrac{13}{3}$; 2) $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \ell}\right|_{M_0} = -\dfrac{1}{5}$.

9. Найти производную поля $U(M) = xy^2 + z^2 - xyz$ в точке $M_1(1,1,2)$ в направлении, образующем с осями координат углы $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

Ответ: $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \ell}\right|_{M_1} = 1$.

10. Установить характер роста скалярного поля $U = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ в направлении вектора $\overline{a} = 8\,\overline{i} - 4\overline{j} + 8\,\overline{k}$ в точке $M(1,1,1)$. Найти величину скорости изменения данного скалярного поля.

Ответ: $\left.\dfrac{\partial U}{\partial a}\right|_{M} = 12$. Скалярное поле возрастает в направлении вектора $\overline{a}$.

11. Найти градиент скалярного поля $U = |\,\overline{r}\,|$, где $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, и модуль градиента в произвольной точке M.

Ответ: $grad\,U = \dfrac{\overline{r}}{|\,\overline{r}\,|}$, $|\,grad\,U\,| = 1$.

12. Найти градиент скалярного поля $U = 3x^2y - 3xy^3 + y^4$ в точке $M(1,2,0)$.

Ответ: $grad\,U = -12\,\overline{i} - \overline{j}$.

13. Убедиться в ортогональности поверхностей уровня следующих полей:

1) $U = x^2 + y^2 - z^2$, $V = xz + yz$;

2) $U = x^2 + y^2 - 2z^2$, $V = xyz$.

14. Найти угол между градиентами поля $U = x^2 + 2y^2 - z^2$ в точках $M_1(2,3,-1)$ и $M_2(1,-1,2)$.

Ответ: $\cos\varphi = -\frac{4}{\sqrt{41}}$.

15. Найти угол между градиентами функций $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $V = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ в точке $M(0,0,1)$.

Ответ: $\varphi = 0$.

16. Найти $grad(\bar{c}\,\bar{r})$, $grad\, x r$, где $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$, $\bar{c} = m\bar{i} + n\bar{j} + p\bar{k}$.

Ответ: $grad(\bar{c}\,\bar{r}) = \bar{c}$, $grad\, x r = x\, grad\, r + r\, grad\, x$.

17. Найти наибольшую скорость возрастания поля $U = x^y - z$ в точке $M_0(2,2,4)$.

Ответ: $\max\frac{\partial U}{\partial \ell} = |gradU(M_0)| = \sqrt{17 + 16\ln^2 2}$.

18. Найти скорость и направление быстрейшего возрастания функции $U = x^2 y + y^2 z + z^2 x$ в точке $M(2,1,2)$.

Ответ: $\max\frac{\partial U}{\partial \ell} = |grad\,U(M)| = \sqrt{209}$, $\bar{1}_{gradU(M)} = \frac{8\bar{i} + 8\bar{j} + 9\bar{k}}{\sqrt{209}}$.

19. Найти направление наибольшего изменения функции $U = x\sin z - y\cos z$ в начале координат.

Ответ: отрицательная полуось Oy.

20. Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня скалярного поля $U = x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ: $\bar{1}_n = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$.

21. Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня скалярного поля $U = x^2 + 2xy - 4yz$ в точке $M_0(1,1,-1)$, направленный в сторону возрастания поля.

Ответ: $\bar{1}_n = \frac{1}{\sqrt{17}}(2\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k})$.

22. Найти производную поля $U = xz^2 + 2yz$ в точке $M_0(1, 0, 2)$ вдоль окружности $\overline{r}(t) = (\cos t + 1)\overline{i} + (\sin t - 1)\overline{j} + 2\overline{k}$.

Ответ: $\left.\dfrac{\partial U}{\partial r}\right|_{M_0} = 4$.

23. Найти производную поля $U = 2(xy + z)$ по винтовой линии $\overline{r}(t) = 2\cos t\,\overline{i} + 2\sin t\,\overline{j} + 2t\,\overline{k}$ в точке $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, соответствующей параметру $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $\left.\dfrac{\partial U}{\partial r}\right|_{M_0} = -\sqrt{2}$.

24. Найти производную поля $U = x^2 - y^2$ в точке $M_0(1,1)$ по направлению параболы $y = x^2$.

Ответ: $\left.\dfrac{\partial U}{\partial r}\right|_{M_0} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

2. Криволинейный интеграл по длине дуги и его вычисление

Если L - дуга кусочно-гладкой кривой, $U = f(x,y,z)$ - заданное на L скалярное поле и $f(x,y,z)$ - непрерывная функция, то криволинейным интегралом по длине дуги называется предел интегральной суммы

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,d\ell = \lim_{\substack{\max \Delta\ell_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta\ell_i\,,$$

где n – число разбиений дуги L на частичные дуги длиной $\Delta\ell_i$,

$C_i(x_i, y_i, z_i)$ − произвольные точки частичных дуг $(i = 1,2,3,\dots,n)$.

Криволинейный интеграл по длине дуги не зависит от направления пути интегрирования.

Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги сводится к вычислению определенного интеграла.

1) Если дуга L задана в плоскости xOy явным уравнением $y = y(x)$, где $a \le x \le b$, то дифференциал длины дуги равен $d\ell = \sqrt{1+[y'_x]^2}\,dx$.

Тогда $\int\limits_L f(x,y)\,d\ell = \int\limits_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'_x]^2}\,dx$.

2) Если дуга L задана в плоскости xOy явным уравнением $x = x(y)$, где $c \le y \le d$, то дифференциал длины дуги равен $d\ell = \sqrt{1+[x'_y]^2}\,dy$.

Тогда $\int\limits_L f(x,y)\,d\ell = \int\limits_c^d f[x(y),y]\sqrt{1+[x'_y]^2}\,dy$.

3) Если дуга L задана в пространстве параметрическими уравнениями $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ t_0 \le t \le t_1$, то $d\ell = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$.

Тогда $\int\limits_L f(x,y,z)\,d\ell = \int\limits_{t_0}^{t_1} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$. (1)

4) Если дуга L задана в плоскости xOy параметрическими уравнениями $x = x(t),\quad y = y(t),\quad t_0 \le t \le t_1$, то $z = 0,\quad z'(t) = 0$ и формула (1) примет вид

$$\int\limits_L f(x, y)d\ell = \int\limits_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t)]\,\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt\,.$$

5) Если дуга L задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, то дифференциал длины дуги $d\ell = \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}\,d\varphi$.

Тогда $\displaystyle\int\limits_L f(x, y)d\ell = \int\limits_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi,\, \rho\sin\varphi)\,\sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}\,d\varphi$.

3. Приложения криволинейного интеграла по длине дуги

1. Длина дуги L равна: $\ell = \int\limits_L d\ell$.

2. Масса дуги L с линейной плотностью $\gamma = \gamma(x,y,z)$ равна:

$$m = \int\limits_L \gamma(x,y,z)\,d\ell .$$

3. Статические моменты дуги L относительно координатных плоскостей:

$$M_{xy} = \int\limits_L z\,\gamma(x,y,z)\,d\ell ,$$

$$M_{xz} = \int\limits_L y\,\gamma(x,y,z)\,d\ell ,$$

$$M_{yz} = \int\limits_L x\,\gamma(x,y,z)\,d\ell .$$

4. Координаты центра тяжести масс дуги L:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \qquad z_c = \frac{M_{xy}}{m} .$$

5. Моменты инерции дуги L относительно координатных плоскостей, координатных осей, начала координат:

$$I_{xy} = \int\limits_L z^2\,\gamma(x,y,z)\,d\ell ,$$

$$I_x = \int\limits_L (y^2 + z^2)\,\gamma(x,y,z)\,d\ell ,$$

$$I_o = \int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)\,\gamma(x,y,z)\,d\ell .$$

Аналогично записываются формулы для вычисления I_{xz}, I_{yz}, I_y, I_z.

Если дуга L однородная, то в приведенных выше формулах следует положить $\gamma(x,y,z) = 1$.

Итак, с помощью криволинейного интеграла по длине дуги можно вычислить следующие геометрические и физические величины: длину дуги L, массу, статические моменты, координаты центра тяжести, моменты инерции материальной дуги L с линейной плотностью $\gamma = \gamma(x,y,z)$.

25. Найти массу дуги AB кривой $y = \ln x$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(3,\ln 3)$, если в каждой точке кривой линейная плотность пропорциональна квадрату абсциссы точки.

Решение: Применяя формулу для вычисления массы дуги $m = \int\limits_L \gamma(x,y,z)\,d\ell$ и учитывая, что $\gamma(x,y,z) = k\,x^2$, получим $m = k\int\limits_L x^2 d\ell$.

