

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»  
(Самарский университет)**

***В.В. БИРЮК, Ю.И. ЦЫБИЗОВ, А.М. ЦЫГАНОВ***

**ТЕЧЕНИЕ СЖИМАЕМЫХ СРЕД**

**САМАРА 2017**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»  
(Самарский университет)

*В.В. БИРЮК, Ю.И. ЦЫБИЗОВ, А.М. ЦЫГАНОВ*

## ТЕЧЕНИЕ СЖИМАЕМЫХ СРЕД

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия.....

С А М А Р А

Издательство Самарского университета  
2017

УДК 533

ББК 22.343

К 73

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. В. В. И в а х н и к,

д-р физ.-мат. наук, проф. И. П. З а в е р ш и н с к и й

***Бирюк, Владимир Васильевич***

К 73 **Течение сжимаемых сред:** учеб. пособие / *В.В. Бирюк, Ю.И. Цыбизов, А.М. Цыганов, Д.А. Угланов, Е.В. Благин, А.А. Воробьев.* . – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – 215 с.: ил.

**ISBN 978-5-7883-0643-8**

В данном пособии рассмотрены основные виды параксиальных вихревых лазерных пучков и дифракционные оптические элементы, с помощью которых формируются эти пучки. Получены аналитические выражения для скалярной дифракции плоской волны и гауссового пучка на спиральных оптических элементах. Исследовано распространение в пространстве гипергеометрических мод, эллиптических пучков Лагерра-Гаусса и простых оптических вихрей.

Пособие предназначено для студентов специальностей и направлений «Прикладная математика и информатика», «Прикладная математика и физика».

Подготовлено на кафедре теплотехники и тепловых двигателей

УДК 533

ББК 22.343

ISBN 978-5-7883-0643-8

© Самарский университет, 2017

## Оглавление

|                                                                                                   |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВВЕДЕНИЕ .....                                                                                    | 9  |
| Глава 1 Основные понятия и определения .....                                                      | 11 |
| Глава 2 Основные уравнения невязкой и нетеплопроводной сжимаемой жидкости (газа) .....            | 14 |
| 2.1 Уравнение неразрывности.....                                                                  | 15 |
| 2.2 Уравнение движения Эйлера .....                                                               | 15 |
| 2.3 Уравнение состояния (замыкающее уравнение).....                                               | 15 |
| 2.4 Уравнение энергии.....                                                                        | 16 |
| 2.5 Механическая форма уравнения энергии (уравнение Бернулли) ....                                | 18 |
| 2.6 Основное дифференциальное уравнение газовой динамики .....                                    | 19 |
| Глава 3 Принятые упрощенные модели течения .....                                                  | 20 |
| 3.1 Слабые возмущения. Звуковые волны.....                                                        | 21 |
| 3.2 Число (критерий) Маха.....                                                                    | 23 |
| 3.3 Одномерное движение газа .....                                                                | 23 |
| 3.4 Типичные частные случаи движения с использованием одномерного приближения .....               | 24 |
| 3.5 Относительные параметры течения сжимаемого потока .....                                       | 26 |
| 3.6 Газодинамические функции.....                                                                 | 27 |
| Глава 4 Особенности течения со сверхзвуковыми скоростями. Сильные возмущения, ударные волны ..... | 29 |
| 4.1 Возмущения при числе $M < 1$ и при $M > 1$ .....                                              | 30 |
| 4.2 Простая волна. Течение Прандтля – Майера .....                                                | 31 |
| 4.3 Скачки уплотнения ( ударные волны ) .....                                                     | 32 |
| 4.4 Прямой скачок .....                                                                           | 33 |

|                                                                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.5 Косой скачок уплотнения.....                                                                              | 35 |
| Глава 5 Некоторые особенности реального течения .....                                                         | 38 |
| 5.1 Пограничный слой .....                                                                                    | 39 |
| Глава 6 Оценка параметров и характеристик реактивных сопел авиационных<br>ГТД и ГТД наземного применения..... | 40 |
| 6.1 Основные требования к выходным устройствам (реактивным<br>соплам ).....                                   | 40 |
| 6.2 Классификация сопел .....                                                                                 | 41 |
| 6.3 Основные характеристики реактивных сопел ГТД.....                                                         | 43 |
| 6.4 Коэффициент расхода.....                                                                                  | 44 |
| 6.4.1 Сужающееся сопло .....                                                                                  | 45 |
| 6.4.2 Сопло Лавалья .....                                                                                     | 47 |
| 6.5 Коэффициент тяги.....                                                                                     | 48 |
| 6.6 Коэффициент эффективной тяги.....                                                                         | 51 |
| 6.7 Другие виды оценки совершенства сопла .....                                                               | 53 |
| 6.8 Рабочие режимы .....                                                                                      | 54 |
| 6.9 Особенности формы сопла Лавалья ВРД.....                                                                  | 56 |
| 6.10 Картина течения в сопле Лавалья .....                                                                    | 57 |
| 6.11 Определение условий отрыва за угловой точкой .....                                                       | 61 |
| 6.12 Перерасширение и отрыв потока.....                                                                       | 64 |
| 6.13 Выходные устройства ГТД наземного применения.....                                                        | 66 |
| 6.13.1 Общие требования .....                                                                                 | 66 |
| 6.13.2 Основные элементы конструкции .....                                                                    | 67 |
| 6.14 Оценка гидравлического сопротивления.....                                                                | 69 |

|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.15 Выхлопное устройство ГТД наземного применения с шумоглушением .....                         | 75  |
| 6.15.1 Конструкция выхлопного устройства.....                                                    | 75  |
| 6.15.2 Газодинамический расчет выхлопного устройства.....                                        | 77  |
| Глава 7 Плоские сопла .....                                                                      | 80  |
| 7.1 Профилирование сверхзвуковой части.....                                                      | 81  |
| 7.2 Определение выходного импульса укороченного сопла .....                                      | 85  |
| 7.3 Расчет сверхзвукового течения в канале с внезапным расширением .....                         | 87  |
| Глава 8 Теория подобия и анализ размерностей.....                                                | 90  |
| 8.1 Подобие физических процессов .....                                                           | 90  |
| 8.2 Критерии гидродинамического подобия .....                                                    | 93  |
| 8.3. Критерии теплового подобия.....                                                             | 97  |
| 8.4. Составление критериального уравнения .....                                                  | 99  |
| Глава 9 Элементы магнитной газовой динамики.....                                                 | 101 |
| 9.1 Область применения .....                                                                     | 101 |
| 9.2 Электромагнитные поля .....                                                                  | 103 |
| 9.3 Уравнения магнитной газодинамики .....                                                       | 108 |
| 9.4 Течение вязкой электропроводной жидкости по плоскому каналу в поперечном магнитном поле..... | 119 |
| 9.5 Магнитогидродинамические насосы, ускорители, дроссели и генераторы.....                      | 128 |
| 9.6 Вход потока электропроводной жидкости в магнитное поле и выход из него.....                  | 131 |
| 9.7 Уравнения магнитной газовой динамики для единичной струйки                                   | 138 |

|          |                                                                                 |     |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.8      | Магнитогазодинамические ударные волны и слабые возмущения                       | 145 |
| 9.9      | Условие обращения воздействия при течении газа в электромагнитном поле .....    | 156 |
| 9.10     | Простейшие решения уравнений одномерного течения газа в скрещенных полях.....   | 161 |
| Глава 10 | Диффузоры.....                                                                  | 170 |
| 10.1     | Дозвуковые диффузоры ВРД. Диффузоры для умеренных сверхзвуковых скоростей ..... | 170 |
| 10.2     | Диффузоры для небольших сверхзвуковых скоростей.....                            | 174 |
| 10.3.    | Сверхзвуковые диффузоры .....                                                   | 176 |
| Глава 11 | Математическое моделирование.....                                               | 180 |
| 11.1     | Анализ уравнений движения жидкости и методов их решения... ..                   | 180 |
| 11.2     | Краткие сведения о численных методах, используемых в CFD пакетах .....          | 188 |
| 11.3     | Компоненты численного метода .....                                              | 190 |
| 11.3.1   | Математическая модель .....                                                     | 190 |
| 11.3.2   | Метод дискретизации .....                                                       | 190 |
| 11.3.3.  | Система координат.....                                                          | 191 |
| 11.3.4.  | Расчетная конечноэлементная сетка .....                                         | 191 |
| 11.3.5   | Конечные аппроксимации.....                                                     | 193 |
| 11.3.6   | Метод решения .....                                                             | 193 |
| 11.3.7   | Критерии сходимости.....                                                        | 194 |
| 11.4     | Свойства численных методов решения .....                                        | 194 |
| 11.4.1   | Надежность .....                                                                | 194 |
| 11.4.2   | Устойчивость .....                                                              | 195 |

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| 11.4.3 Сходимость .....                               | 195 |
| 11.4.4 Выполнение законов сохранения .....            | 196 |
| 11.4.5 Ограничения при расчете .....                  | 197 |
| 11.4.6 Адекватность .....                             | 197 |
| 11.4.7 Точность .....                                 | 198 |
| 11.5 Метод конечных объемов.....                      | 199 |
| 11.5.1 Введение.....                                  | 199 |
| 11.5.2 Аппроксимация интегралов по поверхностям ..... | 200 |
| 11.5.3 Аппроксимация интегралов по объему .....       | 204 |
| 11.5.4 Интерполяция и методы дифференцирования.....   | 205 |
| 11.5.5 Реализация граничных условий.....              | 210 |
| 11.5.6 Алгебраическая система уравнения .....         | 210 |
| 11.6 Решение уравнений Навье - Стокса .....           | 211 |
| Библиографический список.....                         | 215 |

## ВВЕДЕНИЕ

Механика жидкости и газа (МЖГ) – специальная часть общей механики, включающая **гидравлику** (несжимаемая жидкость), **аэродинамику** и **газовую динамику** (сжимаемая жидкость). В отличие от механики твердого тела данная дисциплина сложнее ввиду отсутствия здесь абсолютно жестких связей между частицами среды. Наличие большой подвижности частиц жидкости и газа обуславливает особые трудности, присущие только МЖГ.

Особенностью любого движущегося потока жидкости и газа является то, что на направленное движение направленного потока накладывается хаотическое (беспорядочное) движение молекул, из которых состоит данная среда. Рассчитать в общем случае такое сложное движение реального потока пока не представляется возможным. Требуется схематизация и идеализация течения, т.е. принятие такой математической модели, которая не только сохраняет основные черты и особенности рассматриваемого явления, но и позволяет выполнить инженерный расчет доступными средствами.

Основу такой общей модели течения и по настоящее время составляет оправдавшая себя **гипотеза**, определяющая модель сжимаемой жидкости (газа) как среды, заполняющей сплошь пространство без образования пустот (**гипотеза о непрерывности или сплошности**). Эта гипотеза значительно упрощает теорию и выполняемые расчетно – экспериментальные исследования, так как позволяет рассматривать механические характеристики среды в виде таких непрерывных и дифференцируемых параметров, как скорость, давление и плотность в функции координат и времени.

**Газовая динамика** – наука (раздел механики), изучающая движение сжимаемой жидкости (газа) в условиях больших скоростей и температур, где исчерпывают себя законы гидравлики. Это - наука, требующая глубокого знания законов физики и механики и базируется на достижениях современной математики и компьютерной техники. Таким образом, уравнения

математической физики – основа математического аппарата данного раздела механики, а совершенное владение компьютером – залог успеха в практической деятельности.

Очевидно, что развитие авиации, ракетостроения, повышение уровня скоростей в проточной части элементов лопаточных машин, создание различных струйных аппаратов требует не только глубоких знаний в области гидрогазодинамики, но постоянного расширения наших познаний в области течений сжимаемой жидкости при около и сверхзвуковых скоростях движений.

В настоящее время разработаны и широко используются в инженерной практике различные программные комплексы, в частности, в области гидрогазодинамики, позволяющие выполнять следующие возможности математического моделирования внутриканальных и внешних дву- и трехмерных (2-D и 3-D) течений:

- стационарных и нестационарных задач;
- ламинарных и турбулентных течений (с различными моделями турбулентности);
- вязкие (модель Ньютона и неньютоновская жидкость) и не вязкая жидкость или газ.

При этом используются:

- эффективные вычислительные алгоритмы;
- адаптивное сгущение сеток;
- набор интеллектуальных граничных условий;
- смешанные сетки, произвольные геометрические области, процедура автоматизированной сшивки несовместных сеток;
- подвижные сетки: деформируемые, скользящие, динамическое добавление и удаление ячеек.

Очевидно, что критерием применимости полученных расчетом результатов является их верификация с экспериментом. Все это с одной

стороны требует не только глубокого изучения возможностей программы, но и знания закономерностей и особенностей течения несжимаемой жидкости.

Ниже представлены сведения об основных особенностях дозвукового и сверхзвукового течения, уравнения газовой динамики, используемые в инженерной практике и инженерные методы расчета течений сжимаемой жидкости в каналах переменного сечения, применительно к выходным устройствам ГТД авиационного и наземного применения.

В главах 1...3 приведены основные понятия и уравнения движения невязкой нетеплопроводной сжимаемой жидкости (газа), а также принятые упрощенные модели течения. Здесь же даны сведения о распространении слабых возмущений (звуковые волны). В главе 4 рассмотрены сильные возмущения, особенности течения со сверхзвуковыми скоростями и ударные волны. В главе 5 даны сведения об особенностях течения реального газа, а в главах 6 и 7 представлены конструкции выходных устройств авиационных ГТД и ГТД наземного применения, рассмотрены особенности течения и расчета параметров в этих каналах, выполняемых на основании современных достижений газодинамики.

## **Глава 1 Основные понятия и определения**

Можно считать, что между жидким и газообразным состояниями нет принципиального различия, так как от газа к жидкости и обратно возможен непрерывный переход. Тем не менее, жидкость нельзя рассматривать просто как сильно сжатый газ: количественное различие в их плотностях так велико, что свойства жидкостей кардинально отличаются от свойств газа. В жидкостях среднее расстояние между молекулами такого же порядка, что и их размеры, поэтому перемещение частиц в объеме жидкости крайне затруднено. Картина теплового движения молекул здесь следующая.

Имеются две группы молекул:

- (кочующие) газоподобные, совершающие беспорядочное движение;
- (оседлые), находящиеся в колебательном движении.

Между этими группами молекул при данной температуре существует динамическое равновесие.

Газ – система дискретных молекул, находящихся в хаотическом движении и сталкивающиеся друг с другом. Его можно характеризовать средней длиной свободного пробега, т.е. расстоянием, проходимым молекулой без столкновения ( $L_{\text{проб}}$ ). Если  $L_{\text{проб}}$  меньше характерного размера, например, обтекаемого тела, то газ можно рассматривать уже как сплошную среду.

Пример: при САУ в  $1\text{см}^3$  воздуха содержится  $2,710^{19}$  молекул. Если рассмотреть куб со стороной  $0,001\text{мм}$  (микрон), то в выделенном объеме куба содержится  $2,710^7$  молекул, что вполне достаточно для введения в нем осредненных параметров.

В каждый момент времени и в каждой точке пространства, занятого средой, рабочее тело среды находится в состоянии термодинамического равновесия, определяемого давлением, температурой, удельным объемом и плотностью. Величина плотности  $\rho$  зависит от природы рабочего тела и условий, в которых находится среда (Р.Т). Для сжимаемой жидкости (газа) зависимость плотности от давления и температуры устанавливается уравнением состояния Клапейрона:  $\rho = P/RT$ .

**Вязкость.** Все реально существующие газы являются вязкими. Газ, лишенный вязкости называют **идеальным**. Вязкостью называют свойство жидкостей или газов оказывать сопротивление относительному движению своих частей. Ньютон впервые предположил, что сила внутреннего трения между двумя слоями движущейся жидкости (газа) прямо пропорциональна разности скоростей слоев, площади их соприкосновения и обратно пропорциональна расстоянию между слоями. Связанное с понятием вязкости **касательное напряжение**, возникающее в движущейся среде, равно

$$\tau = F / S = \mu_v dw/dh, \text{ где}$$

$F$  – сила вязкости,  $S$  – площадь соприкосновения,  $dw/dh$  – градиент скорости,  $\mu_v$  – коэффициент динамической вязкости, зависящий от рода и состояния жидкости (газа). (Значительно зависит от температуры и является функцией давления при  $P > 100$  атм.)

**Давлением** ( $P$ ) называют силу, действующую на единичную площадку и направленную по нормали к поверхности объема внутрь его.

**Массовая плотность** – предел отношения массы рабочего тела к его объему при стягивании его к некоторой внутренней точке (такой предел существует на основании гипотезы сплошности среды).

**Сжимаемость** среды определяется коэффициентом объемного сжатия равным

$$B_v = - (V_1 - V_2) / (V_1 \Delta P), \text{ где}$$

$V_1$  и  $V_2$  – начальный и конечный объемы при изменении давления на величину  $\Delta P$ . Так как увеличение давления соответствует уменьшению объема, то здесь стоит знак ( - ).

### Действующие силы

В сжимаемой жидкости (по отношению к рассматриваемому объему) действуют внутренние и внешние силы.

Внутренние силы, как результат действия одних частиц в объеме на другие (на основании закона Ньютона), своим действием вызывают равное им противодействие и поэтому учитываться не будут (за исключением особых случаев).

Внешние силы разделяются на массовые и поверхностные.

К массовым силам относятся:

- силы тяжести;
- силы инерции;
- диссипативные, магнитные и электрические силы.

Поверхностные силы – силы, действующие на поверхности рассматриваемых объемов. К ним относятся:

- силы поверхностного натяжения;
- капиллярные силы;
- силы трения и нормального давления.

Представим в пространстве некоторый объем жидкости.

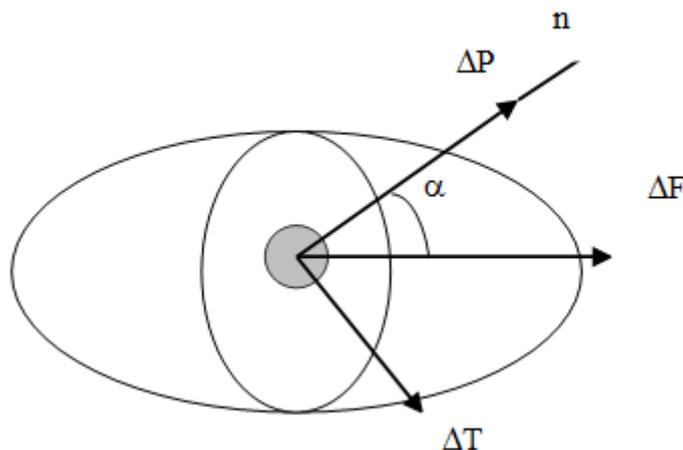


Рис.2.1 Действующие силы

Сила  $\Delta T$  называется касательной силой или силой трения;

$\Delta P$  называется растягивающей, или сжимающей силой, или силой нормального давления.

## **Глава 2 Основные уравнения невязкой и нетеплопроводной сжимаемой жидкости (газа)**

Газовая динамика рассматривает сильные взаимодействия между средой и стенками канала. Теория движения сжимаемой жидкости опирается на законы Ньютона для материальной точки. Уравнения, описывающие такие взаимодействия, выводятся на основании законов сохранения массы (расхода), энергии, количества движения (импульсов) в применении к элементарной

струйке газа, где параметры потока можно считать постоянными в поперечном сечении.

## 2.1 Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности в векторной форме имеет вид

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = -\partial \rho / \partial t$$

Для установившегося движения

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = 0$$

В случае двумерного течения в переменных  $x$  и  $y$

$$\partial(\rho w_x) / \partial x + \partial(\rho w_y) / \partial y = 0$$

## 2.2 Уравнение движения Эйлера

$$\rho d \mathbf{w} / d t = \rho \mathbf{g} - \operatorname{grad} P$$

Для двумерного течения

$$\rho d w_x / d t = \rho g_x - \partial P / \partial x$$

$$\rho d w_y / d t = \rho g_y - \partial P / \partial y$$

## 2.3 Уравнение состояния (замыкающее уравнение)

Общий вид уравнения  $F(P, \rho) = 0$ . Примеры связи :  $P/\rho = \text{const}$  ;  $P/\rho^k = \text{const}$ ;

$P = A - B/\rho$  - для упругой среды  $B > 0$ ,  $dP/d\rho > 0$ .

Как правило рассматривается **совершенный газ** (не обязательно идеальный), признаки которого:

- внутренняя энергия зависит только абсолютной температуры;
- уравнение состояния  $P = gRT$ .

**Энтропия** – функция состояния термодинамической системы, дифференциал которой связан с элементарным тепловым эффектом в обратимом процессе соотношением

$$dQ = T dS .$$

Энтропия совершенного газа

$$S = \frac{gR}{k-1} \ln \frac{P}{\rho^k} + const .$$

При  $S=const$  движение совершенного газа является **изоэнтропическим**.

## 2.4 Уравнение энергии

В качестве примера подхода к выводу уравнений и использования математического аппарата представлен вывод уравнения энергии, привлекая некоторые представления из гидравлики (линия тока, трубка тока и т.д.).

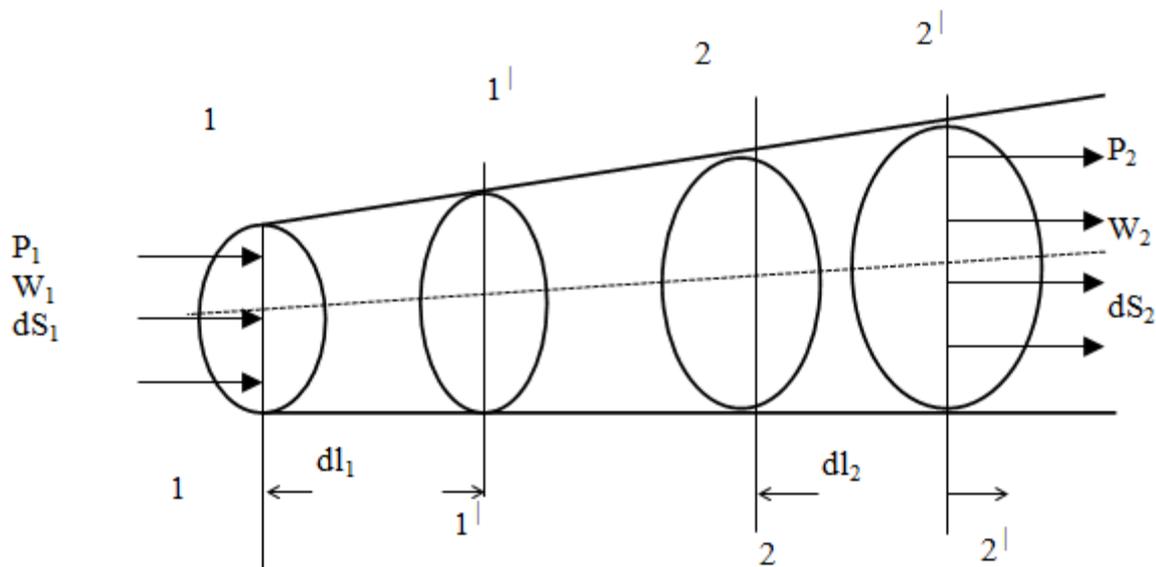


Рис. 2.2 Элементарная струйка тока.

Составим баланс всех видов энергии:

1. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  масса газа  $\Delta m = \Delta G/g$  занимала объем 1-1... 2-2.

2. Через  $\Delta t$  сек сечение 1-1 сместится на расстояние  $\Delta l_1$  и займет сечение 1'-1'.

Кинетическая энергия за  $\Delta t$  сек в сечениях 1-1 и 1'-1'.

$$(E_k)_{1-2} = \Delta m_{1-1'} (w^2/2)_{1-1'} + \Delta m_{1'-2} (w^2/2)_{1'-2}.$$

$$(E_k)_{1'-2} = \Delta m_{1'-2} (w^2/2)_{1'-2} + \Delta m_{2-2'} (w^2/2)_{2-2'}.$$

Изменение кинетической энергии

$$\Delta E_k = (E_k)_{1'-2} - (E_k)_{1-2} = \Delta m_{2-2'} (w^2/2)_{2-2'} - \Delta m_{1-1'} (w^2/2)_{1-1'}.$$

Используя свойство трубки тока  $\Delta m_{2-2'} + \Delta m_{1-1'} = \Delta m$ ;

$(w^2/2)_{2-2'} = w_2^2/2$  и  $(w^2/2)_{1-1'} = w_1^2/2$ , так как объем 1-1...2'-2' бесконечно мал. Тогда следует

$$\Delta E_k = \Delta m (w_2^2 - w_1^2)/2 \quad (\text{кГМ})$$

Потенциальная энергия

$$\Delta E_n = \Delta G (z_2 - z_1) \quad (\text{кГМ})$$

Работа сил давления

$$\Delta E_p = P_2 dS_2 dl_2 - P_1 dS_1 dl_1 = P_2 W_2 dS_2 dt - P_1 W_1 dS_1 dt \quad (\text{кГМ})$$

Изменение внутренней энергии

$$\Delta E_T = (U_2 - U_1) \frac{1}{A} \Delta G = \frac{\Delta G}{A} c_v (T_2 - T_1) \quad (\text{кГМ})$$

Подведенная и отведенная энергия  $\pm \frac{dQ_{1-2}}{A} \pm dL - dL_{\text{тр}}$ . При этом

$$\begin{aligned} \pm \frac{dQ_{1-2}}{A} \pm dL - dL_{\text{тр}} &= \frac{\Delta G}{q} \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right) + [P_2 w_2 dS_2 dt - P_1 w_1 dS_1 dt] + \\ &+ \frac{\Delta G}{A} c_v (T_2 - T_1) + \Delta G (z_2 - z_1). \end{aligned}$$

Так как  $dS w dt = dV = \frac{dG}{\gamma}$ , то  $\pm \frac{dQ_{1-2}}{A} \pm dL - dL_{\text{тр}} =$

$$\frac{\Delta G}{q} \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right) + dG \left( \frac{P_2}{\gamma_2} - \frac{P_1}{\gamma_1} \right) + \frac{\Delta G}{A} c_v (T_2 - T_1) + \Delta G (z_2 - z_1).$$

3. Приведем полученное уравнение к 1кГ газа, т.е.  $dQ/\Delta G = Q$ ,  $dL/\Delta G = L$ ,

$$DL_{\text{тр}} / \Delta G = L_{\text{тр}}, (\text{кГМ} / \text{кГ}).$$

Окончательный вид уравнения энергии для 1 кГ:

$$\pm Q/A + L - L_{\text{тр}} = (w_2^2 - w_1^2)/2g + (P_2/\gamma_2 - P_1/\gamma_1) + c_v (T_2 - T_1)/A + (z_2 - z_1).$$

Если обозначить  $c_v T + APV = i$  (энтальпия),  $Q = Q_{\text{нар}} + Q_{\text{вн}} = Q_{\text{нар}} + \Delta L_{\text{тр}}$ , где  $Q_{\text{нар}}$  и  $Q_{\text{вн}}$  подведенное с наружи и внутренне тепло соответственно, то уравнение энергии принимает вид:

$$\pm Q/A \pm L = (w_2^2 - w_1^2)/2g + (i_2 - i_1)/A + (z_2 - z_1).$$

Пример: Частные случаи

1.  $Q = 0, L = 0$ , т.е. течение в теплоизолированном канале. Тогда уравнение энергии принимает вид:  $0 = (w_2^2 - w_1^2)/2g + (i_2 - i_1)/A$ . Откуда при  $w_1 = 0$   $w_2 = \sqrt{2g\Delta i/A}$

2. Подвод энергии при работе компрессора  $+L = L_{\text{к}}$ ,  $Q_{\text{нар}} = 0$ .  $i_1/A + w_1^2/2g + L_{\text{к}} = i_2/A + w_2^2/2g$ .

3. Отвод энергии при работе турбины  $-L = L_{\text{т}}$ ,  $Q_{\text{нар}} = 0$ .  $i_1/A + w_1^2/2g - L_{\text{т}} = i_2/A + w_2^2/2g$ .

## 2.5 Механическая форма уравнения энергии (уравнение Бернулли)

В механической форме выведенное выше уравнение энергии для одного килограмма несжимаемой жидкости принимает вид:

$$-L = (w_2^2 - w_1^2)/2g + (z_2 - z_1) + (P_2 - P_1)/\gamma + L_{\text{тр}}.$$

Это уравнение носит название **обобщенного уравнения Бернулли**.

В газовой динамике пользуются упрощенной формой этого уравнения, когда отсутствует техническая работа и силы трения ( $L = L_{\text{тр}} = 0$ ) и запас потенциальной энергии не изменяется ( $z_2 = z_1$ )

$$(w_2^2 - w_1^2)/2g + \int_1^2 P/\gamma = 0$$

В идеальном адиабатическом процессе (отсутствие теплового воздействия и сил трения) энтропия постоянна, т.е. процесс изоэнтропический. Тогда уравнение Бернулли имеет вид

$$(k/k - 1)(P_1/\gamma_1)[(P_2/P_1)^{(k-1)/k} - 1] + (w_2^2 - w_1^2)/2g = 0.$$

## 2.6 Основное дифференциальное уравнение газовой динамики

Уравнения газовой динамики, описывающее плоское потенциальное установившееся течение сжимаемой жидкости имеет вид:

$$(1 - u^2/a^2) \rho u/\rho x - (uv/a^2)(\rho v/\rho x + \rho u/\rho y) + (1 - v^2/a^2) \rho v/\rho y = 0$$

$$\rho v/\rho x - \rho u/\rho y = 0.$$

Вводя потенциал скорости  $\rho\phi/\rho x = u$ ,  $\rho\phi/\rho y = v$ ,

Получим основное дифференциальное уравнение газовой динамики

$$(a^2 - u^2) \rho^2\phi/\rho x^2 - (2uv) \rho^2\phi/\rho x \rho y + \rho^2\phi/\rho y^2 = 0$$

Нелинейность данного уравнения вызывает математические трудности из-за отсутствия метода решения общей задачи. В связи с этим на практике получил распространение, предложенный С.А. Чаплыгиным, метод годографа скорости, где в результате перехода к переменным из составляющих скорости  $u$  и  $v$  уравнения становятся линейными. При этом большую роль играет уравнение С.А. Чаплыгина для функции тока:

$$\rho^2\psi/\rho w^2 + (1 - M^2)/w^2 \rho^2\phi/\rho\Theta^2 + (1 + M^2)/w (\rho\phi/\rho w) = 0, \text{ где}$$

функция тока  $\rho\phi/\rho n = \rho w$  и  $\rho\phi/\rho s = 0$ , а  $n$  и  $s$  – соответственно нормаль и текущая координата, отсчитываемая вдоль линии тока (естественная система координат).

### Глава 3 Принятые упрощенные модели течения

Реальное течение газа в каналах различных установок, устройств, лопаточных машин и особенно авиационных двигателей являются сложными из-за наличия зон отрыва, трехмерности, высокой турбулентности, пульсаций, возможных скачков уплотнения и т.д. В общем случае рассчитать такое сложное течение пока не представляется возможным даже с использованием современных программ для ПЭВМ, что обуславливает дальнейшее расширение познаний в области течения сжимаемой жидкости. Это обстоятельство приводит к необходимости рассмотрения более простых или идеализированных схем течения, находить их типичные особенности и принципиальные отличия.

Существующая на сегодняшний день практика показывает, что в целом ряде случаев результаты расчета с использованием упрощенных моделей течения адекватно отражают реальные процессы и с достаточной точностью могут быть использованы для количественной оценки. К основным наиболее распространенным для анализа экспериментальных данных и инженерных расчетов приняты следующие упрощенные модели течения газа:

1 **Установившееся** (стационарное) течения, если все параметры не зависят от времени.

2 **Адиабатическое** течение, если пренебрегается теплообменом с окружающей средой.

3 **Изоэнтропическое** (обратимое) течение, если энтропия в потоке постоянна.

4 **Одномерное** течение установившегося совершенного газа соответствует случаю, когда все параметры потока однородны по сечению и являются функцией только продольной координаты.

5 **Двумерное** (плоское, осесимметричное) течение реализуется, если параметры потока являются функцией 2-х координат.

6 Течение вязкого газа считается **ламинарным**, если движение его частиц носит упорядоченный (слоистый) характер.

7 Течение вязкого газа считается **турбулентным**, если движение носит хаотический порядок, обуславливающий пульсации параметров в продольном и поперечном направлениях.

### **8 Пространственное - трехмерное течение.**

В инженерной практике анализа экспериментальных исследований и расчетов с помощью средств ручного счета существенную роль играет модель одномерного течения.

## **3.1 Слабые возмущения. Звуковые волны**

Когда тело перемещается в газовой среде, возникают возмущения, вызывающие изменение давления. При медленном и плавном перемещении тела удобообтекаемой формы возмущения практически отсутствуют. При быстром же перемещении возникает избыточное местное давление, толкающее окружающие слои. Они в свою очередь снова сжимаются и порождается волна возмущения – звуковая (слабая) волна, т.е. обтекаемое потоком тело создает изменения или возмущения всех параметров газовой среды по сравнению с параметрами невозмущенного набегающего потока. Таким образом, основу явления возникновения и распространения звука или слабых возмущений составляет механизм возникновения возмущений, вызванных изменением давления, а основным механизмом формирования течений является способность газа (среды) передавать возмущения параметров от места их возникновения в дальнее поле в виде сферических волн возмущения. (Типичным примером образования малых возмущений и их передачи является человеческая речь).

