МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)"

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Электронные методические указания

САМАРА 2011

УДК 512.8

Составители:Гоголева Софья Юрьевна
Прокофьев Леонтий Николаевич

Рецензент Дегтярев А.А., к.т.н., доцент кафедры ТК

Алгебра и геометрия. Линейные операторы
[Электронный ресурс] : электрон. метод. указания / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); сост.: С.Ю. Гоголева, Л.Н. Прокофьев. - Электрон. текстовые и граф. дан. (275 Кбайт). - Самара, 2011. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Пособие содержит теоретические сведения, примеры и варианты индивидуальных заданий по разделу "Линейные операторы"курса "Алгебра и геометрия".

Методические указания предназначены для студентов 6 факультета для бакалавров направления 010400.62 "Прикладная математика и информатика", изучающих дисциплину "Алгебра и геометрия (вариативная часть)"во 2 семестре.

Разработано на кафедре прикладной математики.

Содержание

Предисловие 6

1. Линейные операторы в линейных пространствах
   - 1.1. Определение и простейшие свойства 7
   - 1.2. Матрица линейного оператора 9
   - 1.3. Линейное пространство линейных операторов 12
   - 1.4. Умножение линейных операторов 13
   - 1.5. Обратный оператор 14
   - 1.6. Образ и ядро линейного оператора 15
   - 1.7. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора 18
   - 1.8. Линейные операторы простой структуры 24
   - 1.9. Жорданова нормальная форма 26

2. Линейные операторы в евклидовых (унитарных) пространствах . 31
   - 2.1. Сопряженный оператор 31
   - 2.2. Нормальный оператор 33
   - 2.3. Ортогональный (унитарный) оператор 34
   - 2.4. Самосопряженный оператор 35

Задание 37

Список литературы 42

Предисловие

В предложенном учебном пособии в краткой форме изложены необходимые теоретические сведения по теории линейных отображений. Данный раздел линейной алгебры является базовым для всего курса данной дисциплины.

В конце пособия приведены индивидуальные задания, которые помогут получить навыки решения задач по теории линейных операторов.

Авторы благодарят студентов факультета информатики Бороданова М.С. и Силакову М.В. за участие в подготовке пособия, а также обращается к читателям с просьбой направлять свои отзывы о данной методической работе на кафедру прикладной математики СГАУ. Все критические замечания будут рассмотрены и по возможности учтены при следующих изданиях.

1. Линейные операторы в линейных пространствах
1.1 Определение и простейшие свойства

Пусть $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_m$ линейные пространства размерности m и n соответственно.

Оператором, действующим из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_m$, называется отображение вида $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, которое каждому элементу $x \in \mathcal{L}_n$ ставит в соответствие элемент $y \in \mathcal{L}_m$.

Обозначения: $\varphi(x) = y, \quad \varphi x = y,$
где y – образ элемента x, а x – прообраз элемента y.

Оператор называется *линейным*, если $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{L}_n, \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ выполняются соотношения:

1) $\quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2);$

2) $\quad \varphi(\lambda(x_1)) = \lambda\varphi(x_1).$

Если $\mathcal{L}_m$ представляет собой множество $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, то линейный оператор называют *линейным функционалом* или *линейной формой.*

Обозначение: $f(x)$.

Линейный оператор, действующий из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_m$, иногда называют *линейным отображением.*

Если пространство $\mathcal{L}_m$ совпадает с пространством $\mathcal{L}_n$, то линейный оператор $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$ называют *линейным преобразованием* пространства $\mathcal{L}_n$.

Два оператора φ и ψ называются *равными*, если

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad \forall x \in \mathcal{L}_n.$$

Примеры линейных операторов.

1. Оператор (преобразование) $\varepsilon : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$, который каждый элемент $x \in \mathcal{L}_n$ переводит в x, является линейным и называется *тождественным оператором.*

2. Оператор $\Theta : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, который каждый элемент $x \in \mathcal{L}_n$ переводит в нулевой элемент $\theta \in \mathcal{L}_m$, является линейным и называется *нулевым оператором.*

3. Пусть P_n – пространство вещественных многочленов степени не выше n. Оператор $\varphi : P_n \to P_{n-1}$, определенный правилом $\varphi(p(x)) = p'(x)$, где $p(x) \in P_n$, является линейным и называется *оператором дифференцирования.*

4. Изоморфизм φ линейных пространств $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}'_n$ является линейным оператором, действующим из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}'_n$.

5. Растяжение (сжатие) элементов пространства $\mathcal{L}_n$ в одно и то же число α раз является оператором в пространстве $\mathcal{L}_n$. Такой оператор называется *оператором подобия*: $\psi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n,\ \psi x = \alpha x,\ x \in \mathcal{L}_n$.

Простейшие свойства линейного оператора.

Из определения вытекают следующие свойства линейных операторов.

1. Линейный оператор переводит нулевой элемент в нулевой элемент: $\varphi(\theta_1) = \varphi(0 \cdot x) = 0 \cdot \varphi(x) = \theta_2;\ \theta_1 \in \mathcal{L}_n,\quad \theta_2 \in \mathcal{L}_m$.

2. Линейный оператор сохраняет линейную комбинацию, т.е. переводит линейную комбинацию элементов в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi x_i.$$

3. Линейный оператор переводит линейно зависимую систему элементов в линейно зависимую.

Задание линейного оператора.

Свойство 2° говорит о том, что для задания линейного оператора $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ достаточно определить его только на элементах $e_1, e_2, \cdots, e_n$ некоторого базиса пространства $\mathcal{L}_n$. Зная элементы $\varphi e_1, \varphi e_2, \cdots, \varphi e_n$ можно однозначно найти образ любого элемена $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathcal{L}_n$:

$$\varphi x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi e_i \in \mathcal{L}_m.$$

Теорема 1. *Пусть $e_1, e_2, \cdots, e_n$ – базис линейного пространства $\mathcal{L}_n$, а $g_1, g_2, \cdots, g_n$ – произвольные элемены линейного пространства $\mathcal{L}_m$. Тогда существует единственный оператор $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, который переводит элементы $e_1, e_2, \cdots, e_n$ линейного пространства $\mathcal{L}_n$ в элементы $g_1, g_2, \cdots, g_n$ линейного пространства $\mathcal{L}_m$ соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим искомый оператор, положив для каждого элемента $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathcal{L}_n$

$$\varphi x = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i. \tag{1}$$

Из единственности разложения элемента x по базису следует, что правило (1) однозначно оределяет образ элемента x, при этом, как легко проверить,

$$\varphi e_i = g_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Линейность построенного оператора вытекает из линейности координат. Оператор φ единственный, так как если ψ любой другой линейный оператор, переводящий элемены $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в $g_1, g_2, \ldots, g_n$, то
$\psi x = \psi(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \psi e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i g_i = \varphi x,\ \forall x \in \mathcal{L}_n \Rightarrow \varphi = \psi.$ □

Следствие. Два оператора $\varphi,\ \psi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ равны тогда и только тогда, когда они одинаково определены на элементах базиса $\mathcal{L}_n$.

1.2 Матрица линейного оператора

Пусть $e_1, e_2, \cdots, e_n$ – базис линейного пространства $\mathcal{L}_n$,
а $f_1, f_2, \cdots, f_m$ – базис линейного пространства $\mathcal{L}_m$.
По теореме из предыдущего параграфа оператор $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ однозначно определяется заданием элементов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \cdots, \varphi(e_n)$, которые однозначно определяются своими координатами в базисе f, т.е. коэффициентами разложений

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \ldots + a_{m1} f_m, \\ \varphi(e_2) = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \ldots + a_{m2} f_m, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + \ldots + a_{mn} f_m. \end{cases} \tag{2}$$

Матрица

$$[\varphi]_{fe} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей оператора* φ в паре базисов e и f.

Координаты элемента и его образа.

Пусть $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ и $e_1, e_2, \cdots, e_n$ – базис линейного пространства $\mathcal{L}_n$,
а $f_1, f_2, \cdots, f_m$ – базис линейного пространства $\mathcal{L}_m$.

Теорема 2. *Если $y = \varphi x$, то справедливо равенство*

$$y_f = [\varphi]_{fe} x_e. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i,\ y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i f_i$ и $[\varphi]_{fe} = A = (a_{ij})$.
Утверждение (3) равносильно соотношениям

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

Докажем их. Имеем $y = \varphi x = \varphi(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \varphi e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) f_i$.

Из единственности разложения элемента y по базису f следует (3).

П р и м е р 1. *Пусть* $\varphi : P_1 \to P_2$;
$\varphi(p(x)) = (x+1)p(x)$;
$e_1 = 1,\ e_2 = x; \quad f_1 = 1,\ f_2 = x,\ f_3 = x^2$.
Найти:

1. *Матрицу линейного оператора.*

2. *Проверить* $[\varphi]_{fe} y_e = [\varphi(y)]_f, \quad \forall y = p(x) \in P_1$.

Решение.

