МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Числовые и функциональные ряды

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)» в качестве методических указаний

САМАРА
Издательство СГАУ
2013

УДК 517.5
ББК 22.19

Составители: ***С.В. Бушков, Л.В. Коломиец, О.Ю. Семёнова***

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Б.А. Г о р л а ч

Числовые и функциональные ряды: метод. указания / сост. ***С.В. Бушков, Л.В. Коломиец, О.Ю. Семёнова.* -** Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2013. – 36 с.

Методические указания составлены в соответствии с действующей программой по курсу высшей математики для инженерно-технических специальностей Самарского государственного аэрокосмического университета. Указания обеспечивают полную теоретическую и методическую поддержку практических занятий по темам «Числовые ряды» и «Функциональные ряды и их приложения».

Могут быть рекомендованы студентам для самостоятельной работы и подготовки к экзаменам.

Учебное издание

Составители: ***Бушков Станислав Владимирович***
Коломиец Людмила Вадимовна
Семенова Ольга Юрьевна

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Методические указания

Редактор Н.С. Куприянова
Компьютерная доверстка А.В. Ярославцева

Подписано в печать 05.07.2013 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 2,25.
Тираж 200 экз. Заказ . Арт. – М10/2013.

Самарский государственный аэрокосмический университет
443086 Самара, Московское шоссе, 34

Издательство Самарского государственного аэрокосмического университета
443086 Самара, Московское шоссе, 34

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОГО РЯДА И ЕГО СУММЫ

Рассмотрим числовую последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Составим из неё новую последовательность по правилу:

$S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_2$,

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$,

. . . .

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$,

. . . .

Определение 1. Выражение $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***числовым рядом***, числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называются ***членами ряда***, a_n – ***общим членом ряда.***

Определение 2. Сумма первых n членов ряда $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ называется ***n*-й частичной суммой ряда.**

Определение 3. Остатком числового ряда после n-го члена называется $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Определение 4. Числовой ряд называется ***сходящимся*,** если существует конечный предел последовательности его частичных сумм при $n \to \infty$, т.е. $S = \lim_{n \to \infty} S_n$. Число S называется ***суммой*** числового ряда, в этом случае записывают: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Если $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$ или не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***расходящимся*.**

Пример 1. Рассмотрим геометрическую прогрессию b_1, $b_1 q$, $b_1 q^2, \ldots$, $b_1 q^n, \ldots$. Из базового курса математики известно, что сумма её первых n членов равна

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},\ q \neq 1.$$

Возможны следующие случаи:

1) Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

2) Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_1 q^n$ сходится.

3) Если $q = -1$, то $S_n = b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + \ldots + b_1$. В этом случае сумма нечётного числа членов ряда $S_1 = S_3 = \ldots = S_{2n+1} = b_1$, а сумма чётного числа членов $S_2 = S_4 = \ldots = S_{2n+2} = 0$. Получили последовательность частичных сумм $b_1, 0, b_1, 0, \ldots$, которая не имеет предела. Следовательно, при $q = -1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_1 q^n$ расходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_1 q^n$, составленный из членов геометрической прогрессии, сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Пример 2. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 70n - 24}$.

Решение. Разложим общий член ряда на простейшие дроби:

$$a_n = \frac{14}{49n^2 - 70n - 24} = \frac{14}{(7n-12)(7n+2)} = \frac{1}{7n-12} - \frac{1}{7n+2}.$$

Найдём n-ю частичную сумму ряда:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{14}{49n^2 - 70n - 24} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{7n-12} - \frac{1}{7n+2} \right) = \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16} \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{23} \right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{30} \right) + \left(\frac{1}{23} - \frac{1}{37} \right) + \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{44} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{7n-12} - \frac{1}{7n+2} \right).$$

Заметим, что второе слагаемое скобки с номером « k » взаимно уничтожается с первым слагаемым скобки с номером «$k+2$», поэтому в итоге частичная сумма ряда имеет вид: $S_n=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{7n-5}-\frac{1}{7n+2}$.

Найдём предел: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{7n-5}-\frac{1}{7n+2}\right)=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$.

Ответ: данный ряд сходится и его сумма равна $\frac{3}{10}$.

2. СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Теорема 1. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то сходится и его остаток $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$, и наоборот. Другими словами, на сходимость ряда не влияет отбрасывание или добавление конечного числа членов.

Теорема 2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к сумме S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c\cdot a_n)$, где c =const, сходится к сумме $(c\cdot S)$.

Теорема 3. Если сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и их суммы соответственно равны S_1 и S_2, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ и его сумма равна $S_1\pm S_2$ (обратное неверно).

Теорема 4 (***необходимый признак*** сходимости ряда). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

Условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ является необходимым, но недостаточным условием сходимости ряда.

Пример 3. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ называется ***гармоническим*** рядом. Необходимый признак сходимости для этого ряда выполняется, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Докажем, что этот ряд расходится. Действительно, если бы ряд сходился к сумме *S*, то выполнялись бы соотношения: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=S-S=0$. Однако справедлива оценка

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, по теореме о предельном переходе в неравенствах из оценки $S_{2n}-S_n>\frac{1}{2}$ следует, что равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$ невозможно.