С молекулярно – кинетической точки зрения для получения звуковой волны необходимо, чтобы молекулы, вылетая из области с большим давлением

и плотностью, передавали импульс другим молекулам с пониженным давлением. Звук возникает в случае, если размеры области изменения давления и плотности намного больше расстояния, проходимого молекулами до соударения ( $L_{\text{проб}}$ ). В противном случае молекулы перейдут из гребня во впадину и волна моментально выравнивается.

Подсчет величины скорости звука осуществляется по формуле, устанавливающей связь изменения давления с плотностью:

$$a^2 = dP/d\rho .$$

Здесь важно знать, как при этом изменяется температура.

Ньютон первый вычислил величину скорости звука, предположив, что температура не меняется, т.е. им вычислена изотермическая скорость, Расчет Ньютона не совпал с экспериментом.

Лаплас выдвинул правильное предположение, что давление и температура в звуковой волне изменяются адиабатически. Поток тепла из области сгущения в область разрежения пренебрежимо мал, если только длина велика по сравнению с длиной свободного пробега молекул. Ничтожная утечка тепла в этом случае приводит к незначительному поглощению энергии и не влияет на скорость звука. Поглощение тепла усилится, если длина волны приблизится к  $L_{\text{проб}}$ , но такие длины волн в  $10^6$  раз меньше длины волны слышимого звука. Скорость звука равна  $a = \sqrt{kqRT}$ . Численно она оказывается приблизительно равна половине средней молекулярной скорости. Большая роль в аэродинамике и газовой динамике отводится понятию скорости звука, как скорости распространения слабых возмущений.

Распространение звука в газовой среде – линейное волновое движение, где возмущения всегда передаются с определенной скоростью (скорость звука), которая может меняться внутри среды. (В несжимаемой жидкости малые изменения давления распространяются с бесконечно большой скоростью.)

### 3.2 Число (критерий) Маха

Общепринятым параметром, характеризующим соотношение между местной скоростью движения газа  $w$  и скоростью звука  $a$ , является число (критерий) Маха:

$$M = w/a$$

По числу  $M$  существует следующая классификация течений:

- при  $M < 1$  – поток дозвуковой;
- при  $0,9 < M < 1,2$  – поток трансзвуковой;
- при  $M > 1$  – поток сверхзвуковой (при  $M > 4$  – поток гиперзвуковой).

Указанные виды течений, определяемые числом  $M$ , радикально отличаются между собой с физической точки зрения и описываются различными видами уравнений математической физики ( дозвуковые течения описываются уравнением эллиптического типа, трансзвуковые (околозвуковые) – параболического типа и сверхзвуковые – гиперболического типа).

Физический смысл числа  $M$  заключается в том, что оно является критерием сжимаемости жидкости (газа). В зависимости от числа  $M$  определяются текущие параметры потока. До чисел  $M < 0,15$  (скорость около 50 м/сек) сжимаемостью можно пренебречь.

Для анализа и расчета внутриканальных течений кроме критерия Маха большое значение имеет **коэффициент скорости**  $\lambda = w/a_{кр}$ , где  $a_{кр}$  – критическая скорость звука, вычисляемая по температуре торможения ( см. ниже ).

### 3.3 Одномерное движение газа

Одномерное – такое движение газа, в котором все параметры течения меняются только в одном направлении (обычно вдоль оси). Одномерным

можно считать течение газа в канале с мало изменяющимся поперечным сечением канала и малой кривизной оси (трубки тока).

Рассмотрим течение в таком канале, считая, что поток совершает теплообмен с окружающей средой, массообмен (подвод или отвод части газа), осуществляется геометрическое воздействие стенок канала ( $dS \neq 0$ ), совершается техническая работа, газ – реальный, совершенный. Тогда принимая во внимание уравнения главы 2, обозначая изменение работы внешних сил через  $dL$ , изменение работы сил трения через  $dL_{тр}$ , изменение подвода или отвода тепла через  $dQ$  и изменение расхода газа (отсос или подсос) через  $dG$ , получим дифференциальное уравнение изменения скорости (ускорения) потока вдоль канала:

$$(M^2 - 1)dw/w = dS/S - (k-1)dQ/a^2 - dL/a^2 - kdL_{тр}/a^2 - dG/G, \text{ где}$$

$M = w/a$  - число Маха,  $w$  - скорость потока,  $a$  - скорость звука,

$S$  - площадь поперечного сечения,  $k$  - показатель адиабаты.

Это уравнение является *общим выражением закона обращения воздействия на поток (закон Л.А. Вулиса)*.

### 3.4 Типичные частные случаи движения с использованием одномерного приближения

1 Энергетически изолированный изоэнтропийный канал ( $dQ = 0$ ,  $dL = 0$ ,  $dL_{тр} = 0$ ,  $dG = 0$ ). Тогда  $(M^2 - 1)dw/w = dS/S$

Из полученного равенства следует, что в сужающемся (конфузорном) канале ( $S_2 < S_1$ ) поток, у которого текущая скорость меньше скорости звука (дозвуковой поток  $M < 1$ ) разгоняется, а сверхзвуковой поток ( $M > 1$ ) тормозится. В расширяющемся (диффузорном) канале дозвуковой поток тормозится, а сверхзвуковой – разгоняется.

Для непрерывного разгона потока от дозвуковой скорости до сверхзвуковой канал должен быть в начале сужающимся, а затем

расширяющимся. При этом в минимальном (критическом) сечении достигается скорость звука в случае, если давление окружающей среды меньше критического. Такой конфузorno-диффузорный канал называют соплом Лавалья (конвергентно-дивергентное сопло).

2 Механическое сопло. В таком сопле  $dS = 0, dL_{тр} = 0, dQ = 0, dG = 0$ .

$$(M^2 - 1)(dw/w) = dL/a^2$$

Для перехода из дозвуковой области течения в сверхзвуковую необходимо изменить знак воздействия на поток (рис.3.1):

- при  $M < 1$  необходимо осуществить отвод работы турбиной;
- при  $M > 1$  необходим подвод работы компрессором.

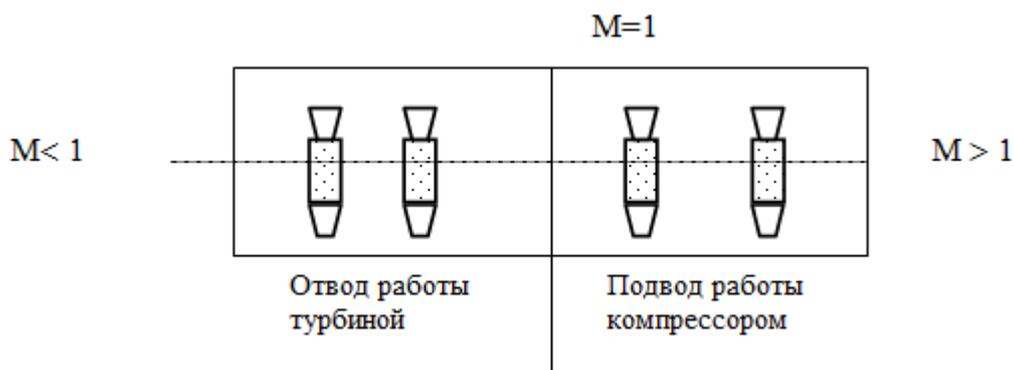


Рис. 3.1 Механическое сопло

6 Расходное сопло:

$$dS = 0, dL = 0, dQ = 0, dG = 0.$$

$$(M^2 - 1) dw/w = - dL/a^2$$

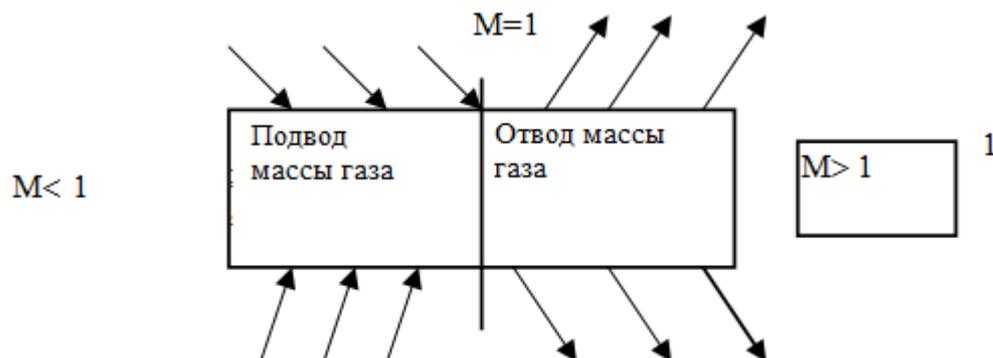


Рис. 3.2 Схема течения в расходном сопле

На практике, кроме ускорения потока геометрическим воздействием, используется так же комбинированное сопло, в котором дозвуковая часть – сужающееся сопло, а сверхзвуковая – расходное сопло. Такие сопла нашли применение в аэродинамических трубах, где требуется высокая равномерность сверхзвукового потока на выходе.

### 3.5 Относительные параметры течения сжимаемого потока

Уравнение энергии

$$i^* = i + \frac{w^2 A}{2q} \quad (1)$$

$A = 1/427$  ккал/кГм – механический эквивалент теплоты;

$i^*$  - полная удельная энергия заторможенного потока;

$i$  - удельная энтальпия, характеризующая потенциальную энергию газового потока.

Равенство (1) можно выразить через теплоемкость

$$c_p T^* = c_p T + \frac{w^2 A}{2q} \quad (2)$$

Известные равенства

$$\frac{P}{\rho} = qRT, \quad \frac{P^*}{\rho^*} = qRT^*, \quad AR = c_p - c_v,$$

$$AR = c_p (1 - 1/k) = c_p (k-1)/k, \text{ откуда } c_p = R \left( \frac{k}{k-1} \right) A$$

Равенство (2) разделим на  $c_p T^*$

$$1 = \frac{T}{T^*} + \frac{w^2 A}{2c_p T^* q} \text{ откуда } \frac{T}{T^*} = 1 - \frac{w^2 A}{2c_p T^* q}$$

$$a_{кр}^2 = \frac{2k}{k+1} qRT^* ;$$

$$\frac{T}{T_*} = 1 - \frac{w^2 A (k-1)}{2 q A R k T_*} \left[ \frac{k+1}{k-1} \right] = 1 - \frac{w^2}{a_{\text{об}}^2} \left( \frac{k-1}{k+1} \right) = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{-1}$$

Из уравнения состояния следует

$$\frac{P}{P_*} = \left( \frac{T}{T_*} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \left( \frac{T}{T_*} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{k-1}}$$

Так как  $c_p = AR \left( \frac{k}{k-1} \right)$ ,  $i = c_p T$ ,  $a = \sqrt{kqRT}$ , то

$$i = AR \left( \frac{k}{k-1} \right) \frac{q}{q} T = \frac{A}{q} a^2 \frac{1}{k-1} \quad \text{откуда} \quad a^2 = \frac{(k-1) iq}{A}.$$

Тогда  $M^2 = \frac{w^2}{a^2} = \frac{w^2}{i} \left( \frac{A}{(k-1)q} \right)$ , т.е. квадрат числа М пропорционален кинетической энергии потока к его потенциальной энергии в данной точке (физический смысл критерия подобия М или сжимаемости).

По подобию:

Коэффициент скорости  $\lambda$  - отношение кинетической энергии потока к его полной энергии.

Скорость звука  $a$  переменна вдоль потока.

Критическая скорость звука  $a_{\text{кр}}$  - постоянная величина для энергоизолированного потока и является масштабом скорости.

### 3.6 Газодинамические функции

Газодинамические расчеты и исследования течений с дозвуковыми и сверхзвуковыми скоростями основаны на сложных и громоздких уравнениях газовой динамики. Поэтому существенное значение имеют вопросы снижения трудоемкости расчетов даже в настоящее время.

Снижение трудоемкости расчетов и анализа экспериментов связаны с применением газодинамических функций, связывающих основные параметры с относительной скоростью ( $\lambda$  или  $M$ ) потока. Такие одномерные безразмерные функции характеризуют состояние потока в различных сечениях изоэнтропийного потока. За независимую переменную принят коэффициент скорости  $\lambda$ . Значение  $k$  изменяется от  $k=1,05$  до  $k=1,7$  и охватывает весь возможный диапазон изменения  $k$  для нужд химической и нефтеперерабатывающей промышленности. (В авиационных ГТД  $k$  изменяется от 1,4 (воздух) до 1,33 (температура до  $1000^{\circ}\text{K}$ , газ) до 1,25 (продукты сгорания при  $2000^{\circ}\text{K}$ ).

Параметры потока следующим образом зависят от чисел  $M$  и  $\lambda$ .

1 Связь числа Маха с коэффициентом скорости  $\lambda$ :

$$M = \sqrt{\frac{2}{k-1}} \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}}$$

2 Функция  $\tau(\lambda) = \frac{T}{T^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2$ , получена путем преобразования

уравнения теплосодержания  $\tau_{кр} = \frac{2}{k+1}$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$  при  $0 \leq \lambda \leq \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$

3 Функция  $\varepsilon(\lambda) = \frac{\rho}{\rho^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$  получена путем преобразования уравнения Бернулли  $1 \geq \varepsilon(\lambda) \geq 0$ .

4. Функция  $\pi(\lambda) = \frac{P}{P^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = \tau(\lambda) \varepsilon(\lambda)$ ,  $\pi(1) = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$

5. Функция, характеризующая поток массы :

$$q(\lambda) = \frac{\rho v}{\rho_{\infty} v_{\infty}} = \frac{F_{\infty}}{F} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$q(\lambda = 0) = 0$  и  $q(\lambda_{\max}) = 0$ ,  $q_{\max} = 1$  при  $\lambda = 1$ .

6. Функция, характеризующая импульс потока

$$Z(\lambda) = 2 \frac{J}{J_{\infty}} = 2 \frac{mv + pF}{ma_{\infty} + p_{\infty} F_{\infty}} = \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right)$$

## Глава 4 Особенности течения со сверхзвуковыми скоростями.

### Сильные возмущения, ударные волны

Сверхзвуковые течения идеального или реального газа реализуются при числах  $M > 1$ . Исходя из молекулярно-кинетической теории, можно сказать, что кинетическая энергия направленного движения превосходит по величине кинетическую энергию молекулярного движения лишь при числе  $M = (3/k)^{1/2}$  ( $M = 1,46$  для воздуха). Однако кардинальные отличия сверхзвукового течения от дозвукового начинаются уже при  $M = 1$ , когда скорость частиц газа равна скорости распространения малых возмущений (скорости звука) в той же точке. Эти принципиальные отличия, начинающиеся при  $M = 1$  отражают и соответствующие уравнения математической физики.

В общем случае при движении потока со сверхзвуковыми скоростями (обтекание тела, течение в канале и т.д.) ему приходится менять свое направление по сравнению с первоначальным, т.е. отклоняться (поворачиваться) на положительные или отрицательные углы  $\Delta\theta$ . Положительным углам поворота  $\theta$  соответствуют течения с разгоном потока ( $M_2 > M_1$ ;  $\lambda_2 > \lambda_1$ ). Отрицательным углам  $\theta$  соответствует торможение сверхзвукового потока ( $M_2 < M_1$ ;  $\lambda_2 < \lambda_1$ ).

#### 4.1 Возмущения при числе $M < 1$ и при $M > 1$ .

Механизм передачи возмущений в сверхзвуковом и дозвуковом течениях имеет свои особенности. Рассмотрим примеры о равномерном движении точки в пространстве, заполненном неподвижным газом (воздухом).

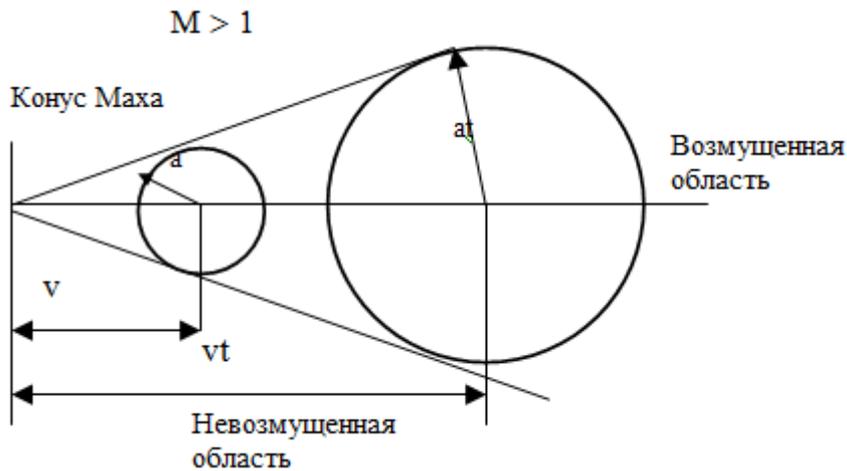


Рис. 4.1 Распространение возмущений в газообразной среде

На рис.4.1 представлены:

- 1 – неподвижная среда  $H = 0$ ,  $V = 0$ ;
- 2 – источник возмущения движется со скоростью  $V < a$  ( $M < 1$ );
- 3 - источник возмущения движется со скоростью распространения звука  $V = a$  ( $M = 1$ );
- 4- источник возмущения движется со сверхзвуковой скоростью  $V > a$  ( $M > 1$ ).

Если точка (источник возмущений) движется с дозвуковой скоростью, то созданные волны возмущений обгоняют эту точку, и она движется все время в возмущенном ею же самой потоке.

При сверхзвуковом движении точка обгоняет созданные ею волны возмущений и вся возмущенная область сосредоточена в конусе Маха с углом раскрытия  $\alpha = \arcsin 1/M$ . Конус Маха располагается за источником возмущений.

## 4.2 Простая волна. Течение Прандтля – Майера

В газовой динамике безвихревых изоэнтропических потоков имеется важный класс сверхзвуковых течений, называемых простой волной. (Простая волна Римана существует в случае нестационарного одномерного дозвукового и сверхзвукового течения.) В случае плоского сверхзвукового течения простая волна называется течением Прандтля – Майера.

Рассмотрим течение, связанное с поворотом равномерного сверхзвукового потока, обтекающего острый угол. В вершине угла (точка А) возникает слабое возмущение, связанное с расширением газа (уменьшение давления) за угловой точкой. В равномерном потоке такое начальное возмущение распространяется по прямой линии Маха (называемой характеристикой), составляющей с направлением скорости натекающего потока  $M_1$  угол  $\alpha_1 = \arcsin 1/M_1$ . Поворот потока завершится, когда направление скорости совпадет с направлением стенки за вершиной угла. Следует отметить, что поток, отклонившись на заданный угол  $\Delta\theta$  и приняв направление стенки за вершиной угла, снова становится равномерным. И в этом случае существует конечное возмущение, составляющее уже угол

$\alpha_2 = \arcsin 1/M_2$ . Таким образом, поворот равномерного сверхзвукового потока, т.е. расширение его осуществляется в веере (последовательности) слабых возмущений, источником которых является вершина угла. Эти возмущения распространяются по прямолинейным характеристикам (линиям Маха). При таком повороте сверхзвукового потока около внешнего тупого угла значения скорости, давления, и плотности остаются постоянными вдоль прямолинейных характеристик. Для аналитического расчета удобно ввести понятие угла расширения потока  $\varphi$  и полярные координаты в центрированной простой волне. Угол расширения :

$$\varphi = (k + 1)/k - 1)^{1/2} \arcsin [(k - 1)(\lambda^2 - 1)/2]^{1/2}.$$

При  $\lambda = 1$   $\varphi = 0$  и при истечении в вакуум  $\varphi = \varphi_{\max} = (k + 1)/k - 1)^{1/2}(\pi/2)$ .

Зависимость параметров сверхзвукового потока от угла  $\varphi$  имеет вид:

скорость звука  $a / a_{кр} = \cos \varphi / m$ ,  $[(k + 1)/(k - 1)]^S$  ;

коэффициент скорости  $\lambda = w/a_{кр} = [(k - \cos 2 \varphi / m) / (k - 1)]^{1/2}$  ;

давление  $P = P^* [(1 + \cos 2 \varphi / m) / (k - 1)]^{k/(k-1)}$  ;

плотность  $\rho = \rho^* [(1 + \cos 2 \varphi / m) / (k - 1)]^{1/(k-1)}$ ,

где  $P^*$  и  $\rho^*$  - заторможенные параметры потока.

Линия тока в течении Прандтля – Майера рассчитывается по формуле:  $r = r_{кр} / (\cos \varphi / m)^{m^2}$ , где  $r_{кр}$ - текущий радиус в критическом сечении потока при  $\lambda = 1$ .

### 4.3 Скачки уплотнения ( ударные волны )

Как уже было показано в 4.1, всякое повышение давления распространяется в среде с конечной скоростью во все стороны в виде волн давления. Слабые волны давления движутся со скоростью звука. При этом звуковое давление и уплотнение, вызванное волной, малы по сравнению с давлением среды. Очень мала и скорость движения самих частиц среды (акустическая скорость), возникающая в результате прохождения звуковой волны, по сравнению со скоростью звука. Например, при мощном звуке с частотой 1000 гц, сила которого близка к порогу болевого ощущения человеческого уха, составляет приблизительно величину  $3 \cdot 10^3$  от атмосферного давления воздуха вблизи Земли ( $10^5$  Па), а акустическая скорость при этом рана лишь 73 см /сек или  $2,1 \cdot 10^{-3}$  от скорости звука.

Основная особенность сильной волны давления, возникающей, например, при взрыве заключается в том, что фронт волны очень узок (порядка длины свободного пробега молекул) и поэтому параметры состояния газовой среды (давление, плотность, температура) изменяются скачкообразно (сильный разрыв параметров течения), поэтому их еще называют ударными волнами.

Скачки уплотнения являются источником повышенного лобового сопротивления движущегося тела, так как перед скачком давление на поверхности тела повышается по сравнению с тем, каким оно было бы при отсутствии скачка, а за скачком устанавливается пониженное давление. Сопротивление, вызванное наличием скачка уплотнения или ударной волной, называют волновым сопротивлением.

Со скачками уплотнения связаны следующие особенности течения. В идеальной сжимаемой жидкости результирующая сила давлений равна нулю (согласно парадоксу Даламбера) до тех пор, пока появляются скачки уплотнения. В идеальной сжимаемой жидкости энергия потока расходуется в скачке уплотнения на неадиабатическое сжатие. В реальной (вязкой) сжимаемой жидкости энергия кроме неадиабатического сжатия, дополнительно расходуется на работу сил трения. В конечном счете вся энергия в скачке переходит в тепловую.

Возникновение скачков уплотнения (ударных волн) связано с торможением сверхзвукового потока, т.е. с обтеканием вогнутой стенки или отрицательным углом  $\Delta\theta$ . Причем интенсивность скачка, т.е. степень изменения параметров газа, возрастает с увеличением угла  $\Delta\theta$ .

Риман обосновал возможность скачкообразного изменения параметров состояния газа. Теория скачка разработана Ренкиным и Гюгонио.

#### **4.4 Прямой скачок**

Прямой скачок является поверхностью разрыва перпендикулярной скоростям потока до и после скачка. Газ - совершенный (идеальный).



Рис.4.2 Схема течения в прямом скачке уплотнения

Три соотношения (уравнение неразрывности, уравнение количества движения и уравнение энергии) позволяют вывести уравнение ударной адиабаты Ренкина- Гюгонио для идеального газа с постоянными удельными теплоемкостями, связывающее параметры до и после прямого скачка:

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} = k \frac{P_1 + P_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{\Delta P}{\Delta \rho}$$

(Если  $\Delta P$  и  $\Delta \rho$  - малы, т.е. распространяется слабая волна, тогда

$\frac{dP}{d\rho} = k \frac{P}{\rho} = a^2$ . Откуда следует, что очень слабая ударная волна перемещается со звуковой скоростью.

Изменение давления и плотности соответственно равно:

$$P_2 / P_1 = (2k M_1^2) / (k + 1) - (k - 1) / (k + 1),$$

$$\rho_1 / \rho_2 = (k - 1) / (k + 1) + 2 / (k + 1) M_1^2.$$

В прямом скачке справедливо равенство:  $w_1 w_2 = a_{кр}^2$  или  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ , откуда следует, что в прямом скачке уплотнения сверхзвуковая скорость газа переходит в дозвуковую.

Для идеального газа с двухатомными молекулами ( $k = 1,4$ ) следует, что максимальное отношение плотностей  $\rho_1 / \rho_2 = (k - 1) / (k + 1) = 6$ .

Соответствующие соотношения прямого скачка в случае реального (вязкого) газа значительно отличаются от приведенных соотношений, особенно при  $M > 5$  и высоких температурах, когда удельные теплоемкости не постоянны вследствие возбуждения колебательной энергии молекул. Так для

совершенного газа при  $k = 1,4$  отношение плотностей может достигать значений, намного  $> 6$ .

#### 4.5 Косой скачок уплотнения

Более общий случай торможения сверхзвукового потока – косой скачок. Фронт косого скачка располагается наклонно к направлению потока. В этом случае только нормальная компонента скорости  $w_{1н}$  претерпевает разрыв, подобный разрыву скорости в прямом скачке. Тангенциальная составляющая скорости  $w_{1т}$  остается неизменной (рис 4.3).

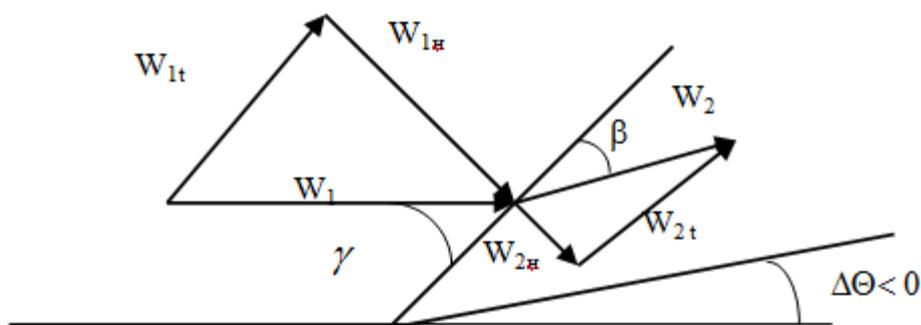


Рис. 4.3 Схема течения в косом скачке уплотнения

Изменения  $P$ ,  $\rho$  и температуры определяются по соотношениям справедливым для прямого скачка, но только по нормальным составляющим скорости  $w_{1н}$  и  $w_{2н}$ .

Составляющие скорости  $w_{1т}$  и  $w_{2т}$  остаются неизменными. Для расчета используется условие Прандтля:

$$w_{1н} w_{2н} = a_{кр}^2, \quad \lambda_{1н} \lambda_{2н} = 1, \quad w_{1т} = w_{2т}.$$

За косым скачком уплотнения скорость потока всегда сверхзвуковая, т.е. интенсивность торможения в нем меньше, чем в прямом скачке. Справедливо следующее кинематическое равенство:  $\Delta\Theta = \gamma - \beta$ .

#### 4.6 Детонационная волна

Рассмотрим основные положения теории детонации. Опыты по распространению пламени в трубе показывают, что обычно медленный процесс горения при определенных условиях может переходить в быстрый, распространяющийся со скоростью более 2000 м /сек, который и был назван детонацией. Чепмен и Жуге, изучавшие детонацию, предположили, что химическая реакция здесь происходит мгновенно, т. е. Возникает резкий фронт, бегущий по несгоревшему газу и превращает его в сгоревший газ. Такой переход через фронт аналогичен переходу от несжатого газа к сжатому во фронте ударной волны. Единственное отличие между ударным и детонационным переходом заключается в том, что химические свойства сгоревшего газа отличаются от природы несгоревшего и что реакция влияет на энергетический баланс, т.е. внутренняя энергия сгоревшего газа отличается от таковой у несгоревшего.

Таким образом, детонация – процесс горения, вызванный ударной волной, в которой резко повышаются давление, плотность, температура и энтропия. В дальнейшем процессе горения давление и плотность уменьшаются, а энтропия и температура растут.

Идеализированная схема детонации представлена на рис.4.4. Предполагается, что источник сильного возмущения (взрыв) находится в бесконечно длинной жесткой трубе, в которой отсутствует передача тепла через стенки.

На основании уравнений сохранения массы, количества движения и энергии имеем:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= (W - U) \rho_2, \\ W^2 \rho_1 + P_1 &= (W - U)^2 \rho_2 + P_2, \\ E_1 + W^2/2 + P_1/\rho_1 &= E_2 + (W - U)^2/2 + P_2/\rho_2,\end{aligned}$$

где  $P$  – давление;  $\rho$  - плотность;  $E$  – внутренняя энергия на единицу массы;

$W$  – скорость, с которой зона реакции перемещается в

зону взрыва;  $U$  – изменение скорости потока в зоне реакции; индексы 1 и 2 относятся к параметрам перед зоной реакции и за ней соответственно. Отсюда следует

$$W = 1/\rho_1[(P_2 - P_1) / (1/\rho_1 - 1/\rho_2)]^{1/2},$$

$$U = [(1/\rho_1 - 1/\rho_2)(P_2 - P_1)]^{1/2},$$

$$E_2 - E_1 = [(1/\rho_1 - 1/\rho_2)(P_2 + P_1)]/2$$

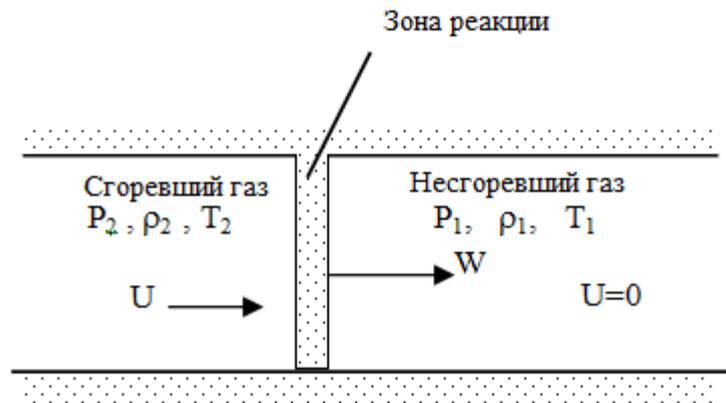


Рис. 4.4. Идеализированная схема детонационной волны

Изменение внутренней энергии идеального газа можно записать

$$E_2 - E_1 = c_v (T_2 - T_1) - h,$$

Где  $h$  – энергия, выделяемая при взрыве. Уравнение состояния

$$P_2 = \rho_2 R_2 T_2.$$

Причем газовая постоянная  $R_2$  не совпадает с  $R_1$  из-за наличия химической реакции при взрыве.

Задача расчета заключается в том, чтобы определить  $W$ ,  $U$ ,  $P_2$ ,  $\rho_2$  и  $T_2$  для известной величины выделяемого тепла при взрыве и известных параметров состояния  $P_1$ ,  $\rho_1$ ,  $T_1$ . Замыкающим является условие Чепмена – Жуге, вытекающее из рассмотрения диаграммы  $P - 1/\rho$  на рис.4.5.

Точка С здесь изображает конечное состояние горения при постоянном объеме  $\rho_1 = \rho_2$ , тогда как точка F изображает конечное состояние горения при постоянном давлении. Когда конечное состояние лежит на части BC, то мы

будем иметь детонацию; когда же конечное состояние лежит на части FK, то в этом случае мы будем иметь обычное горение.

Экспериментально подтверждено, что скорость детонации постоянна для данной горючей смеси газов. Обычно считается, что скорость детонации определяется точкой В, которая является точкой касания кривой Гюгонио и линии, проведенной из начального состояния А. В этой точке

$$W_B = U_B + a_2 ,$$

где  $a_2$  – скорость звука в области 2. Это условие для В известно как состояние Чепмена – Жуге, которое является наиболее устойчивым состоянием детонации.

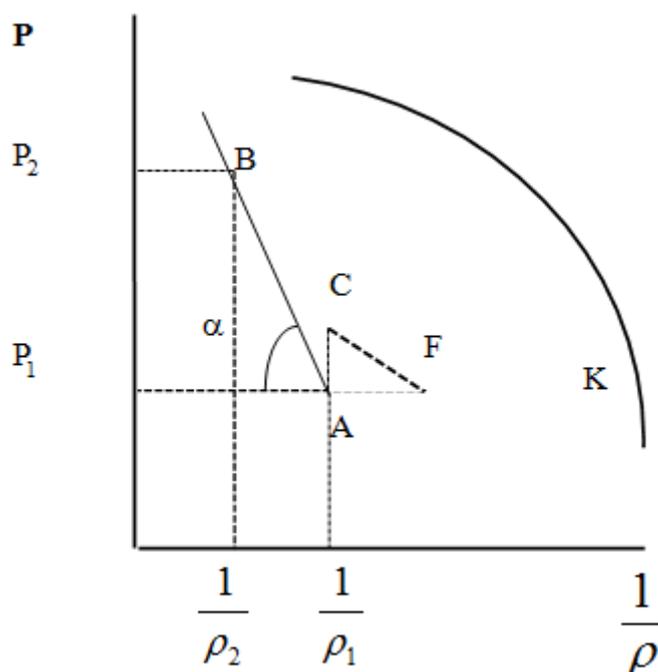


Рис. 4.5. Кривая Гюгонио для детонации

## Глава 5 Некоторые особенности реального течения

Известно, что силы вязкости и инерции оказывают противоположное влияние на развитие характера движения сжимаемой жидкости. При этом различают **ламинарный (слоистый)** и **турбулентный (хаотичный)** режимы течения. Ламинарный режим – это режим, когда механизм переноса количества

движения, тепла и массы осуществляется микропроцессами молекулярной природы, а турбулентный режим соответствует макроскопическим молярным процессам переноса, вызванных смешением конечных масс.