1. $\varphi e_1 = (x+1)\cdot 1 = x+1, \quad [\varphi e_1]_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$\varphi e_2 = (x+1)\cdot x = x^2 + x, \quad [\varphi e_2]_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [\varphi e]_{fe} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $y = a + bx, \quad y_e = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix};$

$\varphi(y) = (x+1)(a+bx) = ax + a + bx^2 + bx = bx^2 + (a+b)x + a;$

$[\varphi(y)]_f = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix}.$

$[\varphi]_{fe} y_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix} = [\varphi(y)]_f.$

Матрицы оператора в различных базисах.

Пусть e и $e' = e \cdot P_{e\to e'}$ – два базиса в пространстве $\mathcal{L}_n$ с матрицей перехода $P_{e\to e'}$, а f и $f' = f \cdot P_{f\to f'}$ – два базиса пространства $\mathcal{L}_m$ с матрицей перехода $P_{f\to f'}$.

Одному и тому же оператору $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ в паре базисов e и f соответствует матрица $[\varphi]_{fe}$, а в паре базисов e' и f' соответствует матрица $[\varphi]_{f'e'}$.

Теорема 3. *Матрицы линейного оператора в различных парах базисов связаны соотношением*

$$[\varphi]_{f'e'} = P^{-1}_{f\to f'} [\varphi]_{fe} P_{e\to e'}. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного элемента $x \in \mathcal{L}_n$ и его образа $y = \varphi x$ в силу $y_f = [\varphi]_{fe} x_e$ имеем

$$y_f = [\varphi]_{fe} x_e, \;\; y_{f'} = [\varphi]_{f'e'} x_{e'}. \tag{5}$$

В свою очередь,

$$x_e = P_{e \to e'} x_{e'}, \;\; y_f = P_{f \to f'} y_{f'}.$$

Подставив эти соотношения в (5), получим, что

$$P_{f \to f'} y_{f'} = [\varphi]_{fe} P_{e \to e'} x_{e'}$$

или

$$P_{f \to f'} [\varphi]_{f'e'} x_{e'} = [\varphi]_{fe} P_{e \to e'} x_{e'}.$$

Так как это соотношение имеет место для любого $x_{e'}$, то

$$P_{f \to f'} [\varphi]_{f'e'} = [\varphi]_{fe} P_{e \to e'}.$$

В силу невырожденности матрицы перехода отсюда следует (4). $\square$

Две прямоугольные одного размера матрицы A и B называются *эквивалентными*, если существуют такие две невырожденные матрицы Q и P, что

$$B = Q^{-1} A P.$$

Следствие 1. Матрицы линейного операторав в различных парах базисов являются эквивалентными.

Следствие 2. Ранг матрицы линейного оператора не зависит от выбора базисов.

Следствие 3. Если оператор действует в одном пространстве (является преобразованием), то формула (4) будет иметь вид

$$[\varphi]_{e'} = P^{-1}_{e \to e'} [\varphi]_e P_{e \to e'}.$$

Две квадратные матрицы A и B одинаковых размеров называются *подобными*, если существует невырожденная матрица P, такая что справедливо равенство

$$B = P^{-1} A P.$$

Теорема 5. *Определители подобных матриц равны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если матрицы A и B подобны, то согласно определению существует такая невырожденная матрица P, что $B = P^{-1}AP$.

Учитывая свойства определителя, получаем $\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(P^{-1}P)\det(A) = \det(A)$. $\square$

Следствие 4. Матрицы линейного преобразования в различных базисах имеют равные определители.

1.3 Линейное пространство линейных операторов

Обозначим $L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ множество линейных операторов, действующих из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_m$.

Суммой линейных операторов $\varphi, \psi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ будем называть оператор $\varphi + \psi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, определяемый формулой

$$(\varphi + \psi)x = \varphi x + \psi x, \quad \forall x \in \mathcal{L}_n. \tag{6}$$

Произведением линейного оператора $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ *на число* $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ будем называть оператор $\alpha\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$, такой что

$$(\alpha\varphi)x = \alpha\varphi x, \quad \forall x \in \mathcal{L}_n.$$

Теорема 6. *Для любых операторов* $\varphi, \psi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ *и числа* $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$$\varphi + \psi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m), \quad \alpha\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\forall x, y \in \mathcal{L}_n$ согласно (6) Имеем

$$(\varphi + \psi)(x + y) = \varphi(x + y) + \psi(x + y).$$

В силу линейности φ, ψ и аксиом линейного пространства

$$(\varphi+\psi)(x+y) = (\varphi x+\varphi y)+(\psi x+\psi y) = (\varphi x+\psi x)+(\varphi y+\psi y) = (\varphi+\psi)x+(\varphi+\psi)y.$$

Для $\forall x \in \mathcal{L}_n, \ \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
$(\varphi + \psi)(\lambda x) = \lambda((\varphi + \psi)x) \Rightarrow \varphi + \psi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$.

Аналогично доказывается, что $\alpha\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$. $\square$

Теорема 7. *Множество линейных операторов* $L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ *является линейным пространством относительно введенных выше операций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проверить аксиомы линейного пространства, взяв в качестве нулевого элемента нулевое отображение $O \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$, а в качестве противоположного к оператору φ отображение $-\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$, выполняемое по правилу

$$(-\varphi)x = -\varphi x, \ \forall x \in \mathcal{L}_n.$$

Все аксиомы вытекают из соответствующих аксиом линейного пространства, примененных к $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_m$ и проверяются по единой схеме.

Проверим, например, коммутативность. Для $\forall \varphi, \psi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ и $\forall x \in \mathcal{L}_n$
$(\varphi + \psi)x = \varphi x + \psi x = \psi x + \varphi x$;
$(\psi + \varphi)x = \psi x + \varphi x$.

Таким образом, $\psi + \varphi = \varphi + \psi$. $\square$

Теорема 8. *Если* $\dim(\mathcal{L}_n) = n$, *а* $\dim(\mathcal{L}_m) = m$, *то линейное пространство операторов* $L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ *изоморфно пространству матриц* $\mathbb{R}^{m\times n}(\mathbb{C}^{m\times n})$.

Следствие. $\dim L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m) = \dim(\mathcal{L}_n) \cdot \dim(\mathcal{L}_m)$.

Замечание. Так как линейное пространство линейных операторов $L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ изоморфно пространству матриц $\mathbb{R}^{m\times n}(\mathbb{C}^{m\times n})$, то при сложении линейных операторов их матрицы складываются, а при умножении линейного оператора на число его матрица умножается на это же число.

1.4 Умножение линейных операторов

Пусть $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ и $\psi : \mathcal{L}_m \to L_k$.

Произведением линейных операторов φ, ψ будем называть оператор $\psi\varphi : \mathcal{L}_n \to L_k$, действующий по следующему правилу

$$(\psi\varphi)x = \psi(\varphi(x)), \quad \forall x \in \mathcal{L}_n.$$

Теорема 9. *Если* $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ *и* $\psi \in L(\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_k)$, *то* $\psi\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\forall x, y \in \mathcal{L}_n,\ \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
$(\psi\varphi)(x+y) = \psi(\varphi(x+y)) = \psi(\varphi x + \varphi y) = \psi(\varphi x) + \psi(\varphi y) = (\psi\varphi)x + (\psi\varphi)y$;
$(\psi\varphi)(\alpha x) = \psi(\varphi(\alpha x)) = \psi(\alpha(\varphi x) = \alpha\psi(\varphi x) = \alpha(\psi\varphi)x$. $\square$

Свойства произведения линейных операторов.

Произведение линейных операторов определено не для любой пары линейных операторов. Однако, если это произведение имеет смысл, то:

1. $\alpha(\varphi\psi) = (\alpha\varphi)\psi = \varphi(\alpha\psi), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.
2. $(\varphi + \psi)\xi = \varphi\xi + \psi\xi$.
   $\varphi(\psi + \xi) = \varphi\psi + \varphi\xi$.
3. $(\varphi\psi)\xi = \varphi(\psi\xi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Следует из определения линейного оператора на скаляр и определения произведения операторов.
2. $((\varphi + \psi)\xi)x = (\varphi + \psi)(\xi x) = \varphi(\xi x) + \psi(\xi x) = (\varphi\xi)x + (\psi\xi)x = (\varphi\xi + \psi\xi)x$.
3. Согласно определению произведение линейных операторов заключается в их последовательном действии, и поэтому операторы $(\varphi\psi)\xi$ и $\varphi(\psi\xi)$ совпадают и, следовательно, тождественны.

Умножение линейных операторов не обладает свойством коммутативности. В самом деле, о коммутативности можно говорить лишь для линейных преобразований. Но и в этом случае умножение не коммутативно.

Теорема 10. *При умножении линейных операторов их матрицы умножаются, т. е. если* e, f, g *– базисы пространств* $\mathcal{L}_n,\ \mathcal{L}_m,\ L_k$ *соответственно и* $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m, \quad \psi : \mathcal{L}_m \to L_k$*, то*

$$[\psi\varphi]_{ge} = [\psi]_{gf}[\varphi]_{fe}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $[\varphi]_{fe} = (a_{ij}), \quad [\psi]_{gf} = (b_{ij}), \quad [\psi\varphi]_{ge} = (c_{ij})$, $\dim \mathcal{L}_n = n,\ \dim \mathcal{L}_m = m,\ \dim \mathcal{L}_k = k$.