Исходя из уравнения данной кривой $y = \ln x$, преобразуем криволинейный интеграл в определенный интеграл с переменной интегрирования x:

$$m = k\int\limits_L x^2 d\ell = \left[\begin{array}{c} y' = \dfrac{1}{x} \\ d\ell = \sqrt{1+[y'_x]^2}\;dx = \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\;dx \\ 1 \le x \le 3 \end{array}\right] = k\int\limits_1^3 x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx =$$

$$= k\int\limits_1^3 x^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx = \frac{k}{2}\int\limits_1^3 (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,d(x^2+1) = \frac{k}{2}\cdot\frac{2(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_1^3 = \frac{k}{3}(10\sqrt{10}-2\sqrt{2}).$$

26. Найти длину дуги кривой $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$, $0 \le t \le \pi$.

Ответ: $\ell = \sqrt{3}\left(e^{\pi}-1\right)$.

27. Найти всю длину кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Ответ: $\ell = 8a$.

28. Найти массу части окружности $x^2+y^2=a^2$, расположенной в первой четверти, если линейная плотность в каждой точке кривой равна квадрату ординаты этой точки.

Ответ: $m = \dfrac{a^3\pi}{4}$.

29. Вычислить массу участка цепной линии $y=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$ между точками с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=1$, если плотность в каждой точке кривой обратно пропорциональна ординате точки, причем в точке $(0,1)$ плотность равна γ_o.

Ответ: $m=\gamma_o$.

30. Найти массу отрезка прямой, соединяющей точки $O(0,0)$ и $A(1,2)$, если плотность $\gamma(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$.

Ответ: $m=\ln\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$.

31. Найти массу треугольника OAB с вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, если плотность в каждой точке треугольника $\gamma(x,y)=2x+y$.

Ответ: $m=\frac{3}{2}(1+\sqrt{2})$.

32. Вычислить статические моменты относительно координатных плоскостей одного витка однородной винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=ht$, $0\le t\le 2\pi$.

Ответ: $M_{xy}=2\pi^2 h\sqrt{a^2+h^2}$, $M_{xz}=M_{yz}=0$.

33. Вычислить координаты центра тяжести однородной дуги астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, расположенной в первом квадранте.

Ответ: $x_c=\dfrac{2a}{5}$, $y_c=\dfrac{2a}{5}$.

34. Найти координаты центра тяжести первого витка винтовой линии $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $z=4t$, если плотность распределения массы в каждой точке совпадает с ее аппликатой.

Ответ: $x_c=0$, $y_c=-\dfrac{3}{\pi}$, $z_c=\dfrac{16\pi}{3}$.

35. Найти моменты инерции относительно координатных осей и начала координат четверти однородной окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, лежащей в первом квадранте.

Ответ: $I_x = I_y = 2\pi$, $I_o = 4\pi$.

36. Найти момент инерции относительно оси Oy дуги параболы $y = \frac{x^2}{2}$, лежащей между точками $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ и $B(2, 2)$, если линейная плотность $\gamma(x, y) = \frac{y}{x^3}$.

Ответ: $I_y = \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{6}$.

37. Найти момент инерции относительно оси Ox однородной астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, расположенной в первой четверти.

Ответ: $I_x = \frac{3a^3}{8}$.

4. Поверхностный интеграл по площади поверхности

Если σ - кусочно-гладкая поверхность, $U = f(x,y,z)$ - заданное на поверхности σ скалярное поле, $f(x,y,z)$ - непрерывная функция, то поверхностным интегралом по площади поверхности называется предел интегральной суммы

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i \ ,$$

где n – число разбиений поверхности σ на частичные поверхности с площадями $\Delta\sigma_i$, диаметрами d_i; $C_i(x_i, y_i, z_i)$ - произвольные точки частичных поверхностей; $f(x_i, y_i, z_i)$ - значения функции $U = f(x,y,z)$ в произвольных точках $C_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1,2,3,...,n$.

Значение этого интеграла не зависит от выбора стороны поверхности σ, по которой производится интегрирование.

Вычисление поверхностного интеграла по площади поверхности сводится к вычислению двойного интеграла. Если поверхность σ задана уравнением $z = z(x,y)$, поверхность σ однозначно проектируется на плоскость xOy в область $D_{xy} = np_{xOy}\sigma$, то поверхностный интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D_{xy}} f\,[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy\,.$$

Поверхность σ можно проектировать также на плоскости xOz и yOz.

С помощью поверхностного интеграла по площади поверхности можно вычислять геометрические и физические величины: площадь поверхности σ, массу, статические моменты, координаты центра тяжести, моменты инерции материальной поверхности σ с поверхностной плотностью $\gamma = \gamma(x,y,z)$.

38. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{(1+x+z)^2}$, где σ - часть плоскости

$x+y+z=1$, заключенная в первом октанте.

Решение: Используя уравнение плоскости $x+y+z=1$, преобразуем данный поверхностный интеграл в двойной интеграл по формуле

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy\,.$$

Для этого разрешим уравнение плоскости относительно z: $z=1-x-y$, откуда $z'_x=-1$, $z'_y=-1$, $d\sigma=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=\sqrt{3}\,dxdy$.

Так как поверхность σ однозначно проектируется на плоскость xOy в треугольник D_{xy}, ограниченный прямыми $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ (рис.2), то данный поверхностный интеграл сводится к следующему двойному интегралу:

$$\iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{(1+x+z)^2} = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{\sqrt{3}dxdy}{(1+x+1-x-y)^2} = \sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}} \frac{dxdy}{(2-y)^2} = \sqrt{3}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{dy}{(2-y)^2} =$$

$$= \sqrt{3}\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)dx = \sqrt{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$

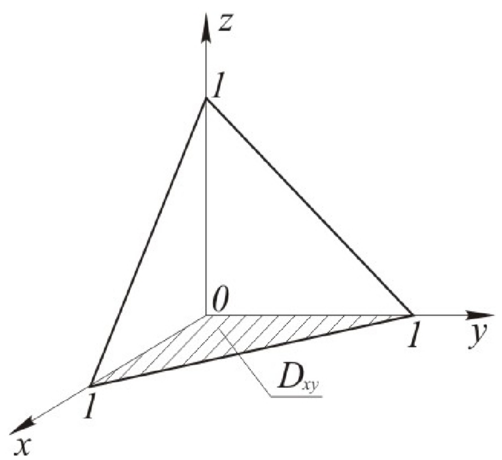

Рис.2

Замечание. Так как данная поверхность σ однозначно проектируется на любую координатную плоскость, то при решении задачи поверхность σ можно было спроектировать на плоскости xOz или yOz.

39. Вычислить поверхностный интеграл:

1) $\iint\limits_{\sigma}(2x+z)d\sigma$, где σ - часть плоскости $x+y+\frac{z}{2}=1$, лежащая в первом октанте;

2) $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+1)d\sigma$, где σ - поверхность параболоида $x^2+y^2=2z$, отсекаемая плоскостью $z=1$;

3) $\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{x^2+y^2+z^2}$, где σ - поверхность цилиндра $x^2+y^2=R^2$, заключенная между плоскостями $z=0$, $z=H$ и расположенная в первом октанте;

Указание: Поверхность σ спроектировать на плоскость xOz или на плоскость yOz.

4) $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma$, где σ - полусфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Ответ: 1) $\iint\limits_{\sigma}(2x+z)d\sigma=2$;

2) $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+1)d\sigma=\frac{2\pi}{5}(9\sqrt{3}-1)$;

3) $\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{x^2+y^2+z^2}=2\pi\, arctg\frac{H}{R}$;

4) $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma=\pi R^3$.

40. Вычислить площадь части поверхности параболоида $x^2+y^2=2az$ $(a>0)$, вырезанной сферой $x^2+y^2+z^2=15a^2$.

Ответ: $S=\frac{2\pi a^2}{3}(7\sqrt{7}-1)$.

41. Найти площадь части поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 6z$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 27$.

Ответ: $S = 42\pi$.

42. Найти площадь части плоскости $2x + 2y + z = 8a$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$.

Ответ: $S = 3\pi R^2$.

43. Найти массу цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = H$, если в каждой ее точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния от начала координат.

Ответ: $m = 2k\pi\, arctg \frac{H}{R}$.

44. Найти массу поверхности куба, ребро которого равно единице, если в каждой ее точке поверхностная плотность численно равна произведению расстояний этой точки до трех граней куба, проходящих через одну данную его вершину.

Ответ: $m = \frac{3}{4}$.

45. Найти статические моменты однородной треугольной пластинки $x + y + z = a$ $(a > 0)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ относительно координатных плоскостей.

Ответ: $M_{xy} = M_{xz} = M_{yz} = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

46. Найти массу и координаты центра тяжести конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, если ее плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки до оси конуса.

Ответ: $m = \frac{2\sqrt{2}k\pi}{3}$, $C\left(0, 0, \frac{3}{4}\right)$.

47. Вычислить координаты центра тяжести однородной полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0$.

Ответ: $C\left(0, 0, \frac{R}{2}\right)$.

48. Найти моменты инерции однородной треугольной пластинки $x + y + z = 1$, $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$ относительно координатных плоскостей.