Турбулентность представляет собой хаотичные пульсации (флуктуации) скорости, которые накладываются на осредненное движение и отличаются от пространственной неоднородности основного потока. Вводится понятие изотропной турбулентности, если среднеквадратичное значение составляющей пульсации скорости не зависит от направления. Интенсивность турбулентности характеризуется отношением пульсационных составляющих скорости к ее осредненной величине.

Согласно гипотезе Ландау турбулентность – это такой вид движения, когда с уменьшением вязкости вследствие потерь устойчивости течения менее сложной структуры, поэтапно увеличивается сложность картины течения. Причем переходы из одного состояния устойчивости в другое дискретны. Математическое описание перехода от ламинарного (слоистого, менее сложного) к турбулентному режиму, основанное на линейной теории устойчивости не увенчалось успехом, а теории, описывающие такие нелинейные явления, пока не завершены. К особенностям реальных течений относится наличие перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный и обратно, а так же наличие отрыва потока. Очевидно, что развитие теории турбулентного течения сжимающей жидкости с учетом указанных сложных явлений во многом предопределяет степень совершенства создаваемых конструкций ГТД и других устройств.

## **5.1 Пограничный слой**

Реальные (действительные) течения связаны с представлением о пограничном слое, представляющим собой область потока, в которой влияние вязкости приводит к заметным потерям полного давления, например, в

результате трения о поверхность стенки канала. Толщиной пограничного слоя  $\delta$  называют расстояние по нормали к поверхности стенки, на котором скорость возрастает до значения 0,99 от величины скорости в основном потоке (в ядре). Таким образом, величина  $\delta$  разграничивает пристеночную область течения от ядра потока.

Другими характеристиками заторможенного вблизи стенки потока являются толщина вытеснения  $\delta^*$  и толщина потери импульса  $\delta^{**}$ . Введение понятия толщины вытеснения

$$\delta^* = \int (1 - \rho w / \rho_1 w_1) dy, \quad \text{где}$$

$w$  – текущая величина скорости в пограничном слое,

$w_1$  – скорость на границе пограничного слоя,

$R$  – размер сечения канала,

$y$  – расстояние по нормали от стенки; позволяет заменить реальный канал эквивалентным при течении в нем идеального (невязкого) газа

По аналогии вводится величина толщины потерь импульса

$$\delta^{**} = \int (1 - w/w_1) \rho w / \rho_1 w_1 dy .$$

## **Глава 6 Оценка параметров и характеристик реактивных сопел авиационных ГТД и ГТД наземного применения**

### **6.1 Основные требования к выходным устройствам (реактивным соплам )**

Выходное устройство (ВУ) современного ГТД является сложным и ответственным узлом двигателя, оказывающим существенное влияние на его экономичность. В общем виде ВУ включает в себя переходные (удлинительные) трубы для подвода газа к реактивному соплу, узлы реверсирования или отклонения вектора тяги, шумоглушения, а также элементы конструкции, служащие для плавного сопряжения с наружными

обводами мотогондолы, и систему подачи воздуха для охлаждения деталей конструкции и подпитки с целью снижения внутренних потерь.

Реактивное сопло (основной элемент ВУ) предназначено для преобразования тепловой и потенциальной энергии газа в кинетическую энергию вытекающей струи с минимальными потерями.

Регулированием критического и выходного сечений сопла подвижными венцами створок достигаются оптимальные значения параметров турбокомпрессора и форсажной камеры и снижаются потери тяги от недорасширения или перерасширения на основных и нерасчетных режимах.

Реактивное сопло является силовым элементом конструкции двигателя, воспринимающим радиальные и осевые усилия от газовых и массовых сил, возникающих при эксплуатации самолета.

Основным требованием, предъявляемых к ВУ современных ВРД, является обеспечение высоких тяговых характеристик (включая внутреннее и внешнее сопротивление) силовой установки на основных (крейсерских) режимах работы, приемлемых характеристик в условиях разгона, набора высоты, при планировании и посадке.

Кроме того, для каждого конкретного двигателя выдвигаются специфические требования к схеме сопла, конструкции, системе регулирования, используемым материалам, технологии производства и т. д.

## 6.2 Классификация сопел

В настоящее время признаками различия выходных устройств авиационных ГТД служат:

**Выходная скорость потока.** Если коэффициент скорости  $\lambda \leq 1$ , то сопло считается дозвуковым. Такой вид сужающегося находит применение в качестве ВУ на самолетах с дозвуковой крейсерской скоростью полета и на самолетах, совершающих разгон до небольших сверхзвуковых скоростей.

Если  $\lambda > 1$ , то сопло – сверхзвуковое (сужающе – расширяющееся). Такое ВУ находит применение на самолетах со сверхзвуковыми крейсерскими скоростями полета.

**Форма сопла.** Наиболее распространенными в эксплуатации являются осесимметричные, несимметричные, плоские и сопла с центральным телом.

**Вид исполнения конструкции.** Наибольшее распространение получили регулируемые и нерегулируемые ВУ, поворотные сопла, сопла с разрывом сверхзвукового контура и без разрыва, сопла с шумоглушителем, сопла с реверсивным устройством и т.д.

Из всего многообразия конструкций ВУ, используемых в сверхзвуковой авиации, следует выделить три основных вида. Это регулируемое сопло Лавалья (сужающе – расширяющееся сопло без разрыва контура), сопло эжекторного типа (с разрывом сверхзвукового контура) и сопло с центральным телом.

Для получения сверхзвуковой скорости можно использовать, например, сопло Лавалья. Такое сопло на расчетном режиме имеет минимальные потери тяги, но при низких перепадах давлений оно имеет неприемлемо плохие тяговые характеристики, что оказывает большое влияние на экономичность силовой установки. Например, по сообщениям иностранной печати, для сверхзвукового транспортного самолета с крейсерской скоростью  $M_n=2,2$  при дальности полета 5500км 10% потерь выходного импульса на нерасчетных режимах соответствует 25% потерь выходного импульса на крейсерском режиме, что соответствует 16% снижения платной нагрузки.

Одностороннее же стремление свести до минимума внутренние потери тяги может привести к увеличению внешних потерь. Для устранения этого недостатка необходимо введение регулирования сверхзвуковой части сопла Лавалья, что приводит к значительному усложнению конструкции и увеличению его веса. К такому виду сопла относится ВУ двигателя F-101 самолета В-1 и отечественного двигателя для самолета Ту- 160.

Другой тип – сопло с центральным телом. Основными элементами его являются центральное тело и обечайка. Изменение площади критического сечения осуществляется за счет перемещения центрального тела или регулирования створок на обечайке или на самом центральном теле. Однако, не смотря на благоприятное протекание внутренних характеристик, это сопло имеет повышенные потери при внешнем обтекании. Кроме того, не решены вопросы надежного охлаждения деталей такого сопла, поэтому оно не получило широкого распространения в качестве ВУ ТРДФ и ТРДДФ.

Эжекторное сопло получило наибольшее распространение для самолетов со скоростями  $M_{п} \leq 2$ . Эжектируемый воздух, в качестве которого используется либо наружный воздух слива пограничного слоя, либо избыточное количество воздуха от основного воздухозаборника двигателя, служит для охлаждения деталей сопла и одновременно улучшает характеристики его (к такому виду сопла относится, например, ВУ двигателя «Олимп» самолета «Конкорд» и ВУ двигателя НК – 144 для сверхзвукового пассажирского самолета Ту - 144). Благодаря регулированию среза и оптимальному коэффициенту эжектирования удается получить неплохие характеристики сопла в широком диапазоне режимов работы двигателя в различных условиях полета.

### **6.3 Основные характеристики реактивных сопел ГТД**

Основным параметром, характеризующим величину потенциальной энергии, преобразуемой в кинетическую энергию струи на выходе из данного выходного устройства, является располагаемая степень понижения давления в сопле

$$\pi_c = P_1^* / P_n ,$$

равная отношению полного давления на входе в сопло  $P_1^*$  к давлению окружающей среды  $P_n$  .

При работе двигателя в земных условиях  $\pi_c$  не на много превышает критический перепад давлений  $\left[ \frac{2}{k+1} \right]^{-k/(k-1)} = 1,86$  при  $k = 1,33$  для выхлопного газа. До величин  $\pi_c$  меньших 5 (число Маха полета ( $M_{\Pi}$ ) около 1,2...!4 обычно применяются дозвуковые (суживающиеся) сопла. При скорости полета  $M_{\Pi} = 2,3 \dots 3$  величина  $\pi_c$  около 20, что обуславливает применение сверхзвукового сопла, у которого расчетная ( $P_{\text{вых}} = P_{\text{н}}$ ) площадь выходного сечения приблизительно в 2,5...3 раза превышает площадь критического сечения.

#### 6.4 Коэффициент расхода

При проектировании и анализе работы различных установок и газоструйных аппаратов большое значение имеет оценка пропускной способности сопла. Действительный расход воздуха или газа отличается от теоретического и это отличие удобно учитывать коэффициентом расхода

$$\mu = G / G_T .$$

Теоретический расход  $G_T$  определяется при изэнтропическом одномерном процессе истечения через сопло тех же геометрических размеров при одинаковом располагаемом перепаде давления по формуле :

$$G_T = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k+1)}} \sqrt{\frac{kq}{R}} \frac{P_{01} F_{кр} g(\lambda_{кр})}{\sqrt{T_{01}}} = \frac{m F_{кр} P_{01} g(\lambda_{кр})}{\sqrt{T_{01}}} ,$$

где  $m = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k+1)}} \sqrt{\frac{kq}{R}}$

$P_{01}$  и  $T_{01}$  - полные давления и температура ;

$F_{кр}$ - площадь критического ( минимального) сечения

$g(\lambda_{кр})$ - приведенная плотность тока ;

$k$  - показатель изэнтропы ( $k = 1.4$  для воздуха);

$R$  - газовая постоянная ( $R = 287$  кДж/кг-н,  $m \sim 0,685$ ).

Величина  $\mu$  зависит от степени сужения (поджатия) канала, от режима работы сопла, определяемого величиной  $\pi_c = P_{01} / P_n$  ( $P_n$  - давление окружающей среды), углом наклона образующей, либо радиусом скругления критического сечения. Действительный расход газа отличается от теоретического вследствие падения скорости в пограничном слое и неравномерности потока в критическом сечении. Различают два режима истечения: докритический, который соответствует области, где  $\mu$  зависит от  $\pi_c$ , и закритический, где наступает стабилизация положения звуковой линии, величина  $\mu$  достигает максимальной величины  $\mu^{**}$  и не изменяется при изменении  $\pi_c$ .

#### 6.4.1 Сужающееся сопло

Особенность сужающегося сопла заключается в том, что площадь среза его является критическим сечением при  $\pi_c > [2/(k+1)]^{k/(k-1)}$ . (Далее удобно ввести понятие отношение давлений  $\beta = 1/\pi_c$ ).

Для спроектированных сопел и сравнительно малых поджатий  $n = F_2/F_1$  ( $F_1$  – площадь входа,  $F_2$  – площадь выхода) величина  $\mu^{**}$  близка к 1 и равна 0,99 – 0,995. Текущая величина  $\mu$  определяется размерами пограничного слоя на срезе сопла и связана с толщиной вытеснения  $\delta^*$  соотношением

$$\mu = 1 - 4\delta^*/D_2$$

Второе критическое отношение давлений  $\beta^{**}$  для продуктов сгорания ГТД составляет 0,47...0,5.

Для конических сужающихся сопел, получивших наибольшее распространение в различных установках и ГТД, влияние пограничного слоя на  $\mu$  значительно меньше по сравнению с влиянием неравномерности, вызванной деформацией звуковой линии из-за коничности.

На основании обобщения экспериментальных данных величину  $\mu$  можно определить по формуле

$$\mu = \mu^{**} \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \zeta^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \left( 1 - \zeta^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right)} \frac{1}{g(\lambda)},$$

где  $\zeta = [(\beta - \beta^{**}) + (1 - \beta)\beta^*] / (1 - \beta^*)$ ,  $\beta = 1 / \pi_c$  и  $\beta^{**}$  - второе критическое отношение давлений  $\beta^{**} > \beta^* = \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$ ; величина  $g(\lambda_{кр})$  - относительная

плотность тока в критическом сечении, определяемая по формуле:

$$g(\lambda_{кр}) = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \lambda \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

или по данным таблиц для газодинамических функций. При  $\beta \leq \beta^*$   $g(\lambda_{кр}) = 1$ . Второе критическое отношение давлений  $\beta^{**}$  зависит от геометрических размеров сопла и физических свойств газа и, на основании обобщения опытных данных, может быть определено по формуле:

$$\alpha = 2/c[(\kappa + 1)/(\kappa - 1)]^{1/2} \operatorname{ark} \operatorname{tg} [2/(\kappa - 1) - (\beta^{**})^{(\kappa - 1)/\kappa}] / (\beta^{**})^{(\kappa - 1)/\kappa} - \\ - \operatorname{arc} \operatorname{tg} [(\kappa + 1)/(\kappa - 1)(1 - (\beta^{**})^{(\kappa - 1)/\kappa}) / (\beta^{**})^{(\kappa - 1)/\kappa}],$$

где  $c$  - экспериментальная константа,  $\alpha$  - угол образующей конуса сопла. Для изменений угла коничности  $\alpha$  от  $20^\circ$  до  $60^\circ$  и поджатий  $n$  от 1,45 до 4 величина  $c = 0,433 + 0,66 n$ .

Физические свойства газа оказывают так же существенное влияние и на  $\mu$  и это влияние можно учесть через величины  $\mu^{**}$ ,  $\beta^{**}$  и  $\kappa$ . Между ними существует универсальная зависимость, аппроксимируемая формулой:

$$\mu^{**} = \mu_{90}^{**} + (\mu_0^{**} - \mu_{90}^{**}) [(\beta^* - \beta_{90}^{**}) / (0,5 - \beta_{90}^{**})]^{1/\kappa},$$

где  $\mu_{90}^{**}$  и  $\mu_0^{**}$  - максимальные значения коэффициентов расхода конического дозвукового сопла с углом наклона образующей  $\alpha = 90^\circ$  и  $0^\circ$  (профилированного сопла) соответственно,  $\beta_{90}^{**}$  - второе критическое отношение давлений для сопла с углом  $\alpha = 90^\circ$  (для воздуха  $\beta_{90}^{**} = 0,04$ ).

Зависимости  $\mu^{**}$  от  $\alpha$  и  $\beta^{**}$ , необходимая для расчета коэффициента расхода  $\mu$ , представлены на рис.6.1.

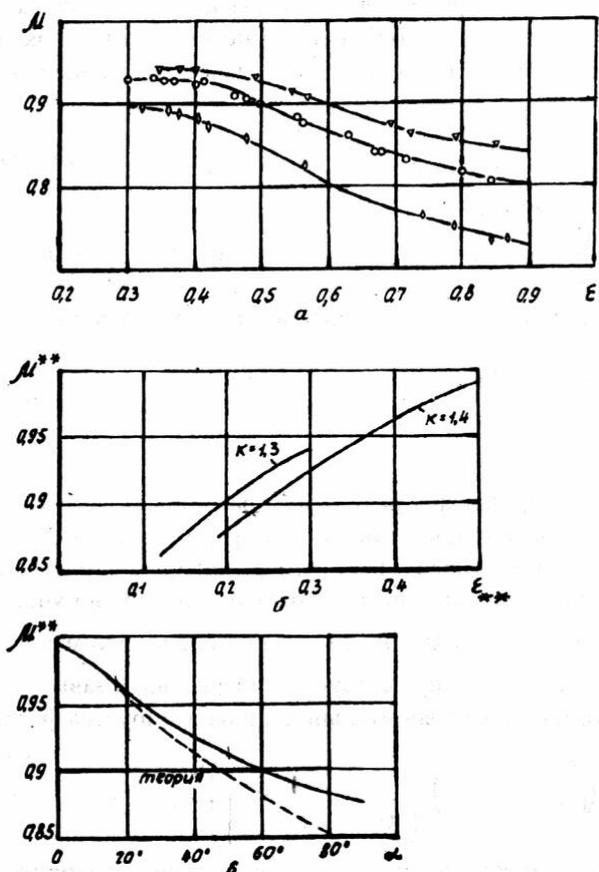


Рис.6.1. Коэффициент расхода сужающегося конического сопла:

- а) – сравнение результатов расчета с экспериментом;
- б) – зависимость максимальной величины коэффициента расхода  $\mu^{**}$  от второго критического отношения давления  $\beta^{**}$ ;
- в) – зависимость  $\mu^{**}$  от угла наклона образующей конуса  $\alpha$ .

### 6.4.2 Сопло Лавалья

Сопло Лавалья характеризуется тем, что выходное сечение сопла  $F_2 > F_{кр}$ . Опытные данные и результаты численного исследования течений показывают, что расход газа через сопло Лавалья с радиусом скругления минимального сечения определяется, в основном, формой подводящей (дозвуковой) части и слабо зависит от угла конусности  $\alpha$ . Существенное

влияние на  $\mu_{л}$  оказывает отношение радиуса скругления в горле сопла  $r$  к радиусу критического сечения  $r_{кр}$  ( $\bar{r} = \frac{r}{r_{кр}}$ ) толщина вытеснения пограничного слоя на входе в сопло. Как и у сужающегося сопла, здесь существует докритический  $\beta > \beta^{**}$  и закритический  $\beta < \beta^{**}$  режимы истечения. В случае закритического режима максимальная величина коэффициента расхода сопла Лавалья  $\mu_{л}^{**}$  совпадает с величиной  $\mu^{**}$  сужающегося сопла, геометрические размеры которого одинаковы с размерами его дозвуковой части.

Величина  $\mu_{л}$  конического сопла Лавалья ( $\bar{r} = 0$ ) определяется по формуле раздела 6.4.1, в которой переменная  $\zeta$  определяется из соотношения

$$\zeta = (\beta - \beta^{**}) + \beta^*,$$

где  $\beta^{**}$  - второе критическое отношение давлений, при котором наступает стабилизация течения в критическом сечении сопла Лавалья. При расчете величины  $\mu_{л}$ , как и в случае сужающегося сопла, газодинамическая функция  $g(\lambda)$  равна 1 при  $\beta < \beta^*$ , но в отличие от него у сопла Лавалья величина  $\beta^{**} > \beta^* = [(2/k + 1)]^{k/(k-1)}$ .

## 6.5 Коэффициент тяги

Совершенство процесса расширения определяется величиной коэффициента тяги сопла  $\bar{R} = R/R_{ид}$ , где

$$R_{ид} = k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} F_{э\delta} \mu P_1^* q(\lambda_{э\delta}) \sqrt{\frac{k+1}{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{1}{\pi_c} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]},$$

определяемого как отношение действительной тяги к идеальной тяге сопла при расширении в нем действительной массы газа без потерь до давления окружающей среды  $P_n$ . Относительные потери тяги сопла при этом

равны  $\Delta \bar{R} = 1 - \bar{R}$ . Действительная тяга отличается от идеальной наличием вязкостного трения, возможностью скачков уплотнения внутри сопла, неравномерностью и непараллельностью скорости в выходном сечении, а также потерями от нерасчетности истечения (перерасширения или недорасширения потока).

Типичные характеристики различных схем сопел (зависимости  $\bar{R} = f(\pi_c)$ ) приведены на рис.6.2. Для сужающегося сопла (кривая 1) коэффициент тяги слабо зависит от угла наклона образующей к оси  $\alpha$  в пределах изменения от  $0$  до  $40^\circ$  и степени поджатия  $n$ . Максимальная величина  $\bar{R}$  имеет место при низких  $\pi_c$ . По мере роста  $\pi_c$  (начиная с  $\pi_c \geq 2,5$ ) величина  $\bar{R}$  падает из-за потерь на недорасширение потока.

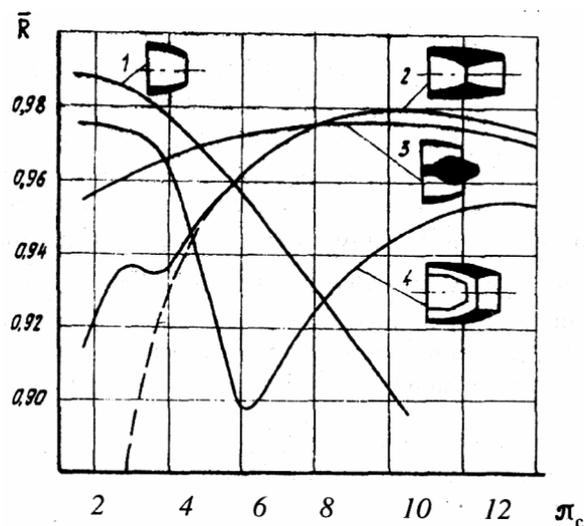


Рис. 6.2. Коэффициент тяги  $\bar{R}$  различных видов ВУ ГТД

Для сужающе-расширяющегося сопла Лавалья (кривая 2) величина  $\bar{R}$  имеет максимум на расчетном режиме. При низких значениях  $\pi_c$  коэффициент тяги сопла Лавалья значительно ниже, чем у суживающегося сопла из-за перерасширения потока в нем. Зависимость  $\bar{R} = f(\pi_c)$  при этом имеет немонотонный характер вследствие изменения силы, действующей на сверхзвуковую часть при отрывах потока от стенок (изменение  $\bar{R} = f(\pi_c)$

для безотрывного течения на рис.... показано пунктиром). Возрастание  $\bar{R}$  при наличии отрыва потока от стенок объясняется тем, что в зону отрыва со стороны среза сопла проникает атмосферное давление и потери от перерасширения по сравнению со случаем безотрывного течения уменьшаются. За пологим максимумом на режимах, близких к расчетному, величина  $\bar{R}$  снова уменьшается из-за недорасширения.

Сопло с центральным телом (кривая 3) как бы объединяет лучшие характеристики сужающегося сопла при низких  $\pi_c$  (из-за невозможности глубокого перерасширения потока, имеющего свободную верхнюю границу струи) и сопла Лаваля вблизи расчетных значений  $\pi_c$ .

Здесь же (кривая 4) приведены характеристики эжекторного сопла, имеющего разрыв контура в районе критического сечения. При оптимальных геометрических размерах эжекторного сопла и при низких  $\pi_c$  на отрывных режимах истечения, когда струя не касается стенок сверхзвуковой части, давление в струе близко к  $P_n$  и характеристики его приближаются к характеристикам сужающегося сопла. Однако на режимах запуска, когда струя начинает прилипать к стенкам сверхзвуковой части при глубоком перерасширении потока, характеристики сопла резко ухудшаются. При  $\pi_c$ , близких к расчетному режиму истечения, величина  $\bar{R}$  также имеет пологий максимум. Однако при одинаковой величине относительной площади среза величина  $R$  меньше, чем у сопла Лаваля из-за больших потерь ввиду наличия свободного участка струи в районе критического сечения и последующего присоединения свободной струи со скачком.

Отдать предпочтение той или иной схеме сопла, принимая во внимание только внутренние характеристики его, не является правильным решением задачи выбора оптимальной конструкции ВУ. В связи с этим необходим анализ работы ВУ в составе силовой установки самолета в полетных условиях.

## 6.6 Коэффициент эффективной тяги

Сила тяги ВУ силовой установки на самолете, где наряду с внутренними характеристиками сопла учитывается обтекание наружных поверхностей кормовой части, взаимодействие внешнего потока со струей истекающего газа, донное сопротивление уступов и т.д., оценивается коэффициентом эффективной тяги сопла и соответственно потерями эффективной тяги

$$\bar{R}_{y\delta} = \frac{R_{y\delta}}{R_{\delta\delta}} = \frac{R - X}{R_{\delta\delta}}, \quad \Delta \bar{R}_{y\delta} = 1 - \bar{R}_{y\delta},$$

где  $R_{\text{эф}}$  – эффективная тяга сопла (с учетом внешнего сопротивления  $X$ );

$R_{\text{ид}}$  – идеальная тяга.

Сопротивление кормовой части  $X$  состоит из сопротивления трения и сопротивления давления. Внешнее сопротивление зависит от отношения площади среза выходного сечения сопла  $F_c$  к площади миделя  $F_{\text{мид}}$  и от формы обводов. Чем плавнее выполнены обводы внешней поверхности ВУ, тем меньше сопротивление давления. Величина внешнего сопротивления рассчитывается либо по известному коэффициенту внешнего сопротивления

$c_x$  ( $X = c_x \frac{\rho \omega_n^2}{2} F_{\delta\delta} = \bar{n}_x \frac{k}{2} M_n^2 P_i F_{\delta\delta}$ ), либо по фактическому распределению давлений. При дозвуковой и околодозвуковой скоростях полета расчетное определение давлений по внешней поверхности ВУ оказывается весьма сложным и малодостоверным, поэтому пользуются обобщениями опытных данных по величинам  $c_x$ . Качественная картина протекания величины  $\Delta \bar{R}_{\text{эф}}$  в зависимости от числа  $M_n$  для сопла Лавалья (кривая 1) и эжекторного сопла (кривая 2) по результатам продувок моделей хвостовых частей одиночных мотогондол приведена на рис 6.3. Наибольшие потери эффективной тяги ВУ

всех типов имеют в области трансзвуковых скоростей полета, так как в этом случае возможно возникновение сверхзвуковых зон, что сопровождается увеличением сопротивления.

Здесь же приведено изменение статического давления вдоль наружной поверхности сопла Лаваля(1) оптимальной геометрии и эжекторного сопла (2) при обтекании их потоком со скоростью  $M_n \approx 0,8$ . Видно, что в случае сопла Лаваля имеет место меньший уровень разрежения и большее восстановление давления к срезу. Это результат взаимодействия недорасширенной струи с внешним потоком. У эжекторного сопла, работающего на отрывном режиме ( рис. 6.3 ), этот эффект менее выражен, в результате чего эффективные потери выше.

Следует отметить, что на эпюру давлений вдоль кормовой части оказывает влияние струя газа, истекающая из сопла. В связи с этим при определении  $c_x$  большое внимание уделяют имитации внутренней реактивной струи газа.

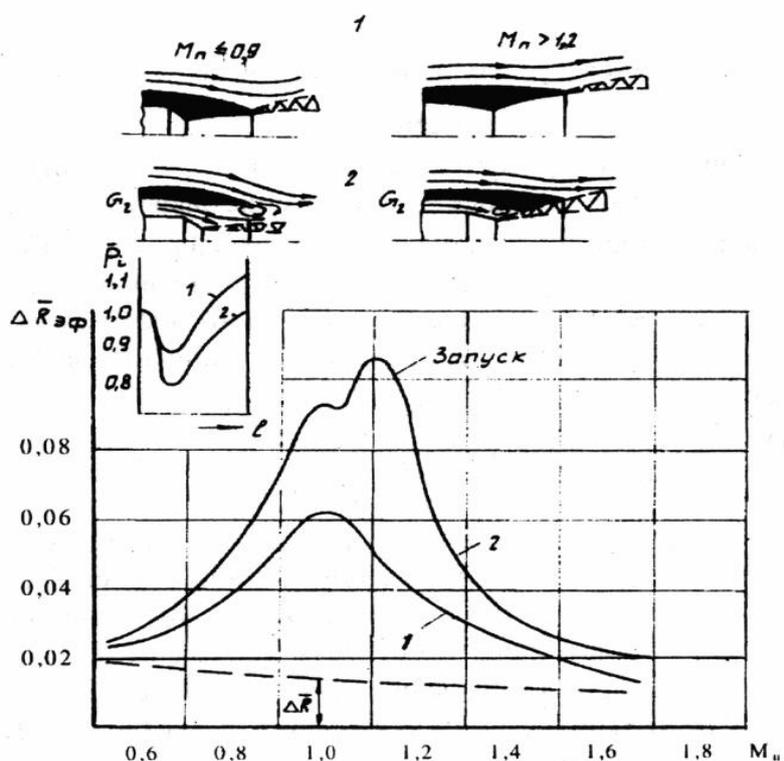


Рис. 6.3. Сравнительная оценка эффективных потерь тяги  $\Delta \bar{R}_{эф}$  различных видов ВУ авиационных ГТД.

## 6.7 Другие виды оценки совершенства сопла

В инженерных расчетах зачастую учет потерь производят и по относительному снижению скорости истечения на выходе из сопла, вводя понятие коэффициента скорости

$$\varphi_c = w_2 / w_{2 \text{ ид}} ,$$

равного отношению действительной осевой скорости к скорости в идеальном процессе расширения до геометрической площади на выходе из сопла. На расчетном режиме  $\bar{R} = \varphi_c$  , а на других режимах справедливо неравенство  $\varphi_c > \bar{R}$ .

Для оценки внутренних потерь тяги и для определения характера течения (отрывное или автомодельное), как будет показано ниже, можно использовать коэффициент импульса (относительный импульс), рассчитываемый по формуле

$$\bar{I} = I / I_p ,$$

где  $I = R + P_n F_2$  – действительный импульс сопла;  $I_p$  – расчетный идеальный импульс, определяемый по действительному расходу и расширению без потерь до геометрической площади выхода.

Тяга двигателя  $P_{дв}$  , определяемая как разность импульсов в выходном и входном сечениях, всегда меньше или равна тяге сопла в стендовых земных условиях и на старте. Отношение  $K_c = R/P$  называют коэффициентом усиления потерь, величина которого зависит от скорости полета самолета и режима работы двигателя. Величина  $K_c$  характеризует степень влияния совершенства ВУ на тягу и экономичность двигателя; для современных двигателей изменяется от 1 до 3,5.

## 6.8 Рабочие режимы

Для проектирования ВУ, расчета параметров и характеристик необходимы данные об условиях полета и о режимах работы двигателя в этих условиях. В связи с этим траекторию движения самолета (профиль полета) можно разбить на несколько характерных участков (рассматривается профиль полета на максимальную дальность). Основными из них являются: взлет и набор высоты; разгон до крейсерской скорости и участок (составляющий максимальное время) полета с этой скоростью; планирование и посадка. В соответствии с такими представлениями назначаются основные режимы работы двигателя и определяются потребная тяга СУ, экономичность двигателя и длительность наработки на каждом из них. Таким образом, к основным режимам работы двигателя, а значит и ВУ, относятся следующие.

**1 Взлетный режим** соответствует максимальной тяге, т.е. максимальной частоте вращения роторов двигателя, а для двигателя с форсажем – максимальному форсированию. У современных двигателей величина располагаемого отношения давлений ( $\pi_c$ ) на этом режиме составляет 1,9...2,5.

В условиях стендовой отработки ТРДФ и ТРДДФ контролируются параметры и экономичность двигателя на максимальном бесфорсажном режиме для прогнозирования характеристик в высотных условиях.

**2 Режимы разгона** до крейсерской скорости соответствуют условиям получения максимальной тяги на высоте. Для двигателей сверхзвуковых самолетов дополнительно контролируются параметры в условиях перехода через скорость звука. Режим работы – максимальный с форсажем,  $\pi_c$  изменяется от 3,5 до 5,0. В случае двигателя без форсажа для самолетов с  $M_{п} = 0,75...0,85$  контролируются параметры на режиме максимальной тяги ( $\pi_c = 2,6-3,2$ ).

Крейсерские условия полета. Для двигателя самолета с дозвуковыми скоростями полета в этих условиях режима работы ниже максимального и обычно соответствует максимальному расходу топлива. У двигателя самолета с  $M_{п}$  от 1,7 до 3  $\pi_c$  изменяется от 7 до 20 и для получения высокой эффективности ВУ требуется максимальная **площадь среза сопла, которая ограничивается габаритами мотогондолы.**

**Планирование и посадка** соответствует пониженной частоте вращения ротора двигателя, малым тягам и низким  $\pi_c$ . Но и в этих условиях требуется достижение приемлемого уровня потерь тяги ВУ.

Из анализа перечисленных основных условий полета видно, что ВУ двигателя должно обеспечивать высокую экономичность и работоспособность в широком диапазоне изменения  $\pi_c$ , температур газа и , следовательно, изменяемых геометрических размеров критического и выходного сечений. Типичный профиль полета, изменение величины  $\pi_c$  и расчетной площади среза сопла от числа  $M$  полета иллюстрируются рис.6.4.

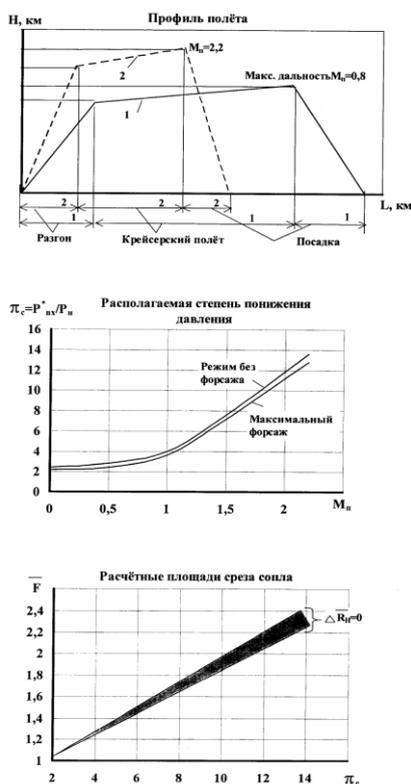


Рис. 6.4. Профиль полета и изменение параметров сопла ( $\pi_c$ ,  $F$ )

## 6.9 Особенности формы сопла Лавалья ВРД

Анализ перспективных разработок двигателей для самолетов с относительно большими сверхзвуковыми крейсерскими скоростями полета ( $M_{п} > 2$ ) показывает, что дальнейшее развитие сопел ГТД сопровождается усложнением их конструктивных схем и приближением контура газоздушного тракта к теоретическому. Нововведением является переход к соплам с непрерывным контуром в сверхзвуковой части с автомоделным режимом течения, чему способствует также наметившаяся в современной авиации тенденция к использованию в качестве СУ ТРДДФ вместо ТРДФ.