Тогда

$$\psi\varphi e_j = \sum_{i=1}^{k} c_{ij} g_i. \tag{8}$$

$$\psi\varphi e_j = \psi(\varphi e_j) = \psi(\sum_{s=1}^{m} a_{sj} f_s) = \sum_{s=1}^{m} a_{sj}(\psi f_s) = \sum_{s=1}^{m} a_{sj} \sum_{i=1}^{k} b_{is} g_i =$$
$$= \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} a_{sj} b_{is} g_i = \sum_{i=1}^{k} (\sum_{s=1}^{m} b_{is} a_{sj}) g_i.$$

Сравнение этого разложения с (8) приводит к равенству $c_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{m} b_{is} a_{sj}$, которое означает (7). $\square$

1.5 Обратный оператор

Пусть $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$.

Отображение $\varphi^{-1} : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$ называется *обратным оператором* к оператору φ, если

$$\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon, \tag{9}$$

где ε – тождественный оператор.

Из определения обратного оператора φ^{-1} следует, что для $\forall x \in \mathcal{L}_n$ справедливо соотношение

$$\varphi^{-1}\varphi x = x.$$

Таким образом, если $\varphi^{-1}\varphi x = \theta$, то $x = \theta$, т.е., если оператор имеет обратный, то из условия $\varphi x = \theta$ следует, что $x = \theta$.

Теорема 11. *Для того, чтобы линейный оператор* $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$ *имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы этот оператор действовал взаимно однозначно из* $\mathcal{L}_n$ *в* $\mathcal{L}_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. <u>*Необходимость.*</u> Пусть φ имеет обратный, но не действует взаимно однозначно из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_n$. Это означает, что некоторым различным элементам x_1 и x_2, $x_2 - x_1 \neq \theta \in \mathcal{L}_n$ отвечает один и тот же элемент $y = \varphi x_1 = \varphi x_2$. Но тогда $\varphi(x_2 - x_1) = \theta$ и поскольку φ имеет обратный, $x_2 - x_1 = \theta$. Но выше было отмечено, что $x_2 - x_1 \neq \theta$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия утверждения.
<u>*Достаточность.*</u> Допустим φ действует взаимно однозначно из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_n$. Тогда

каждому элементу $y \in \mathcal{L}_n$ отвечает элемент $x \in \mathcal{L}_n : y = \varphi x$.
Поэтому имеется оператор φ^{-1}, обладающий тем свойством, что
$\varphi^{-1}y = \varphi^{-1}(\varphi x) = x$.

Легко убедиться, что φ^{-1} линейный. Пусть $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{L}_n,\ \exists x_1, x_2 \in \mathcal{L}_n :$ $y_1 = \varphi x_1$, $y_2 = \varphi x_2$, при этом $x_1 = \varphi^{-1}y_1$, $x_2 = \varphi^{-1}y_2$.

Отсюда получим, что $\varphi^{-1}(y_1 + y_2) = \varphi^{-1}(\varphi x_1 + \varphi x_2) = \varphi^{-1}\varphi(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = \varphi^{-1}y_1 + \varphi^{-1}y_2$.

Аналогично $\varphi^{-1}(\alpha y_1) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi x_1) = \varphi^{-1}\varphi(\alpha x_1) = \alpha x_1 = \alpha\varphi^{-1}y_1$,
$\forall\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. $\square$

Теорема 12. *Матрица обратного оператора φ^{-1} в произвольном базисе является обратной к матрице оператора φ в этом же базисе.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть e – произвольный базис пространства $\mathcal{L}_n$ и для оператора $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$ существует обратный оператор φ^{-1}. Перейдем в равенствах (9) к матрицам операторов в базисе e. Согласно теореме 10, получим, что $[\varphi]_e[\varphi^{-1}]_e = [\varphi^{-1}]_e[\varphi]_e = E$. Эти равенства совпадают с определением обратной матрицы для $[\varphi]_e$. $\square$

1.6 Образ и ядро линейного оператора

Образом линейного оператора $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ называется множество всех элементов $y \in \mathcal{L}_m$, представляемых в виде $y = \varphi(x),\quad x \in \mathcal{L}_n$.

Обозначение: $\operatorname{im}\varphi$.

Ядром линейного оператора $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ называется множество всех элементов $x \in \mathcal{L}_n$, для которых $\varphi(x) = \theta,\quad \theta \in \mathcal{L}_m$.

Обозначение: $\ker\varphi$.

Теорема 13. Если $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$, то $\operatorname{im}\varphi$ – линейное подпространство $\mathcal{L}_n$; $\ker\varphi$ – линейное подпространство $\mathcal{L}_m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Докажем, что $\operatorname{im}\varphi$ – линейное подпространство $\mathcal{L}_n$. Так как
$y_1 \in \operatorname{im}\varphi,\ y_2 \in \operatorname{im}\varphi \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathcal{L}_n$, что $y_1 = \varphi x_1,\ y_2 = \varphi x_2$,

$$y_1 + y_2 = \varphi x_1 + \varphi x_2 = \varphi(x_1 + x_2);$$

$$\lambda y_1 = \lambda(\varphi x_1) = \varphi(\lambda x_1).$$

2. Докажем, что $\ker\varphi$ – линейное подпространство $\mathcal{L}_m$.
$x_1 \in \ker\varphi,\ \varphi x_1 = \theta$; $x_2 \in \ker\varphi,\ \varphi x_2 = \theta$.

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi x_1 + \varphi x_2 = \theta + \theta = \theta;$$

$$\varphi(\lambda x_1) = \lambda\varphi(x_1) = \lambda\theta = \theta.\ \square$$

Число $\dim(\operatorname{im}\varphi) = \operatorname{rg}\varphi$ называется *рангом линейного оператора*, а $\dim(\ker\varphi) = \operatorname{defekt}\varphi$ называется *дефектом линейного оператора.*

Нулевой оператор $\Theta x = \theta$ и тождественный оператор $\varepsilon x = x$ являются предельными с точки зрения дефекта и ранга. Нулевой оператор имеет максимальный дефект равный размерности пространства, в котором этот оператор действует и минимальный ранг. Тождественный оператор имеет минимальный дефект (нулевой) и максимальный ранг равный размерности пространства, в котором этот оператор действует.

Оператор максимального дефекта определен однозначно, а операторов минимального дефекта и максимального ранга бесконечно много.

Теорема 14. *Пусть $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$. Если $e_1, e_2, \cdots, e_n$ – базис в $\mathcal{L}_n$, то*

$$\operatorname{im}\varphi = L(\varphi e_1, \varphi e_2, \cdots, \varphi e_n). \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что для множеств (10) имеет место двусторонние вложение:

с одной стороны, если $y \in \operatorname{im}\varphi$, то $y = \varphi x$ для некоторого элемента $x \in \mathcal{L}_n$, т.е. $y = \varphi(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varphi e_i \in L(\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n)$;

с другой стороны, если $y \in L(\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n)$, то $y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varphi e_i = \varphi(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) = \varphi x$, где $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, т.е. $y \in \operatorname{im}\varphi$. $\square$

Теорема 15. *Ранг линейного оператора равен рангу его матрицы в произвольной паре базисов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 14 и $\dim L(x, y, \ldots, z) = \operatorname{rg}(x, y, \ldots, z)$ следует, что $\operatorname{rg}\varphi = \dim \operatorname{im}\varphi = \dim L(\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n) = \operatorname{rg}(\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n)$. Ранг системы элементов $\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n$ совпадает с рангом системы элементов, состоящих из координат этих элементов в базисе f пространства $\mathcal{L}_m$, т.е. с рангом системы столбцов матрицы $[\varphi]_{fe}$. $\square$

Теорема 16. *Если $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$, то*

$$\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{def}\varphi = \dim(\mathcal{L}_n). \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ – базис $\ker\varphi$. Дополним его до базиса $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ пространства $\mathcal{L}_n$. Согласно теореме 14 $\operatorname{im}\varphi = L(\varphi e_1, \varphi e_2, \cdots, \varphi e_k) = L(\varphi e_{k+1}, \varphi e_{k+2}, \cdots, \varphi e_n)$.

Докажем, что элементы $\varphi e_{k+1}, \varphi e_{k+2}, \cdots, \varphi e_n$ линейно независимы. Пусть это не так. Тогда для нетривиальной линейной комбинации этих элементов имеет место соотношение

$$\alpha_{k+1}\varphi e_{k+1} + \ldots + \alpha_n \varphi e_n = \theta;$$

$$\varphi(\alpha_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = \theta.$$

Следовательно, $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in \ker\varphi$. Это означает, что элемент $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n$ линейно выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_k$, что невозможно в силу линейной независимости $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$.

Таким образом, $\dim \operatorname{im}\varphi = n - k$, $\dim\ker\varphi = k$. Отсюда следует (11). $\square$

П р и м е р 2. *Для линейного преобразования*

$$\varphi x = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_2 + 2x_3,\ x_1 + 3x_3)^T, \qquad x = (x_1, x_2, x_3)^T.$$

Найти:

1) $[\varphi]_e,\ e_1 = (1\ 0\ 0)^T,\ e_2 = (0\ 1\ 0)^T,\ e_3 = (0\ 0\ 1)^T$;

2) $\operatorname{defekt}\varphi, \quad \operatorname{rg}\varphi$;

3) $\ker\varphi, \quad \operatorname{im}\varphi$;

4) базисы ядра и образа.