Ответ: $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

5. Векторное поле. Векторные линии

Векторным полем называется плоская или пространственная область, с каждой точкой M которой связано определенное значение некоторой векторной физической величины $\overline{F} = \overline{F}(M)$. Задание векторного поля в пространстве равносильно заданию вектора

$$\overline{F}(M) = P(x, y, z)\,\overline{i} + Q(x, y, z)\,\overline{j} + R(x, y, z)\,\overline{k}\,.$$

Геометрической характеристикой векторного поля являются векторные линии. Векторной линией векторного поля называется кривая, касательная к которой в каждой точке имеет направление соответствующего ей вектора поля. Векторные линии поля $\overline{F} = \overline{F}(M)$ находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}\,.$$

49. Определить векторные линии магнитного поля, образованного постоянным электрическим током силы I, текущим по бесконечно длинному прямолинейному проводу.

Решение: Если совместить провод с осью Oz, то вектор $\overline{H}$ напряженности магнитного поля в произвольной точке $M(x, y, z)$ выражается формулой

$$\overline{H} = \frac{2I}{\rho^2}(-y\,\overline{i} + x\,\overline{j}\,),$$

где I - сила тока,

ρ - расстояние точки $M(x, y, z)$ до провода.

В данном случае $P = -\frac{2I}{\rho^2}y, \quad Q = \frac{2I}{\rho^2}x, \quad R = 0$.

Тогда система дифференциальных уравнений векторных линий имеет вид $\frac{dx}{-\frac{2I}{\rho^2}y} = \frac{dy}{\frac{2I}{\rho^2}x} = \frac{dz}{0}$ или $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$, и распадается на два уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{-y} = \dfrac{dy}{x}, \\ dz = 0 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} xdx = -ydy, \\ dz = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $\begin{cases} x^2 + y^2 = C^2, \\ z = h. \end{cases}$

Следовательно, векторными линиями напряженности магнитного поля являются окружности с центром на оси Oz, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси Oz (рис.3).

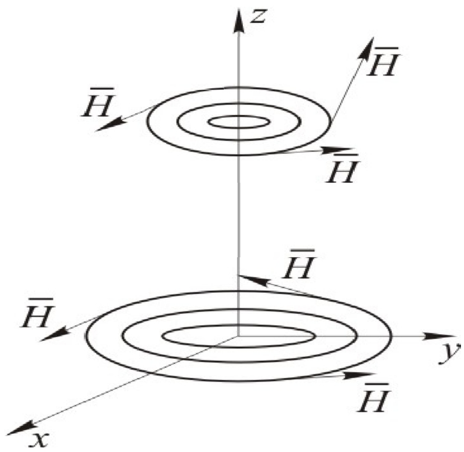

Рис.3

50. Найти векторные линии следующих полей:

1) $\overline{F} = x\overline{i} - y\overline{j}$;

2) $\overline{a} = y\overline{i} + \overline{j}$;

3) $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$;

4) $\overline{a} = \frac{1}{x}\overline{i} + \frac{1}{y}\overline{j}$.

Ответ: 1) гиперболы $\begin{cases} xy = c, \\ z = h \end{cases}$

(при $c = 0$ - совокупность координатных осей);

2) параболы $\begin{cases} y^2 = 2(x + c) \\ z = h \end{cases}$;

3) прямые $\dfrac{x}{m} = \dfrac{y}{n} = \dfrac{z}{p}$;

4) гиперболы $\begin{cases} x^2 - y^2 = c, \\ z = h \end{cases}$

(при $c = 0$ - пара прямых $y = \pm x$).

6. Поток векторного поля

Потоком векторного поля $\overline{F}$ через двустороннюю поверхность σ называется поверхностный интеграл от скалярного произведения вектора поля $\overline{F}$ на единичный вектор нормали $\overline{1}_n$ к выбранной стороне поверхности σ:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \left(\overline{F} \ \overline{1}_n \right) d\sigma .$$

Если поле $\overline{F}$ определяет поле скоростей текущей жидкости, то интеграл Π выражает количество жидкости, протекающей через поверхность σ в единицу времени.

51. Вычислить поток векторного поля $\overline{F} = 2x\,\overline{i} + 2y\,\overline{j} + (1-2z)\overline{k}$ через сторону параболоида $x^2 + y^2 = 1 - 2z$, лежащую в первом октанте, нормаль к которой образует с осью Oz острый угол.

Решение: Поток векторного поля находим по формуле $\Pi = \iint_{\sigma} \left(\overline{F} \ \overline{1}_n \right) d\sigma$.

Найдем единичный вектор нормали $\overline{1}_n$ к поверхности σ. Для этого разрешим уравнение параболоида относительно z: $z = \dfrac{1 - x^2 - y^2}{2}$.

Тогда $z'_x = -x$, $z'_y = -y$ и нормальный вектор поверхности σ имеет координаты $\overline{n} = \pm(-z'_x, -z'_y, 1) = \pm(x, y, 1)$, а его модуль $|\overline{n}| = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

Поэтому единичный вектор нормали к поверхности σ будет иметь вид

$$\overline{1}_n = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right).$$

По условию задачи нормаль к поверхности σ образует острый угол γ

с положительным направлением оси Oz (рис.4) и, следовательно, $\cos\gamma$ должен быть положительным.

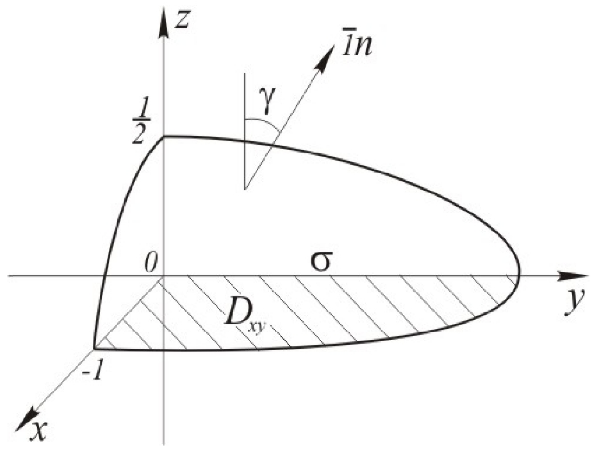

Рис.4

Если перед скобкой выбрать знак (+), то $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} > 0$ и вектор $\overline{1}_n$ является искомой нормалью к поверхности σ.

Найдем скалярное произведение $\left(\overline{F}\ \overline{1}_n\right) = \dfrac{2x^2+2y^2+1-2z}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ и подставим его в формулу потока $\Pi = \iint\limits_{\sigma} \dfrac{2x^2+2y^2+1-2z}{\sqrt{x^2+y^2+1}} d\sigma$.

Вычисление поверхностного интеграла в правой части последнего равенства сведем к вычислению двойного интеграла. Для этого найдем дифференциал площади поверхности:

$$d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy = \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy.$$

Тогда $\Pi = \iint\limits_{D_{xy}} \dfrac{2x^2+2y^2+1-\dfrac{2(1-x^2-y^2)}{2}}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \cdot \sqrt{x^2+y^2+1}\,dxdy = 3\iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)dxdy$.

Проекцией поверхности σ на плоскость xOy является четверть круга D_{xy}, ограниченная окружностью и координатными осями Ox и Oy. Поэтому для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам и найдем поток векторного поля $\overline{F}$ через поверхность σ:

$$П = 3\iint\limits_{D_{xy}} \rho^3 d\rho d\varphi = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{3\pi}{8}.$$

52. Найти поток векторного поля $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ через сторону круга, вырезанного конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ на плоскости $z = h$ $(h > 0)$, нормаль к которой совпадает с положительным направлением оси Oz.

Ответ: $П = \pi h^3$.

53. Найти поток вектора $\overline{F} = \overline{i}$ через площадку, перпендикулярную оси Ox, имеющую форму прямоугольника со сторонами, равными 1 и 2, в положительном направлении оси Ox.

Ответ: $П = 2$.

54. Вычислить поток векторного поля $\overline{F} = (x^2 + y^2)\overline{i} + (y^2 + z^2)\overline{j} + (z^2 + x^2)\overline{k}$ через часть плоскости $z = 0$, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 1$ в положительном направлении оси Oz.

Ответ: $П = \frac{\pi}{4}$.

55. Найти поток вектора $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ через часть плоскости $y + z = 1$, принадлежащую первому октанту и ограниченную плоскостями $x = 0$ и $x = 2$, в сторону нормали, образующей с положительным направлением оси Oz острый угол.

Ответ: $П = 2$.

56. Вычислить поток вектора $\overline{a} = 3\overline{j}$ через площадку, имеющую форму треугольника с вершинами в точках $M_1(1,2,0)$, $M_2(0,2,0)$, $M_3(0,2,2)$, в сторону, где расположено начало координат.

Ответ: $П = -3$.

57. Найти поток вектора $\overline{F} = \overline{i} + (x + y)\overline{j} + z\overline{k}$ через сторону ΔABC, где $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,4)$, нормаль к которой образует с положительным направлением оси Oz тупой угол.

Ответ: $\varPi = -12$.