Ответ: гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Итак, из условия $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ не обязательно следует, что ряд сходится. Необходимый признак сходимости можно использовать **лишь для доказательства расходимости ряда.**

Пример 4. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$.

Решение. Если бы ряд сходился, то выполнялось бы условие $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Однако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1\neq 0$, т.е. необходимый признак сходимости не выполняется.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ расходится.

3. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Теорема 5 (признак сравнения). Пусть для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ для всех *n,* или начиная с некоторого *n,* имеет место неравенство $0 \le a_n \le b_n$.

Тогда:

1) если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; т.е. из сходимости ряда с бóльшими членами следует сходимость ряда с меньшими членами. Обратное неверно;

2) если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, т.е. из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с бóльшими членами. Обратное неверно.

Пример 5. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\arcsin \dfrac{3n}{4n+5}}{2^n + n}$.

Решение. Так как $\arcsin\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ для любых $\alpha \in [-1;1]$, то, учитывая, что $\alpha = \dfrac{3n}{4n+5} \in (0;1)$, можно записать следующую оценку:

$$a_n = \frac{\arcsin \dfrac{3n}{4n+5}}{2^n + n} < \frac{\dfrac{\pi}{2}}{2^n + n} < \frac{\dfrac{\pi}{2}}{2^n}.$$

Ряд с бóльшими членами $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\pi}{4} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_1 \cdot q^n$ составлен из членов геометрической прогрессии, где $b_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $q = \dfrac{1}{2} < 1$ и, следовательно, сходится. Тогда по признаку сравнения сходится и ряд с меньшими членами.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{3n}{4n+5}}{2^n+n}$ сходится по признаку сравнения.

Теорема 6 (предельный признак сравнения). Пусть $a_n>0$, $b_n>0$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=q\neq 0\ \left(q\neq\infty\right)$.

Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ являются ***эквивалентными в смысле сходимости***, т.е. сходятся или расходятся одновременно.

Пример 6. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+5n-4}{4n^3-2n+1}$.

Решение. Применим предельный признак сравнения. В качестве ряда сравнения возьмём расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и найдём

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+5n-4)\cdot n}{4n^3-2n+1}=\frac{3}{4}\neq 0.$$

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+5n-4}{4n^3-2n+1}$ расходится по предельному признаку сравнения.

Пример 7. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4\mathrm{tg}^5\frac{\pi}{n}$.

Решение. Применим предельный признак сравнения. В качестве ряда сравнения рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и найдём

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\cdot\mathrm{tg}^5\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}=\begin{bmatrix}\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi}{n}\\ \text{при}\quad n\to\infty\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\cdot\frac{\pi^5}{n^5}}{\frac{1}{n}}=\pi^5\neq 0.$$

Гармонический ряд расходится, поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n}$ также расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n}$ расходится по предельному признаку сравнения.

Теорема 7 (признак Даламбера). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$. Тогда:

1) если $0 \le \rho < 1$, то ряд сходится;

2) если $\rho > 1$, то ряд расходится;

3) если $\rho = 1$, то требуется дополнительное исследование по другим признакам.

Пример 8. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 ... (3n-2)}{2^{n+1} n!}$.

Решение. $a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 ... (3n-2)}{2^{n+1} n!}$, $a_{n+1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 ... (3n-2)(3n+1)}{2^{n+2} (n+1)!}$. Найдём

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot ... \cdot (3n-2)(3n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot n!}{2^{n+2} \cdot (n+1)! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot ... \cdot (3n-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2(n+1)} = \frac{3}{2} > 1.$$

Ответ: по признаку Даламбера данный ряд расходится.

Пример 9. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 5^n}$.

Решение. $a_n = \frac{n^n}{n! \cdot 5^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! \cdot 5^{n+1}}$. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n! \cdot 5^n}{(n+1)! \cdot 5^{n+1} \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{5 \cdot n^n} = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{5} e < 1.$$

Здесь использован второй замечательный предел $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n! \cdot 5^n}$ сходится по признаку Даламбера.

Теорема 8 (радикальный признак Коши). Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$. Тогда:

1) если $0 \le \rho < 1$, то ряд сходится;

2) если $\rho > 1$, то ряд расходится;

3) если $\rho = 1$, то требуется дополнительное исследование по другим признакам.

Пример 10. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \operatorname{arctg}^{2n} \dfrac{\pi}{4n}$.

Решение. Найдём предел:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^4 \cdot \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n}} = \lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^4 \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{4n}\right)^2 = 1 \cdot 0 < 1.$$

При вычислении предела использовано известное равенство $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \operatorname{arctg}^{2n} \dfrac{\pi}{4n}$ сходится по радикальному признаку Коши.

Теорема 9 (интегральный признак Коши). Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ имеют вид $a_n = f(n)$, где $f(x)$ – неотрицательная, монотонно убывающая функция на промежутке $[1, +\infty)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходится (расходится) несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

Пример 11. Исследуйте на сходимость обобщённо-гармонический ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$.