В отличие от традиционного сопла Лавалья ЖРД всережимное регулируемое сопло ГТД, показанное на рис.6.5.обозначения которого приведены на рис.6.6, характеризуется следующими особенностями геометрической формы:

отсутствует радиус скругления входной части в месте перехода корпуса форсажной камеры в створчатую дозвуковую часть;

изменяется геометрия дозвуковой части (изменение угла  $\alpha$  составляет от  $3^{\circ}$  на режимах максимального форсажа до  $40^{\circ}$  на бесфорсажных режимах);

как правило, отсутствует или составляет малую величину радиус скругления минимального сечения  $\bar{r} = 0$  (угловая точка);

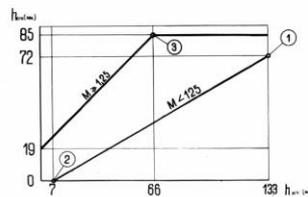
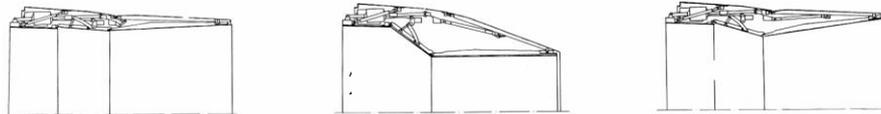
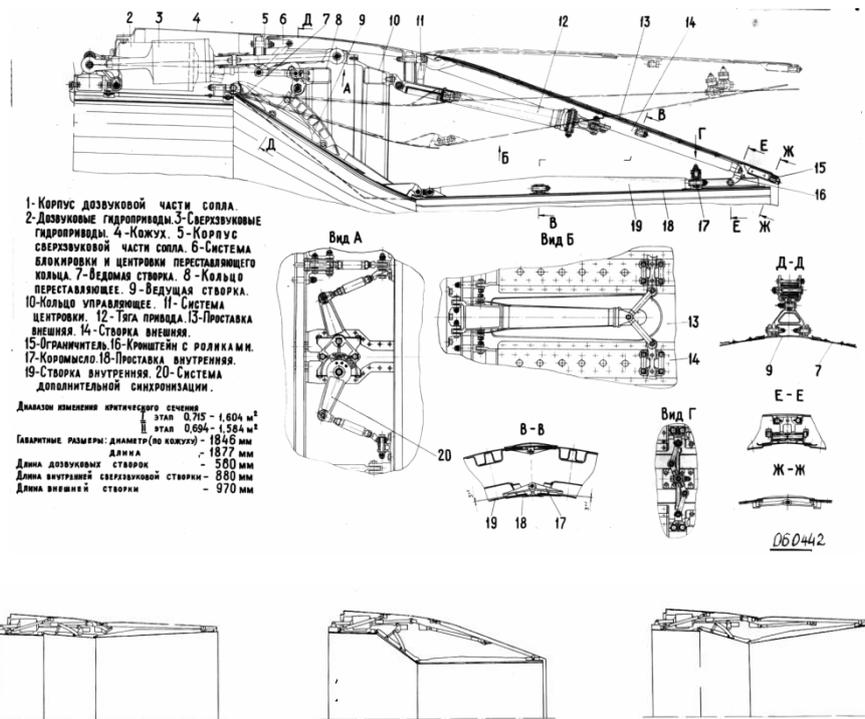
изменяется геометрия сверхзвуковой части (изменение угла  $\Theta$  составляет  $30^{\circ} - 2^{\circ}$  для дозвуковых и околозвуковых,  $9-12^{\circ}$  для сверхзвуковых скоростей полета).

Результаты исследования сопел Лавалья такой формы позволили установить ряд особенностей физической картины течения.

На рис.6.5 представлена одна из конструкций регулируемого сопла Лавалья для трех режимов работы двигателя:

- закрытое положение (бесфорсажный режим);

- среднее положение (крейсерский форсажный режим);
- максимально раскрытое положение (максимальный форсаж).



4

Рис.6.5. Конструкция регулируемого сопла Лавале авиационного ГТД:

1 – максимальный форсаж; 2 – бесфорсажный режим; 3 – крейсерский форсаж; 4 – программа регулирования сопла.

## 6.10 Картина течения в сопле Лавале

На рис 6.6 приведена соответствующая схема течения и типичная эпюра распределения относительного давления  $\bar{P}_i = P_i / P_1^*$ , измеренного вдоль стенок сопла Лавале в проекции стенки на ось. Геометрические размеры приведенного сопла (большие углы  $\alpha$  и  $\theta$  и малые  $\bar{F}_2$ ) характерны

для работы на небольших  $\pi$ , в условиях старта, набора высоты и крейсерского дозвукового полета на бесфорсажных режимах работы двигателя. Однако и с увеличением  $\bar{F}_2$  и уменьшения углов  $\alpha$  и  $\theta$  имеют место многие рассмотренные особенности течения.

Пунктирной кривой на рис.6.6 для сравнения нанесено распределение относительных давлений, подсчитанное по закономерностям одномерной теории. Распределения давлений представлены для особых режимов сопла, отмеченных соответствующими значениями  $\pi_c$  со звездочкой.

Звуковая зона  $\pi_c^*$  появляется при низких дозвуковых перепадах давления. При  $\pi_c < \pi_c^*$  течение всюду дозвуковое, аналогичное течению в трубе Вентури. По мере увеличения  $\pi_c > \pi_c^*$  в минимальном сечении наступает резкий провал давлений. Величина провала непрерывно уменьшается с ростом  $\pi_c$ . При больших углах  $\alpha$  и низких  $\pi_c$  возможен отрыв потока в районе критического сечения с образованием струйного течения, схема которого показана на рис.6.6. И, наконец, при  $\pi_c = \pi_c^*$  относительное давление достигает минимальной величины 0,2. В этом случае уже полностью заканчивается формирование звуковой линии, расход воздуха достигает максимальной величины, а коэффициент расхода не зависит от  $\pi_c$ .

Таким образом, в области минимального сечения сопла вблизи стенки при  $\pi_c > \pi_c^{**}$  поток является уже сверхзвуковым, т.е. звуковая линия сдвигается навстречу потоку по отношению плоскости минимального сечения. По-видимому это связано с наличием большого отрицательного градиента давления в окрестности угловой точки. Возникающая при этом область пониженного давления распространяется через пограничный слой вверх по потоку, что и вызывает местный разгон потока до сверхзвуковой скорости в пристенной области дозвуковой части.

Теневые фотографии и визуализация течения показывают, что за угловой точкой образуется косой «висячий» скачок уплотнения, обусловленный изломом контура. Интенсивность скачка увеличивается с увеличением суммарного угла излома контура  $\alpha + \theta$ . Создаваемый скачком уплотнения положительный градиент давления обуславливает угрозу отрыва потока. При малом суммарном угле излома контура (до  $5^\circ$ ) заметной зоны отрыва не наблюдается. Однако уже при  $\alpha + \theta \geq 26^\circ$  четко прослеживается зона отрыва.

Установлено, что по мере увеличения излома контура имеют место два механизма отрыва потока. При малом изломе контура отрыв начинается не с угловой точки, а несколько ниже по потоку в сверхзвуковой части и обусловлен, в основном, взаимодействием «висячего» скачка с пограничным слоем. При достаточно больших углах излома контура поток отрывается непосредственно с угловой точки, после чего он разгоняется в веере волн разрежения и затем присоединяется к стенкам сверхзвуковой части. В месте повторного присоединения за зоной отрыва следует система косых скачков уплотнения. Причем взаимодействие указанного косого скачка с прямым скачком в районе среза сопла на режимах перерасширения приводит к искривлению его, т.е. вызывает дополнительную неравномерность потока на выходе сопла.

Установлено также, что провал в распределении давления по длине образующей и глубина провала связаны с отрывом потока. При  $\pi_c = \pi_{c^{**}}$  наступает автомодельный режим течения. В этом случае заканчивается стабилизация скачковой структуры за минимальным сечением, полностью формируется зона отрыва и последующего присоединения потока к стенкам. Начиная с  $\pi_{c^{***}}$ , относительное давление  $\bar{P}_i = P_i / P^*$ , измеренное на стенках за точкой присоединения становится независимом от  $\pi_c$ . Распределение относительного давления вдоль стенки хорошо согласуется с расчетом по одномерной теории.

Специальными исследованиями влияния рабочего тела на картину течения в сопле установлено, что изменение показателя изоэнтропы  $k$  не вызывает каких-либо качественных различий в структуре потока с отрывом. Однако с уменьшением величины  $k$  размеры зоны отрыва и интенсивность скачка присоединения увеличиваются.

Результаты обобщения исследований картины течения в коническом сопле Лавалья, а также зоны провала статического давления за угловой точкой при отрыве потока от стенок и длины зоны отрыва представлено на рис.6.6. и рис.6.7.

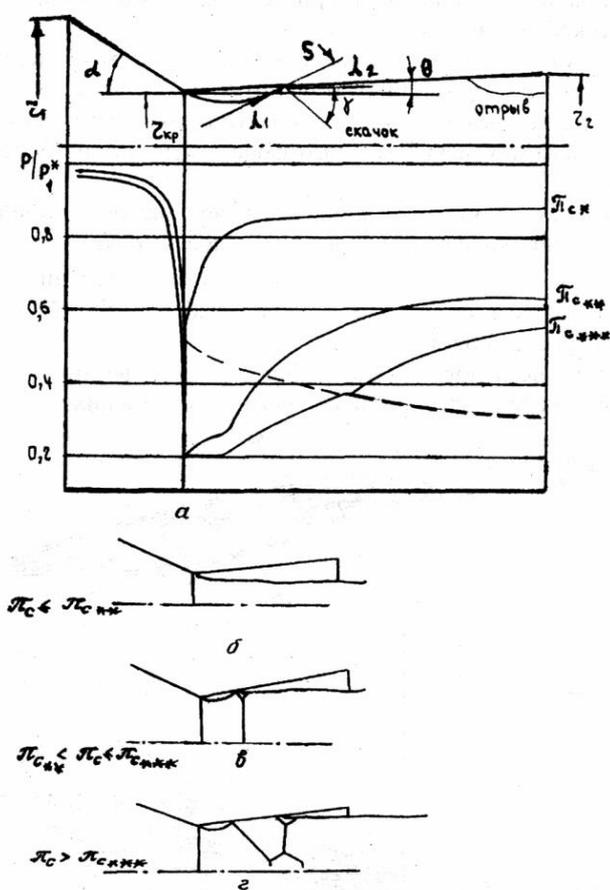


Рис 6.6. Картина течения в коническом сопле Лавалья:

а) – геометрические размеры, схема течения и изменение относительного статического давления  $\bar{P}_i = P_i / P^*$  в зависимости от характерных режимов течения по  $\pi_c$  ;

б) – отрыв потока с угловой точки ;

в) – стабилизация структуры течения в критическом сечении ;

г) – взаимодействие косоугольного скачка уплотнения с прямым скачком в районе среза сопла при перерасширении потока.

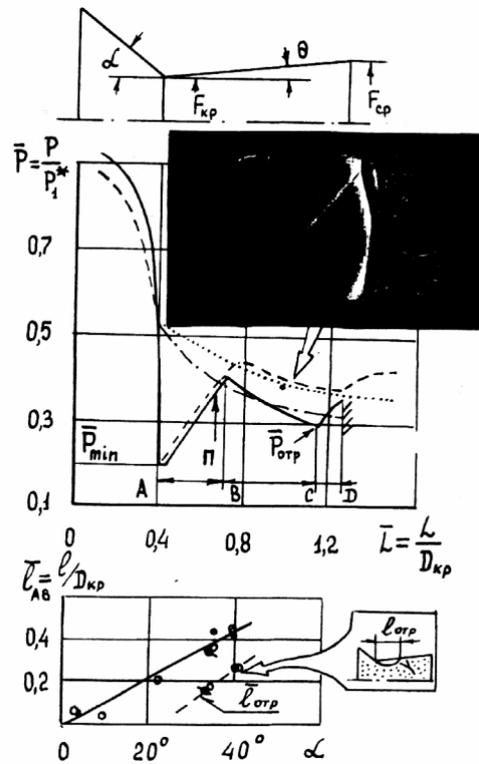


Рис. 6.7. Зона отрыва за угловой точкой: • - плоские; о, □ - осесимметричные сопла Лавалья

### 6.11 Определение условий отрыва за угловой точкой

Картина течения с отрывом потока в критическом сечении, полученная Новиковым В.Ф. в ЦАГИ визуализацией течения в коническом осесимметричном сопле Лавалья, представлена на рис.6.8.

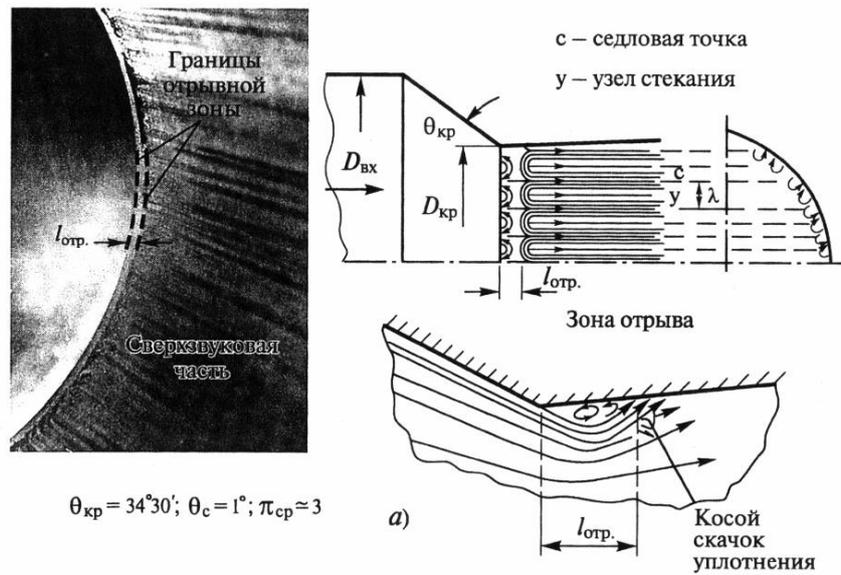


Рис. 6.8. Визуализация течения с отрывом потока

Для определения условий отрыва потока за угловой точкой конического сопла Лаволя рассмотрим картину течения идеального газа в плоскости течения и годограф скорости, представленные на рис. 6.8.

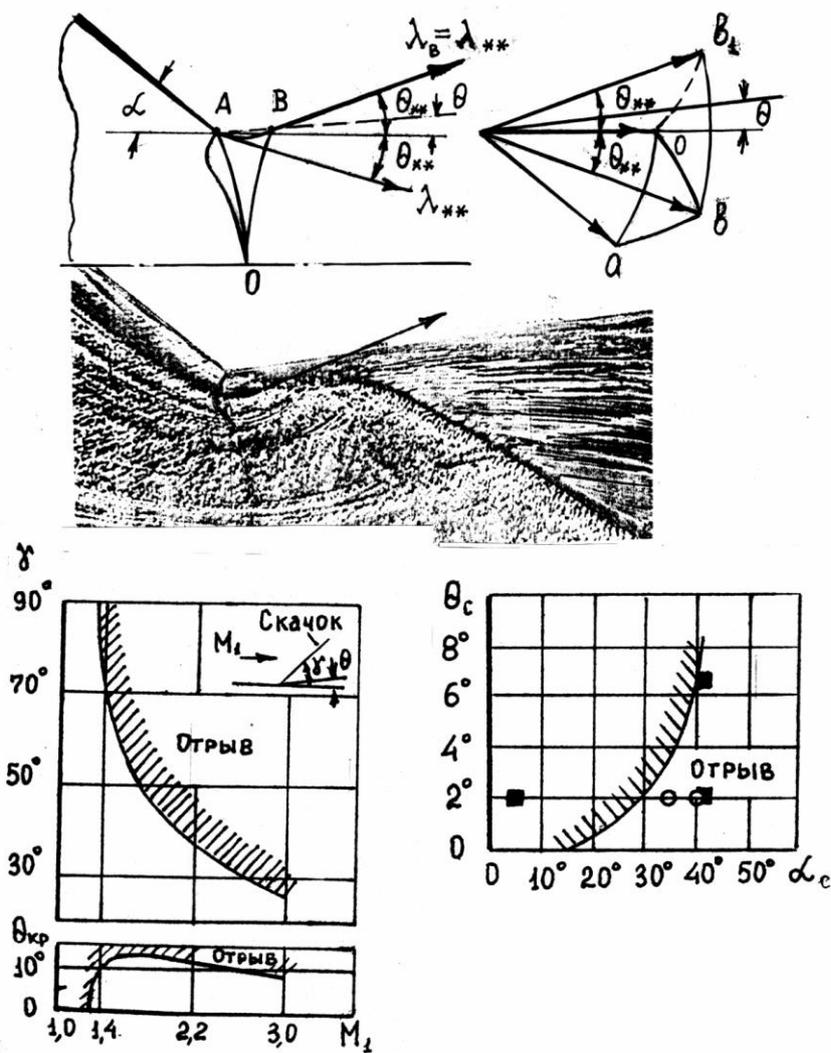


Рис.6.9. К определению условий отрыва потока за угловой точкой

На режиме стабилизации звуковой линии  $\pi_{c^{**}}$  расход газа становится максимальным, а область расширения и сжатия струи, находящаяся между звуковой линией и предельной характеристикой АО, не достигает границы свободной струи. Тогда скорость на границе истекающего потока в точке А определяется величиной радиуса-вектора в точке пересечения эпициклоид, начинающихся в точках о и а годографа, а угол наклона его равен  $\theta_{**} = \alpha/2$  по направлению к оси сопла.

В области между предельными характеристиками АО и ОА<sub>1</sub> происходит разворот линий тока с постоянной скоростью вдоль них. На

границе струи коэффициент скорости  $\lambda_B$  равен  $\lambda_{**}$ , который рассчитывается по величине угла  $\Theta_{**} = \alpha / 2$  в течении расширения Прадтля-Майера. Направление линии тока в точке  $B_1$  после разворота определяется радиусом-вектором, описывающим дугу эпициклоиды  $OB_1$ , которая является зеркальным отображением дуги  $OB$ . В этом случае угол наклона скорости равен  $\Theta_{**}$  и направлен от оси сопла вверх.

Если предположить у рассматриваемого сужающегося сопла (рис. ) наличие стенки сверхзвуковой части с углом наклона  $\Theta < \Theta_{**}$ , то будем иметь пример подтормаживания потока за угловой точкой. Сведения о критическом угле наклона стенки  $\Theta_{кр}$  вызывающем отрыв турбулентного потока, представлены на рис. в виде зависимости этого угла от числа  $M_1$  набегающего потока. Очевидно, что условием отрыва потока за угловой точкой может служить неравенство  $\Theta_{**} - \Theta = \alpha/2 - \Theta > \Theta_{кр}$ .

На основании этого неравенства на рис. , условие отрыва за угловой точкой в соплах Лавая с изломом контура представлено в виде кривой, отражающей зависимость предельного минимального угла раскрытия сверхзвуковой части  $\Theta$  от угла наклона дозвуковой части  $\alpha$ .

## 6.12 Перерасширение и отрыв потока

При работе сопла Лавая на нерасчетных режимах перерасширения, когда давление на стенке меньше некоторой критической величины, возникает отрыв потока от стенок (рис. 6.7, 6.8, 6.9). В течении без отрыва пограничный слой в районе среза еще выдерживает повышение давления в косом скачке за срезом сопла. Теоретически такой режим истечения можно представить в невязком течении вплоть до перехода косоугольного скачка в прямой.

В течении (рис.6.9) отрыв потока внутри сопла сопровождается образованием системы косых скачков уплотнения, переходящих на оси в прямой скачок с образованием местных дозвуковых областей течения.

Режим течения пограничного слоя существенно влияет на область взаимодействия скачка с пограничным слоем, Турбулентный пограничный слой оказывает большее сопротивление отрыву и имеет место более интенсивное повышение давления за точкой отрыва.

Установлена универсальная зависимость давления в точке отрыва  $\bar{P}_{отр} = P_{отр} / P_H$  от  $\bar{\pi}_c = \pi_c / \pi_{c p}$  и состояния пограничного слоя, где  $\pi_{c p}$  – расчетная степень понижения давления, определяемая из равенства

$$\left( \frac{1}{\pi_{c p}} \right)^{\frac{1}{k}} \left[ 1 - \left( \frac{1}{\pi_{c p}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{k-1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{\mu F_{эд}}{F_{нд}}$$

На рис 6.10 зависимость  $\bar{P}_{отр} = f(\bar{\pi}_c)$  имеет три ярко выраженных области для следующих режимов течения в пограничном слое:

$\bar{P}_{отр л}$  – для ламинарного ( $Re < 10^6$ );  $\bar{P}_{отр т}$  – для полностью турбулентного ( $Re \geq 5 * 10^6$ );  $\bar{P}_{отр п}$  – для переходного ( $10^6 < Re < 5 * 10^6$ ). При одинаковых  $\bar{\pi}_c$  справедливо неравенство  $\bar{P}_{отр т} < \bar{P}_{отр п} < \bar{P}_{отр л}$ , т.е. подтверждается вывод о том, что в случае турбулентного режима отрыв происходит позднее из-за большей кинетической энергии частиц у стенки. Начиная с  $Re > 5 * 10^6$ , число  $Re$  практически не влияет на  $\bar{P}_{отр т}$  и аппроксимируется формулой  $\bar{P}_{отр т} = 0,96 \bar{\pi}_c + 0,042$ .

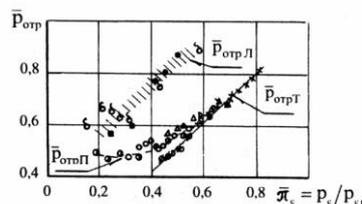


Рис. 6.10. Зависимость давления в точке отрыва при перерасширении потока в районе среза сопла Лавалья

|                    | □   | •   | δ   | ο   | +   | Δ | ∅  | ×   | *  |
|--------------------|-----|-----|-----|-----|-----|---|----|-----|----|
| α,<br>град         | 3   | 40  | 10  | 40  | 0   | 3 | 35 | 34  | 3  |
| Θ,<br>град         | 2   | 2   | 10  | 2   | 2   | 2 | 2  | 0,5 | 2  |
| Re 10 <sup>6</sup> | 0,1 | 0,1 | 0,8 | 2,3 | 2,3 | 3 | 7  | 7   | 13 |

Приведенные выше характерные особенности течения в соплах необходимо учитывать при проектировании и анализе работы ВУ ГТД.

## 6.13 Выходные устройства ГТД наземного применения

### 6.13.1 Общие требования

Основной особенностью работы выхлопных каналов ГТД наземного применения является малая величина отношения давлений ( $\pi_c < 2$ ).

ВУ должна обеспечивать отвод отработанных газов от двигателя с минимальным сопротивлением в силу значительного влияния потерь давления на эффективный КПД.

При проектировании ВУ двигателей, служащих, в частности, в качестве привода нагнетателя газоперекачивающего агрегата учитывались следующие требования:

1. Обеспечение приемлемых конструктивных габаритов.
2. Возможность обеспечения приемлемой длины вала, соединяющего двигатель с нагнетателем.
3. Обеспечение поворота потока затурбинного газа на 90° и отвода его в утилизационное устройство с минимальными гидравлическими потерями.

4. Обеспечение устойчивого характера течения и равномерного поля давлений за турбиной на всех режимах эксплуатации.

Выполнение первого требования связано с вопросами транспортировки железнодорожным транспортом и обслуживанием.

Второе – связано с отстройкой критических оборотов вращения вала, соединяющего двигатель с нагнетателем.

Выполнение третьего и четвертого требований позволяет обеспечить высокую топливную эффективность ГТУ и одновременно решить задачу повышения надежности не только элементов силовой турбины, но и всей выхлопной системы в целом.

Очевидно, что решение задачи по созданию эффективной выхлопной системы ГТУ, удовлетворяющей всем указанным требованиям, является сложной проблемой. Обычно принимается приемлемое компромиссное решение. При этом одним из важнейших факторов является использование имеющегося опыта эксплуатации ВУ двигателей НК-16СТ, НК-36СТ, НК-38СТ и НК-37 с близкими параметрами и габаритами.

### **6.13.2 Основные элементы конструкции**

На рис.6.11 показана одна из типовых схем ВУ конвертированного ГТД, служащего приводом нагнетателя газоперекачивающего агрегата.

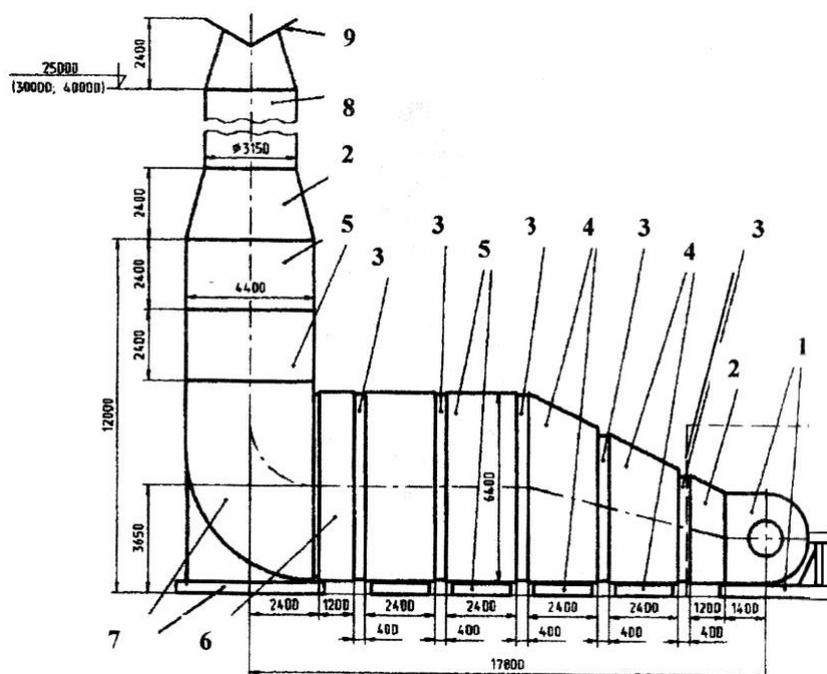


Рис. 6.11. Схема выходного устройства:

- 1 – газосборник; 2 – переходники; 3 – компенсаторы; 4 – газоходы; 5 – шумоглушители;  
 6 – камера для установки утилизатора тепла; 7 – поворотное устройство; 8 – труба;  
 9 – всепогодный колпак.

Выхлопная улитка, состоящая из осерадиального диффузора и газосборника, предназначена для плавного торможения и поворота потока на  $90^\circ$  в диффузоре и последующего поворота потока вверх на  $24^\circ$  от горизонтальной оси в газосборнике. Наружная поверхность газосборника и внутренний корпус осерадиального диффузора имеют “рубашку” из теплозвукопоглощающего материала толщиной 120мм.

Переходник прямоугольного сечения служит для соединения выхлопной улитки с газоходом, ось которого составляет угол  $10^\circ$  от горизонтальной оси выхлопного канала .

Газоходы прямоугольного сечения обеспечивают плавный переход закрученного газового потока в осевой. При этом добиваются снижения скорости потока расширением канала. Внутренние поверхности газоходов выполнены из нержавеющей листа в виде подвижного экрана с опорой на

«подушку» из теплоизолирующего материала толщиной 60 мм. Толщина теплоизолирующего слоя наружной поверхности стенок газохода - 240мм.

Шумоглушитель предназначен для обеспечения требуемых норм по шуму и представляет собой канал постоянного прямоугольного сечения с 18 щитами, расположенными по ширине канала.

Утилизационный теплообменник предназначен для использования тепла выхлопных газов двигателя с целью теплоснабжения КС и внешних потребителей. УТО теплопроизводительностью 5-6 МВт должен иметь диапазон регулирования от 50 до 100% от номинальной производительности. Для этого предусмотреть заслонки перед камерой УТО .

Поворотное устройство осуществляет поворот потока от горизонтального направления на 90<sup>0</sup> вверх и предназначено для обеспечения равномерных полей скорости и температуры на входе в шумоглушитель.

Компенсаторы устанавливаются между блоками ВС и служат для обеспечения возможности их температурного расширения. Конструктивно каждый компенсатор состоит из двух обойм и представляет собой телескопический узел прямоугольного сечения, заполненный теплозвукопоглощающим материалом.

#### **6.14 Оценка гидравлического сопротивления**

При проектировании ВУ ставится задача создания устройства с минимально возможным сопротивлением в силу значительного влияния потерь давления на эффективный КПД ГТД.

##### **Потери в осерадиальном диффузоре**

Оценка гидравлических потерь проводится по известным и достаточно апробированным расчетным соотношениям. Гидравлическое сопротивление ВУ определяется величиной потерь полного давления вследствие:

- внезапного расширения газового потока, истекающего из-за турбинного диффузора, при входе потока в прямолинейный участок осерадиального диффузора;

- потерь трения о стенки;
- потерь на расширение потока в диффузорном канале;
- поворота потока;
- потерь в газосборнике.

Суммарные потери полного давления определяются по формуле:

$$1 - \sigma_{\Sigma} = \Delta p^* / p_{ex}^* = \sum_{i=1}^m \delta_i ,$$

где  $\Delta p^*$  - потери полного давления в тракте, мм.вод.ст.;  $p_{ex}^*$  - полное давление на входе в осерадиальный диффузор, мм.вод.ст.;  $m$  - количество элементов тракта;  $i$  - номер расчетного участка.

Потери на каждом участке рассчитываются по формуле

$$\delta_i = \frac{\kappa}{\kappa + 1} \cdot \xi_i \cdot \lambda_i^2 ,$$

где  $\kappa$  - показатель адиабаты;  $\xi_i$  - коэффициент гидравлического сопротивления  $i$  - го участка;  $\lambda_i$  - приведенная скорость на входе в рассматриваемый элемент (участок).

Потери на внезапное расширение

Применительно к кольцевым диффузорам потери на внезапное расширение канала рассчитываются по уточненной (на неравномерность поля скорости) формуле Борда - Карно:

$$\zeta_i = \frac{\Delta H}{\rho w_0^2 / 2} = \frac{1}{n^2} + N - \frac{2M}{n} ,$$

где  $n = F_{\text{ВЫХ}} / F_{\text{ВХ}}$  - степень расширения сечения канала ( $F_{\text{ВХ}}$  - вход в канал,  $F_{\text{ВЫХ}}$  - выход).

$$N = \frac{(2m+1)^3 (m+1)^3}{4m^4 (2m+3)(m+3)} - \text{коэффициент кинетической энергии потока на выходе}$$

из узкого канала в широкий;

$M = \frac{(2m+1)^2(m+1)}{4m^2(m+2)}$  – коэффициент количества движения в том же сечении;

$\rho$  и  $w_0$  – плотность и скорость потока на входе;

$m$  – коэффициент, зависящий от профиля скорости потока (по результатам обобщения измерений  $m = 1,8$ ).

#### Потери на трение и расширение

Коэффициент потерь на трение в осесимметричном кольцевом диффузоре определяются по формуле:

$$\zeta_{тр} = \xi \frac{L_i}{2(R_{2i} - R_{1i})} y, \text{ где}$$

$\xi$  – коэффициент трения, зависящий от числа Рейнольдса и шероховатости стенок;

$L_i$ ,  $R_{1i}$ ,  $R_{2i}$  – соответственно длина расчетного участка, наружный и внутренний радиусы на входе в участок (рис.3);

$y$  – коэффициент, учитывающий геометрические соотношения входного и выходного сечений.

Коэффициент потерь на расширение в диффузоре определяется по формуле:

$$\xi_p = (\varphi - 1/n)^2,$$

где  $n$  – степень диффузорности;  $\varphi = 3,5(\text{tg } \theta/2)^{1,22}$  – коэффициент, корректирующий степень внезапности расширения потока, для углов расширения  $8^\circ < \theta < 40^\circ$ .

#### Потери на поворот потока

В радиальном диффузоре осуществляется поворот потока. Потери при повороте потока определяются в зависимости от степени расширения и относительного диаметра диффузора  $\bar{D}$ :

$$\xi_{пов.} = f(n, \bar{D}).$$

Степень расширения радиально-кольцевого диффузора равна

$$n = 2 \left( \frac{L_1}{L_2} \left( \frac{\bar{D}}{1 + \bar{d}} \right) \right), \text{ где}$$

$$\bar{D} = \frac{D_3}{D_2} \quad \text{и} \quad \bar{d} = \frac{D_1}{D_2} - \text{ относительные диаметры диффузора и втулки;}$$

$n$  = степень диффузорности.

Общий коэффициент сопротивления диффузора при повороте потока определяется по номограмме  $\xi_n = f(D, f)$ .

### Потери в газосборной улитке

На основании экспериментальных исследований модели выхлопного устройства двигателя НК-16СТ, проведенных в СКБМ ТХМ (г.Сумы), и результатам измерений общего сопротивления в ВС двигателей НК-16СТ, НК-36СТ, НК-38СТ и НК-37 потери полного давления в газосборнике не превышают 0,6... 1,25%.