58. Найти поток вектора $\overline{F} = x\,\overline{i} + (y+z)\,\overline{j} + (z-y)\,\overline{k}$ через внутреннюю сторону полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

Ответ: $\varPi = -2\pi R^3$.

59. Найти поток вектора $\overline{F} = (x-z)\,\overline{i} + (z^2 - y^2)\,\overline{j} + (x+z)\,\overline{k}$ через внешнюю сторону боковой поверхности цилиндра $x^2 + z^2 = R^2$, $0 \leq y \leq H$.

Ответ: $\varPi = 2\pi R^2 H$.

60. Вычислить поток радиуса-вектора $\overline{r} = x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k}$ через верхнюю сторону параболоида $1 - z = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

Ответ: $\varPi = \frac{3\pi}{2}$.

61. Найти поток вектора $\overline{F} = (x-2z)\,\overline{i} + (3z-4x)\,\overline{j} + (5x+y)\,\overline{k}$ через сторону ΔABC, где $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, нормаль к которой образует с положительным направлением оси Oz тупой угол.

Ответ: $\varPi = -\frac{2}{3}$.

62. Найти поток радиуса-вектора $\overline{r} = x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k}$:

1) через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leq R^2$, $-H \leq z \leq H$ в сторону ее внешней нормали;
2) через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leq 4z^2$, $0 \leq z \leq 1$ в сторону ее внутренней нормали;
3) через полную поверхность куба $-a \leq x \leq a$, $-a \leq y \leq a$, $-a \leq z \leq a$ в сторону ее внешней нормали.

Ответ: 1) $\varPi = 4\pi R^2 H$, 2) $\varPi = -4\pi$, 3) $\varPi = 24a^3$.

7. Дивергенция векторного поля. Формула Гаусса-Остроградского

Дивергенцией векторного поля $\overline{F} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ называется скаляр

$$div\,\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Если $div\,\overline{F}(M_0) > 0$, то точка M_0 называется источником, а если $div\,\overline{F}(M_0) < 0$, то точка M_0 называется стоком. Абсолютная величина $\left|div\,\overline{F}(M_0)\right|$ характеризует мощность источника или стока.

Для вычисления потока векторного поля $\overline{F}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности σ, ограничивающей объем V, применяют формулу Гаусса-Остроградского

$$\Pi = \oiint\limits_{\sigma} (\overline{F}\,\overline{1}_n)\,d\sigma = \iiint\limits_{V} div\,\overline{F}\,dV,$$

то есть поток векторного поля $\overline{F}$ через замкнутую поверхность σ в сторону внешней нормали равен тройному интегралу от $div\,\overline{F}$, взятому по объему V, ограниченному поверхностью σ.

Величина потока Π показывает разность между количеством жидкости, вытекающей из области V и втекающей в эту область в единицу времени.

Векторное поле $\overline{F}$ называется *соленоидальным* в области V, если $div\,\overline{F} = 0$ во всех точках этой области. В этом случае поток векторного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

63. Найти поток векторного поля $\overline{F} = x\overline{i} - y\overline{j} + z(x^2 + y^2)\overline{k}$ через полную поверхность конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le H$ в сторону внешней нормали.

Решение: Найдем поток векторного поля по формуле Гаусса-Остроградского

$$\Pi = \oiint\limits_{\sigma} (\overline{F}\,\overline{1}_n)\,d\boldsymbol{\sigma} = \iiint\limits_{V} div\,\overline{F}\,dV,$$

где $div\,\overline{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 1 - 1 + x^2 + y^2 = x^2 + y^2$.

Поэтому $\Pi = \iiint\limits_{V} (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$.

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам. Так как область V определяется неравенствами $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le H$, $\rho \le z \le H$ (рис. 5), то $\Pi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{H} \rho^3 d\rho \int\limits_{\rho}^{H} dz = \dfrac{\pi H^5}{10}$.

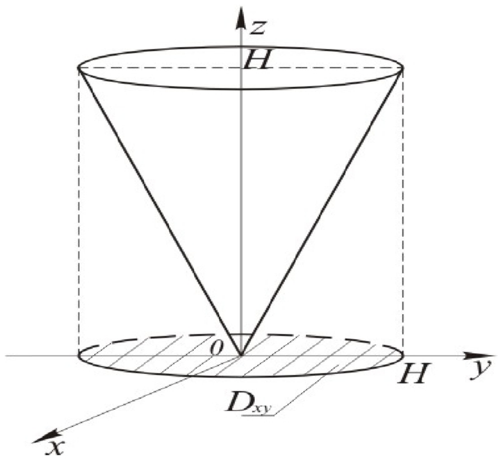

Рис.5

64. Найти дивергенцию напряженности магнитного поля $\overline{H} = \dfrac{2I}{\rho^2}(-y\,\overline{i} + x\,\overline{j})$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, образованного электрическим током, текущим по бесконечному прямолинейному проводу.

Ответ: $div\,\overline{H} = 0$.

65. Найти дивергенцию векторного поля:

1) $\overline{F} = x^2 yz\,\overline{i} + (2xy - 3)\,\overline{j} + (6xyz - 9)\overline{k}$ в точках $M_1(1,2,3)$ и $M_2(-1,0,4)$;

2) $\overline{F} = xy\overline{i} + yz\overline{j} + xz\overline{k}$ в точках $M_1(1,2,-5)$ и $M_2(1,0,3)$;

3) $\overline{F} = (|\,\overline{r}\,|\,\overline{c})$, где $\overline{r} = x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k}$, $\overline{c} = m\,\overline{i} + n\,\overline{j} + p\,\overline{k}$.

Ответ: 1) $div\,\overline{F}(M_1) = 26$, $div\,\overline{F}(M_2) = -2$;

2) $div\overline{F}(M_1)=-2,\quad div\overline{F}(M_2)=4$;

3) $div\overline{F}=\dfrac{(\overline{c}\,\overline{r})}{|\overline{r}\,|}$.

66. Показать, что векторное поле $\overline{F}$ соленоидальное:

1) $\overline{F}=e^{xy}(-x\overline{i}+y\overline{j}+xy\overline{k})$;

2) $\overline{F}=y^2\overline{i}+xz\overline{j}+xy\overline{k}$.

67. Найти $gradU$ и $div\,gradU$, если $U=x^2+y^2x^3+xyz^4$.

Ответ: $div\,grad\,U=2+6xy^2+2x^3+12xyz^2$.

68. Найти $div[\overline{c}\,\overline{r}]$, если $\overline{c}=2\overline{i}+3\overline{j}+7\overline{k}$, $\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$.

Ответ: $div[\overline{c}\,\overline{r}]=0$.

69. Доказать справедливость равенства $div(U\overline{F})=U\,div\overline{F}+(\overline{F}\,gradU)$, где $U=U(x,y,z)$ - скалярная функция.

70. С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить поток вектора $\overline{F}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности σ:

1) $\overline{F}=xz\overline{i}+x\overline{j}+z^2\overline{k},\quad \sigma:\ z=x^2+y^2,\quad z=1$;

2) $\overline{F}=2x\overline{i}+2z\overline{j}+y\overline{k},\quad \sigma:\ x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y+z=2$;

3) $\overline{F}=(x-z)\overline{i}+(z^2-y^2)\overline{j}+(x+z)\overline{k},\quad \sigma:\ x^2+y^2=R^2,\quad y=0,\quad y=2$;

4) $\overline{F}=xz\overline{i}+x^2y\overline{j}+zy^2\overline{k},\quad \sigma:\ z=x^2+y^2,\quad x^2+y^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$;

5) $\overline{F}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k},\quad \sigma:\ y+z=1,\ x=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

6) $\overline{F}=xy^2\overline{i}+yz^2\overline{j}+zx^2\overline{k},\quad \sigma:\ z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad z=0$;

7) $\overline{F}=z^2x\overline{i}+x^2y\overline{j}+y^2z\overline{k},\quad \sigma:\ x^2+y^2+z^2=R^2,\quad x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$;

8) $\overline{F}=yz\overline{i}+xz\overline{j}+xz\overline{k}$, σ - пирамида с вершинами $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,2)$;

9) $\overline{F}=2x\overline{i}-y\overline{j}+z\overline{k},\quad \sigma:9-z=x^2+y^2,\quad z=0$;

10) $\overline{F}=x\overline{i}+xz\overline{j}+y\overline{k},\quad \sigma:\ x^2+y^2=4-z,\quad z=0$;

11) $\overline{F}=(y^2+z^2)\overline{i}-y^2\overline{j}+2yz\overline{k},\quad \sigma:\ x^2+z^2=y^2,\quad y=1$;

12) $\overline{F} = 2x\overline{i} + (1-2y)\overline{j} + 2z\overline{k}, \quad \sigma: \ x^2 + z^2 = 1 - 2y, \quad y = 0$.