Решение. При $\alpha = 1$ имеем расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

При $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ положим $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$. Функция $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ непрерывна и монотонно убывает на промежутке $[1, +\infty)$. Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \left. \frac{1}{(1-\alpha)\, x^{\alpha-1}} \right|_1^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha < 1$.

Ответ: по интегральному признаку Коши **обобщённо-гармонический ряд Дирихле сходится при** $\alpha > 1$ **и расходится при** $\alpha \leq 1$.

Пример 12. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{\left(n^2 - 2\right) \ln 2n}$.

Решение. Непосредственное применение интегрального признака приводит к интегралу $\int_2^{+\infty} \frac{3x\, dx}{\left(x^2 - 2\right) \ln 2x}$, вычислить который затруднительно. Поступим по-другому. Подберём ряд, эквивалентный данному в смысле сходимости. Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2n}$. Применим предельный признак сравнения. Вычислим $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 \ln 2n}{\left(n^2 - 2\right) \ln 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2 - 2} = 3 \neq 0$. Следовательно, по предельному признаку сравнения ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно. Исследуем теперь ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ по интегральному признаку.

Вычислим интеграл $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln 2x} = \ln|\ln 2x| \Big|_{2}^{+\infty} = +\infty$.

Ответ: несобственный интеграл $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln 2x}$ расходится, следовательно, по интегральному признаку ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2n}$ расходится. Тогда данный ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2 - 2) \ln 2n}$ также расходится по предельному признаку сравнения.

4. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Ряды, члены которых могут иметь различные знаки, называются ***знакопеременными***. Рассмотрим ряды, содержащие бесконечное число как отрицательных, так и положительных членов. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Составим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, все его члены являются неотрицательными числами, следовательно, к этому ряду можно применять достаточные признаки сходимости (сравнения, Даламбера, Коши).

Определение 5. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***абсолютно сходящимся***. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***условно сходящимся***.

Пример 13. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n^3}{(n+1)!}$.

Решение. Составим ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{(n+1)!}$ и исследуем его с помощью признака Даламбера. Найдём предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot(n+1)!}{(n+2)!\cdot n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0<1.$$

Ответ: ряд, составленный из модулей, сходится, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

5. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

Частным случаем знакопеременных рядов являются знакочередующиеся ряды, т.е. ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot a_n=-a_1+a_2-a_3+a_4-\ldots$, где $a_n>0$.

Не ограничивая общности, в дальнейшем будем рассматривать ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n$.

Теорема 10 (признак Лейбница). Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,\quad a_n>0$ выполнены условия:

1) $a_1\ge a_2\ge a_3\ge\ldots$ (члены ряда не возрастают по абсолютной величине);

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится, причём его сумма не превосходит по модулю первого члена, т.е. $|S|\le a_1$.

План исследования на абсолютную и условную
сходимость знакочередующегося ряда:

1) составить ряд из модулей и исследовать полученный ряд на сходимость по достаточным признакам сходимости знакоположительных рядов (сравнения, Даламбера, Коши);
2) если ряд из модулей сходится, то исходный ряд сходится абсолютно;
3) если ряд из модулей расходится, то применить к исходному ряду признак Лейбница;
4) если признак Лейбница выполняется, то исходный ряд сходится условно;
5) если признак Лейбница не выполняется, то исходный ряд расходится.

Следствие. Если знакочередующийся ряд сходится, то его остаток $r_n = \pm\left(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots\right)$ тоже является знакочередующимся сходящимся рядом, следовательно, по признаку Лейбница его сумма r_n не превосходит по модулю первого члена a_{n+1}: $\left|r_n\right| \le \left|a_{n+1}\right|$. Отсюда следует, что для знакочередующегося сходящегося ряда ***погрешность приближённого равенства*** $S \approx S_n$ ***не превосходит по модулю первого отброшенного члена:*** $\Delta = \left|S - S_n\right| = \left|r_n\right| \le \left|a_{n+1}\right|$.

Пример 14. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n^2+5}$ и вычислите его сумму с точностью 0,01.

Решение. Ряд из модулей имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+5}$, он расходится по предельному признаку сравнения одновременно с гармоническим рядом, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+5} : \dfrac{1}{n} = 1$. Значит, данный ряд не сходится абсолютно.

Применим к исходному знакочередующемуся ряду признак Лейбница:

1) $a_n - a_{n+1} = \dfrac{n}{n^2+5} - \dfrac{n+1}{(n+1)^2+5} = \dfrac{n^2+n-5}{\left(n^2+5\right)\left((n+1)^2+5\right)} > 0$ для всех $n \ge 2$, т.е. $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \ge 2$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+5} = 0$.

Условия признака Лейбница выполняются при всех $n \geq 2$, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n}{n^2+5}$ сходится условно.