### Потери в газоходах

Переходник (рис.6.11) представляет собой прямоугольный диффузор. практически с одинаковыми площадями на входе и выходе. Потери полного давления по длине канала обусловлены потерями на трение и местными потерями.

Газоход №1,2, представляет собой пирамидальный диффузор с различными углами ( $\alpha$  и  $\beta$ ) расширения в плоскостях ( $\alpha = 27^{\circ}42'$  - по верхней стенке,  $\beta = 8^{\circ}36'$  - по боковой стенке).

Газоход №3 представляет собой плоский диффузор с расширением стенок только в одной плоскости с углом  $27^{\circ}42'$ .

Общий коэффициент сопротивления диффузора  $\zeta_{\text{общ}}$  состоит коэффициента местного сопротивления из-за расширения потока  $\zeta_{\text{расш}}$  и коэффициента сопротивления трения  $\zeta_{\text{тр}}$ .

$$\frac{\Delta H}{\frac{\gamma \cdot w^2}{2 \cdot g}} = \zeta_{com} = k_1 \zeta_{exp} + \zeta_{fr},$$

где  $k_1$  – коэффициент, учитывающий неравномерное поле скоростей на входе.

Коэффициент расширения  $\zeta_{расш}$  определяется через коэффициент полноты удара  $\varphi_{расш}$  и степень расширения диффузора по приближенной формуле

$$\zeta_{exp} = \varphi_{exp} \left( 1 - \frac{F_1}{F_0} \right)^2,$$

где  $F_1$  – площадь поперечного сечения на выходе из газохода,

$F_0$  – площадь поперечного сечения на входе в газоход.

Коэффициент сопротивления трения  $\zeta_{тр}$  плоского диффузора со сторонами входного сечения  $a_0$  и  $b_0$  зависит от угла расширения ( $\alpha$ ), отношения сторон  $a_0/b_0$  и степени расширения диффузора

$$\zeta_{тр} = f\left(\alpha, a_0/b_0, \frac{F_0}{F_1}\right)^2$$

В трактах газоходов имеются загромождения в виде накладок (крепления трактового листа к каркасу), гаек и шпилек, общей высотой до 30мм. Указанные загромождения вызывают дополнительные местные потери полного давления.

Относительная величина площади загромождения равна  $\bar{F} = F_{заг} / F_{вх} = 0,018$  ( $F_{заг}$  – суммарная площадь загромождения,  $F_{вх}$  – площадь на входе в газоход).

Уменьшение входной площади из-за наличия загромождения приводит к увеличению входной приведенной скорости потока  $\lambda$  и скоростного напора  $H$  и, как следствие, потерь полного давления. Для газохода №1 оценка гидравлических потерь полного давления потока показывает, что без загромождения трактовые потери при скорости потока 50м/с составляют 21 мм вод. ст., а при наличии загромождения эта величина составляет 21,2мм вод. ст.

Таким образом, для газопроводов № 2-3 при более умеренном уровне скорости потока (до 13м/с) влиянием загромождения можно пренебречь. Это подтверждается и расчетом величины пограничного слоя по тракту ВС.

Оценка толщины пограничного слоя выполнена по формуле для плоской пластины [6]:

$$\delta = 0,37 \left( \frac{\nu}{\frac{w_r}{2}} \right)^{0,2} * L^{0,8},$$

где  $\nu$  - коэффициент кинематической вязкости;

$w_r$  – скорость выхлопных газов на входе в диффузор ;

$L$  – длина газопровода.

Приведенная оценка толщины ( $\delta \approx 40$ мм) пограничного слоя в газопроводах показывает, что высота загромождений ( $h \approx 30$ мм) не превышает толщины ( $\delta \geq h$ ). В связи с этим при определении гидравлических потерь в газопроводах наличие загромождения не учитывалось.

### **Потери в шумоглушителе №1**

Шумоглушитель представляет собой канал постоянного поперечного сечения с 18 щитами, расположенными по ширине канала. Относительная площадь живого сечения равна 0,365.

Гидравлическое сопротивление шумоглушителя определяется как сопротивление стержневой решетки. Общие потери в решетках складываются из потерь на вход, на трение и на внезапное расширение (удар) при выходе из суженного сечения между щитами в канал.

### **Потери в поворотном устройстве**

Поворотное устройство осуществляет поворот потока вверх на  $90^\circ$ . Известно, что поворотные каналы требуют особого подхода к проектированию конструкции. Это обусловлено тем, что при повороте потока возможно не только повышенное сопротивление, но и неустойчивое течение с повышенной турбулентностью, распространяющееся на большие расстояния. Коэффициент

сопротивления поворотного канала в основном зависит от относительного радиуса скругления  $R/D$  ( $R$  – радиус поворота,  $D$  – диаметр канала) в случае круглого поворотного канала, а для прямоугольного канала дополнительно от величины  $H/h$  ( $H$  – ширина,  $h$  – высота).

В результате расчетной оценки для принятой конструкции поворотного устройства при скорости  $\sim 10\text{ м/с}$  гидравлические потери не превышают 5 мм вод. ст.

### **Потери в шумоглушителе №2**

Потери полного давления определяются как и потери в шумоглушителе №1, так как по конструкции они одинаковые.

## **6.15 Выхлопное устройство ГТД наземного применения с шумоглушением**

### **6.15.1 Конструкция выхлопного устройства**

В качестве примера конструктивного выполнения и примера расчета параметров потока, рассматривается ВУ газотурбовоза, представляющего собой конвертированный авиационный ГТД, работающий на сжиженном природном газе и устанавливаемый на локомотиве в качестве силового привода.

Выхлопное устройство (ВУ) служит для отвода отработанных газов от двигателя в вертикальном направлении с минимальным сопротивлением из-за значительного влияния потерь давления на эффективный КПД.

При проектировании ВУ двигателя учитывались следующие требования:

- обеспечение приемлемых конструктивных габаритов;
- обеспечение поворота потока затурбинного газа на  $90^\circ$  и отвода его вертикально вверх в атмосферу с минимальными гидравлическими потерями;
- обеспечение требуемого шумоглушения согласно ГОСТ Р 50951-96;
- обеспечение необходимого требования по газификации криогенного топлива.

Основные элементы конструкции ВУ представлены на рис. 6.12. В состав ВУ входят осерадиальный диффузор, газосборная улитка и шумоглушитель.

Выхлопная улитка, состоящая из осерадиального диффузора 2 и газосборной улитки 3, предназначена для плавного торможения и поворота потока на  $90^\circ$  от горизонтальной оси. Шумоглушитель 1 предназначен для обеспечения требуемых норм по шуму и представляет собой канал постоянного прямоугольного сечения с 14-ю щитами, равномерно расположенными по ширине канала. Элементами шумоглушения в панелях (стенках) и щитах являются ЗПК. На выходе из шумоглушителя устанавливается защитная литая решетка с вертикальным направлением потока.

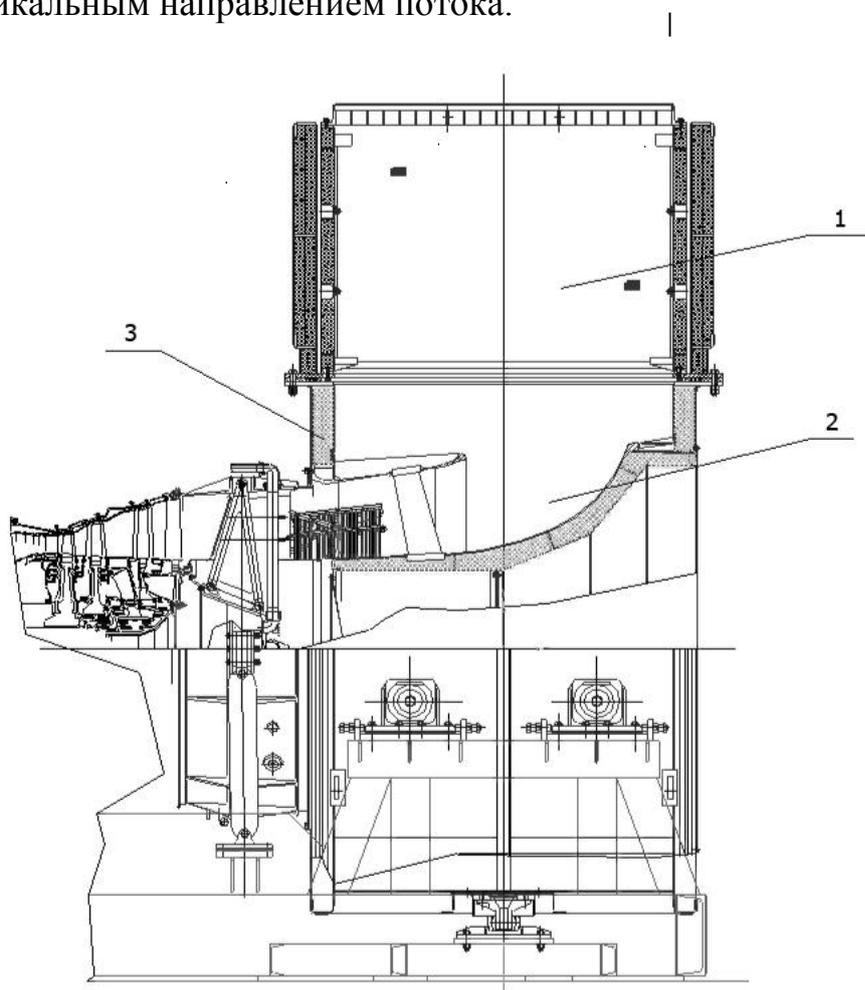


Рис. 6.12. Элемент конструкции ВУ

1-шумоглушитель, 2 – диффузор осерадиальный, 3 – улитка газосборная

### 6.15.2 Газодинамический расчет выхлопного устройства

Выполнена компоновка ВУ с размещением в ней элементов шумоглушения и теплообменника, служащего для газификации сжиженного природного газа или жидкого водорода.

Основные термодинамические параметры выхлопных газов на максимальном режиме при работе на сжиженном природном газе, необходимые для оценки гидравлического сопротивления, приведены в таблице 8.

Таблица 8 -Термодинамические параметры

| Параметр                                                          | Размерность                  | Величина    |
|-------------------------------------------------------------------|------------------------------|-------------|
| Температура окружающей среды                                      | К(°С)                        | 288(15)     |
| Мощность                                                          | кВт                          | 8300        |
| Расход выхлопных газов                                            | кг/с                         | 53,71       |
| Температура выхлопных газов                                       | К (°С)                       | 667 (394)   |
| Полное давление выхлопных газов на входе в осерадиальный диффузор | КПа<br>(кг/см <sup>2</sup> ) | 105 (1,076) |
| Общие гидравлические потери полного давления в ВУ                 | Па<br>(мм вод.ст.)           | 3382 (345)* |
| * В данную величину входит сопротивление теплообменника.          |                              |             |

Оценка гидравлических потерь проведена численным методом газодинамики. Применяемый численный метод показал хорошую сходимость

с результатами эксперимента по определению гидравлических потерь в диффузоре и газосборнике подобного ВУ двигателя НК-16СТ. Гидравлическое сопротивление выхлопной улитки определяется величиной потерь полного давления вследствие:

- потерь трения о стенки;
- потерь на расширение потока в диффузорном канале;
- поворота потока;
- потерь в газосборнике и шумоглушителе.

Результаты расчетной оценки гидравлических потерь ВУ с теплообменником трех возможных вариантов конструкции приведены в таблице 9:

Таблица 9 - Результаты расчета

|           | Параметр                                 | Размерность     | Исходный вариант | Исходный вариант + 200 мм | Исходный вариант + 200мм с уступом |
|-----------|------------------------------------------|-----------------|------------------|---------------------------|------------------------------------|
|           |                                          |                 | Вариант №1       | Вариант №2                | Вариант №3                         |
| Геометрия | $\alpha$                                 | градус          | 8,1              | 4,7                       | 8,1                                |
|           | $\beta$                                  | градус          | 2,25             | 2,25                      | 2,25                               |
|           | b                                        | мм              | 546              | 426                       | 450                                |
|           | L                                        | мм              | 1592             | 1792                      | 1792                               |
| Потери    | Осерадиальный диффузор с теплообменником | мм вод. ст. (%) | 370 (63)         | 359 (77)                  | 245 (71)                           |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                  |                    |             |             |             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|--------------------|-------------|-------------|-------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Шумоглушитель    | мм вод. ст.<br>(%) | 220<br>(37) | 105<br>(23) | 100<br>(29) |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Суммарные потери | мм вод. ст.        | 590         | 465         | 345         |
| <p>Где:<br/> <math>\alpha</math> - угол раскрытия конического участка наружной обечайки диффузора;<br/> <math>\beta</math> - угол раскрытия конического участка внутренней обечайки диффузора;<br/> <math>b</math> – ширина выходного сечения диффузора;<br/> <math>L</math> – общая длина газоздушного тракта ВУ.</p> |                  |                    |             |             |             |

Расчет базового варианта показал неудовлетворительные значения потерь полного давления, т.к. наличие теплообменника в тракте диффузора приводит к искажению поля течения в гладкой части и возникновению срыва потока и вихреобразования в поворотной части ВУ.

Удлинение проточной части ВУ за счет резерва на 200 мм позволило увеличить площадь проходного сечения каналов, образованных панелями шумоглушения, что привело к снижению потерь полного давления. При этом значение потерь с выходной скоростью осталось на прежнем уровне.

Организация течения в диффузоре "со ступенькой", т.е. с двумя областями внезапного расширения позволила снизить потери до 345 мм вод.ст. Превышение на 45 мм вод.ст. требований технического задания компенсируется возвратом тепла от выхлопных газов в рабочий цикл двигателя.

Вариант №1 (исходный) – представляет собой конструкцию осерадиального диффузора подобно реально существующей на двигателях «НК». Ширина выходного сечения из осерадиального диффузора равна  $b=546$  мм;

Вариант №2 - представляет собой удлиненный на 200 мм исходный вариант осерадиального диффузора с уменьшенной шириной выходного сечения до  $b=426$  мм;

Вариант №3 - представляет собой удлиненный ~ на 200 мм вариант №1 с уменьшенной шириной выходного сечения до  $b=450$  мм и с уступом по внутренней стенке диффузора.

Гидравлические потери представлены в виде потерь полного давления соответственно на участке осерадиального диффузора с теплообменником и шумоглушителя. Из анализа приведенных результатов следует, что минимальные потери полного давления в ВУ с теплообменником реализуется в варианте №3 и составляют 345 мм вод. ст. Вариант №3 принят к конструктивной проработке.

## Глава 7 Плоские сопла

.Для некоторых перспективных самолетов и особенно для гиперзвуковых летательных аппаратов рассмотрены вопросы применения плоских сопел и проведены модельные испытания хвостовых частей СУ.

Плоские сопла имеют следующие преимущества:

- 1) увеличение маневренности и устойчивости самолета;
- 2) уменьшение сопротивления в крейсерских условиях полета и при маневрах с большой подъемной силой за счет более благоприятной компоновки силовой установки и планера;
- 3) уменьшение возможности инфракрасного и радиолокационного обнаружения;
- 4) уменьшение стоимости и упрощение конструкции ВУ за счет сокращения количества подвижных деталей;
- 5) большая приспособленность для управления вектором тяги и для установки реверсивного устройства.

Однако плоские сопла имеют и недостатки, к основным из которых относятся:

- 1) увеличение внутренних потерь давления из-за наличия переходного канала от осесимметричного сечения к плоскому;
- 2) увеличение веса в связи с его конструктивными особенностями;
- 3) проблема охлаждения из-за увеличенной поверхности стенок сопла и переходника.

Плоские сопла находят также широкое применение в пневмонике, ракетной технике и служат для ускорения газового потока в аэродинамических шлюзах мощных лазеров.

### **7.1 Профилирование сверхзвуковой части**

Принимаем во внимание, что для получения формы звуковой линии, близкой к прямолинейной, достаточно чтобы контур сужающейся части был выполнен в виде сопряженных дуг окружностей, одна из которых – на входе в дозвуковую часть – имеет радиус, равный или превышающий радиус критического сечения, другая – имеет радиус, равный диаметру критического сечения.

Профилирование и расчет сверхзвуковой части плоских сопел Лавалья производится хорошо разработанным методом характеристик и представлены в виде таблиц контуров для ряда значений числа  $M$  на выходе и ограниченного ряда значений величины показателя адиабаты  $k$ . Применение представлений годографа скорости, введение обобщенных полярных координат переменных  $r$  и  $\varphi$ , где  $\varphi$ - угол расширения сверхзвукового потока в течении Прандтля-Майера, можно значительно упростить задачу и получить аналитическое решение для любого произвольно заданного значения числа  $M$  и величины  $k$ .

Принимаем, что поверхность перехода через скорость звука является плоской. Осуществляется течение расширения однородного идеального потока совершенного газа около угловых точек  $O$  и  $O_1$ , это видно на рис. 7.1.а Задача

профилирования разбивается на две: 1- расчет разгонного участка  $ABV_1C$  и 2 – расчет выравнивающего участка  $MM_1ДД_1$ .

**1. Разгонный участок.** Разгон потока от плоской поверхности перехода  $OO_1$  до заданного значения  $M_2 = M_c$  происходит в области  $ABV_1C$  взаимодействия центрированной простой волны разрежения от возмущенных точек  $O$  и  $O_1$ . Физической области течения  $ABV_1C$  (где  $AB_1BC$ ,  $AB_1$  и  $B_1C$  являются характеристиками) соответствует область  $abb_1c$  (рис. 7.1б) плоскости годографа скорости. В случае однородного потока на выходе из сопла (т.е. при прямолинейной характеристике  $CB$ ) углы отклонения потока возмущающими точками  $O$  и  $O_1$  равны и, следовательно, справедливо

$$\theta_b = \theta_{b_1} = \frac{1}{2} \theta_c = \frac{1}{2} \left[ m \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{M_c^2 - 1}}{m} - \operatorname{arctg} \sqrt{M_c^2 - 1} \right], \quad (7.1)$$

где  $\theta_c$  - угол отклонения потока (угол наклона вектора скорости к оси потока);  $M_c$  – число маха, на которое рассчитывается сопло,  $m = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ .

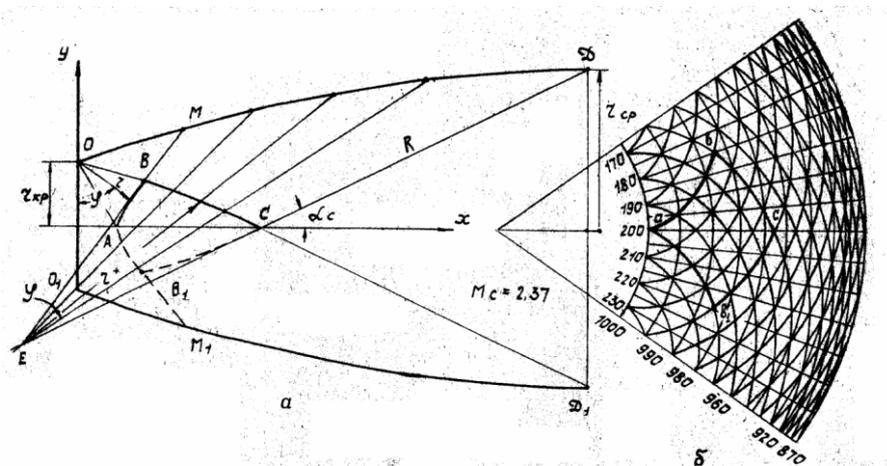


Рис. 7.1. Профиль сверхзвуковой части сопла Лаваля:

а - физическая плоскость;

б – плоскость годографа.

Условие 7.1 полностью определяет параметры  $\lambda$  (где  $\lambda = W/a_{кр}$  – коэффициент скорости) и  $\Theta$  границы характеристического контура  $abb_1c$  плоскости годографа (кривые  $ab$  и  $bc$  являются эпициклоидами).

Для расчета течения в физической плоскости удобно ввести полярную систему координат переменных  $r$  и  $\varphi$ , где  $\varphi$  – угол расширения сверхзвукового потока. Зависимость параметров потока от угла  $\varphi$  имеет вид:

$$\text{плотность потока} \quad \rho = \rho^* \left( \frac{1 + \cos 2\varphi / m}{k - 1} \right)^{\frac{k}{k-1}} ;$$

$$\text{давление} \quad P = P^* \left( \frac{1 + \cos 2\varphi / m}{k - 1} \right)^{\frac{k}{k-1}} ;$$

$$\text{коэффициент скорости} \quad \lambda = \sqrt{\frac{k - \cos 2\varphi / m}{k - 1}} ;$$

скорость звука  $a = a_{кр} \cos \varphi / m$ ; где  $\rho^*$  и  $P^*$  – заторможенные параметры.

Дифференциальное уравнение характеристик в простой волне имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \operatorname{ctg} 2\alpha, \quad \text{где} \quad \alpha = \arcsin \frac{1}{M} \quad - \text{угол Маха.}$$

Интегрируя это выражение, получим

$$r = \frac{\operatorname{const}}{\sqrt{\sin(\varphi / m) (\cos(\varphi / m))^{m^2}}} = \frac{\operatorname{const}}{(\lambda^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (1 - \lambda^2 / m^2)^{\frac{m^2}{2}}} = \frac{\operatorname{const}}{j(\varphi)}$$

Принимая начало полярной системы координат в точке  $O$  то обстоятельство, что начальная точка  $A$  взаимодействия веера волн разрежения от точек  $O$  и  $O_1$  принадлежит линии тока в течении Прандтля-Майера

$$r = r_{кр} (\cos \varphi / m)^{m^2} ,$$

получим уравнение кривой  $AB$

$$r = r_{кр} [(\sin \varphi_A / m) / (\cos \varphi_A / m)^{m^2}]^{1/2} [(\sin \varphi / m) (\cos \varphi / m)^{m^2}]^{-1/2} = r_{кр} \frac{j(\varphi_A)}{j(\varphi)}$$

где  $2^* r_{кр}$  – размер критического сечения  $OO_1$ , а текущее значение угла  $\varphi$  изменяется в пределах  $\varphi_A < \varphi < \varphi_B$ . Угол наклона начальной характеристики можно принять с достаточной точностью равным  $1^0$ . Значение угла  $\varphi_B$  определяется из условия (7.1) по формуле

$$\varphi_B + \operatorname{arctg} (m \operatorname{tg} \varphi_B / m) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left[ m \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{M_c^2 - 1}}{m} - \operatorname{arctg} \sqrt{M_c^2 - 1} \right]$$

Характеристика ВС области  $ABV_1C$  имеет новую систему координат с началом в точке E. Угол между радиусом – вектором  $\bar{r}_B$  новой системы и  $r_B$  старой системы координат в общей точке B равен  $2a_B = 2\operatorname{arctg} (m \operatorname{tg}\varphi_B/m)$ . Уравнение кривой ВС имеет вид

$$\bar{r} = \bar{r}_E \frac{1}{j(\varphi)}, \quad (\varphi_B \leq \varphi \leq \varphi_C)$$

Здесь постоянная  $\bar{r}_E$  определяется из условия равенства расходов через характеристики АВ и ВС и равна

$$\bar{r}_E = r_{\text{вд}} \left[ \frac{\gamma(\varphi_B) - \gamma(\varphi_A)}{\gamma(\varphi_C) - \gamma(\varphi_B)} \right] \gamma(\varphi_C)$$

Величина угла  $\varphi_C$  определяется из соотношения

$$\varphi_C = m \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{M_c^2 - 1}}{m} \right)$$

**2 Выравнивающий участок** Стенка ОМД является линией тока. Участок ОМ имеет прямолинейную границу, где угол  $MOB$  равен  $a_B$  и совпадает с направлением вектора скорости.

Стенка сопла МД представляет собой линию тока в течении Прандтля-Майера и рассчитывается в полярной системе координат с началом в точке E по формуле

$$R = \left[ (r_B + \bar{r}_B) \left( \cos \left( \frac{\varphi_B}{m} \right) \right)^{m^2} \right] \left( \cos \left( \frac{\varphi}{m} \right) \right)^{-m^2}$$

Подобным же образом строится и нижняя половина сопла.

Переходя к декартовой системе координат, направив ось абсцисс вдоль оси сопла и совместив оси ординат с плоскостью критического сечения (рис. 7.1, а), текущие координаты сверхзвуковой части рассчитываем по формуле

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{x}{r_{\text{эд}}} = \frac{\gamma(\varphi_A)}{j(\varphi_B)} + \left[ \frac{\gamma(\varphi_B) - \gamma(\varphi_A)}{\gamma(\varphi_C) - \gamma(\varphi_B)} \right] \frac{\gamma(\varphi_C)}{j(\varphi_B)} \left( \frac{\cos\left(\frac{\varphi_B}{m}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi}{m}\right)} \right)^{m^2} * \\ * \cos \left[ 2 \operatorname{arctg} \left( m \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi_B}{m} \right) \right) - (\varphi - 2\varphi_B) - \frac{\pi}{2} \right] - \\ - \left[ \frac{\gamma(\varphi_B) - \gamma(\varphi_A)}{\gamma(\varphi_C) - \gamma(\varphi_B)} \right] \frac{\gamma(\varphi_C)}{j(\varphi_B)} * \\ * \cos \left[ \operatorname{arctg} \left( m \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi_B}{m} \right) \right) + \frac{1}{2} \left( m \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{M_c^2 - 1}}{m} - \operatorname{arctg} \sqrt{M_c^2 - 1} \right) \right] - \\ - \frac{\gamma(\varphi_A)}{j(\varphi_B)} \sin \varphi_B \end{aligned}$$

Контроль правильности построения контура осуществляется:

1 Вычислением расхода через замыкающую характеристику СД

$$G_{CD} = \frac{1}{2} \rho_c a_c (R_{CD} - \bar{r}_c) = \frac{1}{2} G_{cr}.$$

2 Вычислением угла наклона замыкающей характеристики к оси сопла

$$\alpha_c = 2\alpha_B - (\varphi_c - 2\varphi_B) - \frac{\pi}{2}$$

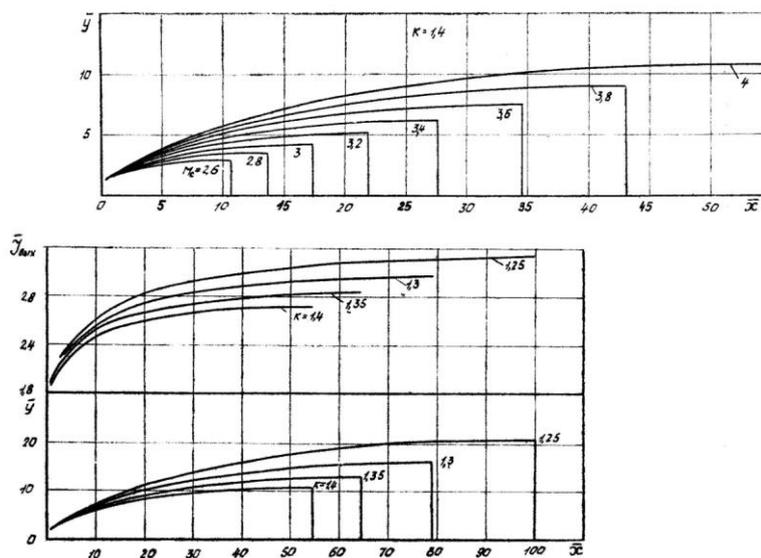
## 7.2 Определение выходного импульса укороченного сопла

На практике необходимо знать зависимость выходного импульса от длины укорочения сопла. Такая зависимость в функции угла  $\varphi_1$ , где  $\varphi_B < \varphi_1 < \varphi_C$ , описывается в переменных  $\gamma$  и  $\varphi$  и имеет вид:

$$\bar{I}_i = \left[ \sqrt{\frac{k - \cos\left(\frac{2\varphi_i}{m}\right)}{k-1}} * \cos\left(2\theta_B - (\varphi_i) + \operatorname{arccctg}\left(m \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_i}{m}\right)\right) - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\cos\left(\frac{\varphi_i}{m}\right)}{k} \right] * \left[ \frac{\gamma(\varphi_A) \pm R_E}{j(\varphi_B)} \right] \left( \cos\left(\frac{\varphi_B}{m}\right) \right)^{m^2} - \left[ \sqrt{\frac{k - \cos\left(\frac{2\varphi_c}{m}\right)}{k-1}} + \frac{\cos\left(\frac{\varphi_c}{m}\right)}{k} \right] \frac{R_E}{\gamma(\varphi_c)}$$

Величина  $\bar{I}$  отнесена к произведению  $2\rho^* r_{кр} a^2_{кр} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ .

На рис 7.2. показаны контуры сверхзвуковой части сопла для  $M_c = 4$  и значений  $k = 1.25, 1.3$  и  $1.4$  и зависимость выходного импульса от длины сопла. Видно, что укорочение длины сопла на 10 – 15% не оказывает существенного влияния на его характеристики.



F

Рис. 7.2. Контур сверхзвуковой части сопла Лавала с числом  $M_c = 4$  на выходе для различных величин  $k$ ; зависимость относительного выходного импульса от длины сопла

### 7.3 Расчет сверхзвукового течения в канале с внезапным расширением

С помощью представлений годографа и переменных  $r$  и  $\varphi$  решается задача определения границы области отрыва и параметров сверхзвуковой струи при внезапном расширении канала.

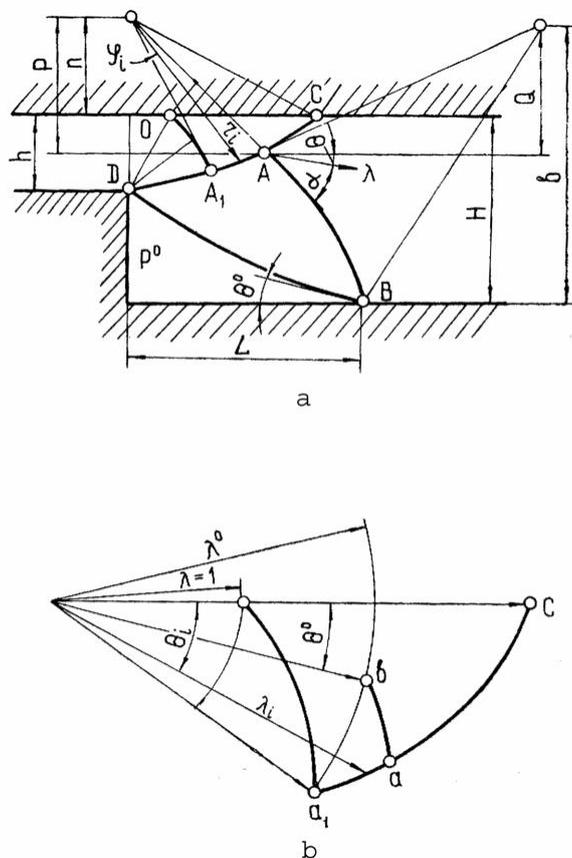


Рис. 7.3. Течение сверхзвукового потока в канале с внезапным расширением

Полное аналитическое описание структуры потока в данной области, включающей область отрыва диссипативного слоя последующим присоединением и сжатием его, является весьма затруднительным.

На основании экспериментальных и теоретических данных следует, что в изобарической области отрыва полное давление на линии струйного слоя равно статическому давлению в конце области сжатия присоединительного потока, а в качестве основного параметра,

характеризующего вязкий слой, следует использовать допустимый угол потока в точке присоединения  $\Theta^0$ .

На рис. 7.3, а изображено течение сверхзвукового потока при  $M=1$  в плоском канале при внезапном расширении узкого сечения от размера  $h$  на входе (в дальнейшем пусть  $h = 1$ ) до размера  $H$  на выходе. Принимаем:

1) изменение параметров потока, включая сжатие в области присоединения (до скачка за точкой В), происходит изоэнтропически;

2) можно пренебречь начальной толщиной пограничного слоя перед точкой отрыва;

3) вязкий слой в области присоединения характеризуется определенной величиной допустимого угла.

Годограф скорости этого течения представлен на рис. 7.3, б. Точка Д (рис.7.3, а является источником центрированных волн разрежения, в которых поток разгоняется от звуковой скорости  $\lambda=1$  до скорости  $\lambda_{A1}$ .

Верхняя стенка канала ОС, ограниченная характеристиками  $OA_1AC$ , является линией тока, вдоль которой скорость нарастает от 1 до  $\lambda_c$  (отметим, что характер течения в области  $OA_1C$  и область  $oa_1c$  годографа соответствует разгонному участку плоского сопла Лавалья).

Граничная линия тока ДВ в начальной точке Д области отрыва имеет направление, совпадающее с вектором скорости  $\lambda_{A1}$ , а в точке присоединения  $b$  – угол  $\Theta^0$ . В плоскости годографа граничная линия тока заключена между дугой эпициклоиды  $a_1a$ , соответствующей характеристике сжатия АВ.