Ответ: 1) $П = \pi$; 2) $П = \frac{8}{3}$; 3) $П = 0$; 4) $П = \frac{\pi}{8}$; 5) $П = 3$;

6) $П = \frac{2\pi R^5}{5}$; 7) $П = \frac{\pi R^5}{10}$; 8) $П = \frac{1}{3}$; 9) $П = 81\pi$;

10) $П = 8\pi$; 11) $П = 0$; 12) $П = \frac{\pi}{2}$.

71. Вычислить непосредственно и с помощью формулы Гаусса-Остроградского поток вектора $\overline{F}$ через внешнюю сторону поверхности σ:

1) $\overline{F} = 3x\overline{i} - 2z\overline{j} + y\overline{k}, \quad \sigma: \ x + y + z = 2, \ x \ge 0, \ y \ge 0, \ z \ge 0$;

2) $\overline{F} = (x+z)\overline{i} + (y+x)\overline{j} + (z+y)\overline{k}, \quad \sigma: \ x^2 + y^2 = R^2, \ z = x, \ z \ge 0$.

Ответ: 1) $П = 4$; 2) $П = 2R^3$.

8. Криволинейный интеграл по координатам и его вычисление

Если на дуге AB кусочно-гладкой кривой задано векторное поле $\overline{F} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$, то криволинейным интегралом по координатам называется предел интегральной суммы

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\overline{F}\ d\overline{r}) = \lim_{\substack{\max|\Delta\overline{r}_i|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{F}\left(C_i\right) \Delta\overline{r}_i\right) = \lim_{\substack{\max|\Delta\overline{r}_i|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} P\left(C_i\right)\Delta x_i + Q\left(C_i\right)\Delta y_i + R\left(C_i\right)\Delta z_i,$$

где n – число разбиений дуги AB на частичные дуги с приращениями $\Delta\overline{r}_i = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$ радиуса-вектора $\overline{r}$ на концах частичной дуги $A_{i-1}A_i$ и длинами приращений $|\Delta\overline{r}_i|$; $C_i(x_i, y_i, z_i)$ - произвольные точки частичных дуг $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Вычисление криволинейного интеграла по координатам сводится к вычислению определенного интеграла.

1) Если уравнение дуги AB в пространстве задано в параметрическом виде $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, где t меняется от t_A до t_B, то криволинейный интеграл по координатам вычисляется следующим образом:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{t_A}^{t_B} \left[P\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot x_t' + Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot y_t' + R\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot z_t'\right]dt\ .$$

2) Если уравнение дуги AB в плоскости xOy задано в параметрическом виде $x = x(t),\ y = y(t)$, где t меняется от t_A до t_B, то криволинейный интеграл по координатам вычисляется так:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_A}^{t_B} \left[P\big(x(t), y(t)\big) \cdot x'_t + Q\big(x(t), y(t)\big) \cdot y'_t \right] dt .$$

3) Если дуга AB задана в плоскости xOy явным уравнением $y = y(x)$, где x изменяется от x_A до x_B, то криволинейный интеграл по координатам вычисляется следующим образом:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_A}^{x_B} \left[P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big) \cdot y'_x \right] dx .$$

Криволинейный интеграл по координатам меняет свой знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования.

9. Работа, циркуляция, ротор векторного поля. Формулы Грина и Стокса

Если $\overline{F} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ - силовое поле, то *работа* векторного поля $\overline{F}$ вдоль дуги AB определяется формулой

$$A = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (\overline{F}\, d\overline{r}) = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Циркуляцией векторного поля $\overline{F}$ называется криволинейный интеграл вдоль замкнутого контура L:

$$C = \oint\limits_{L} (\overline{F}\, d\overline{r}) = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Ротором (вихрем) векторного поля $\overline{F} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ называется вектор

$$rot\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}.$$

Если в некоторой области пространства содержится двусторонняя кусочно-гладкая поверхность σ, ограниченная кусочно-гладким контуром L, с единичным вектором нормали $\overline{1}_n$, выбранным так, чтобы видимый с его конца обход контура L совершался против часовой стрелки, то справедлива формула Стокса

$$C = \oint\limits_{L} (\overline{F}\, d\overline{r}) = \iint\limits_{\sigma} (rot\,\overline{F} \cdot \overline{1}_n)\, d\sigma,$$

то есть циркуляция векторного поля $\overline{F}$ по замкнутому контуру L равна потоку ротора вектора $\overline{F}$ через поверхность σ, ограниченную этим контуром. Для плоского векторного поля $\overline{F} = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j}$ имеет место формула Грина

$$C=\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

где область D плоскости xOy ограничена замкнутым контуром L.

72. Вычислить работу силового поля $\overline{F}=x\overline{i}+y\overline{j}+(x+y-1)\overline{k}$ вдоль отрезка прямой M_1M_2, где $M_1(1,1,1)$ и $M_2(2,3,4)$.

Решение:

Применяя формулу работы силового поля $A=\int_L(\overline{F}\ d\overline{r})=\int_L Pdx+Qdy+Rdz$,

запишем $A=\int_{M_1M_2} xdx+ydy+(x+y-1)dz$.

Канонические уравнения прямой M_1M_2 имеют вид

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-1}{4-1}\qquad \text{или}\qquad \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}=t.$$

Отсюда следуют параметрические уравнения прямой $\begin{cases}x=t+1,\\ y=2t+1,\\ z=3t+1.\end{cases}$

Тогда $\begin{cases}dx=dt,\\ dy=2dt,\\ dz=3dt.\end{cases}$

Подставляя значения x,y,z,dx,dy,dz в подынтегральное выражение для работы силового поля и учитывая, что $t=0$ для точки M_1 и $t=1$ для точки M_2, находим

$$A=\int_0^1(t+1)dt+(2t+1)2dt+(t+1+2t+1-1)3dt=\int_0^1(14t+6)dt=13.$$

73. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\overline{F}=\sqrt{1+x^2+y^2}\,\overline{i}+y[xy+\ln(x+\sqrt{1+x^2+y^2})]\overline{j}$$

вдоль окружности $x^2+y^2=R^2$ в положительном направлении.

Решение: Для вычисления циркуляции C плоского векторного поля $\overline{F}$ применим формулу Грина:

$$C=\oint_L(\overline{F}\,d\overline{r})=\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

В данном случае $P(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$,

$$Q(x,y)=xy^2+y\ln(x+\sqrt{1+x^2+y^2}),$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2+\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Подставляя частные производные в формулу Грина, получим

$$C=\iint_D\left(y^2+\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)dxdy=\iint_D y^2dxdy.$$

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам.

Так как $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le R$ (рис. 6), то

$$C=\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^R\rho^3d\rho=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi\int_0^R\rho^3d\rho=\frac{\pi R^4}{4}.$$

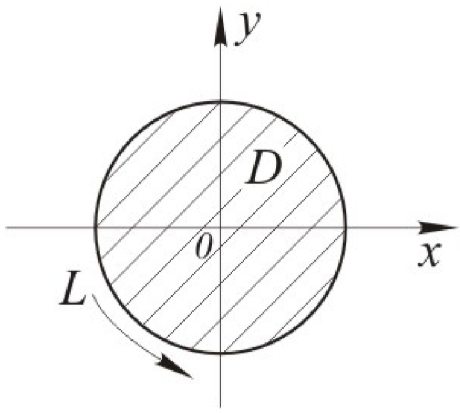

Рис.6

74. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{F}=(y-x)\overline{i}+(2x-y)\overline{j}+z\overline{k}$ вдоль замкнутой кривой L, состоящей из отрезков координатных осей Ox и Oy и дуги окружности $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $z=0$, от точки, где параметр $t=0$, до точки, где $t=\frac{\pi}{2}$, двумя способами (непосредственно и с помощью формулы Стокса).

Решение:

<u>Способ 1</u>

Найдем циркуляцию векторного поля $\overline{F}$ вдоль контура L непосредственно по формуле

$$C=\oint\limits_{AOBA}(\overline{F}\,d\,\overline{r})=\int\limits_{AO}(\overline{F}\,d\,\overline{r})+\int\limits_{OB}(\overline{F}\,d\,\overline{r})+\int\limits_{BA}(\overline{F}\,d\,\overline{r}),$$

где скалярное произведение $(\overline{F}\,d\overline{r})=(y-x)dx+(2x-y)dy+zdz$.

1) На AO: $x=0,\ z=0$ и $dx=0,\ dz=0$.

Тогда $(\overline{F}\,d\overline{r})=-ydy$.

При перемещении по отрезку AO от точки A до точки O ордината y убывает от 3 до 0 (рис.7), поэтому $\int\limits_{AO}(\overline{F}\,d\overline{r})=\int\limits_{3}^{0}-ydy=\frac{9}{2}$.

2) На OB: $y=0,\ z=0,\ dy=0,\ dz=0$ и $(\overline{F}\,d\overline{r})=-xdx$, где $0\le x\le 3$.

Тогда $\int\limits_{OB}(\overline{F}\,d\overline{r})=\int\limits_{0}^{3}-x\,dx=-\frac{9}{2}$.