<u>*Решение.*</u> *По условию* $\varphi(x) = \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}$.

1. $[\varphi(e_1)]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1$, $[\varphi(e_2)]_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_2$, $[\varphi(e_3)]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a_3$,
   $[\varphi]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $\operatorname{defekt}\varphi + \operatorname{rg}\varphi = 3$;
   $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\varphi = 2 \Rightarrow \operatorname{defekt}\varphi = 3 - 2 = 1.$

3. Согласно теореме 14 $\operatorname{im}\varphi = L(\varphi e_1, \varphi e_2, \varphi e_3)$. Это означает, что $\operatorname{im}\varphi$ совпадает с линейной оболочкой системы столбцов матрицы $[\varphi]_e$ и, следовательно, за базис $\operatorname{im}\varphi$ можно взять любой из базисов системы столбцов матрицы $[\varphi]_e$, например, a_1, a_2, получим, что $\operatorname{im}\varphi = L(a_1, a_2)$.

   Аналогично, $x \in \ker\varphi$ в том и только в том случае, когда $\varphi(x) = \theta$ или в координатной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Отсюда следует, что $\ker\varphi$ совпадает с подпространством решений однородной системы (12), и в качестве базиса в $\ker\varphi$ может быть выбрана фундаментальная система решений уравнений (12). Найдем решение. Преобразуем матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x = \begin{pmatrix} -3\alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, если $\alpha = 1$, то получим

$b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\ker\varphi = L(b_1)$, b_1 – базисный вектор ядра.

1.7 Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Характеристический многочлен.

Для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ рассмотрим

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix},$$

где E – единичная матрица и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Относительно переменной λ этот определитель является многочленом степени n и может быть записан в виде

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i. \tag{13}$$

Многочлен $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называется *характеристическим многочленом матрицы* A, а уравнение $f(\lambda) = 0$ – *характеристическим уравнением матрицы* A,

$$\alpha_0 = f(0) = \det A,$$

$$\alpha_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \mathrm{tr} A.$$

Теорема 17. *Характеристические многочлены (уравнения) подобных матриц совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A и B подобные матрицы, т. е. $B = P^{-1}AP$, тогда в силу свойств определителей имеем

$$f_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP) = \det(P^{-1}(A - \lambda E)P) =$$
$$= \det P^{-1} \det(A - \lambda E) \det P = \det(A - \lambda E) = f_A(\lambda). \ \square$$

Рассмотрим линейный оператор (преобразование) $\varphi \in L(\mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n)$ и тождественный оператор $\varepsilon \in L(\mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n)$.

Характеристическим многочленом оператора называется функция

$$f(\lambda) = \det(\varphi - \lambda\varepsilon), \;\; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Так как $\det\varphi = \det[\varphi]_e$, где e – базис в $\mathcal{L}_n$, то характеристический многочлен оператора совпадает с характеристическим многочленом матрицы этого оператора в произвольном базисе. При этом коэффициенты α_k характеристического многочлена, представляемого в виде (13), также не связаны с использованным базисом, т.е. являются *инвариантами* относительно выбора базиса.

Уравнение $\det(\varphi - \lambda\varepsilon) = 0$ называется *характеристическим уравнением оператора* φ.

Пусть $\mathcal{L}'$ – подпространство n-мерного линейного пространства $\mathcal{L}_n$ и $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$.

Линейное подпространство $\mathcal{L}'$ пространства $\mathcal{L}_n$ называется *инвариантным подпространством относительно оператора* φ, если для $\forall x \in \mathcal{L}'$ его образ $\varphi x \in L'$.

Примеры инвариантных подпространств.

1. Тривиальные подпространства $\{\theta\}$ и $\mathcal{L}_n$ инвариантны относительно любого оператора $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$.

2. Для любого линейного оператора φ инвариантными подпространствами будут $\ker\varphi$ и $\operatorname{im}\varphi$, так как если $\varphi x = \theta$, то $\varphi(\varphi x) = \varphi\theta = \theta$ и если $y = \varphi x$, то $\varphi y = \varphi(\varphi x) = \varphi x_1$, где $x_1 = \varphi x$.

Число λ называется *собственным значением линейного оператора* $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$, если $\exists x \neq \theta$:

$$\varphi x = \lambda x. \tag{14}$$

При этом элемент x называется *собственным вектором оператора* φ.

Множество всех собственных значений линейного оператора называется *спектром линейного оператора.*

1. Каждый собственный вектор связан со своим собственным значением.

   Д о к а з а т е л ь с т в о. Если x одновременно удовлетворяет двум равенствам $\varphi x = \lambda x$ и $\varphi x = \mu x$, то

   $$\lambda x = \mu x \Rightarrow (\lambda - \mu)x = \theta \Rightarrow x = \theta,$$

   что противоречит определению собственного вектора, так как собственный вектор всегда ненулевой. $\square$

2. Каждому собственному значению соответствуют свои собственные векторы, причем таких бесконечно много.

   Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если x – собственный вектор линейного оператора φ с собственным значением λ, т.е. $\varphi x = \lambda x$, то для $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имеем $\alpha x \neq \theta$ и

$$\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi(x)) = \alpha\lambda x = \lambda(\alpha x).$$

   Значит, и вектор αx является для линейного оператора собственным. $\square$

Теорема 18. *Число λ является собственным значением линейного оператора $\varphi \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$ тогда и только тогда, когда оно является корнем его характеристического уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть λ – собственное значение оператора φ,
x – собственный вектор, отвечающий этому $\lambda(x \neq \theta)$. Перепишем соотношение (14) в следующем виде

$$(\varphi - \lambda\varepsilon)x = \theta,$$

где $\varepsilon \in L(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n)$ – тождественный оператор.

Так как $x \neq \theta \Rightarrow \ker(\varphi - \lambda\varepsilon) \neq \theta$, т.е. $\dim(\ker(\varphi - \lambda\varepsilon)) \geq 1$, а так как

$$\dim(\mathrm{im}(\varphi - \lambda\varepsilon)) + \dim(\ker(\varphi - \lambda\varepsilon)) = n,$$

$$\mathrm{rg}(\varphi - \lambda\varepsilon) + \mathrm{def}(\varphi - \lambda\varepsilon) = n,$$

то $\mathrm{rg}(\varphi - \lambda\varepsilon) < n$, т.е. $\det(\varphi - \lambda\varepsilon) = 0$ и $\Rightarrow \lambda$ – корень характеристического уравнения.

Достаточность. Легко убедиться, что приведенные рассуждения можно провести в обратном порядке. $\square$

Следствие. Каждые линейный оператор имеет собственное значение. Действительно, характеристическое уравнение всегда имеет корень (в силу основной теоремы алгебры).

Алгебраической кратностью собственного значения оператора будем называть кратность соответствующего корня характеристического уравнения этого оператора.

Собственное подпространство линейного оператора.

Не следует путать два термина: собственное подпространство и собственное подпространство линейного оператора.

Множество всех собственных векторов, отвечающих данному собственному значению линейного оператора, не является линейным подпространством, так как это множество не содержит θ вектора, который по определению не может быть собственным. Это формальное и легко устранимое препятствие является единственным.

Пусть $\mathrm{V}(\varphi, \lambda)$ – множество всех собственных векторов линейного оператора $\varphi \in L(\mathcal{L}_n)$, соответствующих значению λ с добавленным к этому множеству нулевым вектором.

Теорема 19. *Множество* $\mathrm{V}(\varphi, \lambda)$ *линейное подпространство в* $\mathcal{L}_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x, y \in \mathrm{V}(\varphi, \lambda)$.
$\varphi(x+y) = \varphi x + \varphi y = \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y)$;
$\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi x = \alpha\lambda x = \lambda\alpha x$. □

Множество $\mathrm{V}(\varphi, \lambda)$ называется *собственным подпространством линейного оператора.*

Собственное подпространство является инвариантным относительно оператора φ.

Геометрическая кратность собственного значения λ – это $\dim(\mathrm{V}(\varphi, \lambda))$.

Теорема 20. *Для того, чтобы матрица* $[\varphi]_e$ *линейного оператора* φ *в данном базисе* e *была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы базисные векторы* e_k *были собственными векторами этого оператора.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть базисные векторы e_k являются собственными векторами оператора φ. Тогда

$$\varphi e_k = \lambda_k e_k, \tag{15}$$

и поэтому матрица $[\varphi]_e$ имеет вид (согласно равенствам (2))

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{16}$$

т.е. является диагональной.

Пусть матрица $[\varphi]_e$ диагональна, т.е. имеет вид (16). Тогда соотношения (2) примут вид (15), а это означает, что e_k – собственные векторы оператора φ. □

Теорема 21. *Пусть собственные значения* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *линейного оператора* φ *различны, тогда отвечающие им собственные векторы* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *линейно независимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим индукцию. Так как e_1 – ненулевой вектор, то для одного вектора ($p = 1$) утверждение справедливо (один ненулевой вектор является линейно независимым).