Тогда на основании решения сформулированной выше задачи граница зоны отрыва описывается следующими зависимостями:

- относительная высота уступа

$$\begin{aligned} \overline{H} = \frac{H}{h} = \gamma(\varphi_c) A & \left[ \frac{\cos [\pi - (2\varphi_{A_1} - \varphi_A - 2\alpha_{A_1})]}{j(\varphi_A)} \right] + \\ & \left[ - \frac{\cos [\pi - (2\varphi_A - \varphi_B + 2\alpha_{A_1})]}{j(B)} \right] + \\ + B & \left[ \frac{\gamma(\varphi_A)}{\gamma(\varphi_{A_1}) - 1} \right] * \left\{ \frac{\sin \left[ \frac{\pi}{2} - (2\varphi_A - \varphi_B) + 2(\alpha_B - \alpha_{A_1}) \right]}{j(\varphi_B)} \right\} - \\ & \left\{ - \sin \left[ \frac{\pi}{2} - (2\varphi_{A_1} - \varphi_A) + 2(\alpha_A - \alpha_{A_1}) \right] \frac{1}{j(\varphi_A)} \right\} \end{aligned}$$

- относительная длина до точки присоединения

$$\begin{aligned} \overline{L} = \frac{L}{h} = \frac{\gamma(\varphi_A)}{j(\varphi_{A_1})} \sin(\varphi_{A_1}) + \gamma(\varphi_c) A \times \\ \left\{ \sin [\pi - (2\varphi_{A_1} - \varphi_A - 2\alpha_{A_1})] * \frac{1}{j(\varphi_A)} - \sin [\pi - (2\varphi_A - \varphi_B + 2\alpha_{A_1})] \frac{1}{j(\varphi_B)} \right\} + \\ + B \left\{ \left[ \frac{\gamma(\varphi_A)}{\gamma(\varphi_{A_1}) - 1} \right] \left\{ \cos \left[ \left( 2\varphi_{A_1} - \varphi_A \right) + 2(\alpha_A - \alpha_{A_1}) - \frac{\pi}{2} \right] \frac{1}{j(\varphi_A)} \right\} \right. \\ \left. - \left[ \frac{\gamma(\varphi_A)}{\gamma(\varphi_{A_1}) - 1} \right] \left\{ \cos \left[ \frac{\pi}{2} - (3\varphi_{A_1} - 2\varphi_A) - 2(\alpha_{A_1} - \alpha_A) \right] \frac{1}{j(\varphi_{A_1})} \right\} \right\} \end{aligned}$$

где  $A = \frac{\gamma(\varphi_{A_1}) - \gamma(\varphi_0)}{\gamma(\varphi_c) - \gamma(\varphi_{A_1})}$ ,  $B = 1 - A \left[ \frac{\gamma(\varphi_c) - \gamma(\varphi_A)}{\gamma(\varphi_{A_1})} \right]$ .

Сравнение расчетной величины относительного донного давления

$P^0/P_1$ , где  $P^0$  – давление за уступом,  $P_1$  – статическое давление в узком канале, полученная по приведенным формулам (сплошная линия), показывает хорошее соответствие с экспериментом (рис.7.4).

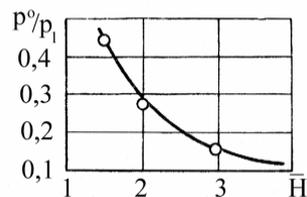


Рис. 7.4. Сравнение эксперимента с расчетом

## Глава 8 Теория подобия и анализ размерностей

### 8.1 Подобие физических процессов

Изучение сложных течений жидкостей, как правило, связано с проведением физического эксперимента. Такие эксперименты требуют обычно больших материальных затрат. Иногда возникают значительные или даже непреодолимые трудности при попытках выполнения натуральных объектов. Научная постановка эксперимента основывается на теории подобия физических явлений. Эта теория является базисом при моделировании, т. е. замене испытания природы испытаниями модели. При этом зачастую выполняет местное (локальное) моделирование наиболее сложной части объекты. Теория подобия обеспечивает научную постановку эксперимента на натуре и модели и минимальные затраты на его проведение. Кроме того она позволяет распространить полученные результаты на все подобные исследуемому явления. Основными задачами этой теории являются определение необходимых и достаточных условий подобия модельных и натуральных процессов, научных методов проведения эксперимента и получения обобщенных зависимостей.

Физические процессы подобны, если геометрически подобны системы, в которых они протекают и в сходственные моменты времени в сходственных точках пространства все одноименные параметры пропорциональны. Из этого определения следует, что:

1. Подобными могут быть однородные физические явления, описываемые одними и теми же по форме и содержанию дифференциальными уравнениями. Если аналитическое описание двух процессов одинаково по форме, но процессы различны по физическому смыслу, то они называются аналогичными, например диффузия  $G = -D \frac{dc}{dn}$  и теплопроводность  $q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$ .

2. Геометрическое подобие обязательно для подобия любых физических процессов.

3. Полное подобие означает подобие полей одноименных величин,

т.е. в сходственные моменты времени в сходственных точках пространства любой параметр  $\varphi_2$  может быть подучен из одноименного параметра подобного процесса  $\varphi_1$  умножением на константу подобия  $\varphi_2 = C_{\varphi(1-2)}\varphi_1$ .

Применительно к гидрогазодинамическим процессам подучаем что условиями их подобия являются:

1. Геометрическое подобие
2. Кинематическое подобие или подобие полей скоростей

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1} = C_{u(1-2)}.$$

3. Динамическое подобие или подобие полей сил, действующих в жидкости

$$\frac{t_2}{t_1} = C_{t(1-2)}; \frac{p_2}{p_1} = C_{p(1-2)}; \frac{\rho_2}{\rho_1} = C_{\rho(1-2)}; \frac{\nu_2}{\nu_1} = C_{\nu(1-2)}.$$

4. Тепловое подобие или подобие полей температур и тепловых потоков

$$\frac{T_2}{T_1} = C_{T(1-2)}; \frac{q_2}{q_1} = C_{q(1-2)}; \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = C_{\lambda(1-2)}; \frac{\chi_2}{\chi_1} = C_{\chi(1-2)}.$$

Константы подобия различных параметров могут отличаться по величине, но не могут выбираться произвольно, а связаны между собой уравнением, которое называется условием подобия.

Оно подучается в результате преобразования уравнений, связывающих параметры, которые определяют протекание подобных процессов. Рассмотрим в качестве примера условие простейшего геометрического подобия для лопаток компрессора. Имеем формулы для расчета площадей  $S_1 = b_1 h_1$ ,  $S_2 = b_2 h_2$ . И формулы подобного преобразования  $S_2 = S_1 C_{S(1-2)}$  и  $S_1 C_{S(1-2)} = b_1 h_1 C_{l(1-2)}^2$ .

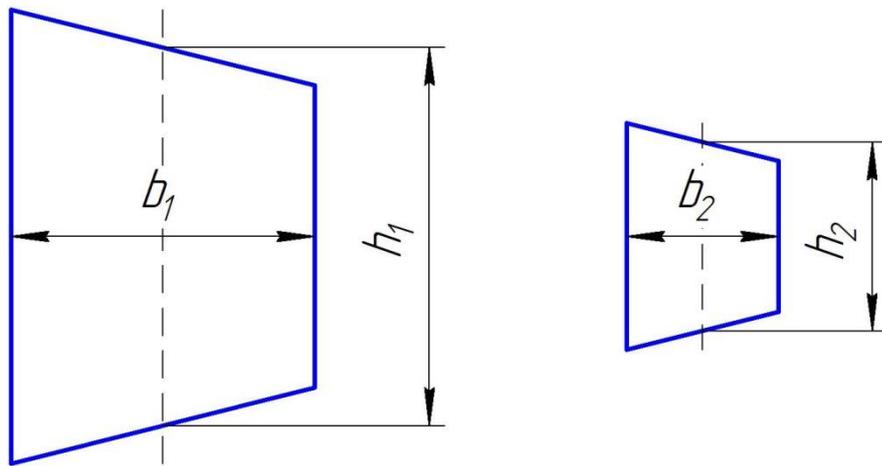


Рис. 8.1 Геометрическое подобие

Сравнивая последнее выражение с равенством  $S_1 = b_1 h_1$  находим, что должны иметь:

$$C_{s(1-2)} = C_{l(1-2)}^2 \text{ или } C_s/C_l^2 = 1 \quad (8.1.1)$$

Аналогичные выкладки для любой другой пары подобных фигур позволяют сделать вывод о том, что уравнение (4.1.1) связи между константами справедливо для всех подобных фигур и является условием их подобия. Поэтому в (4.1.1) опущены индексы (1-2). Левая часть (4.1.1) называется индикатором подобия. Для подобных течений индикаторы подобия должны быть равны единице. Подставляя в(4.1.1) значения констант подобия, найдем, что безразмерное выражение:

$$\frac{S_1}{b_1^2} = \frac{S_2}{b_2^2} = \frac{S_3}{b_3^2} = \frac{S}{b^2} = inv. \quad (8.1.2)$$

сохраняет неизменное (инвариантное) значение для всех подобных фигур и называется инвариантом или критерием подобия. Критерии гидродинамического подобия являются более сложными безразмерными комплексами.

Три теоремы теории подобия

Теорема I. Для подобных процессов одноименные критерий подобия одинаковы. Это означает, что индикаторы подобия будут равны единице.

Теорема позволяет определить критерии подобия на основе подобного

преобразования уравнений, описывающих подобные процессы.

Теорема II. Если физическое явление описывается системой дифференциальных уравнений, то всегда их решение можно представить в виде обобщенного критериального уравнения, устанавливающего связь между критериями подобия, полученными на основании I теоремы или другим способом:

$$K_1 = f(K_2, K_3, \dots, K_n) \quad (8.2.1)$$

Вид функции  $f$  и значение отдельных констант, входящих в неё определяются на основе системы исходных дифференциальных уравнения и при необходимости с помощью эксперимента.

Теорема III. Для подобия физических процессов необходимо и достаточно подобие условий однозначности и равенство одноименных определяющих независимых критериев подобия. При этом равенство определяемых критериев подобия обеспечивается автоматически. Определяющими критериями подобия  $K_2, K_3, \dots, K_n$  называются безразмерные комплексы, составленные из параметров, входящих в условия однозначности. Определяемым критерием подобия  $K_1$  называется безразмерный комплекс, включающий определяемый в задаче параметр. Критерии подобия разделяются на: а) критерии гидродинамического подобия, получаемые на основании анализа дифференциального уравнения Навье-Стокса; б) критерии теплового подобия, получаемые на основании анализа уравнения энергии.

## 8.2 Критерии гидродинамического подобия

На основании первой теоремы установим определяющие критерии гидродинамического подобия. Для этого запишем дифференциальные уравнения Навье-Стокса одномерного течения для натурального (индексы 1) и подобного ему модельного (индексы 2) течений.

Пологая, что массовые силы – это силы тяжести, т.е.  $X_1 = X_2 = g$ ,

получим:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = g - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{3} \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}. \quad (8.2.1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t_2} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = g - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \nu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{3} \nu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}. \quad (8.2.2)$$

Оба течения подобны. Производя преобразования, соответствующие геометрическому, кинематическому и динамическому подобию и подставляя значения параметров с индексом 2 в уравнение (8.2.2) получим уравнение модельного течения в параметрах натурального:

$$\frac{c_u}{c_t} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + \frac{c_u}{c_l} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = C_g g - \frac{c_p}{c_\rho c_l} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{c_\nu c_u}{c_l^2} \frac{4}{3} \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}. \quad (8.2.3)$$

Уравнения (8.2.1) и (8.2.3) тождественны и поэтому все безразмерные множители членов уравнения (8.2.3) равные друг другу. Таким образом, условие гидродинамического подобия течений представляет собой равенства:

$$\frac{c_u}{c_t} = \frac{c_u^2}{c_l} = C_g = \frac{c_p}{c_\rho c_l} = \frac{c_\nu c_u}{c_l^2}. \quad (8.2.4)$$

Это связи между константами подобия. Они указывают на подобие всех сил, действующих в подобных течениях. Действительно, уравнения (8.2.2) и (8.2.3) тождественны, т.е. почленно равны, например,

$$\frac{c_u}{c_t} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} = \frac{\partial u_2}{\partial t_2}, \text{ следовательно } \frac{c_u}{c_t} = \left( \frac{\partial u_2}{\partial t_2} \right) / \left( \frac{\partial u_1}{\partial t_1} \right) - \text{есть отношение локальных}$$

сил инерции модельного и натурального течений.  $\frac{c_u^2}{c_l}$  – отношение конвективных

сил инерций,  $C_g$ - отношение массовых сил;  $\frac{c_p}{c_\rho c_l}$  - отношение сил давлений;  $\frac{c_\nu c_u}{c_l^2}$

– отношение сил, обусловленных вязкостью и сжимаемостью модельного и натурального течений.

Итак, в подобных течениях отношения одноименных сил одинаковы. Для получения индикаторов и критериев подобия все члены (8.2.4) сравниваются со вторым членом  $\frac{c_u^2}{c_l}$ .

$$\frac{c_u}{c_t} = \frac{c_u^2}{c_l} \text{ индикатор подобия } \frac{c_b}{c_t c_u} = 1;$$

$$C_g = \frac{c_u^2}{c_l} \text{ индикатор подобия } \frac{c_u^2}{c_l c_g} = 1;$$

$$\frac{c_p}{c_\rho c_l} = \frac{c_u^2}{c_l} \text{ индикатор подобия } \frac{c_p}{c_\rho c_l^2} = 1;$$

$$\frac{c_\nu c_u}{c_l^2} = \frac{c_u^2}{c_l} \text{ индикатор подобия } \frac{c_l c_u}{c_\nu} = 1.$$

Подставляя в индикаторы подобия значения констант и учитывая произвольность выбора процессов 1 и 2 получаем следующие определяющие критерии гидродинамического подобия.

Критерий Струхалия или временной однородности (гомохронности):

$$Sh = \frac{l}{wt} = \frac{lh}{w}. \quad (8.2.5)$$

где  $l$  - характерный размер тела, находящегося в потоке, либо канала, путь, проходимый частицей за единицу времени;  $w$  - характерная скорость течения жидкости;  $t$  - характерное время процесса или время периода явления, происходящего с частотой  $h = 1/t$ . Критерий  $Sh$  характеризует отношение локальной составляющей сил инерции к конвективной составляющей сил инерции. Критерий  $Sh$  исключается из числа определяющих: критериев при исследовании установившегося течения.

Критерий Фруда:

$$Fr = \frac{w^2}{gl}. \quad (8.2.6)$$

Характеризует отношение конвективных сил инерции к силам тяжести в потоке и является определяющим, если силы тяжести существенно влияют на движение жидкости (труба или мощный лопаточный насос). Если движение жидкости возникает вследствие свободной конвекции в среде переменной плотности, то в уравнение Навье-Стокса необходимо добавить силу Архимеда. В этом случае вместо критерия Фруда в число определяющих вводится критерий Грасгоффа.

Критерий Грасгоффа:

$$Gr = \frac{gl^3 \beta \Delta T}{\nu^2},$$

где  $\beta = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 \Delta T}$  - коэффициент объемного расширения жидкости;  $\rho_0$  и  $\rho$  - плотность холодных и нагретых частиц среды;  $\Delta T$  - разность температур, вызывающая свободную конвекцию, например,  $\Delta T = T_w - T_\infty$ . Критерий Грасгоффа выражает отношение сил Архимеда, вызывающих конвекцию, к силам вязкости, препятствующих ей.

Критерий Эйлера:

$$Eu = \frac{P}{\rho W^2}. \quad (8.2.7)$$

характеризует отношение сил гидродинамического давления и сил инерции в потоке. В газовой динамике критерий Эйлера представляют с помощью выражений для скорости звука  $a^2 = \frac{kp}{\rho}$  и числа Маха  $M = w/a$  в следующем виде  $Eu = \frac{1}{kM^2}$ .

Следовательно в газовой динамике вместо  $Eu$  можно использовать показатель адиабаты (изоэнтропы) (число Пуассона)  $k = \frac{C_p}{C_v}$  и число  $M = w/a$ , которые характеризуют сжимаемость газа и в подобных течениях должны быть одинаковы.

Критерий Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho W l}{\mu} = \frac{W l}{\nu}. \quad (4.2.8)$$

Характеризует отношение сил инерции к силам вязкости в потоке.

Аэродинамические коэффициенты - это безразмерные комплексы, содержащие искомые величины и поэтому являющимися определяемыми критериями подобия.

1. Коэффициент лобового сопротивления  $C_x = R_x / \left( \frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2} S \right)$ , где  $R_x$  - сила лобового сопротивления тела;  $\frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2}$  - скоростной напор невозмущенного потока, Па;  $S$  - характерная площадь тела, для крыла - площадь его в плане.

2. Коэффициент подъемной силы:

$$C_y = R_y / \left( \frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2} S \right),$$

где  $R_y$  - подъёмная сила.

3. Коэффициент полной аэродинамической силы

$$C_R = R / \left( \frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2} S \right),$$

где  $R = \sqrt{R_y^2 + R_x^2}$  – полная аэродинамическая сила.

4. Коэффициент давления:

$$\bar{p} = (p_1 - p_2) / \left( \frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2} \right).$$

5. Коэффициент сопротивления трения

$$C_f = r / \left( \frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2} \right).$$

Для всех аэродинамических коэффициентов характерно, что силы в них отнесены к скоростному напору.

### 8.3. Критерии теплового подобия

Тепловое подобие в потоках выполняется при условии:

- 1) гидродинамического подобия,
- 2) подобия полей температур,
- 3) равенства одноименных критериев подобия.

При небольших скоростях потока подобие полей температур означает равенство соответствующих отношений  $T_\infty/T_W$  или отношений избыточных температур:

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \frac{T - T_W}{T_\infty - T_W}. \quad (8.3.1)$$

В этом случае температурная константа может быть представлена как:

$$C_T = \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{\Delta T_{02}}{\Delta T_{01}}. \quad (8.3.2)$$

При больших скоростях газовых потоков температурным критерием будет:

$$\theta = \frac{W_\infty^2}{C_p \Delta T_0} = 2 \frac{T_\infty^* - T_W}{T_\infty - T_W} = 2 \frac{\Delta T_\infty^*}{\Delta T_0}. \quad (8.3.3)$$

где  $T, T_\infty, T_W, T_\infty^*$  - температуры в сходственных потоках невозмущённого потока, поверхности обтекаемого тела и полная температура невозмущённого потока соответственно. Подобие полей температуры определяет подобие потоков тепла, например, если  $(T_\infty/T_W) > 1$ , то поток тепла направлен от жидкости к телу и наоборот.

Для получения критериев теплового подобия, основываясь на преобразовании подобия уравнения Навье-Стокса, упрощенно преобразуем уравнения энергии с использованием констант подобия. Имеем исходное уравнение

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho C_p} \frac{dp}{dt} + a \nabla T + \frac{1}{C_p} \frac{dq_{mp}}{dt},$$

где  $a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$  - коэффициент температуропроводности.

Получаем (в проекции на ось  $x$ ):

$$\frac{C_T}{C_t} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_u C_T}{C_t} u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{C_p}{C_\rho C_{Cp} C_t} \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{C_u C_\rho}{C_\rho C_{Cp} C_l} \frac{1}{\rho C_p} u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C_a C_T}{C_l^2} a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{C_v C_u^2 v}{C_{Cp} C_l^2 C_p} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

Условие теплового подобия получим приравняв комплексы, составленные из констант подобия:

$$\frac{C_T}{C_t} = \frac{C_u C_T}{C_l} = \frac{C_p}{C_\rho C_{Cp} C_t} = \frac{C_u C_p}{C_\rho C_{Cp} C_l} = \frac{C_a C_T}{C_l^2} = \frac{C_v C_u^2}{C_{Cp} C_l^2}. \quad (8.3.4)$$

Равенство второго и шестого членов (4.4.4) даёт индикатор подобия

$$\frac{C_u^2}{C_{Cp} C_T} = \frac{C_v}{C_l C_u} = 1 \text{ и критерий } \frac{W_\infty^2}{C_p \Delta T_0} \frac{v}{l W_\infty} = \frac{\theta}{Re}.$$

Равенство второго и четвертого членов (8.3.4) даёт индикатор подобия  $\frac{C_p}{C_\rho C_u^2} \frac{C_u^2}{C_{Cp} C_T} = 1$  и критерий  $\frac{p}{\rho W_\infty^2} \frac{W_\infty^2}{C_p \Delta T_0} =$

$E_u \theta$ . Равенство первого и второго, а также третьего и четвертого членов (8.3.4)

дают индикатор  $\frac{C_l}{C_t C_u} = 1$  и критерий Струхала  $Sh = \frac{1}{Wt}$ , т.е. во всех случаях мы

не получим новых независимых критериев подобия.

Критерий Фурье или критерий тепловой гомохронности:

$$F_0 = \frac{at}{l^2} \quad (8.3.5)$$

Получается в результате сравнения первого и пятого членов (8.3.4) и характеризует отношение тепла, переносимого теплопроводностью, к изменению энтальпии за счёт нестационарного процесса. Критерий Фурье является определяющим при исследовании неустановившихся процессов теплообмена.

Критерий Пекле  $Pe = \frac{wl}{a}$  получается из сравнений второго и пятого членов (8.4.4) и характеризует отношение конвективного переноса энтальпии к теплу, передаваемому молекулярной теплопроводностью. Здесь  $\chi$  – коэффициент температуропроводности жидкости.

Критерий Прандтля  $Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{\nu}{a}$  удобен тем, что составлен только из физических констант  $\nu$  и  $a$ , характеризующих интенсивность молекулярного переноса количества движения и тепла. Определяющие параметры для расчёта критериев могут выбираться в какой-то мере произвольно, но обязательно одинаково для всех сравниваемых подобных процессов.

#### 8.4. Составление критериального уравнения

На основании второй теоремы подобия составим обобщенное критериальное уравнение, например, для группы подобных процессов, для которых определяемым критерием подобия является коэффициент лобового сопротивления

Вид функции определяется на основе системы дифференциальных уравнений движения и с помощью эксперимента, выполняемого при одинаковых с натурой всех одноименных определяющих критериях подобия. Такое подобие будет полным. Исследования показывают, что полное подобие, т. е. полное моделирование сложных явлений не выполнимо - оно приводит к

тождественности течений. Для практики достаточно выполнение приближенного или частичного подобия. При частичном моделировании принимаются только те определяющие критерии, которые существенно влияют на величину определяемого критерия. Неопределяющие критерии выявляются на основании условий однозначности задачи, оценки относительной величины членов уравнений, описывающих процесс. Области значений критерия, в которых его изменение не влияет на величину определяемого критерия, называются автомодельными - подобие выполняется автоматически при любых значениях критерия. Например, часто можно пренебречь и нестабильностью процесса и исключить критерий Струхала  $Sh$ , при исследованиях течений несжимаемой жидкости - числа Пуассона  $k$  и Маха  $M$ .

Условие  $F_{r_M} = F_{r_H}$  и  $Re_M = Re_H$  для уменьшенной в  $C_l$  раз модели удовлетворить невозможно: первое требует уменьшения скорости обтекания модели  $W_M = W_H \sqrt{C_l}$ , второе – увеличение  $W_M = W_H / C_l$ .

Для разрешения этого противоречия приходится либо проводить модельный опыт с использованием жидкости, свойства которой определяются из равенств критериев подобия и величины  $C_l$ , либо вводить дополнительные ограничения в условия, однозначности, сужая группу подобных процессов.

Критериев подобия всегда меньше, чем размерных параметров, определяющих процесс. В этом также состоит преимущество критериального уравнения, по сравнению с уравнением, состоящим из физических параметров. Замена размерных переменных безразмерными суть теории подобия. При этом уменьшается количество неизвестных. Об этом говорит  $\pi$  – теорема подобия.

Физическое уравнение, содержащее  $n \geq 2$  размерных величин, из которых  $m \geq 1$  и имеют независимую размерность, после приведения к безразмерному виду будет содержать  $n - m = \pi$  безразмерных величин.

## Глава 9 Элементы магнитной газовой динамики

### 9.1 Область применения

При движении электропроводной жидкости в электрическом и магнитном полях возникает электромагнитная объемная сила (э.о.с.), иногда называемая *пондеромоторной силой*, которая действует на все частицы жидкости. Кроме того, при прохождении через жидкость электрического тока выделяется джоулево тепло.

При исследовании движения электропроводной жидкости в электрическом и магнитном полях приходится учитывать эти два новых воздействия, внося в уравнения движения и энергии соответствующие дополнительные члены. Это обстоятельство приводит к увеличению числа переменных и к необходимости соответствующего увеличения числа уравнений; такими дополнительными уравнениями являются уравнения электродинамики Максвелла. Совокупность уравнений Максвелла, уравнений Навье — Стокса, в которые внесены электромагнитные объемные силы, уравнения энергии, включающего джоулево тепло, и уравнения состояния представляет собой систему дифференциальных уравнений магнитной гидрогазодинамики.

При высоких температурах порядка нескольких тысяч градусов, а также при очень низких давлениях газы находятся в ионизированном состоянии и поэтому электропроводны, подобно жидким металлам и некоторым другим капельным жидкостям-электролитам; сказанное выше о воздействии электрического и магнитного полей на электропроводную жидкость и об учете этого воздействия относится и к ионизированному газу.

В развитии магнитной гидрогазодинамики нуждаются астрофизика, авиационная и ракетная техника, а также энергетика.

Астрофизики изучают строение Солнца и других звезд, в которых газ находится в сильно ионизированном состоянии под действием очень высоких

температур, а также «холодного» межзвездного газа, ионизированного при весьма малой его плотности.

Современная авиационная и ракетная техника создает аппараты, летящие в атмосфере со скоростью порядка нескольких километров в секунду. Температура воздуха у поверхности тела, имеющего такую скорость, приближается к температуре электрической дуги, вследствие чего воздух заметно ионизируется. Если на такой воздушный поток наложить электрическое и магнитное

поля, то возникнет электромагнитная объемная сила, которая при определенных условиях окажется сравнимой по величине с аэродинамическими силами.

Особенностью электромагнитной объемной силы является то, что в отличие от других объемных сил (силы тяжести, инерционных сил) ею можно управлять, воздействуя на вызывающие ее электрическое и магнитное поля. Изменяя величину электромагнитной силы, можно влиять на интенсивность и форму ударных волн, увеличивать критическое значение числа Рейнольдса при переходе ламинарного режима течения в турбулентный, замедлять или ускорять поток электропроводной жидкости (или газа), вызвать деформацию профиля скорости и отрыв пограничного слоя.

Используя электропроводную жидкость или газ, можно создать генератор электрического тока, в котором осуществляется прямой переход тепловой энергии в электрическую; находят применение магнитные дозаторы, расходомеры и насосы для перекачки ртути и жидких металлов; известны и другие области применения магнитной гидрогазодинамики в технике, например в приборостроении.

В настоящее время четко вырисовываются две области магнитной гидрогазодинамики: в первой — считается, что среда обладает бесконечной проводимостью (астрофизика), во второй — имеют дело со средой конечной

проводимости (магнитная газовая динамика различных технических аппаратов).

## 9.2 Электромагнитные поля

Электромагнитные поля описываются в общем случае следующей системой интегральных соотношений Максвелла:

1. Соотношением, которое связывает циркуляцию вектора напряженности магнитного поля  $H$  по замкнутому контуру  $l$  с суммарной силой постоянного тока, протекающего через площадь охватываемую этим контуром:

$$\oint H_i dl = - \int_S j_n dS \quad (1)$$

2. Соотношением, связывающим суммарный поток электростатической индукции через замкнутую поверхность площадью  $S$  с суммарным свободным зарядом в объеме  $v$ , охватываемым этой поверхностью:

$$\int_S D_n ds = \int_v \rho_{v0} dv \quad (2)$$

3. Соотношением, связывающим циркуляцию вектора напряженности электрического поля  $E$  по замкнутому контуру  $l$  со скоростью изменения по времени потока вектора магнитной индукции через площадь, охватываемую этим контуром:

$$\oint E_i dl = - \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS \quad (3)$$

4. Соотношением, свидетельствующим о неразрывности потока магнитной индукции  $B$  через замкнутую поверхность:

$$\int_S B_n ds = 0 \quad (4)$$

К этим интегральным соотношениям нужно добавить выражения, с помощью которых можно перейти от векторов напряженности электромагнитных полей к векторам индукции:

$$D = \epsilon_a E, \quad B = \mu_B H \quad (5)$$

и обобщенный закон Ома

$$\mathbf{j} = \sigma_R \{ \mathbf{E} + [\mathbf{W} \times \mathbf{B}] \} \quad (6)$$

Выведем теперь уравнения Максвелла в дифференциальной форме, причем разобьем их на две системы.

Первую систему получим для магнитного поля постоянного тока.

Так как линии напряженности магнитного поля лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению тока, то проекция плотности тока  $i$  (рис. 13.7) связана только с проекциями  $H_x$  и  $H_y$  напряженностей магнитного поля в той же точке пространства. Циркуляция вектора напряженности по бесконечно малому контуру  $abcd$  состоит из следующих слагаемых (обход против часовой стрелки):

$$\begin{aligned} \Gamma_{abcd} &= -H_y dy + H_x dx + \left( H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx \right) dy - \left( H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy \right) dx = \\ &= \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (7)$$

С другой стороны, согласно циркуляция вектора  $\mathbf{H}$  должна равняться силе тока, протекающего через эту площадку:

$$\Gamma_{abcd} = I_z = j_z dx dy \quad (8)$$

Итак, имеем

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z \quad (9)$$

Аналогично для составляющих плотности тока по другим осям найдем

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y \quad (10)$$

Уравнения (10) связывают плотность тока проводимости  $\mathbf{j}$  с пространственными производными от напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Если к уравнениям (10) добавить уравнение, связывающее вектор электростатической индукции  $\mathbf{D}$  с распределением плотности свободных зарядов в объеме  $\rho_{\text{св}}$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_{v0} \quad (11)$$

то мы и получим первую систему уравнений Максвелла, которая в векторной форме может быть представлена так:

$$\text{rot}H=j \quad \text{div}D=\rho_{v0} \quad (12)$$

Эта система справедлива для однородных магнетиков, целиком заполняющих все поле, так как в таком случае напряженность магнитного поля токов не зависит от магнитной проницаемости среды.

Вторую систему уравнений Максвелла получим, используя данное им обобщение закона индукции Фарадея.

Составим выражение для циркуляции напряженности электрического поля  $E$  по бесконечно малому контуру  $abcd$  (рис. 13.7), вызванного изменением по времени вектора магнитной индукции  $\partial B / \partial t$ , перпендикулярного вектору  $E$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{abcd} &= -E_y dy + E_x dx + \left( E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x} dx \right) dy - \left( E_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \right) dx = \\ &= \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (13)$$

Циркуляция вектора  $E$  по замкнутому контуру равна производной потока магнитной индукции через площадь, охватываемую этим контуром, взятую со знаком минус:

$$\Gamma = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} dx dy \quad (14)$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (15)$$

По аналогии имеем также

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (16)$$

Добавляя к уравнениям (15) уравнение неразрывности линий магнитной индукции

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

получим вторую систему уравнений Максвелла, которая в векторной форме имеет вид

$$\text{rote} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{div} B = 0 \quad (18)$$

В случае неоднородной среды на границах отдельных ее участков при отсутствии поверхностных зарядов и токов должны быть выполнены условия

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_{a1}} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_{a2}} \quad D_{1n} = D_{2n} \quad (19)$$

$$\frac{B_{1t}}{\mu_{a1}} = \frac{B_{2t}}{\mu_{a2}} \quad B_{1n} = B_{2n} \quad (20)$$

Исключим из дифференциальных уравнений Максвелла векторы плотности тока  $j$  и напряженности электрического тока  $E$ . Для этого воспользуемся законом Ома, преобразовав его в уравнение завихренности поля плотности тока:

$$\text{rot} j = \sigma_R \{ \text{rot} E + \text{rot} [W \times B] \}. \quad (21)$$

Уравнение для завихренности вектора напряженности магнитного поля (12) заменим уравнением завихренности вектора магнитной индукции

$$\text{rot} B = \mu_B j \quad (22)$$

Как известно из теории поля,

$$\text{rot rot} B = -\Delta B = -\left( \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \right) \quad (23)$$

Находим при  $\sigma_R = \text{const}$

$$-\Delta B = \mu_B \text{rot} j = \mu_B \sigma_R \{ \text{rot} E + \text{rot} [W \times B] \} \quad (24)$$

Из уравнения (18) имеем

$$\text{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (25)$$

Подставляя этот результат в (24), получим

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot} [W \times B] + \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \Delta B \quad (26)$$

Это уравнение, связывающее магнитное поле с полем скоростей в электропроводной жидкости, называется *уравнением магнитной индукции*.

В случае очень большой электропроводимости среды ( $\sigma_R \rightarrow \infty$ ) вторым членом правой части уравнения (26) можно пренебречь, в связи с чем оно приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot}[W \times B] \quad (27)$$

Это уравнение тождественно уравнению вихря скорости в гидродинамике идеальной жидкости, которое означает, что линии вихря движутся вместе с жидкостью. Но в данном случае речь идет о линиях магнитного поля, которые оказываются жестко связанными с веществом — «вмороженными», и если частицы жидкости движутся, то линии магнитной индукции перемещаются вместе с ними (частицы не могут пересечь линий индукции).

«Вмороженность» магнитных линий связана с тем, что при изменении потока вектора магнитной индукции через контур в нем появляются электрические токи, препятствующие изменению этого потока, причем тем большие, чем выше  $\sigma_R$  при  $\sigma_R \rightarrow \infty$  изменение потока индукции становится невозможным. Движение вдоль силовых линий не сказывается на поле; при движении в поперечном направлении силовые линии полностью увлекаются вместе с веществом (если  $\sigma_R \rightarrow \infty$ )

В случае неподвижной среды ( $W = 0$ ) уравнение индукции имеет вид уравнения диффузии или нестационарной теплопроводности (уравнения Фурье)

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \Delta B \quad (28)$$

Оно показывает, что в теле, находящемся в магнитном поле внешних источников, магнитное поле исчезает не сразу после их выключения; магнитные силовые линии постепенно «просачиваются» через тело и ослабляются.