3) На дуге BA:

$$\begin{cases}x=3\cos t,\\ y=3\sin t,\\ z=0\end{cases}\qquad \text{и} \qquad \begin{cases}dx=-3\sin t\,dt,\\ dy=3\cos t\,dt,\\ dz=0.\end{cases}$$

Отсюда следует, что $(\overline{F}\,d\overline{r})=(-9\sin^2 t+18\cos^2 t)dt$, где $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Тогда $\int\limits_{\overset{\smile}{BA}}(\overline{F}\,d\overline{r})=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(-9\sin^2 t+18\cos^2 t)dt=9\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1-\cos 2t}{2}+1+\cos 2t\right)dt=\frac{9\pi}{4}$.

Окончательно получаем

$$C = \oint\limits_{AOBA} (\overline{F}\, d\,\overline{r}) = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{9\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}.$$

Способ 2

Вычислим циркуляцию векторного поля $\overline{F}$ вдоль контура L с помощью формулы Стокса

$$C = \oint\limits_{L} (\overline{F}\, d\,\overline{r}) = \iint\limits_{\sigma} (rot\,\overline{F} \cdot \overline{1}_n)\, d\sigma .$$

Найдем

$$rot\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-x & 2x-y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial(z)}{\partial y} - \frac{\partial(2x-y)}{\partial z} \right)\overline{i} + \left(\frac{\partial(y-x)}{\partial z} - \frac{\partial(z)}{\partial x} \right)\overline{j} + \left(\frac{\partial(2x-y)}{\partial x} - \frac{\partial(y-x)}{\partial y} \right)\overline{k} = \overline{k}.$$

В качестве поверхности σ, натянутой на контур L, возьмем часть плоскости xOy, ограниченную контуром L (рис.7).

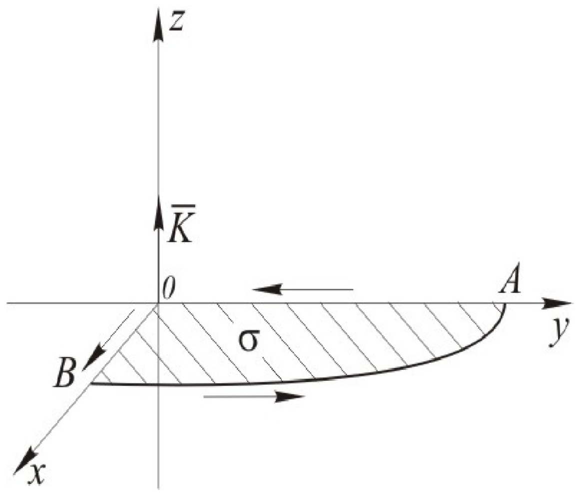

Рис.7

Единичным вектором нормали к поверхности σ является $\overline{1}_n = \overline{k} = (0,0,1)$, так как видимый с конца этого вектора обход контура L совершается против часовой стрелки (в соответствии с требованием теоремы Стокса).

Тогда скалярное произведение $\left(rot\,\overline{F}\cdot\overline{1}_n\right)=1$ и $C=\iint\limits_{\sigma}1\cdot d\sigma=\frac{\pi R^2}{4}=\frac{9\pi}{4}$.

75. Вычислить работу силового поля $\overline{F}=-(a\cos t\,\overline{i}+b\sin t\,\overline{j})$ вдоль дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ от точки $M_1(a,0)$ до точки $M_2(0,b)$.

<u>Указание.</u> Для вычисления работы удобно задать параметрические уравнения эллипса $x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $A=\frac{a^2-b^2}{2}$.

76. Найти работу поля $\overline{F}=(x^2+2y)\overline{i}+(y^2-2x)\overline{j}$ вдоль пути L в направлении от точки $M_1(-4,0)$ к точке $M_2(0,2)$, где L: 1) отрезок прямой M_1M_2; 2) ломаная M_1OM_2, $O(0,0)$; 3) дуга M_1M_2 параболы $y=2-\frac{x^2}{8}$.

Ответ: 1) $A=40$, 2) $A=24$, 3) $A=\frac{136}{3}$.

77. Вычислить работу силы $\overline{F}=xy\overline{i}+(x+y)\overline{j}$ при перемещении точки из начала координат в точку $B(1,2)$: 1) по прямой OB; 2) по координатной ломаной OCB, где точка C принадлежит оси Ox; 3) по дуге OB параболы $y=2x^2$.

Ответ: 1) $A=\frac{11}{3}$, 2) $A=4$, 3) $A=\frac{23}{6}$.

78. Найти работу векторного поля $\overline{F}=y\overline{i}+\sqrt{9-y^2}\,\overline{j}+z\overline{k}$ вдоль дуги L винтовой линии $x=3\cos t,\quad y=3\sin t,\quad z=\frac{2}{\pi}t$ от точки M_1 пересечения кривой с плоскостью xOy до точки M_2 ее пересечения с плоскостью $z=4$.

Ответ: $A=8$.

79. Найти работу силового поля $\overline{F}=x^2\,\overline{i}+y\overline{j}+\cos z\overline{k}$ по одному витку дуги M_1M_2 винтовой линии $x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=2t$, где точки M_1 и M_2

соответствуют значениям параметра $t=0$ и $t=\frac{3}{2}\pi$.

Ответ: $A=\frac{1}{6}a^2(3-2a)$.

80. Вычислить работу векторного поля $\overline{F}=(2xy+3z+1)\overline{i}+(x^2-2y)\overline{j}+(3x+5)\overline{k}$ вдоль отрезка прямой M_1M_2, где $M_1(0,0,0)$, $M_2(1,3,5)$.

Ответ: $A=35$.

81. Вычислить циркуляцию векторного поля двумя способами (непосредственно и по формуле Грина):

1) $\overline{F}=(1-x^2)y\overline{i}+x(1+y^2)\overline{j}$, $L: x^2+y^2=R^2$;

2) $\overline{F}=(x-y^2)\overline{i}+2xy\overline{j}$, $L: y=x$, $y=x^2$.

Ответ: 1) $C=\frac{\pi R^4}{2}$; 2) $C=\frac{4}{15}$.

82. Дано скалярное поле $U=U(x,y,z)$. Найти $div(gradU)$, $rot(gradU)$, если:

1) $U=x^2y-xyz+z^3$;

2) $U=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Ответ: 1) $div(gradU)=2y+6z$, $rot(gradU)=0$;

2) $div(gradU)=6x+6y+6z$, $rot(gradU)=0$.

83. Найти $div(rot\,\overline{F})$, если 1) $\overline{F}=x\overline{i}+y^3\overline{j}+xy\overline{k}$;

2) $\overline{F}=x^2\overline{i}+xy\overline{j}+xz\overline{k}$.

Ответ: 1) $div(rot\,\overline{F})=0$; 2) $div(rot\,\overline{F})=0$.

84. Вычислить циркуляцию векторного поля двумя способами (непосредственно и по формуле Стокса):

1) $\overline{F}=z\overline{i}+x\overline{j}+y\overline{k}$, $L: x^2+y^2=4$, $z=0$;

2) $\overline{F}=z\overline{i}+x\overline{j}+y\overline{k}$, L – контур пересечения плоскости $2x+2y+x=2$ с координатными плоскостями.

Ответ: 1) $C=4\pi$; 2) $C=\frac{5}{2}$.

85. Найти циркуляцию следующих векторных полей $\overline{F}$ по указанному контуру L:

1) $\overline{F}=-y\overline{i}+x\overline{j}$, $L: x^2+y^2-2y=0$;

2) $\overline{F}=(y+x)\overline{i}+(y-x)\overline{j}$, $L: x+y=1$, $x=0$, $y=0$;

3) $\overline{F}=xyz\overline{i}+(x+y+z)\overline{j}-x^2y^2\overline{k}$, L – контур квадрата $ABCDA$, где $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(-a,0,0,)$, $D(0,-a,0)$;

4) $\overline{F}=xy\overline{i}+yz\overline{j}+xz\overline{k}$, $L: x^2+y^2=1$, $x+y+z=2$;

5) $\overline{F}=(x+y+z)\overline{j}$, L – контур треугольника $ABCA$, где $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,2)$;

6) $\overline{F}=(x+z)\overline{i}+(x+y)\overline{j}+x\overline{k}$, $L: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$;

7) $\overline{F}=y\overline{i}-x\overline{j}+(x+y)\overline{k}$, $L: z=x^2+y^2$, $z=1$;

8) $\overline{F}=y\overline{i}-x\overline{j}+z\overline{k}$, $L: x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$.

Ответ: 1) $C=2\pi$; 2) $C=-1$; 3) $C=2a^2$; 4) $C=-2\pi$;

5) $C=-\frac{1}{2}$; 6) $C=\pi ab$; 7) $C=-2\pi$; 8) $C=-4\pi$.