Пусть утверждение теоремы доказано для m векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Присоединим к этим векторам e_{m+1} и допустим, что имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k e_k = 0. \tag{17}$$

Тогда, используя свойства линейного оператора, получим

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \varphi e_k = 0. \tag{18}$$

Так как e_k – собственные векторы, то $\varphi e_k = \lambda_k e_k$, и поэтому равенство (18) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \lambda_k e_k = 0. \tag{19}$$

Согласно (17) $\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_{m+1} \alpha_k e_k = 0$. Вычитая это равенство из равенства (19), найдем

$$\sum_{k=1}^{m} (\lambda_k - \lambda_{m+1}) \alpha_k e_k = 0. \tag{20}$$

По условию все λ_k различны, т.е. $\lambda_k - \lambda_{m+1} \neq 0$. Поэтому из (20) и предположения о линейной независимости векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Отсюда и из (17), а также из условия, что e_{m+1} – собственный вектор ($e_{m+1} \neq \theta$), вытекает, что $\alpha_{m+1} = 0$. Таким образом из равенства (17) мы получаем, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{m+1} = 0$. Это означает, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_{m+1}$ линейно независимы. $\square$

Алгоритм нахождения собственных значений и векторов линейного оператора.

Чтобы вычислить собственные значения линейного оператора
$\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$, действующего в вещественном линейном пространстве, нужно выполнить следующие операции:

1. Выбрать в линейном пространстве базис e и сопоставить линейному оператору φ матрицу $[\varphi]_e$ в выбранном базисе e.

2. Составить характеристическое уравнение $\det([\varphi]_e - \lambda E)$ и найти всего корни.

3. Выделить только вещественные корни λ_k, так как пространство вещественное. Если действительных корней нет, то нет и собственных векторов.

4. Для каждого собственного значения λ_k найти ФСР для однорордной системы уравнений $(A-\lambda_k E)x=\theta$. Столбцы ФСР представляют собой координаты векторов некоторого базиса в собственном подпространстве $\mathrm{V}(\varphi,\lambda_k)$ линейного оператора φ. Каждому собственному вектору соответствует собственное значение $\lambda_k \in \mathrm{V}(\varphi,\lambda_k)$ и, следовательно, найденный базис в этом подпространстве позволяет представить любой собственный вектор с с собственным значением λ_k.

П р и м е р 3. *Найти собственные векторы линейного преобразования* $\varphi : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_2$, *заданного матрицей* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Если

а) $\mathcal{L}_2$ - *вещественное линейное пространство;*

б) $\mathcal{L}_2$ - *комплексное линейное пространство.*

Решение.

$$\det(A-\lambda E)=0; \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(1-\lambda)(1+\lambda)=0;$$
$$\lambda^2=-1;$$
$$\lambda=\pm i.$$

а) так как λ - комплексное, то собственных значений нет.

б) $\lambda = i:$

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix};$$

$$x_1=(-1-i)x_2, \quad x_2=1 \quad \Rightarrow \quad X^* = \alpha \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$\lambda = -i:$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix};$$

$$x_1=(-1+i)x_2, \ x_2=1 \Rightarrow X^* = \alpha \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

1.8 Операторы простой структуры

Оператор $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$ называется *оператором простой структуры*, если в $\mathcal{L}_n$ существует базис из собственных векторов этого линейного оператора.

В базисе из собственных векторов матрица оператора простой структуры имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения оператора.

Если в исходном базисе $[\varphi]_e = A, \;\; [\varphi]_{e'} = \Lambda,$ и $P_{e\to e'}$ – матрица перехода, то

$$\Lambda = P^{-1}_{e\to e'} A P_{e\to e'}, \tag{21}$$

$$A = P_{e\to e'} \Lambda P^{-1}_{e\to e'}. \tag{22}$$

На матричном языке соотношение (21) означает, что матрица A приводится матрицей $P_{e\to e'}$ к диагональному виду и оператор простой структуры называется также *диагонализируемым оператором.*

Соотношение (22) называется *каноническим разложением матрицы* A, а $P_{e\to e'}$ – трансформирующей матрицей.

Теорема 22. *Оператор $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$ является оператором простой структуры тогда и только тогда, когда алгебраическая и геометрическая кратности его собственных значений совпадают.*

Замечание. Эта теорема в вещественном пространстве верна только для тех операторов, чьи характеристические многочлены имеют только вещественные корни.

Приведение матрицы к диагональному виду и каноническое разложение матриц используется в теории и вычислительной практике. Например, если известно каноническое разложение (22), то, если $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$A^m = P_{e\to e'} \Lambda^m P^{-1}_{e\to e'}.$$

Алгоритм нахождения трансформирующей матрицы.

1. Находим все собственные значения матрицы A.
2. При каждом собственном значении λ_k строим ФСР однородной системы уравнения $(A - \lambda_k E)x = \theta$.
3. Из решений всех построенных ФСР, как из столбцов, составляем матрицу $P_{e\to e'}$, причем в матрицу $P_{e\to e'}$ столбцами записываются решения по каждому λ_k в порядке нумерации собственных значений.

Матрица $P_{e \to e'}$ должна быть квадратной. Это будет выполняться только тогда, когда каждый корень характеристического уравнения λ_k матрицы A является ее собственным значением и для каждого λ_k его алгебраическая и геометрическая кратности совпадают. Лишь в этом случае матрица A приводится к диагональному виду.

П р и м е р 4. *Привести, если возможно, следующую матрицу к диагональному виду и найти ее трансформирующую матрицу:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

$\lambda_{1,2} = 2;$ $\qquad \overbrace{s = 2;}^{\textit{алгебраическая кратность}}$

$\lambda_3 = 1;$ $\qquad s = 1.$

Найдем геометрическую кратность:

При $\lambda_{1,2} = 2:$

$$\mathrm{rg}(A - \lambda_{1,2}E) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{k = n - \mathrm{rg}(A - \lambda_{1,2}E) = 2}^{\textit{геометрическая кратность}}.$$

При $\lambda_3 = 1:$

$$\mathrm{rg}(A - \lambda_3 E) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \quad k = n - \mathrm{rg}(A - \lambda_3 E) = 1.$$

Найдем собственные векторы.

При $\lambda_{1,2} = 2:$

$$-3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3x_2 - 3x_1.$$

$$X^* = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \textit{где} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0.$$

При $\lambda_3 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow X^* = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

В итоге:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.9 Жорданова нормальная форма

Итак, самый простой формой матрицы обладают только операторы простой структуры, т.е. операторы, имеющие полный набор линейно независимых собственных векторов. Как мы уже отмечали в вещественном пространстве существуют операторы, которые не имеют ни одного собственного вектора. И в комплексном пространстве не каждый линейный оператор обладает необходимым для базиса числом линейно независимых векторов.

Приведение матрицы линейного оператора к простому виду связано со структурой его собственных подпространств.

Теорема 23. *Пусть* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \cdots, \mathcal{L}_s$ *– инвариантные пространства линейного оператора* $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$*, причем* $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_s = \mathcal{L}$*, тогда в некотором базисе* f *матрица оператора* φ *имеет блочно-диагональный вид:*

$$[\varphi]_f = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix},$$

где квадратный блок A_i *имеет порядок* $\dim \mathcal{L}_i$*,* $i = 1, 2, \ldots, s$*, а остальные блоки являются нулевыми.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в линейных подпространствах $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \cdots, \mathcal{L}_s$ базисы
$e^{(1)} = (e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_{n_1}^{(1)})$,
$e^{(2)} = (e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_{n_2}^{(2)})$,
$\ldots$
$e^{(s)} = (e_1^{(s)}, e_2^{(s)}, \ldots, e_{n_s}^{(s)})$.

В совокупности эти базисы дают базис f всего пространства $\mathcal{L}$. Так как $\mathcal{L}_1$ – инвариантное подпространство линейного оператора φ, элемент $\varphi e_i^{(1)}$, $i = 1, 2, \ldots, n_1$, попадет в $\mathcal{L}_1$ и поэтому является линейной комбинацией системы элементов $e^{(1)}$. Другими словами, координаты элементов $\varphi e_i^{(1)}$ в базисе f, соответствующие $e_i^{(2)}, e_i^{(3)}, \ldots, e_i^{(s)}$, равны нулю. Аналогично координаты элементов $\varphi e_i^{(2)}$, $i = 1, 2, \ldots, n_2$ в базисе f, соответствующие $e_i^{(1)}, e_i^{(3)}, \ldots, e_i^{(s)}$, также равны нулю.

Остановимся на случае, когда характеристическое уравнение линейного оператора имеет лишь простые корни, среди которых, вообще говоря, есть и комплексные. Так как характеристическое уравнение линейного оператора имеет действительные коэффициенты, каждому комплексному корню $\alpha + i\beta$ этого уравнения соответствует комплексно сопряженный корень $\alpha - i\beta$ той же кратности.

Теорема 24. *Каждой паре комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения линейного оператора соответствует двумерное инвариантное подпространство этого оператора.*

Доказательство. Зафиксируем в линейном пространстве $\mathcal{L}$ некоторый базис e и рассмотрим матрицу A линейного оператора φ в этом базисе.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ – комплексный корень характеристического уравнения линейного оператора φ.