Например, в медной сфере радиусом 1 м магнитное поле затухает в течение приблизительно 10 с: чем выше магнитная проводимость тем затухание поля слабее.

Величина

$$\frac{1}{\mu_B \sigma_R} = \nu_R \quad (29)$$

аналогичная коэффициенту переноса в уравнениях диффузии и теплопроводности и имеющая размерность кинематической вязкости, получила название *магнитной вязкости*. Численные значения магнитной вязкости обычно намного больше значений кинематической вязкости. В общем случае, когда ни одним из членов в правой части уравнения магнитной индукции пренебречь нельзя, силовые линии стремятся двигаться вместе с веществом и одновременно просачиваются сквозь вещество.

### 9.3 Уравнения магнитной газодинамики

Уравнения гидродинамики (и газовой динамики) электропроводной жидкости при наличии электрического и магнитного полей должны в отличие от уравнений гидродинамики непроводящей жидкости содержать дополнительный член, учитывающий электромагнитную объемную силу.

На элемент объема проводника (или проводящей жидкости)  $dv$ , если по нему протекает ток плотностью  $j$ , со стороны магнитного поля действует сила Ампера:

$$df_H = [j \times B] dv, \quad (30)$$

а со стороны электрического поля — сила Кулона:

$$df_c = E \rho_{c0} dv \quad (31)$$

где  $\rho_{c0}$  — плотность зарядов в объеме  $dv$  ( $\rho_{c0} dv = dq$ ).

Таким образом полная объемная электромагнитная сила, приложенная к объему  $Li$ :

$$df = df_c + df_H = \{\rho_{c0}E + [j \times B]\} dv \quad (32);$$

сила, действующая на единицу объема

$$F = \frac{df}{dv} = F_e + F_H = \rho_{r0}E + [j \times B] \quad (33)$$

Оценка порядка членов в соотношении (32) показывает, что силой Кулона часто можно пренебречь. Тогда с учетом (22) получаем для электромагнитной силы, приложенной к единице объема, выражение

$$F = [j \times B] = \frac{1}{\mu_B} [\text{rot} B \times B] \quad (34)$$

Проекции вектора электромагнитной силы на оси прямоугольной системы координат составляют

$$F_x = (j_y B_z - j_z B_y) \quad F_y = (j_z B_x - j_x B_z) \quad F_z = (j_x B_y - j_y B_x) \quad (35)$$

или в другой форме (при замене согласно (22) вектора плотности тока ротором вектора магнитной индукции)

$$\begin{aligned} \mu_B F_x &= a_y B_z - a_z B_y = B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_x}{\partial z} - 1 \sqrt{2} \frac{\partial B^2}{\partial x} \\ \mu_B F_y &= a_z B_x - a_x B_z = B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_y}{\partial z} - 1 \sqrt{2} \frac{\partial B^2}{\partial y} \\ \mu_B F_z &= a_x B_y - a_y B_x = B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial z} - 1 \sqrt{2} \frac{\partial B^2}{\partial z} \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь  $B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$  — величина вектора магнитной индукции,  $a = \text{rot} B$ . При выводе выражений (36) было использовано также условие неразрывности магнитных силовых линий (18).

Учитывая силу  $F$  (34), получим уравнение движения электропроводной жидкости в электрическом и магнитном полях в векторной форме (при  $\mu = \text{const}$ )

$$\rho \frac{dW}{dt} = R - \text{grad} p + \mu \Delta W + 1 \sqrt{3} \mu \text{grad}(\text{div} W) + [j \times B] \quad (37)$$

или

$$\rho \frac{dW}{dt} = R - \text{grad} p + \mu \Delta W + 1 \sqrt{3} \mu \text{grad}(\text{div} W) + \frac{1}{\mu_B} [\text{rot} B \times B] \quad (38)$$

Для газа система дифференциальных уравнений должна включать уравнение энергии. В случае электропроводного газа, находящегося в магнитном и электрическом полях уравнение энергии для электропроводного газа примет следующий вид (при  $\lambda = const, \mu = const$ ):

$$\rho \frac{di}{dt} = \frac{dp}{dt} + \lambda \Delta T + \mu \Phi + \frac{j^2}{\sigma_R} \quad (38)$$

или с учетом (22)

$$\rho' \frac{di}{dt} = \frac{dp}{dt} + \lambda \Delta T + \mu \Phi + \frac{1}{\mu_B^2 \sigma_R} [rot B]^2 \quad (39)$$

К уравнениям (37) и (38) следует добавить уравнение магнитной индукции (26)

$$\frac{\partial B}{\partial t} = rot[W \times B] + \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \Delta B \quad (40)$$

гидродинамическое уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \rho W = 0 \quad (41)$$

и уравнение состояния

$$p = f(P, T), \quad (42)$$

которое в случае совершенного газа заменяется уравнением Клапейрона. Система уравнений (38) — (42) является полной системой дифференциальных уравнений магнитной газовой динамики.

Если уравнение движения используется в форме (37), то в систему уравнений необходимо ввести уравнение закона Ома, уравнения Максвелла (12), (18), а также уравнения (22) и (26).

В этих уравнениях мы пренебрегаем электростатической силой Кулона; если принять во внимание силу Кулона, то получится полная система уравнений электромагнитной газодинамики.

Для несжимаемой жидкости система уравнений (73) — (42) упрощается, так как уравнения движения решаются независимо от уравнения энергии, отпадает надобность в уравнении состояния (42) и более простой вид имеют уравнения неразрывности (41) и движения (37).

Таким образом, полная система уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой жидкости в векторной форме состоит из

уравнения движения

$$\rho \frac{dW}{dt} = R - grad p + \mu \Delta W + [j \times B] \quad (43)$$

$$\text{Или } \rho \frac{dW}{dt} = R - grad p + \mu \Delta W + \frac{1}{\mu_B} [rot B \times B] \quad (78a) \quad (44)$$

уравнения энергии, которое разрешается независимо от остальных уравнений:

$$\rho \frac{dT}{dt} = \lambda \Delta T + \mu \Phi + \frac{j^2}{\sigma_R} \quad (45)$$

уравнение магнитной индукции

$$\frac{\partial B}{\partial t} = rot[W \times B] + \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \Delta B \quad (46)$$

уравнения неразрывности

$$div W = 0 \quad (47)$$

Если уравнения движения и энергии используются в форме (44) и (45), то для получения замкнутой системы нужно добавить уравнение закона Ома, уравнения Максвелла (12), (18) и уравнение (22).

Если перейти к проекциям на оси прямоугольной системы координат  $x, y, z$ , то векторное уравнение движения (44) распадается на три уравнения движения:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \\ &+ (j_y B_z - j_z B_y), \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \\ &+ (j_x B_y - j_y B_x) \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \\ &+ (j_z B_x - j_x B_z) \end{aligned} \quad (48)$$

Используя зависимости (35) и (36), систему уравнений движения можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p_c}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \\
&+ \frac{1}{\mu_B} \left( B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right), \\
\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p_c}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \\
&+ \frac{1}{\mu_B} \left( B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \tag{49} \\
\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p_c}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \\
&\frac{1}{\mu_B} \left( B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

В эти уравнения входит величина

$$p_c = p + \frac{B^2}{2\mu_B} \tag{50}$$

называемая *эффективным давлением*, которая представляет собой сумму гидродинамического ( $p$ ) и магнитного ( $p_m = \frac{B^2}{2\mu_B}$ ) давлений.

Отметим, что в уравнениях (48) неэлектромагнитные силы (сила тяжести и др.) для краткости опущены.

Векторное уравнение индукции (46) в прямоугольной системе координат также распадается на три уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \left[ \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial u B_x}{\partial x} + \frac{\partial u B_x}{\partial y} + \frac{\partial u B_x}{\partial z} - B_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \left[ \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial v B_y}{\partial x} + \frac{\partial v B_y}{\partial y} + \frac{\partial v B_y}{\partial z} - B_y \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \tag{51} \\
\frac{\partial B_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \left[ \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial w B_z}{\partial x} + \frac{\partial w B_z}{\partial y} + \frac{\partial w B_z}{\partial z} - B_z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

В уравнении энергии (38) член, учитывающий джоулево тепло, можно выразить через магнитную индукцию, Для этого следует использовать уравнение Максвелла (22). В результате получим

$$\rho \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \lambda \Delta T + \mu \Phi + \frac{1}{\sigma_R \mu_B^2} (\text{rot} B)^2 \quad (52)$$

где в соответствии с теорией поля

$$(\text{rot} B)^2 = \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)^2 \quad (53)$$

Уравнение закона Ома в проекциях на оси координат имеет вид

$$\begin{aligned} j_x &= \sigma_R [E_x + (vB_z - \omega B_y)] \\ j_y &= \sigma_R [E_y + (vB_x - \omega B_z)] \\ j_z &= \sigma_R [E_z + (vB_y - \omega B_x)] \end{aligned} \quad (54)$$

При  $\rho = \text{const}$  гидродинамическое уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (55)$$

поэтому уравнения магнитной индукции (54) упрощаются, так как последние члены в их правых частях равны нулю.

Во многих конкретных случаях уравнения движения и индукции можно существенно упростить, отбрасывая те или иные относительно малые члены.

Часто уравнение энергии используют в такой форме, в которой энтальпия и кинетическая энергия объединены в полную энтальпию. Для того чтобы прийти к соответствующей форме уравнения энергии магнитной гидродинамики, следует дополнительный член уравнения движения — электромагнитную силу

$$F = [j \times B] \quad (56)$$

спроектировать на оси прямоугольной системы координат и затем каждую проекцию этого вектора умножить на соответствующую проекцию скорости; сложив три полученных произведения, находим дополнительный электромагнитный член.

$$\begin{aligned} f_x u + f_y v + f_z w &= [u(j_y B_z - j_z B_y) + v(j_z B_x - j_x B_z) + w(j_x B_y - j_y B_x)] = \\ &= [j_x (w B_y - v B_z) + j_y (u B_z - w B_x) + j_z (v B_x - u B_y)] \end{aligned} \quad (57)$$

При составлении этого выражения были использованы выражения (35) для составляющих электромагнитной силы. Иначе говоря, скалярное произведение вектора скорости на вектор электромагнитной силы было представлено в виде

$$Wf = -j [W \times B] \quad (58)$$

Из закона Ома следует

$$\frac{j}{\sigma_R} - E = [W \times B] \quad (59)$$

Подставляя этот результат в предыдущее равенство, находим

$$W \cdot f = -\frac{j^2}{\sigma_R} + jE \quad (60)$$

Если этот дополнительный член, выражающий работу электромагнитной силы, сложить с джоулевым теплом

$$Q_e = \frac{j^2}{\sigma_R} \quad (88)$$

то получим окончательные выражения для дополнительного «электромагнитного» члена уравнения энергии

$$Q_H = j \cdot E. \quad (89)$$

Эту величину нужно добавить к правой части уравнения (49) гл. II, тогда уравнение энергии газа при наличии электромагнитного поля записывается в следующей форме:

$$\rho \frac{di^*}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \lambda \Delta T + \mu \Delta \left( \frac{W^2}{2} \right) + \frac{1}{3} \mu (W \nabla) \operatorname{div} W + \frac{1}{3} \mu (\operatorname{div} W)^2 + 2\mu \Omega + jE \quad (90)$$

В ряде случаев работу электромагнитных сил представляют в другой форме, которую можно получить, если заменить с помощью (65) плотность тока в скалярном произведении (89) магнитной индукцией

$$Q_H = \frac{E}{\mu_B} \operatorname{rot} B \quad (91)$$

и использовать известную формулу теории поля

$$\operatorname{div}[E \times B] = B \operatorname{rot} E - E \operatorname{rot} B$$

В случае стационарного магнитного поля ( $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ ) из (63) имеем  $\text{rot } E = 0$ , и, следовательно,

$$\text{E rot B} = -\text{div } [E \times B].$$

Подставляя этот результат в (91), приходим к следующему выражению для дополнительного электромагнитного члена в уравнении энергии:

$$Q_H = -\frac{1}{\mu_B} \text{div } [E \times B]. \quad (92)$$

После замены в (90) последнего члена выражением (92) получаем еще одну форму уравнения энергии магнитной газовой динамики :

$$\rho \frac{di^*}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \lambda \Delta T + \mu \Delta \left( \frac{W^2}{2} \right) + \frac{1}{3} \mu (W \nabla) \text{div } W + \frac{1}{3} \mu (\text{div } W)^2 + 2\mu \Omega - \frac{1}{\mu_B} \text{div } [E \times B]. \quad (93)$$

В стационарном случае и при отсутствии вязкости и теплопроводности уравнение энергии (93) принимает вид

$$\rho \frac{di^*}{dt} = -\frac{1}{\mu_B} \text{div } [E \times B]. \quad (94)$$

С появлением дополнительного члена в уравнении движения электропроводной жидкости в магнитном поле (82) возникает необходимость ввести новый критерий подобия, учитывающий отношение магнитной силы к силе инерции. Следуя методу, изложенному в § 7 гл. II, приведем последний член правой части уравнения (82) к безразмерному виду путем деления его на величину  $\rho_0 U_0^2 l$ . В результате получим

$$\frac{j_0 B_0 l}{\rho_0 U_0^2} \left( \frac{j_y B_z}{j_0 B_0} - \frac{j_z B_y}{j_0 B_0} \right)$$

Здесь  $l$  — характерный размер,  $\rho_0, U_0, j_0, B_0$  — значения плотности жидкости, скорости, плотности тока и магнитной индукции  $j$  некоторой характерной точке потока. Если электромагнитная сила записана так, как это сделано в уравнении движения (82а), то в безразмерном виде соответствующий член этого уравнения можно представить в виде

$$\frac{B_0^2}{\mu_B \rho_0 U_0^2} \left[ \frac{B_x}{B_0} \frac{\partial \frac{B_x}{B_0}}{\partial \frac{x}{i}} + \frac{B_y}{B_0} \frac{\partial \frac{B_x}{B_0}}{\partial \frac{y}{i}} + \frac{B_z}{B_0} \frac{\partial \frac{B_x}{B_0}}{\partial \frac{z}{i}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \left( \frac{B}{B_0} \right)^2}{\partial \frac{x}{i}} \right]$$

Динамическое подобие обтекания модели и натурального объекта (см. § 7 гл. II) в электропроводной жидкости при наличии внешнего магнитного поля, очевидно, требует того, чтобы у модели и натурны были одинаковые значения множителя

$$\frac{j_0 B_0 l}{\rho_0 U_0^2} = S_j = idem \quad (95)$$

пли с учетом того, что, согласно (65),  $j_0 \approx \frac{1}{\mu_B} \frac{B_0}{i}$ , имеем

$$\frac{B_0^2}{\mu_B \rho_0 U_0^2} = S_B = const \quad (96)$$

Этот множитель характеризует отношение магнитной и кинетической энергий единицы объема. Величина  $A = \sqrt{S_B}$  называется *числом Альфвена*. Разумеется, необходимо, чтобы остальные гидродинамические критерии подобия (числа Струхалия, Фруда, Маха и Рейнольдса) также были соответственно одинаковыми.

Учитывая, что при конечной проводимости согласно закону Ома (54) плотность тока, индуцированного магнитным полем, пропорциональна отношению

$$\sigma_{R0} U_0 B_0 \sim j_0$$

можно из (95) получить критерий магнитогидродинамического взаимодействия, выражающий отношение магнитной силы от индуцированных токов к силе инерции

$$S_0 = \frac{\sigma_{R0} B_0^2 l}{\rho_0 U_0} = idem \quad (97)$$

Величину  $So$  называют *критерием магнитогидродинамического взаимодействия*.

Приведем к безразмерному виду члены уравнения закона Ома (54)

$$\frac{j_x}{j_0} = \frac{\sigma_{R0} E_0}{j_0} \frac{\sigma_R}{\sigma_{R0}} \left[ \frac{E_x}{E_0} + \frac{U_0 B_0}{E_0} \left( \frac{v B_z}{U_0 B_0} - \frac{w B_y}{U_0 B_0} \right) \right]$$

Если  $j_0$  — ток проводимости в характерной точке, то, согласно (23),  $j_0 = \sigma_{R0} E_0$ . Отсюда следует

$$\frac{j_x}{j_0} = \frac{\sigma_R}{\sigma_{R0}} \left[ \frac{E_x}{E_0} + \frac{U_0 B_0}{E_0} \left( \frac{v B_z}{U_0 B_0} - \frac{w B_y}{U_0 B_0} \right) \right]$$

Здесь отношение индуцированного магнитным полем тока к току внешнего электрического поля определяется при  $\sigma_R = \sigma_{R0}$  безразмерным критерием

$$\Pi = \frac{U_0 B_0}{E_0} = \frac{U_0}{E_0 \setminus B_0} = \frac{U_0}{W_d} \quad (98)$$

Здесь  $W_d$  — скорость дрейфа (52), определенная ранее в § 2. Величина

$$\Xi = \frac{S_0}{\Pi} \quad (99)$$

характеризующая отношение электромагнитной силы от наложенного извне тока к силе инерции, является *критерием элек- трогидродинамического взаимодействия*.

Приведем к безразмерному виду уравнение магнитной индукции (84)

$$\frac{l}{i_0 U_0} \frac{\partial \frac{B_x}{B_0}}{\partial \frac{t}{i_0}} = \frac{1}{\mu_B \sigma_R l U_0} \left[ \frac{\partial^2 \frac{B_x}{B_0}}{\partial \left( \frac{x}{l} \right)^2} + \frac{\partial^2 \frac{B_x}{B_0}}{\partial \left( \frac{y}{l} \right)^2} + \frac{\partial^2 \frac{B_x}{B_0}}{\partial \left( \frac{z}{l} \right)^2} \right] + \frac{\partial^2 \frac{u B_x}{U_0 B_0}}{\partial \left( \frac{x}{l} \right)^2} + \frac{\partial^2 \frac{u B_x}{U_0 B_0}}{\partial \left( \frac{y}{l} \right)^2} + \frac{\partial^2 \frac{u B_x}{U_0 B_0}}{\partial \left( \frac{z}{l} \right)^2} - \frac{B_x}{B_0} \left[ \frac{\partial^2 \frac{u}{U_0}}{\partial \left( \frac{x}{l} \right)^2} + \frac{\partial^2 \frac{v}{U_0}}{\partial \left( \frac{y}{l} \right)^2} + \frac{\partial^2 \frac{w}{U_0}}{\partial \left( \frac{z}{l} \right)^2} \right] \quad (100)$$

В левой части (100) стоит уже известный безразмерный множитель-число Струхаля ( $Sh = l U_0 t_0$ ). В правой части появился новый безразмерный

множитель, обратную величину которого называют **магнитным числом Рейнольдса**

$$R_H = \mu_B \sigma_R l U_0 = \frac{l U_0}{\nu_H} \quad (101)$$

Этот критерий характеризует отношение магнитного поля от индуцированных токов к наложенному внешнему магнитному полю<sup>1</sup>). Иногда пользуются отношением магнитного числа Рейнольдса к обычному числу Рейнольдса, т. е. *магнитным числом Прандтля*

$$Pr_m = \frac{R_H}{R} = \mu_B \sigma_R \nu = \frac{\nu}{\nu_H} \quad (102)$$

которое представляет собой отношение обычной вязкости к магнитной вязкости. Если умножить критерий магнитогидродинамического взаимодействия (97) на число Рейнольдса, то получим отношение магнитной силы от индуцированного магнитным током поля к силе вязкости:

$$S_0 R = \frac{\sigma_R l B_0^2}{\rho_0 U_0} \frac{l U_0}{\nu} = \frac{\sigma_R l B_0^2}{\rho_0 \nu}$$

Корень квадратный из этой величины получил название *числа Гартмана*

$$Na = l B_0 \sqrt{\frac{\sigma_R}{\mu}} \quad (103)$$

Здесь  $\mu = \rho_0 \nu$  — коэффициент динамической вязкости. При определении величины числа Гартмана в качестве характерного  $l$  берется поперечный размер канала. Число Гартмана является основным критерием подобия в таких магнитогидродинамических задачах, в которых существенную роль играют силы вязкости.

Из перечисленных дополнительных критериев магнитной гидродинамики взаимно независимыми являются только три (например, числа  $\Pi$ ,  $Na$  и  $R_H$ ). Остальные параметры ( $S$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $Pr_m$ ) можно получить из приведенных соотношений как производные.

При некоторых значениях отдельных критериев подобия система уравнений магнитной гидродинамики допускает упрощения. Так, при  $R_H < 1$

можно пренебречь магнитными полями от индуцированных токов и считать, что течение происходит только под действием внешнего магнитного поля. С такого рода течениями имеют дело в магнитной гидрогазодинамике каналов (движение при наличии электромагнитных полей технической плазмы или жидкого металла в трубах, каналах магнитных насосов и магнитогазодинамических генераторов электрического тока) и в случае обтекания тела, когда электропроводность среды не очень велика.

При  $R_H > 1$  магнитное поле оказывается «вмороженным» в вещество и перемещается вместе с ним; эта область магнитной газовой динамики находит применение в астрофизике, где имеют дело с очень протяженными областями сильно разреженного межзвездного газа достаточной проводимости или с разогретым до миллионов градусов весьма проводящим звездным веществом (например, протуберанцы солнца).

При лабораторных опытах с жидкими металлами обычно  $R_H = 0,01—0,1$ , а число Гартмана может достигать нескольких сотен; в опытах с технической плазмой (температуры порядка  $10^4$  К) возможно значение  $R_H = 1$ , тогда как число П может быть как меньше, так и больше единицы.

#### **9.4 Течение вязкой электропроводной жидкости по плоскому каналу в поперечном магнитном поле**

Рассмотрим так называемое течение Гартмана<sup>1)</sup>—ламинарное течение несжимаемой электропроводной жидкости по плоскому каналу постоянного сечения (рис. 13.8) при наличии постоянного внешнего поперечного магнитного поля с магнитной индукцией

$$B_y = B_0$$

По длине канала — на участке стабилизированного течения — изменяется только давление ( $\partial p / \partial x \neq 0$ ); остальные параметры остаются неизменными ( $\partial W / \partial x = \partial B / \partial x = 0$ ). При достаточно большой относительной

ширине канала ( $a > b$ ) течение можно считать плоскопараллельным, при котором скорость и индукция

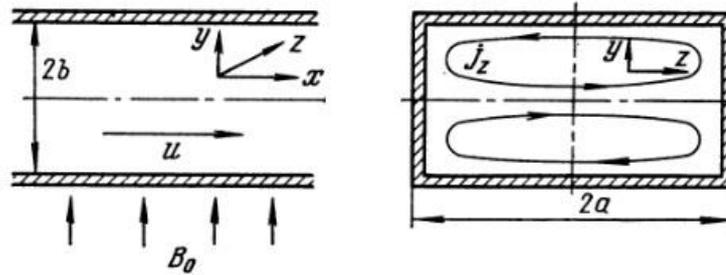


Рис. 13.8. Плоское течение вязкой жидкости в поперечном магнитном поле

не изменяются в направлении оси  $z$  ( $\partial W/\partial z = \partial B/\partial z = 0$ ), а поперечные составляющие скорости отсутствуют ( $v = 0, w = 0$ ).

Из уравнения неразрывности линий магнитной индукции (43) имеем

$\text{div} \mathbf{B} = 0$ , или

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Вследствие условия  $\partial B_x/\partial x = \partial B_z/\partial z = 0$  имеем также  $\partial B_y/\partial y = 0$ , или  $B_y = \text{const} = B_0$ , т. е. магнитная индукция внутри канала в направлении оси  $y$  не изменяется.

Из уравнения (63) при постоянном магнитном поле следует  $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ . Отсюда, в предположении что  $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ , получаем  $E_z = \text{const}, E_x = \text{const}$ . Из условия отсутствия тока в направлении  $x$  необходимо принять  $E_x = 0$ . Из уравнения  $\text{div} \mathbf{j} = 0$  имеем  $j_y = \text{const}$ . Предполагая стенки  $y = \pm b$  непроводящими, имеем  $j_y = 0$ . Тогда из закона Ома следует  $E_y = \frac{1}{\sigma_R} j_y = 0$ .

По закону Ома плотность тока в проекции на ось  $z$  равна

$$J_z = \sigma_R [E_z + uB_0]. \quad (104)$$

Если боковые стенки  $z = \pm a$  также являются изоляторами, то суммарный ток в направлении оси  $z$

$$I_z = \int_{-b}^b j_z dy = \sigma_R \left[ E_z 2b + B_0 \int_{-b}^b u dy \right] = 0$$

Так как величина

$$\frac{1}{2b} \int_{-b}^b u dy = u_{cp}$$

есть средняя скорость потока, то напряженность электрического поля

$$E_z = -B_0 u_{cp} \quad (105)$$

Подставляя (105) в (104), приходим к окончательному выражению для плотности тока

$$j_z = \sigma_R B_0 (u - u_{cp}) \quad (106)$$

Как видим, несмотря на то, что суммарная сила тока равна нулю, ток в направлении оси  $z$  течет, причем в слоях с малой скоростью ( $u < u_{cp}$ ) плотность тока отрицательна, а в слоях большой скорости ( $u > u_{cp}$ ) — положительна.

Электромагнитная сила — последний член в правой части уравнения (82) — в данном случае составляет

$$F_x = -j_z B_0 = -\sigma_R B_0^2 (u - u_{cp}) \quad (107)$$

Из (107) следует, что в средней части сечения канала электромагнитная сила отрицательна (тормозит поток), а у стенок — положительна (ускоряет поток). Так как  $I_z = 0$ , то суммарная электромагнитная сила, приложенная ко всему потоку, также равна нулю. В связи с изложенным уравнение движения (82) вдоль оси  $x$  запишется так:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - j_z B_0 \quad (108)$$

Отсюда на основании (106) имеем

$$A = \frac{\partial p}{\partial x} - u_{cp} \sigma_R B_0^2 = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sigma_R B_0^2 u \quad (108a)$$

Из уравнения движения (82a) для оси  $y$  имеем

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( p + \frac{B_x^2}{2\mu_B} \right) = 0$$

откуда следует, что величина  $\partial p / \partial x$  не зависит от  $y$ .

Левая часть уравнения (108а) зависит только от  $x$ , а правая только от  $y$ , поэтому  $A$  должно быть величиной постоянной ( $A = \text{const}$ ). После приведения к безразмерному виду имеем

$$n = \frac{Ab^2}{\mu u_{cp}} = \frac{\partial^2 u'}{\partial'^2 y^2} - Ha^2 u' \quad (109)$$

Здесь  $Ha = B_0 b \sqrt{\frac{\sigma_R}{\mu}}$  — число Гартмана,  $n$  — безразмерный коэффициент,  $u' = \frac{u}{u_{cp}}$ ,  $y' = \frac{y}{b}$  — безразмерные значения скорости и расстояния от оси канала.

Интеграл этого неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами есть

$$u' = C_1 ch(y' Ha) + C_2 sh(y' Ha) + \frac{n}{Ha^2}$$

Из граничных условий  $u' = 0$  при  $y' = \pm 1$  определяются постоянные интегрирования

$$C_1 = -\frac{n}{Ha^2 ch Ha}, \quad C_2 = 0.$$

Таким образом, скорость течения жидкости в канале

$$u' = \frac{n}{Ha^2} \left[ 1 - \frac{ch(y' Ha)}{ch Ha} \right] \quad (110)$$

Из определения средней скорости (для половины канала)

$$u_{cp} = \frac{1}{b} \int_0^b u dy = u_{cp} \int_0^1 u' dy'$$

следует

$$\int_0^1 u' dy' = 1$$

Подставляя в этот интеграл значение  $u'$  из (110), имеем

$$1 = \frac{n}{Ha^2} \left[ 1 - \frac{th(Ha)}{Ha} \right], \quad \frac{n}{Ha^2} = \frac{Ha}{Ha - th Ha^*}$$

Подставляя этот результат в (110), приходим к окончательному выражению для скорости потока

$$u' = Ha \frac{chHa - ch(y'Ha)}{NachHa - shHa} \quad (111)$$

При  $Ha \rightarrow 0$  имеем

$$u' = \frac{3}{2}(1 - y'^2)$$

т. е. предельным профилем скорости в канале для неэлектропроводной жидкости, как и следовало ожидать, является профиль Пуазейля (см. гл. II). Максимальное значение скорости на оси канала (при  $y' = 0$ ) согласно (111) равно

$$u'_m = Ha \frac{Ha(chHa - 1)}{NachHa - shHa} \quad (111a)$$

Профили скорости в поперечном сечении канала при различных значениях чисел  $Ha$ , вычисленные с помощью (111), изображены на рис. 13.9. Усиление магнитного поля приводит к выравниванию (уплощению) профиля скорости. При  $Ha = \infty$  имеем  $u' = u'_m = 1$ . Как видно на рис. 13.9, при больших значениях числа Гартмана течение состоит из ядра постоянной скорости и сравнительно тонкого пограничного слоя.

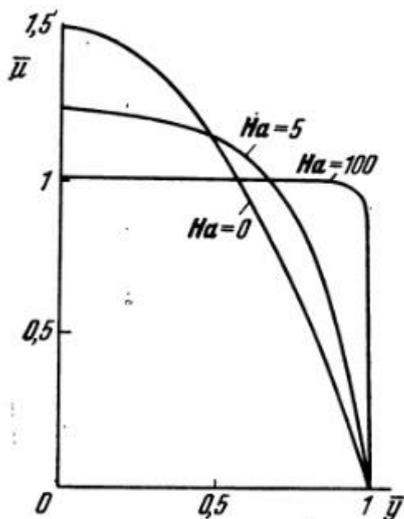


Рис. 13.9. Профили скорости при различных значениях числа Гартмана

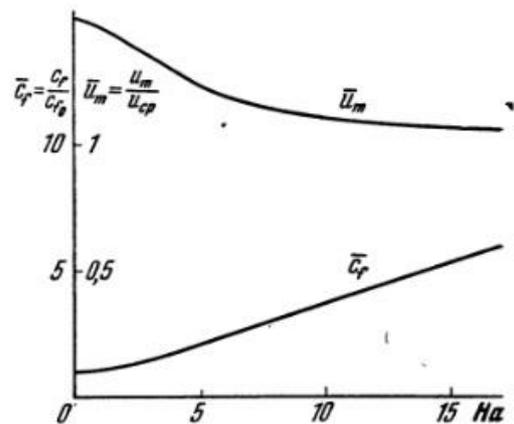


Рис. 13.10. Зависимость максимальной скорости и коэффициента трения от числа Гартмана

Выравнивание профиля скорости с увеличением числа Гартмана ведет к возрастанию градиента скорости у стенки, что вызывает рост силы трения.

Градиент скорости, согласно (111),

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{cp}}{b} \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{u_{cp}}{b} \frac{Ha^2 sh(y'Ha)}{Ha chHa - shHa}$$

Отсюда по формуле Ньютона находим напряжение трения у стенки (при  $y = b$ , т. е.  $y' = 1$ )

$$\tau_w = -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \frac{u_{cp} \mu}{b} \frac{Ha^2 shHa}{Ha chHa - shHa}$$

или в безразмерном виде

$$c_j = \frac{\tau_w}{\frac{\rho u_{cp}^2}{2}} = \frac{2}{R} \frac{Ha^2 shHa}{Ha chHa - shHa} \quad (112)$$

Здесь  $R = \rho u_{cp} b / \mu$  — число Рейнольдса. При  $Ha \rightarrow \infty$  имеем  $c_j \rightarrow \infty$  при  $Ha \rightarrow 0$  из (112) получаем известную формулу Пуазейля

$$c_{j0} = \frac{6}{R} \quad (112a)$$

Поделив почленно (112) и (112a), найдем отношение коэффициентов трения при наличии и отсутствии магнитного поля

$$c'_j = \frac{1}{3} Ha \quad (113a)$$

При больших значениях числа Гартмана ( $Ha \geq 3$ )  $thHa \approx 1$ , поэтому в случае сильного магнитного поля формула (113) принимает следующий вид:

$$c'_j = \frac{1}{3} Ha \quad (113a)$$

Функции (111a) и (113) изображены графически на рис. 13.10. Опыты Гартмана, Лазаруса и Маргетройта подтверждают справедливость найденных выше закономерностей, течения Гартмана.

Изменение давления по длине канала можно найти из равенства (108), при условии что на стенке  $u = u_w = 0$ :

$$A = \frac{\partial p}{\partial x} - u_{cp} \sigma'_R B_0^2 = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w$$

Согласно (111)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{cp}}{b} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{u_{cp}}{b^2} \frac{Ha^3 ch(y'Ha)}{Ha chHa - shHa}$$

У стенки при  $y' = 1$  имеем

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w = - \frac{u_{cp}}{b^2} \frac{Ha^3}{Ha - thHa}$$

Следовательно,

$$A = \frac{\partial p}{\partial x} - u_{cp} \sigma_R B_0^2 = - \frac{\mu u_{cp}}{b^2} \frac{Ha^3}{Ha - thHa}$$

или в безразмерном виде при  $x = x/B$

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{2b}{\rho u_{cp}^2} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{2}{R} \frac{Ha^2 th Ha}{Ha - thHa} \quad (114)$$

Из сопоставления (114) с выражением (112) имеем

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} = -c_j \quad (114a)$$

Этот результат можно получить также исходя из того отмеченного выше факта, что в течении Гартмана суммарная электромагнитная сила равна нулю, вследствие чего изменение давления уравнивается силой трения на стенке

$$2\tau_w dx = -2b \frac{\partial p}{\partial x} dx, \quad \frac{\partial p'}{\partial x'} = -c_j$$

При наличии суммарной электромагнитной силы условие  $I_z = 0$  не выполняется и равенство (114a) несправедливо.