10. Потенциальное векторное поле. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Векторное поле $\overline{F} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$ называется потенциальным, если вектор поля $\overline{F}$ является градиентом некоторой скалярной функции $U = U(x,y,z)$, то есть $\overline{F} = grad\,U$. Функция $U = U(x,y,z)$ называется потенциалом векторного поля $\overline{F}$. Необходимым и достаточным условием потенциальности дважды дифференцируемого в односвязной области V поля $\overline{F}$ является равенство нулю ротора этого поля $rot\overline{F} = 0$.

Пусть в односвязной области V задано векторное поле $\overline{F} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ и функции $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в области V. Тогда следующие утверждения равносильны, то есть если выполняется одно из них, то выполняются и все остальные.

1) Во всех точках области V ротор векторного поля $\overline{F}$ равен нулю, то есть $rot\overline{F} = 0$.

   Если D – плоская односвязная область, то $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

2) Векторное поле $\overline{F}$ является потенциальным.
3) Криволинейный интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области V, равен нулю:

$$C = \oint_L (\overline{F}\,d\overline{r}) = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

или циркуляция потенциального векторного поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

4) Подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой скалярной функции $Pdx + Qdy + Rdz = dU(x,y,z)$.

Тогда функция $U = U(x,y,z)$ - потенциал векторного поля $\overline{F}$ - может быть найдена с помощью криволинейного интеграла по формуле

$$U(x,y,z) = \int_A^M (\overline{F}\,d\overline{r}) + C = \int_A^M Pdx + Qdy + Pdz + C\,, \qquad (1)$$

где $A(x_0, y_0, z_0)$ - любая фиксированная точка,

$M(x,y,z)$ - произвольная точка области V,

С - произвольная постоянная.

5) Криволинейный интеграл $\int_A^B (\overline{F}\,d\overline{r}) = \int_A^B Pdx + Qdy + Rdz$ (2) не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки A и B, а зависит только от выбора начальной и конечной точек:

$$A = \int_A^B (\overline{F}\,d\overline{r}) = \int_A^B Pdx + Qdy + Rdz = \int_A^B dU(x,y,z) = U(B) - U(A)\,, \qquad (2)$$

то есть работа потенциального векторного поля $\overline{F}$ равна разности потенциалов в конечной и начальной точках пути.

Для вычисления криволинейных интегралов (1) и (2) можно выбрать любой путь. Проще всего в качестве такого пути выбрать ломаную со звеньями, параллельными осям координат, соединяющую начальную и конечную точки.

86. Показать, что векторное поле $\overline{F} = (y+z)\overline{i} + (x+z)\overline{j} + (x+y)\overline{k}$ потенциальное и найти его потенциал.

Решение: Условие $rot\overline{F} = 0$ является необходимым и достаточным условием потенциальности векторного поля $\overline{F}$. Найдем $rot\overline{F}$:

$$rot\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1)\overline{i} + (1-1)\overline{j} + (1-1)\overline{k} = 0.$$

Следовательно, поле вектора $\overline{F}$ - потенциальное во всем пространстве. Потенциал $U = U(x,y,z)$ векторного поля $\overline{F}$ найдем с помощью криволинейного интеграла по формуле

$$U(x,y,z) = \int_A^M (\overline{F}\,d\overline{r}) + C = \int_A^M Pdx + Qdy + Pdz + C\,.$$

Криволинейный интеграл в потенциальном поле не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от выбора начальной и конечной точек пути. За путь интегрирования примем координатную ломаную OM_1M_2M, где $O(0,0,0)$, $M_1(x,0,0,)$, $M_2(x,y,0)$, $M(x,y,z)$ (рис.8).

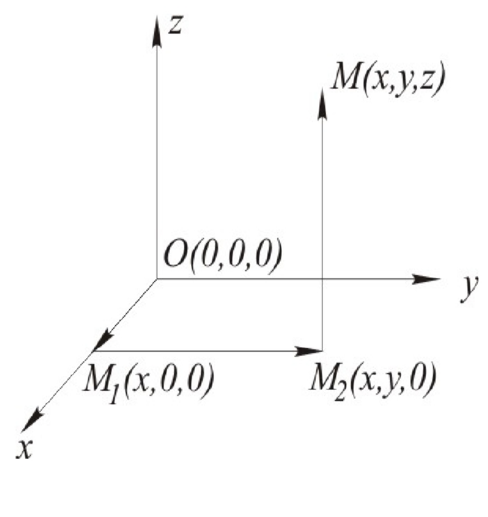

Рис.8

Тогда потенциал

$$U(x,y,z) = \int_{OM_1M_2M} (\overline{F}\,d\overline{r}) + C = \int_O^{M_1} (\overline{F}\,d\overline{r}) + \int_{M_1}^{M_2} (\overline{F}\,d\overline{r}) + \int_{M_2}^{M} (\overline{F}\,d\overline{r}) + C\,,$$

где скалярное произведение $(\overline{F}\,d\overline{r}) = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz\,.$

1) На OM_1 : так как $y=0, \quad z=0, \quad dy=0, \quad dz=0, \quad 0 \le x \le x$, то $\int\limits_O^{M_1} (\overline{F}\, d\overline{r}) = 0$.

2) На M_1M_2 : $x = x = const, \quad z=0, \quad dx=0, \quad dz=0, \quad 0 \le y \le y$, поэтому

$$\int\limits_{M_1}^{M_2} (\overline{F}\, d\overline{r}) = \int\limits_0^y x dy = x \int\limits_0^y dy = xy .$$

3) На M_2M : $x = x = const, \quad y = y = const, \quad dx=0, \quad dy=0, \quad 0 \le z \le z$, значит,

$$\int\limits_{M_2}^{M} (\overline{F}\, d\overline{r}) = \int\limits_0^z (x+y) dz = (x+y)\int\limits_0^z dz = xz + yz .$$

Складывая интегралы по отрезкам $OM_1, \ M_1M_2, \ M_2M$, получим выражение потенциала векторного поля $U(x,y,z) = xy + xz + yz + C$.

Вычисляя градиент от полученного потенциала векторного поля, убедимся в том, что он равен вектору $\overline{F}$:

$$grad U = (y+z)\overline{i} + (x+z)\overline{j} + (x+y)\overline{k} = \overline{F} .$$

87. Убедиться в том, что криволинейный интеграл $\int\limits_A^B (\overline{F}\, d\overline{r})$ не зависит от пути интегрирования, и вычислить его.

1) $\overline{F} = 2xy\overline{i} + (x^2+2y)\overline{j}, \quad A(1,0), \quad B(2,1)$;

2) $\overline{F} = (3x^2y - y^3)\overline{i} + (x^3 - 3xy^2)\overline{j}, \quad A(-1,0), \quad B(1,2)$;

3) $\overline{F} = (x^2 + 2xy - y^2)\overline{i} + (x^2 - 2xy - y^2)\overline{j}, \quad A(0,1), \quad B(2,1)$;

4) $\overline{F} = 2xy\overline{i} + x^2\overline{j} + 3z^2\overline{k}, \quad A(0,0,0), \quad B(1,2,3)$;

5) $\overline{F} = (yz - 2x)\overline{i} + (xz - 2y)\overline{j} + xy\overline{k}, \quad A(1,1,-1), \quad B(2,-1,0)$.

Ответ: 1) $\int\limits_A^B (\overline{F}\, d\overline{r}) = 5$; 2) $\int\limits_A^B (\overline{F}\, d\overline{r}) = -6$; 3) $\int\limits_A^B (\overline{F}\, d\overline{r}) = \frac{14}{3}$;

4) $\int\limits_A^B (\overline{F}\, d\overline{r}) = 29$; 5) $\int\limits_A^B (\overline{F}\, d\overline{r}) = -2$.

88. Доказать, что данное выражение является полным дифференциалом некоторой функции и найти эту функцию с помощью криволинейного интеграла.

1) $(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$;

2) $(3x^2y-y^3)dx+(x^3-3xy^2)dy$;

3) $(yz-2x)dx+(xz-2y)dy+xydz$;

4) $yzdx+zxdy+xydz$.

Ответ: 1) $U(x,y)=\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5+C$; 2) $U(x,y)=x^3y-xy^3+C$;

3) $U(x,y,z)=xyz-x^2-y^2+C$; 4) $U(x,y,z)=xyz+C$.

89. Показать, что векторное поле $\overline{F}$ является потенциальным и найти его потенциал.

1) $\overline{F}=6xy\overline{i}+(3x^2-2y)\overline{j}$;

2) $\overline{F}=\frac{dx}{x+y}+\frac{dy}{x+y}$;

3) $\overline{F}=(2xy+z)\overline{i}+(x^2-2y)\overline{j}+x\overline{k}$;

4) $\overline{F}=yz\cdot\cos(xy)\overline{i}+xz\cdot\cos(xy)\overline{j}+\sin(xy)\overline{k}$.

Ответ: 1) $U(x,y)=3x^2y-y^2+C$; 2) $U(x,y)=\ln(x+y)+C$;

3) $U(x,y,z)=x^2y+xz-y^2+C$; 4) $U(x,y,z)=z\sin(xy)+C$.

90. Показать, что векторное поле $\overline{F}$ является потенциальным, найти потенциал и вычислить работу вдоль пути, соединяющего точки M_1 и M_2.