Тогда $\det(A - \lambda E) = 0$ и система линейных уравнений $(A - \lambda E)x = \theta$ с комплексными коэффициентами имеет ненулевое решение x, которое можно записать в виде $x = u + iv$, разделив действительные и мнимые части у элементов столбца x.

Столбец v не является нулевым, так как в противном случае $x = u$, $Au = \lambda x$. Мы видим, что действительные элементы столбца Au получаются из действительных элементов столбца u умножением на комплексное число λ, а это возможно лишь в случае, когда $u = \theta$. Но это заключение противоречит выбору столбца x.

Столбцы u и v линейно независимы. Действительно, если они линейно зависимы, то $\mu u + \nu v = 0$, где одно из чисел μ и $\nu \neq 0$. Мы можем утверждать, что $\mu \neq 0$, так как в противном случае $\nu v = \theta$. Но $v \neq \theta$, значит $\nu = 0$.

Пусть $\mu \neq 0$ и поэтому $u = kv$, где $k = -\frac{\nu}{\mu} \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x = u + iv = (k + i)v$.

Так как $Ax = \lambda x$, то

$$A(k + i)v = \lambda(k + i)v,$$

$$Av = \lambda v.$$

Как мы уже знаем, для комплексных λ такое равенство невозможно.

В равенстве $Ax = \lambda x$ сделаем замены $\lambda = \alpha + i\beta,\ x = u + iv$:

$$A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv).$$

Разделив действительные и мнимые части, получим два матричных уравнения

$$Au = \alpha u - \beta v,\ Av = \beta u + \alpha v.$$

Рассмотрим векторы x и y, которые в базисе e имеют координатные столбцы $x_e = u,\ y_e = v$, тогда

$$\varphi x = \alpha x - \beta y, \quad \varphi y = \beta x + \alpha y.$$

Векторы x и y линейно независимы, так как независимы их столбцы u и v. Полученные соотношения означают, что двумерное линейное подпространство $\mathcal{L}' = L\{x, y\}$ является инвариантным подпространством линейного оператора φ. $\square$

Для $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ обозначим

$$C(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Теорема 25. *Если характеристическое уравнение линейного оператора $\varphi : \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{L}_n$ имеет p различных пар комплексно сопряженных корней $\alpha_j \pm i\beta_j$, где $j = 1, 2, \cdots, p$, и q различных действительных корней μ_j где $j = 1, 2, \cdots, q$, причем $2p + q = n$, где $\dim(\mathcal{L}_n) = n$, тогда матрица линейного оператора в некотором базисе будет иметь вид:*

$$A = \begin{pmatrix} C(\alpha_1, \beta_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C(\alpha_2, \beta_2) & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & C(\alpha_p, \beta_p) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \mu_q \end{pmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждой паре комплексно сопряженных корней $\alpha_j \pm i\beta_j$ характеристического уравнения соответствует двумерное инвариантное подпространство P_j оператора φ с базисом u_j, v_j (см. доказательство т. 24). Каждому собственному значению μ_j соответствует одномерное собственное подпространство Q_j линейного оператора φ. Можно показать, что все эти подпространства образуют прямую сумму, так как пересечение любой пары таких подпространств содержит лишь θ. Учитывая, что сумма размерностей этих подпространств $2p + q = n = \dim(\mathcal{L}_n)$, заключаем, что

$P_1 \oplus P_2 + \ldots + P_p \oplus Q_1 \oplus Q_2 \ldots \oplus Q_q = \mathcal{L}$. Согласно теореме 23 в некотором базисе матрица A оператора φ имеет блочно-диагональный вид, причем каждый диагональный блок представляет собой ограничения оператора φ на соответствующее инвариантное подпространство. В случае двумерного подпространства P_j в базисе u_j, v_j эта матрица равна $C(\alpha_j, \beta_j)$, а в случае одномерного инвариантного подпространства Q_j такой блок есть простое число, представляющее собой собственное значение μ_j. $\square$

Если характеристическое уравнение линейного оператора имеет кратные корни, действительные или комплексные, то инвариантные подпространства такого оператора имеют более сложную структуру.

Рассмотрим два типа специальных матриц. Для произвольного числа $\mu \in \mathbb{R}$ введем обозначение матрицы порядка s:

$$J_s(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu \end{pmatrix}.$$

У этой матрицы все диагональные элементы равны μ, над главной диагональю расположены единицы, а все остальные равны нулю. В случае $s = 1$ рассматриваемая матрица сводится к единственному числу μ.

Для любого комплексного числа $\alpha + i\beta (\beta \neq 0)$ введем обозначение блочной матрицы порядка $2r$:

$$C_r(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} C(\alpha,\beta) & E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C(\alpha,\beta) & E & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & C(\alpha,\beta) & E \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C(\alpha,\beta) \end{pmatrix},$$

где $C_1(\alpha, \beta) = C(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Все остальные блоки также являются матрицами второго порядка. E обозначим единичную матрицу, а O – нулевую.

Блочно-диагональную матрицу вида

$$\begin{pmatrix} C_{r_1}(\alpha_1,\beta_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C_{r_2}(\alpha_2,\beta_2) & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & C_{r_l}(\alpha_l,\beta_l) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{s_1}(\mu_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{s_2}(\mu_2) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & J_{s_k}(\mu_k) \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ \mu_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, k$ называют *жордановой*. Ее диагональные блоки – *жордановыми клетками*.

2. Линейные операторы в евклидовых (унитарных) пространствах

2.1 Сопряженный оператор

Линейный оператор $\varphi^* : \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_m \to \mathcal{U}_n)$ называют *сопряженным* данному оператору $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m(\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}_m)$, если для $\forall x \in \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$,
$\forall y \in \mathcal{E}_m(\mathcal{U}_m)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ выполняется равенство

$$(\varphi x, y) = (x, \varphi^* y). \tag{23}$$

Из определения сопряженного оператора вытекают следующие его **свойства**:

1. $(\varphi^*)^* = \varphi$;
2. $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;
3. $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;
4. $(\alpha\varphi)^* = \bar{\alpha}\varphi^*$;
5. $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$ (если φ является преобразованием).

Все свойства доказываются однотипно.

Докажем, например, свойство 3: согласно определению произведения операторов и определения сопряженного оператора получаем

$$((\varphi\psi)x, y) = ((\varphi(\psi x), y) = (\psi x, \varphi^* y) = (x, (\psi^*\varphi^*)y).$$

Выясним, как связаны матрицы операторов φ и φ^* в базисе e в вещественном евклидовом пространстве.

Обозначим соответственно матрицы этих операторов $[\varphi]_e = A$ и $[\varphi^*]_e = A^*$ и пусть для $\forall x, y \in \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$ $\quad x_e,\ y_e$ – координатные столбцы векторов x, y в базисе e, тогда равенство (23) можно переписать с учетом, что $(x, y) = x_e^T \Gamma y_e$,
где $\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \cdots & (e_1, e_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (e_n, e_1) & \cdots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$ в виде

$$(Ax_e)^T \Gamma y_e = x_e^T \Gamma A^* y_e.$$

Далее $\quad x_e^T A^T \Gamma y_e = x_e^T \Gamma A^* y_e; \quad x_e^T (A^T\Gamma - \Gamma A^*) y_e = 0.$

Так как $x_e,\ y_e$ – произвольные столбцы, отсюда можно заключить, что

$$A^T\Gamma - \Gamma A^* = O,$$

где O – нулевая матрица.

Итак, матрицы операторов φ и φ^* в базисе e связаны соотношением

$$A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma. \tag{24}$$

В частности, если базис ортонормированный, то $\Gamma = E$ и

$$A^* = A^T. \tag{25}$$

В унитарном пространстве, где $(x, y) = x_e^T \Gamma \bar{y}_e$, формулы (25) и (26) соответственно примут вид

$$A^* = \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma};$$

$$A^* = \bar{A}^T.$$

Теорема 26. *Каждый линейный оператор в евклидовом пространстве имеет сопряженный оператор, и притом только один.*

П р и м е р 5. *Линейный оператор φ в базисе $e_1' = (1\ 1\ 1)^T$, $e_2' = (1\ 0\ 1\ 1)^T$, $e_3' = (0\ 0\ 1)^T$ имеет матрицу $[\varphi]_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $[\varphi^*]_{e'}$, если векторы e_1', e_2', e_3' заданы координатами в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3.*

<u>Решение.</u> *Найдем матрицу*

$$\Gamma_{e'} = \begin{pmatrix} (e_1', e_1') & (e_1', e_2') & (e_1', e_3') \\ (e_2', e_1') & (e_2', e_2') & (e_2', e_3') \\ (e_3', e_1') & (e_3', e_2') & (e_3', e_3') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$[\varphi]_e' = \Gamma_{e'}^{-1} [\varphi]_{e'}^T \Gamma_{e'}.$$

$$\Gamma_{e'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В результате перемножения матриц получим

$$[\varphi]_e' = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 6. *В трёхмерном евклидовом $\mathcal{E}_3$ пространстве выбран ортонормированный базис e_1, e_2, e_3. Найти преобразование φ^*, сопряжённое преобразованию φ пространства $\mathcal{E}_3$, если преобразование φ, задано формулой*

$$\varphi(x) = [a, x],$$

где a - фиксированный вектор из $\mathcal{E}_3$, $[a, x]$ - векторное произведение векторов a и x.