Вычислим приближённо сумму данного ряда с точностью 0,01. Из следствия признака Лейбница $\Delta = |r_n(x)| = |S - S_n| \leq |a_{n+1}|$. Следовательно, $\Delta < \dfrac{n+1}{(n+1)^2+5} < 0,01$. Это неравенство будет выполняться при $n \geq 99$. Следовательно, для нахождения суммы данного ряда с точностью до 0,01 достаточно взять 99 первых его членов, т.е. $S \approx S_{99}$. Тогда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{n^2+5} \approx \sum_{n=1}^{99} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{n^2+5} = \frac{1}{6} - \frac{2}{9} + \frac{3}{14} - .... - \frac{99}{99^2+5} \approx 0,06 \cdot$$

Заметим, что результат вычисления приближённого значения суммы данного ряда необходимо округлить до двух знаков после запятой.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n}{n^2+5}$ сходится условно и его сумма $S \approx 0,06$.

6. СВОЙСТВА АБСОЛЮТНО И УСЛОВНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Теорема 11. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно и их суммы соответственно равны A и B. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ сходится абсолютно и его сумма равна $A \pm B$.

Теорема 12. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно и его сумма равна A, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$, где $c = \text{const}$, сходится абсолютно и его сумма равна ($c \cdot A$).

Определение 6. Произведением рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$.

Теорема 13. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно к сумме A, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится условно к сумме B, то произведение этих рядов $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится (необязательно абсолютно) к сумме $C = A \cdot B$.

Теорема 14. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то оба ряда, составленные из положительных и отрицательных членов этого ряда, расходятся.

Известно, что сумма конечного числа слагаемых не зависит от перестановки слагаемых. Сохранится ли это свойство для бесконечного числа слагаемых?

Теорема 15 (Дирихле). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно к сумме S. Тогда при любой перестановке членов ряда он останется сходящимся к сумме S.

Теорема 16 (Римана). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то путём перестановки его членов можно получить ряд, сумма которого будет равна любому наперёд заданному числу A, или расходящийся ряд.

7. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Определение 7. ***Функциональным рядом*** называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

где $u_n(x)$ – функции, определённые на некотором множестве X.

Сумма $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ называется ***n-й частичной суммой ряда***, выражение $r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)$ – ***остатком ряда***.

При каждом фиксированном $x=x_o$ функциональный ряд превращается в числовой и его сходимость можно исследовать по известным признакам. Если такой числовой ряд сходится, то говорят, что функциональный ряд сходится в точке x_0. Совокупность всех значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется ***областью сходимости*** функционального ряда.

Суммой функционального ряда называется функция $S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$, определённая в области сходимости функционального ряда. Функциональный ряд называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$.

Для определения области сходимости функционального ряда можно использовать обобщённые признаки сравнения, Даламбера, Коши и т.д., в которых вместо a_n надо брать $|u_n(x)|$.

Пример 15. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$.

Решение. Зафиксируем x. Получим числовой знакоположительный ряд. Этот ряд сходится на всей числовой прямой по признаку сравнения, т.к. $\frac{1}{n^2+x^2}\le\frac{1}{n^2}$ для всех x, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (ряд Дирихле, $\alpha=2>1$).

Ответ: область сходимости ряда $(-\infty;+\infty)$.

Пример 16. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{x^n}$.

Решение. Зафиксируем $x \neq 0$. Получим числовой ряд, который в общем случае является знакочередующимся. Поэтому составим ряд из модулей и применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|u_{n+1}(x)\right|}{\left|u_n(x)\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)!}{|x|^{n+1}}\cdot\frac{|x|^n}{(n+2)!}=\frac{1}{|x|}\cdot\lim_{n\to\infty}(n+3)=\infty>1.$$

Этот результат справедлив для всех допустимых значений *x*. Следовательно, ряд расходится на всей области определения.

Ответ: область сходимости ряда – пустое множество $\varnothing$.

Пример 17. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{nx}$.

Решение. Зафиксируем *x*. Получим числовой знакоположительный ряд. Применим к нему радикальный признак Коши: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\lim_{n\to\infty}e^x=e^x$. Ряд будет сходиться, если $e^x<1$, т.е. $x<0$. Остаётся рассмотреть случай $x=0$. При этом исходный ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} n$ и расходится, т.к. для него не выполняется необходимый признак сходимости ряда: $\lim_{n\to\infty} n=\infty\neq 0$. Таким образом, точка $x=0$ не входит в область сходимости ряда.

Ответ: область сходимости ряда $(-\infty;\ 0)$.

Пример 18. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n+2)(x+2)^n}$.

Зафиксируем x, получим числовой ряд, который в общем случае является знакочередующимся. Поэтому составим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3n+2)|x+2|^n}$ и применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(3n+5)|x+2|^{n+1}} \frac{(3n+2)|x+2|^n}{2^n} = \frac{2}{|x+2|} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{3n+5} = \frac{2}{|x+2|}.$$

Ряд будет сходиться, если $\frac{2}{|x+2|} < 1$, т.е. при $x \in (-\infty;-4) \cup (0;+\infty)$.

При $x = 0$ ряд примет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$, он расходится одновременно с гармоническим рядом по предельному признаку сравнения.