1) $\overline{F}=2xy\overline{i}+(x^2+2y)\overline{j}$, $M_1(-1,2)$, $M_2(2,3)$;

2) $\overline{F}=2xyz\overline{i}+x^2z\overline{j}+x^2y\overline{k}$, $M_1(1,0,5)$, $M_2(3,1,1)$;

3) $\overline{F}=(yz+1)\overline{i}+xz\overline{j}+xy\overline{k}$, $M_1(1,2,2)$, $M_2(2,-1,-3)$.

Ответ: 1) $U(x,y)=x^2y+y^2+C$, $A=15$;

2) $U(x,y,z)=x^2yz+C$, $A=9$;

3) $U(x,y,z)=xyz+x+C$, $A=3$.

91. Доказать, что циркуляция вектора $\overline{F}$ по любому замкнутому контуру равна нулю, если:

1) $\overline{F}=(3x^2y+y^3)\overline{i}+(x^3+3xy^2)\overline{j}+2z\overline{k}$;

2) $\overline{F}=yz^2\,\overline{i}+xz^2\,\overline{j}+2xyz\overline{k}$.

11. Оператор Гамильтона. Дифференциальные операции второго порядка

Все операции векторного анализа можно выразить при помощи оператора Гамильтона – символического вектора ∇ (набла), определяемого равенством

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\,.$$

Применяя известные операции умножения вектора на скаляр, скалярного и векторного произведения двух векторов, находим

$$grad\,U=\frac{\partial U}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\overline{k}=\nabla U\,,$$

$$div\,\overline{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=(\nabla\,\overline{F}),$$

$$rot\;\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=[\nabla\,\overline{F}].$$

Скалярный квадрат оператора Гамильтона $\nabla^2=\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ называется оператором Лапласа.

Перечислим пять дифференциальных операций второго порядка со скалярным и векторным полями:

1) $div\,grad\,U=(\nabla\nabla)U=\Delta U$ (лапласиан функции);

2) $rot\,grad\,U=[\nabla\nabla]U=0$;

3) $grad\,div\,\overline{F}=\nabla(\nabla\,\overline{F})$;

4) $div\,rot\,\overline{F}=(\nabla[\nabla\,\overline{F}])=0$;

5) $rot\,rot\,\overline{F}=[\nabla[\nabla\,\overline{F}]]$.

Векторное поле $\overline{F}$ называется лапласовым или гармоническим, если оно одновременно и потенциальное ($\overline{F} = grad\,U$), и соленоидальное ($div\,\overline{F} = 0$). В этом случае $div\,grad\,U = \Delta U = 0$, следовательно, потенциал $U = U(x, y, z)$ является гармонической функцией, то есть удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 .$$

При применении оператора Гамильтона к произведениям не следует забывать, что по существу он представляет собой оператор дифференцирования и, следовательно, подчиняется правилу дифференцирования произведения. Так, например, для произведения двух скалярных функций U и V получаем

$$\nabla(U\,V) = U\,\nabla V + V\,\nabla U \qquad \text{или} \qquad grad(UV) = U\,grad\,V + V\,grad\,U .$$

92. С помощью оператора Гамильтона доказать справедливость равенств.

1) $div(U\,\overline{F}) = U\,div\,\overline{F} + \overline{F}\,grad\,U$;

2) $rot(U\,\overline{F}) = U\,rot\,\overline{F} + [grad\,U\,\overline{F}]$.

93. Проверить, являются ли гармоническими следующие функции:

1) $U = x^2 + 2xy - y^2$;

2) $U = x^2 y + y^2 z + z^2 x$;

3) $U = x^2 - y^2$;

4) $U = \ln\frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r \neq 0$.

Ответ: 1) является; 2) не является; 3) является; 4) является.

Варианты для подготовки к контрольной работе

Вариант 1

1. Найти производную функции $U = xy^2 + xyz^2 + yz$ в точке $A(-1,1,2)$ в направлении вектора $\overline{\ell} = -2\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$. Установить характер изменения поля в данном направлении.
2. Показать, что векторное поле $\overline{F} = yz\overline{i} + xz\overline{j} + xy\overline{k}$ потенциальное и найти его потенциал.
3. Найти массу дуги параболы $y = \dfrac{x^2}{2}$, лежащей между точками $A\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ и $B(2,2)$, если плотность $\gamma(x,y) = \dfrac{y}{x}$.
4. Найти поток векторного поля $\overline{F} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}$ через замкнутую поверхность σ, ограниченную цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостями $z = 0$ и $z = 2$, в сторону внешней нормали.
5. Вычислить поток векторного поля $\overline{F} = (x - z)\overline{i} + (z^2 - y^2)\overline{j} + (x + z)\overline{k}$ через боковую поверхность цилиндра $x^2 + z^2 = 4$, отсеченную плоскостями $y = 0$ и $y = 5$ и расположенную в первом октанте, в сторону внешней нормали.
6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\overline{F} = xy\overline{i} + \overline{j} + z\overline{k}$ по контуру L пересечения плоскости $x - y - z + 1 = 0$ с координатными плоскостями.
7. Найти $gradU$, $div(gradU)$, $rot(gradU)$, если $U = 5x^2 + 4y^2 + 3z^2$.

Ответ: 1) $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \ell}\right|_A = -\dfrac{20}{3}$, скалярное поле в данном направлении убывает;

2) $U(x,y,z)=xyz+C$; 3) $m=\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$;

4) $\Pi=80\pi$; 5) $\Pi=10\pi$; 6) $C=\frac{1}{6}$;

7) $gradU=10x\overline{i}+8y\overline{j}+6z\overline{k}$, $div(gradU)=24$, $rot(gradU)=0$.

Вариант 2

1. Найти направление наибольшего возрастания функции $U=x^3y+x^2y^2z^3$ в точке $A(1,1,0)$.
2. Вычислить статический момент относительно координатной плоскости xOy одного витка однородной винтовой линии $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $z=4t$, $0\le t\le 2\pi$.
3. Показать, что $\int\limits_A^B(\overline{F}\,d\overline{r})$ не зависит от пути интегрирования и вычислить его, если $\overline{F}=(2xy+1)\overline{i}+(x^2+1)\overline{j}$, $A(0,1)$, $B(2,3)$.
4. Найти поток векторного поля $\overline{F}=x^2\overline{i}+x\overline{j}+2xy\overline{k}$ через внешнюю часть боковой поверхности параболоида $z=x^2+y^2$, лежащую в первом октанте и ограниченную плоскостью $z=1$.
5. Найти поток векторного поля $\overline{F}=x^2\overline{i}+y^2\overline{j}+z^2\overline{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности σ, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=3$, $z=1$.
6. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{F}=xy\overline{j}$ вдоль окружности $x^2+y^2=1$, $z=1$.
7. Найти $rot\overline{F}$ и $div(rot\overline{F})$, если $\overline{F}=y^2z\overline{i}+xz^2\overline{j}+x^2y\overline{k}$.

Ответ: 1) $\overline{1}_{gradU(A)}=\frac{3}{\sqrt{10}}\overline{i}+\frac{1}{\sqrt{10}}\overline{j}$;

2) $M_{xy}=40\pi^2$; 3) $\int\limits_A^B(\overline{F}\,d\overline{r})=16$;

4) $\Pi = \frac{4}{15}$; 5) $\Pi = 36$; 6) $C = 0$;

7) $rot\overline{F} = (x^2 - 2xz)\overline{i} + (y^2 - 2xy)\overline{j} + (z^2 - 2yz)\overline{k}$, $div(rot\overline{F}) = 0$.

Список литературы

1. *Берман, Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие / *Г.Н. Берман.* - СПб.: Профессия, 2001 – 2005. – 440 с.
2. *Гольдфайн, И.А.* Векторный анализ и теория поля / *И.А. Гольдфайн.* - М.: Наука, 1987. – 128 с.
3. Элементы векторного анализа в задачах и упражнениях / сост. *Б.А. Горлач, Л.Г. Зубрина, И.П. Родионова.* - Куйбышев: Куйбышев. авиац. ин-т, 1988. – 40 с.
4. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / под ред. *А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича.* - М.: Наука, 2001. – 368 с.
5. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики / под ред. *Г.И. Кручковича.* - М.: Высшая школа, 2000. – 576 с.
6. *Пискунов, Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: учеб. пособие. В 2 т. /*Н.С. Пискунов* - М.: Интеграл – Пресс, 2001 – 2004.–584 с.

Учебное издание

**ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА
В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ**

Методические указания

Составители: **Зубрина Лилия Григорьевна**
Поникарова Наталья Юрьевна

Редактор Т.К. Кретинина
Компьютерная доверстка А.В. Ярославцева

Подписано в печать 30.05.2008 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,25.
Тираж 100 экз. Заказ Арт. С – 101 /2008

Самарский государственный аэрокосмический
университет. 443086, Самара, Московское шоссе, 34

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического
университета. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.