<u>Решение.</u> *По определению сопряженного оператора*
$(\varphi x, y) = ([a, x], y) = axy = xya = (x, -[a, y]) = (x, \varphi^* y) \Rightarrow \varphi^* = -\varphi.$

Областью значений φ^* является подпространство, ортогональное к ядру оператора φ. Это следует из того, что $\forall x \in \ker\varphi,\ \forall y \in \mathrm{im}\varphi$

$$(x, \varphi^* y) = (\varphi x, y) = (0, y) = 0,$$

т.е. $\varphi^* y \perp x$.

Основное свойство сопряженного оператора.

Если некоторое подпространство $\mathcal{H}$ инвариантно относительно оператора φ, то ортогональное дополнение $\mathcal{H}^\perp$ этого подпространства инвариантно относительно сопряженного оператора φ^*.

Свойства собственных значений и собственных векторов сопряженного оператора.

1. Характеристические многочлены, а, следовательно, и собственные значения сопряженных операторов в вещественном евклидовом пространстве одинаковы. В комплексном пространстве собственные значения сопряженных операторов являются комплексно сопряженными числами.

2. Каждый собственный вектор сопряженного оператора φ^* ортогонален ко всем собственным векторам оператора φ, принадлежащим другим собственным значениям.

2.2 Нормальный оператор

Линейный оператор $\varphi : \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_m \to \mathcal{U}_n)$ называют *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным оператором φ^*, т.е. если

$$\varphi^* \varphi = \varphi \varphi^*. \tag{26}$$

Квадратная матрица A называется *нормальной матрицей*, если $A^* A = A A^*$.

Из определения и связи матриц операторов φ и φ^*, рассмотренных в пункте 2.1, следует

Теорема 27. *Оператор нормален тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе его матрица нормальна.*

Теорема 28. *Собственный вектор нормального оператора, отвечающий собственному значению λ, является собственным вектором сопряженного оператора, отвечающим собственному значению $\bar{\lambda}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что если φ – нормальный оператор, то $\varphi - \lambda\varepsilon$ также нормален.

Пусть теперь x – собственный вектор оператора φ, отвечающий собственному значению λ, тогда $(\varphi - \lambda\varepsilon)x = \theta$ и $((\varphi - \lambda\varepsilon)x, (\varphi - \lambda\varepsilon)x) = 0$.

Согласно определению сопряженного оператора можем записать, что

$$(x, (\varphi - \lambda\varepsilon)^*(\varphi - \lambda\varepsilon)x) = 0$$

или, с учетом нормальности оператора $\varphi - \lambda\varepsilon$, что

$$(x, (\varphi - \lambda\varepsilon)(\varphi - \lambda\varepsilon)^*x) = 0,$$

т.е.

$$(\varphi - \lambda\varepsilon)^*x, ((\varphi - \lambda\varepsilon)^*x) = 0$$

и $(\varphi - \lambda\varepsilon)^*x = \theta$.

Отсюда в силу свойств сопряженного оператора следует, что

$$(\varphi^* - \bar{\lambda}\varepsilon) = \theta,$$

т.е. $\varphi^*x = \bar{\lambda}x$. $\square$

Следствие 1. Если φ – нормальный оператор, то $\ker\varphi = \ker\varphi^*$, так как нетривиальные векторы ядра являются собственными векторами, отвечающими нулевому собственному значению.

Следствие 2. Если φ – нормальный оператор, то $\ker\varphi = \mathrm{im}^\perp\varphi$. Это следует из $\ker\varphi = \mathrm{im}^\perp\varphi^*$ и предыдущего следствия.

Теорема 29. *Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.*

2.3 Ортогональный (унитарный) оператор

Линейный оператор $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}_n)$ называется *ортогональным (унитарным)*, если он сохраняет скалярное произведение в $\mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$, т.е. для $\forall x, y \in \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$ выполняется равенство

$$(\varphi x, \varphi y) = (x, y).$$

Полагая в этом равенстве $x = y$, получаем $|\varphi x|^2 = |x|^2$. Это означает, что ортогональный (унитарный) оператор сохраняет длины векторов.

Теорема 30. *Ортогональный (унитарный) оператор φ переводит любой ортонормированный базис $\mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$ в ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ – произвольный ортонормированный базис в $\mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$. В силу ортогональности оператора φ имеем

$$(\varphi e_i, \varphi e_j) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Видим, что различные векторы φe_i и φe_j ортогональны, а длина каждого из них равна единице. Поэтому система векторов $\varphi e = (\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n)$ состоит из ненулевых векторов и ортогональна. Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима. Количество векторов в линейно независимой системе φe равно размерности пространства $\mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$, т.е. $\dim\mathcal{E}_n = n \Rightarrow$ эта система является базисом, притом ортонормированным. $\square$

Теорема 31. *Если линейный оператор* $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}_n)$ *переводит какой-либо ортонормированный базис* $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *в ортонормированный базис* $\varphi e = (\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n)$, то этот оператор ортогональный (унитарный).

Теорема 32. *Оператор ортогонален (унитарен) тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе он имеет ортогональную (унитарную) матрицу.*

Теорема 33. *Собственные значения ортогонального (унитарного) оператора по абсолютной величине равны единице.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем для унитарного оператора. По определению можем записать $(\varphi x, \varphi x) = (x, x)$. Пусть x – собственный вектор оператора φ и λ – отвечающее ему собственное значение, $\varphi x = \lambda x$. Тогда $(\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2(x, x)$;

$|\lambda|^2(x, x) = (x, x)$;

$|\lambda|^2 = 1$. □

Теорема 34. *Собственные векторы ортогонального оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

2.4 Самосопряженный оператор

Линейный оператор $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}_n)$ называется *самосопряженным*, если для $\forall x, y \in \mathcal{E}_n(\mathcal{U}_n)$ выполняется равенство

$$(\varphi x, y) = (x, \varphi y),$$

т.е. $\varphi = \varphi^*$. Самосопряженный оператор в унитарном пространстве называют *эрмитовым*, а в евклидовом пространстве – *симметрическим*.

Примеры самосопряженного оператора.

1. Тождественный: $(\varepsilon x, y) = (x, y) = (x, \varepsilon y)$.
2. Нулевой: $(\theta x, y) = (0, y) = 0 = (x, 0) = (x, \theta y)$.

Квадратная матрица называется *самосопряженной*, если $A = A^*$.

Из определения вытекает, что самосопряженный оператор нормален.

Теорема 35. *Оператор самосопряженный тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе он имеет самосопряженную матрицу.*

Теорема 36. *Если подпространство* $\mathcal{H}$ *инвариантно относительно самосопряженного оператора* φ, *то ортогональное дополнение* $\mathcal{H}^\perp$ *этого подпространства также инвариантно относительно оператора* φ.

Теорема 37 (спектральная характеристика самосопряженного оператора). *Нормальный оператор в унитарном (евклидовом) пространстве самосопряжен тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена вещественны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. В унитарном пространстве это утверждение означает, что все собственные значения эрмитова оператора вещественны, и вытекает из равенств $\varphi x = \lambda x$ и, с учетом теоремы 28, $\varphi x = \bar{\lambda} x$. Докажем утверждение для евклидова пространства . Пусть e - ортонормированный базис , тогда $[\varphi]_e$ - самосопряженная (вещественная) матрица. Рассмотрим произвольное унитарное пространство $\mathcal{U}$ той же размерности, что и пространство $\mathcal{E}$, и в нем произвольный ортонормированный базис f. Тогда матрице $[\varphi]_e$ отвечает самосопряженный оператор $\psi \in L(\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_n)$, для которого матрица $[\varphi]_e$ является матрицей в базисе $f : [\varphi]_e = [\psi]_f$. Следовательно, характеристические многочлены операторов φ и ψ совпадают и по доказанному выше (применительно к оператору ψ) все корни характеристического многочлена оператора φ вещественны.

Достаточность. Пусть φ - нормальный оператор и все корни его характеристического многочлена вещественны. Тогда как в евклидовом, так и в унитарном пространстве существует ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ из собственных векторов оператора φ. Если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ – любой вектор пространства, то $\varphi x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i$ и $\varphi^* x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \bar{\lambda}_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i$, так как $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\varphi x = \varphi^* x,\ \forall x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$, откуда следует, что $\varphi = \varphi^*$. $\square$

Теорема 38. *Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

Основным свойством самосопряженного оператора является то, что в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Это означает, что самосопряженный оператор является оператором простой структуры, а матрица $P_{e \to e'}$ приводит матрицу A самосопряженного оператора к диагональному виду, т.е. удовлетворяет соотношению (21)

$$\Lambda = P_{e \to e'}^{-1} A P_{e \to e'}.$$

Правило построения такой матрицы остается таким же, как и в случае любых операторов простой структуры с той лишь разницей, что базис из собственных векторов матрицы A здесь еще и ортонормируют.