При $x = -4$ ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$ и является знакочередующимся. Этот ряд сходится условно по признаку Лейбница.

Ответ: область сходимости $(-\infty;-4] \cup (0;+\infty)$.

8. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Основным вопросом исследования функциональных рядов является вопрос о свойствах суммы $S(x)$ ряда в зависимости от свойств членов $u_n(x)$ этого ряда. Возникают вопросы:

1) если члены ряда $u_n(x)$ – непрерывные функции, то будет ли $S(x)$ тоже непрерывной функцией?

2) если члены ряда интегрируемые (дифференцируемые) функции, то будет ли сумма ряда интегрируемой (дифференцируемой) функцией?

Пример 18. Найдите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} x\cdot(1-x)^n$, $x\in[0,1]$.

Решение. Очевидно, что $S(0)=S(1)=0$. Пусть $x\in(0,1)$. Ряд в этом случае представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$ со знаменателем $q=1-x<1$ и сходится.

Сумма прогрессии равна $S(x)=\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{x}{1-(1-x)}=1$, $0<x<1$.

Окончательно сумма ряда имеет вид:

$$S(x)=\begin{cases}0,\ x=0,\ x=1\\ 1,\ x\in(0,1).\end{cases}$$

Хотя все члены ряда являются непрерывными на отрезке $[0,1]$ функциями, сумма ряда $S(x)$ оказалась разрывной функцией. Таким образом, в общем случае сумма функционального ряда не всегда наследует свойства членов ряда.

Определение 8. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется ***равномерно сходящимся*** в области D к сумме $S(x)$, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$ (номер, зависящий от ε и не зависящий от *x*), такой, что $\forall n>N$ выполняется неравенство $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in D$ (или $|r_n(x)|<\varepsilon$).

На рис. 1 приведена геометрическая иллюстрация равномерной сходимости функционального ряда.

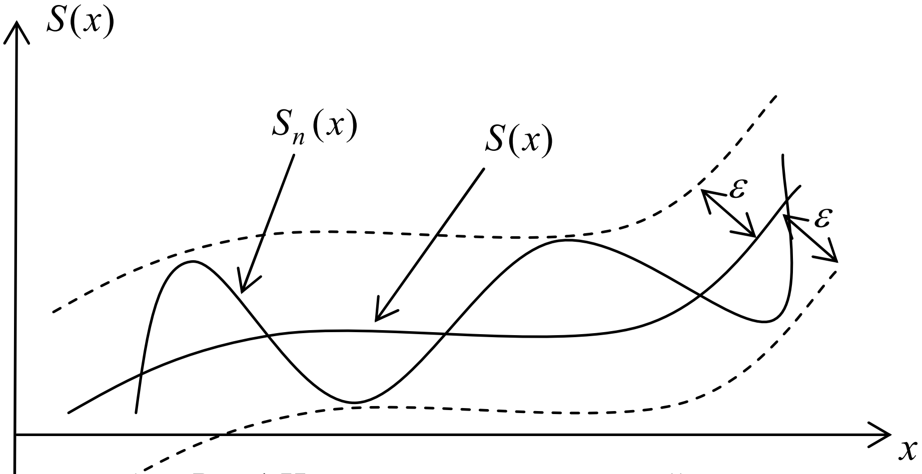

Рис.1 Иллюстрация равномерной сходимости.

Пример 18. Докажите равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{10n-2}$ на отрезке [0,1].

Решение. Оценим остаток ряда: $|r_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{10n+8} - \frac{x^{n+2}}{10n+18} + \ldots\right|$.

Выражение под знаком модуля при каждом фиксированном $x \in [0,1]$ является знакочередующимся рядом, который сходится по признаку Лейбница и его сумма не превосходит первого члена:

$$|r_n(x)| \le \frac{x^{n+1}}{10n+8} \le \frac{1}{10n+8} < \varepsilon .$$

Решая неравенство $\frac{1}{10n+8} < \varepsilon$, находим $n > \frac{1-8\varepsilon}{10\varepsilon}$.

Таким образом, существует номер $N(\varepsilon) = \left[\frac{1-8\varepsilon}{10\varepsilon}\right]$, не зависящий от *x*, такой что $|r_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n > N(\varepsilon)$. Следовательно, по определению функциональный ряд $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{10n-2}$ сходится равномерно при $x \in [0,1]$.

Ответ: ряд сходится равномерно при $x \in [0,1]$.

Теорема 17. (признак Вейерштрасса равномерной сходимости).

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in D$ удовлетворяют неравенству $|u_n(x)| \le a_n$ и числовой знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно в области D.

Пример 19. Исследуйте на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x-3)^n}{n\sqrt{n+1}}$.

Решение. При любых $x \in R$ выполняется неравенство:

$$\frac{\sin(x-3)^n}{n\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n^3}} .$$

Обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ сходится ($\alpha=\frac{3}{2}>1$). Следовательно, по признаку Вейерштрасса функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(x-3)^n}{n\sqrt{n+1}}$ сходится равномерно при любом действительном x.

Ответ: ряд сходится равномерно при $x\in(-\infty;+\infty)$.

9. СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Теорема 18 (о непрерывности суммы ряда). Пусть в области D:

1) все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ являются непрерывными функциями;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится ***равномерно*** к сумме $S(x)$.

Тогда сумма ряда $S(x)$ есть непрерывная функция в области D.

Теорема 19 (о почленном интегрировании ряда). Пусть в области D:

1) все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ являются непрерывными функциями;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится ***равномерно*** к сумме $S(x)$.

Тогда его можно почленно интегрировать на любом отрезке $\left[a_1,b_1\right]\subset D$ и справедлива формула $\int_{a_1}^{b_1}S(x)dx=\int_{a_1}^{b_1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_1}^{b_1}u_n(x)dx.$

Теорема 20 (о почленном дифференцировании ряда). Пусть в области D:

1) все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ являются непрерывно-дифференцируемыми функциями;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится к сумме $S(x)$;

3) ряд, составленный из производных $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, сходится равномерно.

Тогда в области D ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно, его сумма $S(x)$ является непрерывно-дифференцируемой функцией, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно дифференцировать:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Пример 20. Докажите равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$, $x \in R$.

Решение. Составим ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$ и докажем его равномерную сходимость. Заметим, что $\forall x \in R \quad 0 < \frac{n^2}{n^4 + x^2} \le \frac{1}{n^2}$. Обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится ($\alpha = 2 > 1$). Следовательно, по признаку Вейерштрасса функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$ сходится ***равномерно*** при любом действительном x. Тогда по теореме о почленном дифференцировании исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ сходится равномерно при $x \in (-\infty; +\infty)$,

причём $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$.

Ответ: ряд сходится равномерно при $x \in (-\infty; +\infty)$.

10. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Определение 9. Функциональные ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ или $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, составленные из степенных функций, называются ***степенными***.

Действительные числа a_n называются ***коэффициентами степенного ряда***.

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, по крайней мере, в одной точке $x = 0$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ – в точке $x = x_0$.

Так как заменой $t = x - x_0$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ сводится к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то в дальнейшем будем рассматривать ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Теорема 21 (Абеля). Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в некоторой точке $x_0 \neq 0$. Тогда он сходится абсолютно в любой точке x, удовлетворяющей неравенству $|x| < |x_0|$, и сходится равномерно в области $|x| \le q < |x_0|$. Пусть ряд расходится в некоторой точке x_1. Тогда он расходится и во всех точках x, таких, что $|x| > |x_1|$.

На рис. 2 приведена геометрическая иллюстрация теоремы Абеля.

Рис. 2. Иллюстрация теоремы Абеля

Таким образом, областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ всегда является конечный или бесконечный интервал с центром в точке $x=0$ или единственная точка $x=0$.

Пример 21. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-3)^n}{(n^4+1)^2}$.

Решение. Зафиксируем *x*. Получим числовой ряд, который в общем случае является знакочередующимся. Поэтому составим ряд из модулей и применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot |x-3|^{n+1}}{\left((n+1)^4+1\right)^2} \cdot \frac{(n^4+1)^2}{n^2 \cdot |x-3|^n} =$$

$$= |x-3| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot (n^4+1)^2}{\left((n+1)^4+1\right) \cdot n^2} = |x-3| \cdot 1 = |x-3|.$$

Ряд будет сходиться, если $|x-3|<1$, т.е. $x \in (2;4)$.

При $x=4$ получим числовой знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^4+1)^2}$. Применим к нему предельный признак сравнения. Возьмём в качестве ряда сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$, который сходится как ряд Дирихле ($\alpha = 6 > 1$).

Найдём предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n^4+1)^2} \cdot \frac{n^6}{1} = 1 \neq 0$. Следовательно, ряды

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^4+1)^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ сходятся одновременно. Таким образом, ряд сходится на правом конце интервала сходимости $x=4$.

При $x=2$ получаем числовой знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n^4+1)^2}$, который сходится абсолютно, т.к. сходится ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^4+1)^2}$. На левом конце интервала сходимости $x=2$ ряд также сходится.

Ответ: областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-3)^n}{(n^4+1)^2}$ является отрезок $[2,4]$.

Пример 22. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^{2n}}{n}$.

Решение. Зафиксируем *x*. Получим числовой ряд, который является знакоположительным для любых *x*. Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}\cdot(x+1)^{2n+2}\cdot n}{(n+1)\cdot 4^{n}\cdot(x+1)^{2n}}=4(x+1)^2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n=1}=4(x+1)^2.$$

По признаку Даламбера степенной ряд будет сходиться, если $4(x+1)^2<1$, т.е. при $x\in\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Подставляя $x=-\frac{3}{2}$ и $x=-\frac{1}{2}$ в исходный степенной ряд, получим расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Таким образом, на концах интервала сходимости степенной ряд расходится.

Ответ: областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^{2n}}{n}$ является интервал $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Следствиями теоремы Абеля являются следующие теоремы:

Теорема 22. Сумма степенного ряда есть функция, непрерывная на любом отрезке из интервала сходимости.