Задание

1. Выяснить, какие из преобразований трехмерного арифметического пространства $\mathbb{R}_3$ являются линейными. Для линейных преобразований найти:

а) матрицу в каноническом базисе;

б) дефект;

в) образ, ядро, а также построить базисы образа и ядра.

Каждое преобразование описывается своим действием на произвольный вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$; при этом компоненты векторов $\varphi(x)$, $f(x)$ заданы как функции компонент вектора x.

1. $f(x) = (x_1 + x_2,\ x_3 + x_1,\ 2x_1 + x_2 + x_3)$,
   $\varphi(x) = (x_1^2,\ x_1 + 2x_2,\ x_3 + x_1)$.

2. $f(x) = (x_1 - x_2 + 1,\ 3x_1 + x_2,\ x_3)$,
   $\varphi(x) = (-x_1 + 2x_2,\ x_3 - x_1,\ x_1 + 2x_2 - 2x_3)$.

3. $f(x) = (x_1 + 2x_3,\ x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2)$,
   $\varphi(x) = (x_1 + 3x_2,\ x_2 + 2,\ x_3 - x_1)$.

4. $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3,\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$,
   $\varphi(x) = (x_1 + 5x_2 + x_3,\ x_2,\ x_3 - 1)$.

5. $f(x) = (x_1 - x_2,\ x_3 - x_2,\ 2x_1 - x_2 + x_3)$,
   $\varphi(x) = (2x_1,\ 3x_2 + x_3,\ x_3 - 1)$.

6. $f(x) = (x_1 - x_2 + x_3,\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_2 + x_3)$,
   $\varphi(x) = (2x_1 - x_3,\ x_2 + x_3 - 2,\ 3x_3)$.

7. $f(x) = (x_1 + 2x_2,\ x_3^2,\ x_3 - x_2)$,
   $\varphi(x) = (x_2,\ -x_1 + x_3, -3x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

8. $f(x) = (x_2 - x_3,\ x_3 - x_1,\ -x_3 + 2x_2 + x_1)$,
   $\varphi(x) = (x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_2 + 3,\ x_1 + x_2)$.

9. $f(x) = (2x_1 - 1,\ x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2)$,
   $\varphi(x) = (-x_1,\ 3x_1 + x_2 + x_3,\ x_3 + x_2)$.

10. $f(x) = (3x_1 - 3,\ x_2 - x_3,\ x_1 + x_2 - x_3)$,
    $\varphi(x) = (2x_1 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ -2x_2 - x_3)$.

11. $f(x) = (2x_1 - x_2,\ x_3 - x_1,\ -x_2 + 2x_3)$,
    $\varphi(x) = (3x_1 + x_2,\ x_2^2 + x_3,\ x_3 - x_1)$.

12. $f(x) = ((x_2 - x_1)^2,\ x_2 - x_3,\ x_3 - x_1),$
$\varphi(x) = (5x_1 - x_2,\ -x_2 + x_3,\ 5x_1 + x_2 - 2x_3).$

13. $f(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3,\ 2x_2 + x_3 + x_1,\ 2x_1 + 2x_2 + x_3),$
$\varphi(x) = (x_1^2,\ x_1 + 2x_2,\ x_3 + x_1).$

14. $f(x) = (x_1 - 2x_2,\ x_1 - x_2 + 2x_3,\ x_2 + 2x_3),$
$\varphi(x) = (x_1 - 3x_3,\ x_2 - x_3\ x_3 - 2).$

15. $f(x) = (x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3),$
$\varphi(x) = (x_1 + 3x_2,\ x_2 + 2,\ x_3 - x_1).$

16. $f(x) = (x_1 - x_2 - x_3,\ 2x_1 + 2x_2,\ 3x_2 + 2x_3),$
$\varphi(x) = (x_1 + 5x_2 + x_3,\ x_2,\ x_3 - 1).$

17. $f(x) = (2x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ x_1),$
$\varphi(x) = (2x_1,\ 3x_2 + x_3,\ x_3 - 1).$

18. $f(x) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3,\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3,\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3),$
$\varphi(x) = (2x_1 - x_3,\ x_2 + x_3 - 2,\ 3x_3).$

19. $f(x) = (x_1 - 2x_2 + x_3,\ 2x_1 - 2x_2 - x_3,\ -x_1 + 2x_3),$
$\varphi(x) = (x_1^2,\ x_1 + 2x_2,\ x_3 + x_1).$

20. $f(x) = (-2x_1 - 3x_3,\ x_2 + 3x_3,\ -2x_1 + x_2),$
$\varphi(x) = (-x_1 + 2x_2,\ 2x_3 + 1,\ x_1 + 2x_2 - 2x_3).$

21. $f(x) = (2x_2,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_3),$
$\varphi(x) = (x_1 + 2x_2,\ x_3 - 1,\ x_1 + 2x_2).$

22. $f(x) = (-x_1 + x_3,\ x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2),$
$\varphi(x) = (x_1 + 5x_2 + x_3,\ x_2,\ x_3 - 1).$

23. $f(x) = (2x_1 - x_2 - x_3,\ 2x_1 - x_2 - x_3,\ 2x_1 - x_2 - x_3),$
$\varphi(x) = (x_1 + 2x_3,\ -x_1 + x_2 - 2x_3,\ 2x_1 - 2).$

24. $f(x) = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_3 - 1,\ x_1 - x_2 + x_3),$
$\varphi(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ -x_1 + x_2 - 2x_3,\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3).$

25. $f(x) = (x_1 + x_2,\ x_3 + 1,\ 2x_1 + x_2 + x_3),$
$\varphi(x) = (x_1 + 5x_2,\ x_2 + 5x_3,\ x_1 + 4x_2 - 5x_3).$

26. $f(x) = (2x_1 - x_3,\ 2x_2 - x_1,\ 4x_2 - x_3),$
$\varphi(x) = (-x_1 + 2x_2,\ 2x_3 - 3,\ x_1 + 2x_2 - 2x_3).$

27. $f(x) = (4x_1 - x_2,\ 4x_2 - x_3,\ 4x_1 + 3x_2 - x_3),$
$\varphi(x) = (x_1 + 3x_2,\ x_2 + 2,\ x_3 - x_1).$

28. $f(x) = (3x_1 - x_3,\ 3x_2 - x_1,\ 2x_1 + 3x_2 - x_3)$,
$\varphi(x) = (x_3 - x_1,\ x_2 - 1,\ x_1 - 5)$.

29. $f(x) = (x_3 - 2x_1,\ x_2 - 2x_3,\ x_2 - 4x_1)$,
$\varphi(x) = (2x_1,\ 3x_2 + x_3,\ x_3 - 1)$.

30. $f(x) = (x_1 + 2x_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_2 + x_3)$,
$\varphi(x) = (2x_1 - x_3,\ x_2 + x_3 - 2,\ 3x_3)$.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

1. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 2 & 11 & 8 \\ -10 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 13 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 13 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -10 \\ 8 & 11 & 2 \\ -10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 7 & -8 & 16 \\ -8 & -5 & -8 \\ 16 & -8 & 7 \end{pmatrix}$.
8. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
9. $\begin{pmatrix} 17 & 8 & -4 \\ 8 & 17 & -4 \\ -4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
11. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.
12. $\begin{pmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
14. $\begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
15. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
17. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
18. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 \\ -5 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.
20. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
21. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.
23. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. 27. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 29. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Для заданной эрмитово-симметричной матрицы A найти такие унитарную матрицу U и диагональную вещественную матрицу Λ, чтобы $\Lambda = \overline{U}^T AU$.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2-i & 0 \\ 2+i & 0 & -2i \\ 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 1 & i \\ -i & -i & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 2-i \\ 0 & 2+i & 0 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} -1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -1-i \\ 0 & -1+i & 0 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 1 & -2i & 2i \\ 2i & 1 & i \\ -2i & -i & 1 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 3 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 1 & i & 2i \\ -i & 1 & -2i \\ -2i & 2i & 1 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -i \\ 0 & i & 3 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & 1 \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & i \\ 0 & -i & 3 \end{pmatrix}$. 15. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 0 & 2-i & 0 \\ 2+i & 0 & -2i \\ 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 1 & i \\ -i & -i & 1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 2-i \\ 0 & 2+i & 0 \end{pmatrix}$. 21. $\begin{pmatrix} -1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -1-i \\ 0 & -1+i & 0 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 1 & -2i & 2i \\ 2i & 1 & i \\ -2i & -i & 1 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 3 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} 1 & i & 2i \\ -i & 1 & -2i \\ -2i & 2i & 1 \end{pmatrix}$. 27. $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -i \\ 0 & i & 3 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & 1 \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 29. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & i \\ 0 & -i & 3 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Список литературы

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.- 320 с.

2. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.-320 с.

3. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.*М.: Высшая школа, 1998.- 320.

4. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.- 496 с.

5. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В. *Сборник задач по линейной алгебре.* Мн.: Выш. школа, 1980.-192 с.

Учебное издание

Линейные операторы

Методические указания

Составители: Гоголева Софья Юрьевна
Прокофьев Леонтий Николаевич

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.