Теорема 23. Степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке, целиком принадлежащем интервалу сходимости ряда. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости любое число раз. При этом ряды, полученные почленным интегрированием или дифференцированием степенного ряда, имеют тот же интервал сходимости, что и исходный ряд.

Пример 23. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Решение. Интервалом сходимости данного степенного ряда является $(-1,1)$.

Составим ряд из производных: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \ldots$. Члены этого ряда образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = x,\ \ x \in (-1;1),$ сумма прогрессии равна $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$.

Проинтегрируем последнее равенство в пределах от 0 до x, где $x \in (-1;1)$:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \right) dx = \int_0^x \frac{dx}{1-x}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x x^{n-1} dx = -\ln(1-x)\ ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)\ .$$

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, $x \in (-1;1)$.

11. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Говорят, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ или в ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, если этот степенной ряд ***сходится и его сумма равна*** $f(x)$ на интервале сходимости.

Предположим, что функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Тейлора. Однако чисто формальное разложение в ряд Тейлора может привести к неверному результату, т.к.

1) ряд может сходиться к $f(x)$ только в некоторой области; 2) ряд может сходиться, но не к $f(x)$; 3) ряд может расходиться.

Рассмотрим условия разложения функции в ряд Тейлора.

Теорема 24. Если производные любого порядка функции $f(x)$ ограничены одной и той же постоянной, т.е. $\left|f^{(k)}(x)\right| \le M$, $\forall k$, $\forall x \in U(x_0)$, то ряд Тейлора сходится к $f(x)$ в области $U(x_0)$.

Теорема 25. Разложение функции в ряд Тейлора единственно.

Приведем разложение основных элементарных функций в степенные ряды.

1) $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots,\ x \in R$

2) $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,\ x \in R$

3) $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ x \in R$

4) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,\ x \in R$

5) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...,\ x \in R$

6) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + ...,\ |x| < 1$

7) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ...,\ |x| < 1$

8) $\arcsin x = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + ...,\ |x| < 1$

9) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...,\ |x| < 1$

Пример 24. Разложите функцию $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ в ряд Тейлора по степеням x. Найдите область сходимости полученного ряда.

Решение. Так как $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...,$ то

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

Областью сходимости полученного ряда является интервал $|x| < 1$, такой же, как и для разложения $\operatorname{arctg} x$.

Ответ: $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1},\quad |x| < 1.$

Пример 25. Разложите функцию $f(x) = \frac{3}{2 - x - x^2}$ в ряд Тейлора по степеням x. Найдите область сходимости полученного ряда.

Решение. Представим дробь $\frac{3}{2 - x - x^2}$ в виде суммы простейших дробей:

$\frac{3}{2 - x - x^2} = \frac{3}{(x+2)(1-x)} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{1-x}$. Разложим каждую простейшую дробь в правой части равенства по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\dfrac{b}{1-q}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b\cdot q^n$, $|q|<1$:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ |x|<1;$$

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot x^n,\quad \left|\frac{-x}{2}\right|<1 \text{ или } |x|<2.$$

Теперь найдем разложение в ряд исходной функции:

$$f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2+x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)\cdot x^n.$$

Область сходимости последнего ряда находится как пересечение областей сходимости двух рядов: $|x|<1$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{3}{2-x-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)\cdot x^n$, $|x|<1$.

Пример 26. Разложите функцию $f(x)=\ln(1-x-20x^2)$ в ряд Тейлора по степеням x.

Решение. Разложим аргумент логарифма на множители:

$$\ln(1-x-20x^2)=\ln\big((1+4x)(1-5x)\big)=\ln(1+4x)+\ln(1-5x).$$

Применим формулу $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-...+(-1)^n\,\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+...$, $|x|<1$.

$$\ln(1+4x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(4x)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{n+1}}{n+1}x^{n+1},.\,|4x|<1,\quad |x|<\frac{1}{4}.$$

$$\ln(1-5x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(-5x)^{n+1}}{n+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{n+1}x^{n+1},\quad |5x|<1,\quad |x|<\frac{1}{5}.$$

Теперь найдем разложение исходной функции в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x)=\ln(1-x-20x^2)=\ln(1+4x)+\ln(1-5x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{n+1}-5^{n+1}}{n+1}x^{n+1}$$

,причём это разложение справедливо при $|x|<\frac{1}{5}$ (пересечение областей сходимости двух слагаемых).

Ответ: $f\left(x\right)=\ln\left(1-x-20x^2\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n 4^{n+1}-5^{n+1}}{n+1}x^{n+1}$**,** $|x|<\frac{1}{5}$.

12. ПРИЛОЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Приближённое вычисление значений функции.

Функцию разлагают в степенной ряд, оставляя первые n членов. Погрешность равна остатку ряда $\Delta=r_n(x)$. Для оценки погрешности применяют приёмы:

а) если ряд $r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$ знакоположительный, его сравнивают с геометрической прогрессией;

б) если ряд $r_n(x)=u_{n+1}(x)-u_{n+2}(x)+u_{n+3}(x)-\ldots$ знакочередующийся, применяют признак Лейбница.

Пример 27. Оценить погрешность приближённого равенства

$$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}.$$

Решение. $|r_n(x)|=\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\frac{x^{n+3}}{(n+3)!}+\ldots\right|=$

$$=\left|\frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)(n+2)}+\frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1}+\left(\frac{x}{n+1}\right)^2+\left(\frac{x}{n+1}\right)^3+\ldots\right)\right|.$$

Применим к выражению в скобках формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$|r_n(x)| \le \left| \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{\frac{x}{n+1}}{1-\frac{x}{n+1}} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{n!(n+1-x)} \right|, \quad \frac{|x|}{n+1} < 1.$$

Ответ: $|r_n(x)| \le \left| \dfrac{x^{n+1}}{n!(n+1-x)} \right|, \quad |x| < n+1.$

Пример 28. Вычислить $\ln(1,3)$ с точностью 10^{-3}.

Решение. Применим разложение для логарифмической функции $\ln(1+x)$ при $x = 0,3 \in (-1;1)$:

$$\ln(1+0,3) = 0,3 - \frac{(0,3)^2}{2} + \frac{(0,3)^3}{3} - \frac{(0,3)^4}{4} + \frac{(0,3)^5}{5} - \frac{(0,3)^6}{6} + \ldots$$

В правой части этого равенства получился числовой знакочередующийся ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница. По следствию этого признака погрешность приближённого равенства $S \approx S_n$ не превосходит по модулю первого отброшенного члена: $\Delta = |S - S_n| = |r_n| \le |a_{n+1}|$.

Заметим, что $a_5 = \dfrac{(0,3)^5}{5} = 0,000486 < 10^{-3}$, поэтому для приближенного вычисления суммы знакочередующегося ряда достаточно взять первые четыре слагаемых, а затем округлить результат до трех знаков после запятой согласно заданной точности:

$$0,3 - \frac{(0,3)^2}{2} + \frac{(0,3)^3}{3} - \frac{(0,3)^4}{4} = 0,261975 \approx 0,262.$$

Ответ: $\ln(1,3) \approx 0,262$.

Вычисление пределов

Пример 29. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Решение. При $x\to 0$ получаем неопределённость вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Применять таблицу эквивалентных бесконечно малых нельзя, так как в числителе стоит разность бесконечно малых одного порядка. Вычислим этот предел, разложив слагаемые в числителе в степенные ряды:

$\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-...;$ область сходимости $(-\infty;+\infty)$.

$\operatorname{arctg} x = x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-...;$ область сходимости $|x|<1$. При $x\to 0$ можно применить указанное разложение. Подставим в предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-...\right)-\left(x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-...\right)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)-x^2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)+...\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x-\operatorname{arctg}x}{x^3}=\dfrac{1}{6}.$

Пример 30. Докажите справедливость равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{(2n)!!}=0$.

Решение. По определению $(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot ...\cdot 2n$. Аналогично $(2n+1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n+1)$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{(2n)!!}$ и применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)^2+1)\cdot(2n)!!}{(2n+2)!!\cdot(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{((n+1)^2+1)}{(2n+2)\cdot(n^2+1)}\right)=0<1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(2n)!!}$ сходится. Но тогда по необходимому признаку сходимости предел общего члена этого ряда равен нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(2n)!!}=0$. Равенство доказано.

Приближённое вычисление интегралов

Пример 31. Вычислите интеграл $\int_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ с точностью 10^{-4}.

Решение. Разложим $\cos x$ в ряд Тейлора по степеням x:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+... \qquad , \qquad x\in(-\infty;+\infty).$$

Тогда

$$1-\cos x=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-...,\ x\in(-\infty;+\infty).$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-...,\ x\in(-\infty;+\infty).$$

Подставим полученное разложение подынтегральной функции в исходный интеграл:

$$\int_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx=\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-...\right)dx.$$

Под знаком интеграла стоит степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$, сходящийся на всей числовой прямой. Следовательно, по теореме Абеля он сходится равномерно на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Поэтому его можно почленно интегрировать на этом отрезке. Проинтегрируем:

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \left(\frac{1}{2!}x - \frac{1}{4!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{6!}\frac{x^5}{5} - \ldots\right)\Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{24} + \frac{1}{6!\cdot 5}\cdot\frac{1}{32} - \ldots$$

В правой части равенства получился числовой знакочередующейся ряд, его остаток по признаку Лейбница не превосходит первого отброшенного члена. Так как $a_3 = \frac{1}{6!\cdot 5\cdot 32} < 10^{-4}$, то для приближенного вычисления суммы знакочередующегося ряда достаточно взять первые два слагаемых, а затем округлить результат до четырех знаков после запятой согласно заданной точности: $\frac{1}{4} - \frac{1}{4!\cdot 24} = \frac{1}{4} - \frac{1}{24^2} = 0,248263(8) \approx 0,2483$.

Ответ: $\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx \approx 0,2483.$