Остановимся теперь на электромагнитных особенностях течения Гартмана. Из закона Максвелла (60) и формулы (106) получаем в проекции на ось  $z$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_B \sigma_R B_0 (u - u_{cp})$$

Так как по условию  $\partial B_y / \partial x = 0$ , то

$$\frac{\partial(Bx/B_0)}{\partial y} = \mu_B \sigma_R B_0 (u_{cp} - u)$$

или в соответствии с (101)

$$\frac{\partial(Bx/B_0)}{\partial y} = R_H(1 - u')$$

Отсюда с учетом (111) имеем

$$\frac{B_x}{B_0} = R_H \left[ y' - \frac{Ha \ y' chHa}{HachHa - shHa} + \frac{sh(y'Ha)}{HachHa - shHa} \right] + c$$

Учитывая граничные условия  $B_x = 0$  при  $y' = 1$  и  $y' = 0$  (при отсутствии суммарного тока индуцируемое магнитное поле вне канала отсутствует), находим, что постоянная  $C = 0$ . В результате получаем

$$\frac{B_x}{B_0} = R_H \left[ \frac{sh(y'Ha) - y'shHa}{HachHa - shHa} \right] \quad (115)$$

Итак, в течении Гартмана возникает магнитная индукция в направлении оси  $x$ , относительная величина которой пропорциональна значению магнитного числа Рейнольдса.

В связи с наличием магнитной индукции  $B_x$  давление по сечению канала переменено. Изменение давления в поперечном направлении можно определить из уравнения движения (82) в направлении оси  $y$ .

В условиях данной задачи ( $u = 0$ ,  $w = 0$ , а также  $\partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$  для всех величин, кроме давления) уравнение движения в проекции на ось  $y$  имеет следующий вид:

$$0 = -\frac{\partial \rho}{\partial y} + j_z B_x$$

или

$$0 = -\frac{\partial \rho}{\partial y} + \sigma_R B_0^2 u_{cp} \frac{B_x}{B_0} (u' - 1)$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\sigma_R B_0^2 u_{cp} \frac{B_x}{B_0} (1 - u')$$

или в безразмерном виде для  $p' = 2p/(\rho u_{cp}^2)$ ,  $y' = y/b$  и  $So$ , определяемого из (97),

Итак, градиент давления в поперечном направлении пропорционален величине критерия магнитогазодинамического взаимодействия  $So$ .

Расчеты, проведенные по формулам (116), (115) и (111), показывают, что поперечный градиент давления значительно меньше продольного  $\partial p/\partial y \ll \partial p/\partial x$ .

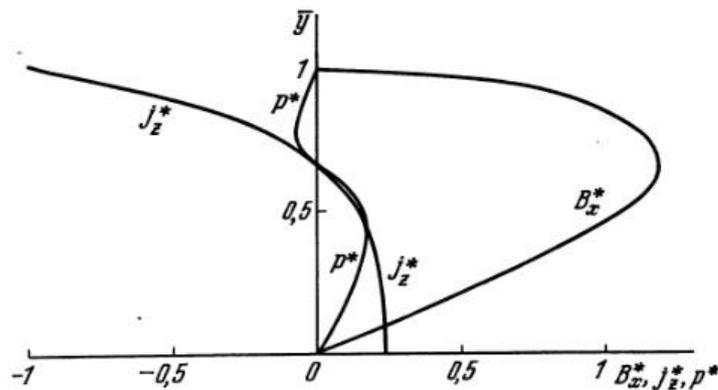


Рис. 13.11. Кривые распределения плотности тока, магнитной индукции и градиента давления в поперечном сечении канала при  $Ha = 5$

На рис. 13.11 изображены кривые распределения безразмерных величин плотности электрического тока  $j_z^*$  магнитной индукции ( $B_x^*$ ) и градиента давления  $p^*$  по высоте канала, рассчитанные соответственно по формулам (106), (111), (115) и (116), при  $Ha = 5$

$$j_z^* = \frac{1}{\sigma_R B_0 u_{cp}} j_z = u' - 1, \quad B_x^* = \frac{1}{R_H} \frac{B_x}{B_0} = \frac{sh(y'Ha) - y'shHa}{HachHa - shHa}$$

$$p^* = \frac{1}{2S_0 R_H} \frac{\partial p'}{\partial y'} = B_x^* j_z^*$$

Здесь  $R_H = \sigma_R \mu_B b u_{cp}$ ,  $S_0 = \frac{\sigma_R B_0^2 b}{\rho u_{cp}}$

## 9.5 Магнитогидродинамические насосы, ускорители, дроссели и генераторы

Электромагнитная сила, которая вызывается электрическим и магнитным полями, приложенными к потоку электропроводящей жидкости, может быть направлена по потоку или против потока. В первом случае электромагнитную силу можно использовать как средство для повышения давления (электромагнитный насос) или как средство для увеличения скорости течения (реактивный двигатель). Во втором случае электромагнитная сила тормозит поток (электромагнитный дроссель)1).

Если электрический ток, индуцируемый магнитным полем в потоке жидкости, направить во внешнюю цепь, то получится магнитогидродинамический генератор тока (МГД-генератор).

Зависимость индуцируемой разности потенциалов от средней скорости потока используется для измерения расхода жидкости (магнитогидродинамический расходомер).

Все эти способы использования электромагнитогидродинамических эффектов можно рассмотреть на примере течения электропроводной жидкости в плоском канале, который помещен в электромагнитное поле; один случай такого течения разобран в предыдущем параграфе (задача Гартмана).

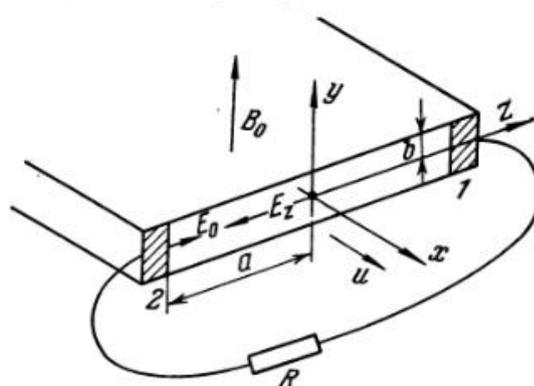


Рис. 13.12. Схема канала с боковыми стенками-электродами

В течении Гартмана предполагалось, что стенки канала являются изоляторами, и суммарный электрический ток, возникающий в направлении, перпендикулярном как к вектору скорости, так и к вектору индукции наложенного магнитного поля, равен нулю, вследствие чего также равна нулю.

Если боковые стенки канала ( $z = \pm a$ ) представляют собой электроды, соединенные с внешней электрической цепью, то электродвижущая сила поддерживает разность потенциалов на этих электродах.

Внутри канала (рис. 13.12) ток течет от электрода 1 к электроду 2, во внешней цепи — в обратном направлении. Средняя плотность тока в канале согласно (104)

$$j_{zcp} = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b j_z dy = \sigma_R (-E_0 + u_{cp} B) \quad (117)$$

а местная плотность тока

$$j_z = \sigma_R (-E_0 + u B_0). \quad (117a)$$

Для течения Гартмана ( $j_{zcp} = 0$ ) из сопоставления (104) и (117) получаем известное уже равенство (105)

$$-E_z = E_0 = u_{cp} B_0$$

Если электроды замкнуты накоротко (сопротивление внешней цепи  $R = 0$ ), то напряженность электрического тока равна нулю ( $E_0 = 0$ ) и плотность тока

$$j_{zcp} = \sigma_R u_{cp} B_0$$

В этом случае к потоку согласно (107) приложена тормозящая электромагнитная сила

$$F_x = -j_{zcp} B_0 = -\sigma_R u_{cp} B_0^2$$

В общем случае выражение (117) удобно представить в следующем виде:

$$j_{zcp} = \sigma_R B_0 (u_{cp} - W_d) \quad (118)$$

,

где вычитаемое  $W_d = E_0/B_0$  есть скорость дрейфа.

Для того чтобы канал работал на режиме МГД-генератора ( $j_z > 0$ ), нужно, чтобы средняя скорость потока была больше скорости дрейфа; в случае работы канала на режиме насоса или ускорителя ( $j_z < 0$ ) средняя скорость в канале меньше скорости дрейфа. Знак плотности тока определяет и направление электромагнитной силы. На основании (107) заключаем, что в МГД-генераторе электромагнитная сила направлена против потока ( $F_x < 0$ ), а в насосе и ускорителе — по потоку ( $F_x > 0$ ); градиент давления по длине канала (без учета трения) в МГД-генераторе должен быть отрицательным ( $\partial p / \partial x < 0$ ), а в насосе или ускорителе — положительным ( $\partial p / \partial x > 0$ )<sup>1</sup>.

Во всех рассматриваемых в данном параграфе аппаратах, использующих движение несжимаемой жидкости по плоскому каналу постоянного сечения, пригодно уравнение движения (108), которому с помощью (105) можно придать следующий вид:

$$A = \frac{\partial p}{\partial x} - \sigma_R E_0 B_0 = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sigma_R u B_0^2 \quad (119)$$

Уравнение (119) тождественно уравнению (108а), решение которого получено в предыдущем параграфе. В связи с этим профиль относительной скорости в поперечном сечении канала  $u'$  ( $y'$ ) и относительное значение коэффициента трения  $c'_j$  не зависят от величины  $E_0$  и описываются во всех случаях соответственно уравнениями (111) и (113).

Подставляя в (119) значение  $A$ , найденное в § 6 для течения Гартмана, приходим к выражению для градиента давления в направлении течения

$$\frac{\partial p}{\partial x} = A + \sigma_R E_0 B_0 = -\frac{\mu u_{cp}}{b^2} \frac{Ha^3}{Ha - thHa} + \sigma_R E_0 B_0 \quad (120)$$

Как видим, в случае электромагнитного насоса ( $\partial p / \partial x > 0$ ) напряженность электрического поля должна быть достаточно велика для того, чтобы правая часть (120) оказалась положительной.

В МГД-генераторе ( $\partial p / \partial x < 0$ ) напряженность электрического поля должна быть такой, чтобы знак правой части (120) был отрицательным.

При постоянных электрическом и магнитном полях во всех электромагнитогидродинамических аппаратах, в которых жидкость течет по каналу постоянного сечения, градиент давления по длине канала не изменяется, следовательно, перепад давления в канале длиной  $x$

$$\Delta p = x \frac{\partial p}{\partial x} = x \left( \sigma_R E_0 B_0 - \frac{\mu u_{cp}}{b^2} \frac{Ha^3}{Ha - thHa} \right) \quad (121)$$

Используя выражения (97) и (98), получаем из (121) безразмерную величину перепада давления

$$\frac{2\Delta p}{\rho u_{cp}^2} = 2 \frac{x}{b} S_0 \left( \frac{1}{\Pi} - \frac{Ha}{Ha - thHa} \right) \quad (122)$$

В насосе или ускорителе ( $\Pi < 1$ ) вычитаемое в скобке меньше уменьшаемого, а в МГД-генераторе ( $\Pi > 1$ ) — наоборот.

Для течения Гартмана ( $\Pi = 1$ ) имеем с учетом (112)

## 9.6 Вход потока электропроводной жидкости в магнитное поле и выход из него

Около концов электродов электрическое поле неоднородно, в связи с чем плотность электрического тока в этих местах изменяется по величине и направлению.

Рассмотрим поток электропроводной жидкости в зоне входа в участок канала с магнитным полем (рис. 13.13). Обозначим высоту канала (расстояние между электродами)  $2a$ , а ширину канала  $2b$ . Течение в канале будем считать двумерным, что допустимо при условии  $b > a$ . Начало электродов находится в плоскости  $x = 0$ ; при  $x < 0$  стенки канала неэлектропроводны.

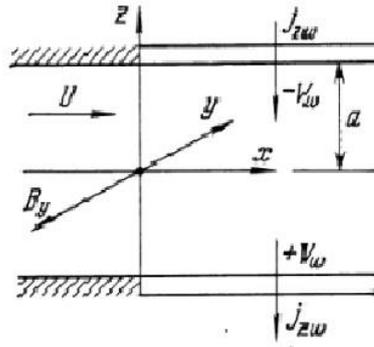


Рис. 13.13. Схема течения при входе в участок канала с магнитным полем

Магнитное поле в области  $x < 0$  отсутствует ( $B = 0$ ), а в области  $x > 0$  оно постоянно и ориентировано по оси  $y$  в отрицательном направлении ( $B_x = 0, B_y = B < 0, B_z = 0$ ), т. е. перпендикулярно к плоскости рис. 13.13.

Вязкость жидкости не принимается во внимание, так что поток при  $x = -\infty$  является равномерным (скорость  $W$  постоянна и направлена вдоль оси  $x$ ). Магнитное число Рейнольдса полагаем малым ( $R_H \ll 1$ ).

Жидкость для простоты считаем несжимаемой ( $\rho = \text{const}$ ), а течение установившимся.

Около концов электродов линии электрического тока деформируются и вызывают возмущение поля скорости:

$$u = U + u', \quad w = w' \quad (123)$$

Дополнительные скорости (возмущения)  $u', w'$  по осям  $x$  и  $z$  считаем малыми относительно начальной скорости  $W$ , т. е.  $u' \ll W, w' \ll W$ .

Данную задачу можно решить методом последовательных приближений. В первом приближении уравнения движения (82) вдоль осей  $x$  и  $z$  имеют следующий вид:

$$\rho W \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = -j_z B, \quad \rho W \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = j_x B \quad (124)$$

Составляющие плотности электрического тока в первом приближении (при  $W = \text{const}$ ) согласно (87) определяются как

$$j_x = \sigma_R E_x, \quad j_z = \sigma_R (E_z + WB) \quad (125)$$

Здесь  $B = 0$  при  $x < 0, B = \text{const} < 0$  при  $x > 0$ .

Если на участке  $x > 0$  в достаточном удалении от сечения  $x = 0$  стенки ( $z = \pm a$ ) электроизолировать, то поперечная составляющая тока у стенок будет равна нулю

$$j_{zw} = \sigma_R(E_{zw} + WB) = 0$$

Отсюда имеем

$$E_{zw} = -\frac{\partial V}{\partial z} = -WB > 0$$

или в случае  $B < 0$

$$\frac{\partial V}{\partial z} < 0$$

Следовательно, положительные заряды скапливаются у нижней стенки канала, а отрицательные — у верхней стенки. Если изолированные стенки заменить электродами, то нижний электрод будет положительным, а верхний — отрицательным. Соединив электроды внешней цепью, мы получим в ней электрический ток, идущий от положительного электрода к отрицательному.

В случае стационарного двумерного электрического поля, согласно (25), имеем

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \quad (126)$$

Отсюда в нулевом приближении получаем с помощью (125) уравнение для поля электрической напряженности

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (127)$$

справедливое при  $W = \text{const}$  и  $B = B(x)$  во всей области течения ( $-\infty < x < \infty$ ).

Вводя в (127), согласно (12), электрический потенциал  $V$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

получаем уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (128)$$

Граничные условия в зоне расположения электродов ( $x > 0$ )

$$Z = \pm a, \quad V_a = \pm V_w \quad (129)$$

Значение потенциала на электроде ( $V_w$ ) при высокой проводимости последнего практически постоянно.

В зоне изолированных стенок ( $x < 0$ ) граничные условия записываются в виде

$$z = \pm a, \quad E_{zw} = j_{zw} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_w = 0. \quad (130)$$

Решение уравнения Лапласа (128), удовлетворяющее граничным условиям (129) и (130), может быть представлено в виде

$$V = V_w \frac{\bar{x}'^2}{a \pi} \quad (131)$$

где

$$\bar{x}' = \arcsin \left[ \pm \sqrt{\frac{e^{2\bar{x}} + 1}{2} - \sqrt{\frac{(e^{2\bar{x}} + 1)^2}{4} - e^{2\bar{x}} \cos^2 \eta}} \right] \quad (132)$$

$$\bar{x} = \frac{x}{2a} \pi, \quad \eta = \frac{z + a}{2a} \pi \quad (133)$$

Знак плюс в (132) соответствует значениям  $\pi > \eta > \pi/2$ , минус — значениям  $\pi < \eta < \pi/2$ .

В справедливости решения (132) можно убедиться, подставив его в уравнение Лапласа (128), которое в переменных (133) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \bar{x}'}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{x}'}{\partial \eta^2} = 0 \quad (134)$$

Заменим в выражениях (125) для составляющих плотности тока компоненты напряженности электрического поля ( $E_x, E_z$ ) производными электрического потенциала ( $dV/dx, dV/dz$ ) воспользовавшись выражениями (131) и (133):

$$j_x = -\sigma_R \frac{\partial V}{\partial x} = \pm \frac{\sigma_R V_w}{a} \frac{\partial \bar{x}'}{\partial x}$$

$$j_z = \sigma_R \left[ -\frac{\partial V}{\partial z} + WB \right] = \sigma_R \left[ \frac{V_w}{a} \left( \mp \frac{\partial x'}{\partial \eta} \right) + WB \right] \quad (135)$$

При выбранных знаках поперечная составляющая плотности тока  $j_z$ , обусловленная электрическим полем, как было указано, направлена снизу вверх ( $\partial V / \partial z < 0$ ). Продольная составляющая плотности тока  $j_x$  в верхней части канала положительна, а в нижней отрицательна; на оси канала  $j_x = 0$ .

Поперечный компонент плотности тока  $j_z$  внутри канала на участке с электродами в зоне  $x \rightarrow \infty$  (где  $B < 0$ ) направлен от отрицательного электрода к положительному (сверху вниз), так как здесь доминирует ток, индуцируемый магнитным полем; на участке изолированных стенок ( $B = 0$ ) индуцируемого магнитным полем тока нет, и поэтому здесь вектор  $j_z$  имеет противоположное направление (снизу вверх). Таким образом, при входе жидкости в магнитное поле возникает зона замкнутой циркуляции электрического тока, в которой последний меняет свое направление на противоположное.

Поле плотности электрического тока ( $j = \sqrt{j_x^2 + j_z^2}$ ) рассчитанное с помощью формул (135) для случая  $aWB / V_w = 2$ , изображено на рис.13.14

Используя уравнения движения (124), можно найти изменение среднего по площади статического давления по длине канала. Интегрируя первое из уравнений (124) в пределах от  $-a$  до  $+a$

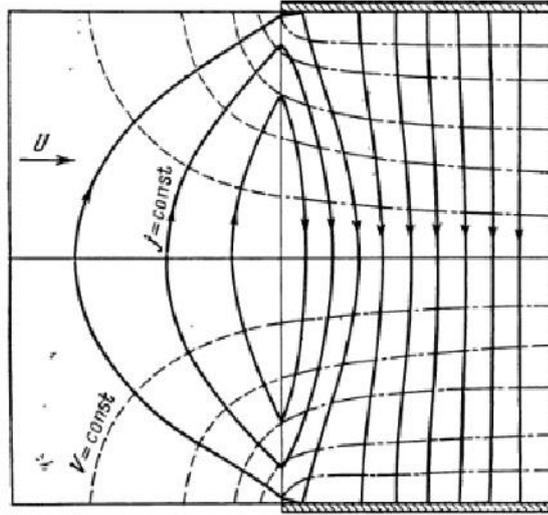


Рис. 13.14. Линии равных значений потенциала и плотности тока при входе потока в магнитное поле

и деля все его члены на  $2a$ , получаем

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \rho W \frac{\partial u'}{\partial x} dz = -\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \frac{\partial p}{\partial x} dz - \frac{B}{2a} \int_{-a}^a j_z dz \quad (136)$$

Перепишем уравнение (136) в виде

$$\frac{\rho W}{2a} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a}^a u' dz = -\frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a}^a p dz - \frac{B}{2a} \int_{-a}^a j_z dz \quad (136a)$$

Введем обозначения

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a p dz = p_{cp}, \quad \frac{1}{2a} \int_{-a}^a j_z dz = j_{zcp} \quad (137)$$

Учитывая, что из условия неразрывности следует

$$\int_{-a}^a u' dz = 0$$

Из уравнения (136a) имеем

$$\frac{\partial p_{cp}}{\partial x} = -B j_{zcp} \quad (138)$$

При  $x < 0$   $B = 0$ , поэтому  $p_{cp}$  на участке  $-\infty < x < 0$  по длине не изменяется. Вычислим  $\frac{\partial p_{cp}}{\partial x}$  на участке расположения электродов ( $x > 0$ ).

Используя соотношения (135) и (132), найдем среднее по сечению значение составляющей плотности тока  $j_{zcp}$

$$j_{zcp} = \sigma_R \left[ \mp \frac{V_w}{\pi a} \int_0^\pi \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \eta} d\eta + WB \right]$$

Очевидно, что интеграл  $\int_0^\pi \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \eta} d\eta$  равен разности значений функции  $x'$  в точках  $\pi$  и  $0$ , т. е.

$$\mp \int_0^\pi \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \eta} d\eta = \pi$$

Следовательно,

$$j_{zcp} = \sigma_R \left[ \frac{V_w}{a} + WB \right]$$

т. е. среднее по сечению значение составляющей тока  $j_{zcp}$  на участке расположения электродов не изменяется. Используя соотношение (139), из уравнения (138) находим

$$\frac{\partial p_{cp}}{\partial x} = -B\sigma_R \left[ \frac{V_w}{a} + WB \right]$$

Итак, оказывается, что градиент среднего давления  $\partial p_{cp}/\partial x$  по длине канала (при  $x > 0$ ) является постоянной величиной. Обозначив  $p_0$  среднее значение статического давления в сечении  $x = 0$ , окончательно имеем при  $x > 0$

$$p_{cp} - p_0 = -B\sigma_R \left[ \frac{V_w}{a} + WB \right] x \quad (140)$$

Используя электрическое поле первого приближения, можно -определить поле скорости первого приближения, для чего следует обратиться к уравнениям движения (124)).

Мы рассмотрели вопрос о течении жидкости на участке, расположенном непосредственно перед входом в канал с магнитным полем.

Аналогичным образом решается задача о выходе потока жидкости из магнитного поля, однако в этом случае при использовании тех же уравнений следует знак переменной  $x$  изменить на обратный.

Решение уравнения Лапласа (134) для случая выхода из поля представим в виде

$$V = V_w \frac{x''}{a} \quad (141)$$

где  $\bar{x}'' = x'' \setminus a$  определяется по (132) путем замены знака перед  $\bar{x}$ :

$$\bar{x}'' = \arcsin(\mp \left[ \pm \sqrt{\frac{e^{-2\bar{x}+1}}{2}} - \sqrt{\frac{(e^{-2\bar{x}+1})^2}{4} - e^{-2\bar{x}} \cos^2 \eta} \right]) \quad (142)$$

При этом в качестве граничных применяются условия

$$\bar{x} < 0; V = \pm V_w \quad \text{для } \eta = 0; \pi;$$

$$\bar{x} > 0; \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \eta} = 0 \quad \text{для } \eta = 0; \pi;$$

Учитывая связь между производными финиций  $\bar{x}''$  и  $\bar{x}'$

$$\frac{\partial \bar{x}''}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \bar{x}'}{\partial \bar{x}}, \quad \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \eta}$$

находим, что направление поперечной составляющей плотности тока остается таким же, как и на участке входа в поле, а направление продольной составляющей плотности тока изменяется на обратное:

$$j_x < 0 \text{ при } \eta > \frac{\pi}{2}, \quad j_x > 0 \text{ при } \eta < \frac{\pi}{2}$$

Знак продольного градиента давления остается прежним (отрицательным), иначе говоря, как выход потока из магнитного поля, так и вход в него сопровождаются падением давления (сопротивлением). Направления поперечных градиентов давления при выходе и входе потока жидкости в магнитное поле противоположны.

## 9.7 Уравнения магнитной газовой динамики для единичной струйки

Понятие «единичная струйка» в магнитной гидрогазодинамике не имеет такого универсального применения, как в обычной газовой динамике, ибо лишь в немногих случаях можно считать неизменными в поперечном сечении

струи величины и направления векторов электрической напряженности и магнитной индукции, а вместе с ними и векторов плотности тока и электромагнитной силы.

Приведем два примера магнитогазодинамических течений, в которых концепция единичной струйки строго справедлива:

1. Канал постоянного сечения  $z = \pm a$ , образованный двумя параллельными стенками, по которому в направлении  $x$  движется электропроводный газ; стенки канала являются разноименными электродами бесконечной проводимости, вязкость и теплопроводность не учитываются.

Если на стенках поддерживается разность потенциалов, то возникает электрический ток  $j_z$ , индуцирующий «собственное» магнитное поле, линии напряженности которого по правилу буравчика направлены перпендикулярно к плоскости течения (по оси  $y$ ).

Течение в таком канале эквивалентно течению единичной струйки, находящейся в постоянных скрещенных электромагнитных полях  $W(u, 0, 0)$ ,  $E(0, 0, E_z)$ ,  $B(0, B_y, 0)$ ,  $f(f_x, 0, 0)$ .

2. Равномерное течение газа перед и за прямой магнитогазодинамической волной (с линиями магнитной индукции, перпендикулярными к направлению течения). Этот случай подробно рассматривается в § 10.

Запишем уравнения магнитной газовой динамики для единичной струйки газа, пренебрегая вязкостью и теплопроводностью жидкости. Будем считать движение жидкости установившимся, магнитное поле — стационарным, а вектор  $[E \times B]$ , определяющий работу электромагнитной силы (см. (94)), — направленным параллельно вектору скорости  $W$ . В этом случае поток вектора  $[E \times B]$  направлен по нормали к поперечному сечению струйки.

Как известно из теории поля,

$$\operatorname{div}[E \times B] = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_S [E \times B] n dS$$

где  $\Delta v$  — объем, охватываемый замкнутой поверхностью  $S$ , сквозь которую проходит поток вектора  $[E \times B]$ ,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$ . В нашем случае, при малой протяженности объема  $\Delta v$ , имеем

$$\int_S [E \times B] dS = \Delta([E \times B]_l F)$$

Здесь  $F$  — площадь поперечного сечения трубки тока, индекс  $l$  указывает на то, что берется проекция вектора  $[E \times B]$  на линию тока. Объем участка трубки тока длиной  $dl$  равен  $dv = F dl$  поэтому

$$\text{div}[E \times B] = \frac{1}{F} \frac{d}{dl} [(E \times B)_l F]$$

Подставляя это выражение в уравнение энергии (94)' и учитывая, что  $W = dl \frac{d}{dt}$  получаем

$$\rho W F \frac{di^*}{dl} = - \frac{1}{\mu_B} \frac{d}{dl} [(E \times B)_l F]$$

Так как секундный расход жидкости

$$\rho W F = G_{cek} = const$$

вдоль трубки тока не изменяется, то после интегрирования имеем

$$\rho W F i^* + \frac{1}{\mu_B} [(E \times B)_l F] = const$$

Отсюда получаем эффективное значение полного теплосодержания

$$i_c^* = i^* + \frac{[E \times B]_l}{\mu_B \rho W} = const \quad \text{или} \quad i_c^* = i + \frac{[E \times B]_l}{\mu_B \rho W} + \frac{W^2}{2} = const \quad (143)$$

Итак, эффективное значение полного теплосодержания  $i_B^*$  включающего электромагнитную энергию, остается вдоль трубки тока постоянным, если поток электромагнитной энергии направлен вдоль вектора скорости.

В случае  $E = 0$  или при параллельности векторов напряженностей электрического и магнитного полей ( $E \parallel B$ ) уравнение (143) выражает условие постоянства полного теплосодержания для энергетически изолированной струйки = сопз\*. С помощью уравнений (54) и (61) можно исключить вектор  $E$  из уравнения энергии. В самом деле,

$$E = (v_H \text{rot} B - [W \times B]),$$

откуда

$$[E \times B] = (V_H [\text{rot} B \times B] - \{[W \times B] \times B\}).$$

В проекции на направление линии тока получаем

$$[E \times B]_x = \{V_H [\text{rot} B \times B]_x + u(B_y^2 + B_z^2)\}$$

Здесь предполагается, что ось  $x$  направлена вдоль струйки ( $v = w = 0$ ).

Подставляя последнее выражение в (143), получаем уравнение энергии для струйки при условии  $E_{\perp} \perp W$ ,  $B_{\perp} \perp W$

$$i_c^* = i^* + \frac{v_H}{\mu_B \rho W} [\text{rot} B \times B]_x + \frac{B^2}{\mu_B \rho} = \text{const} \quad (144)$$

Ввиду того что в поперечном сечении единичной струйки все параметры принимаются постоянными ( $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ ), выражение (144) можно упростить. В самом деле, в данном случае ( $V = w = B_x = B_z = E_x = E_y = 0$ , т. е.  $W = u$ ,  $B = B_y$ ,  $E = E_z$ ) составляющие ротора магнитной индукции

$$\text{rot}_x B = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0,$$

$$\text{rot}_y B = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0, \quad \text{rot}_z B = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

и составляющая векторного произведения

$$[\text{rot} B \times B]_x = (\text{rot}_y B) B_z - (\text{rot}_z B) B_y = -B \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{dB^2}{dx} \quad (145)$$

Подставляя это выражение в (144), приходим к следующему виду уравнения энергии для струйки, находящейся в перпендикулярных (скрещенных) электромагнитных полях

$$i_c^* = i^* + \frac{v_H}{\mu_B \rho W} \frac{dB}{dx} + \frac{B^2}{\mu_B \rho} = \text{const} \quad (146)$$

Если газ обладает очень высокой проводимостью ( $\sigma_R \rightarrow \infty$ ,  $v_H \rightarrow 0$ ), последним членом в уравнении (146) можно пренебречь, и тогда условие сохранения эффективного полного теплосодержания для струйки в скрещенных полях запишется так:

$$i_c^* = i^* + \frac{B^2}{\mu_B \rho} = \text{const} \quad (146a)$$

Уравнение магнитной индукции (84) применительно к единичной струйке также существенно упрощается.

При поперечных электромагнитных полях ( $B_x = B_z = E_x = E_y = v = w = d/dy = d/dz = 0$ ,  $W = u$ ,  $B = B_y$ ,  $E = E_r$ ,  $j = j_z$ ) в рассматриваемом случае в уравнении (54) сохраняется только одна составляющая плотности тока

$$j_z = \sigma_R (E_z + u B_y);$$

из уравнения Максвелла (68a) для стационарного поля ( $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ ) следует

$$\mathbf{E} = E_z = \text{const}$$

а из уравнения Максвелла (65), как уже было показано, имеем

$$j_z = \frac{1}{\mu_B} \text{rot}_z B = \frac{1}{\mu_B} \frac{dB_y}{dx}$$

Отсюда получаем уравнение индукции для струйки в поперечных скрещенных полях

$$u B_y = \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \frac{dB_y}{dx} + \text{const} \quad (147)$$

где

$$\text{const} = -E_z$$

Если проводимость газа очень велика ( $\sigma_R \rightarrow \infty$ ), то уравнение магнитной индукции для единичной струйки, находящейся в поперечном магнитном поле, приобретает особенно простой вид

$$u B_y = \text{const} \quad (147 \text{ a})$$

В случае невязкой несжимаемой жидкости ( $\mu = 0$ ,  $\rho = \text{const}$ ) можно вместо (90) получить другую форму уравнения энергии для единичной струйки. Используем для этой цели уравнение движения (82a), которое в проекции на направление струйки ( $W = u$ ,  $v = w = 0$ ) при поперечном магнитном поле ( $\mathbf{B} = B_y$ ,  $B_x = B_z = 0$ ) имеет следующий вид:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left( p + \frac{B^2}{2\mu_B} \right) \quad (148)$$

Интегрируя (148), получаем

$$p_c^* = p + \rho \frac{u^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_B} = const$$

или

$$p_c^* = p^* + \frac{B^2}{2\mu_B} = const \quad (149a)$$

Уравнение (149) представляет собой уравнение Бернулли для струйки несжимаемой электропроводной жидкости, находящейся в поперечном магнитном поле. Третий член этого уравнения называется **магнитным давлением** =  $p_m = \frac{B^2}{2\mu_B}$ . При сложении  $p_m$  с полным давлением  $p^*$  получается эффективное полное  $p_c^*$  давление, сохраняющее в данном случае постоянное значение по длине струйки.

При действии на струйку продольного магнитного поля ( $B = B_x, B_y = B_z = 0$ ) интегрирование уравнения (82a) приводит к уравнению Бернулли обычного (гидравлического) вида

$$p + \rho \frac{u^2}{2} = p^* = const$$

так как при этом

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{B^2}{2\mu_B} \right) + \frac{1}{\mu_B} B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

Составим уравнение количества движения для струйки, находящейся в электромагнитных полях. В гл. I была получена общая форма уравнения количества движения для единичной струйки, справедливая для всех случаев движения:

$$P_x = G(u_2 - u_1)$$

Учет воздействия магнитного поля состоит в том, что проекцию равнодействующей всех сил  $P_x$  мы разбиваем на две части:

$$P_x = P_{xp} + P_{xm},$$

где  $P_{xp}$  — проекция равнодействующей всех гидродинамических сил;  $P_{xm}$  — проекция электромагнитной объемной силы, приложенной на участке струйки  $1 — 2$ .

Проекция электромагнитной силы, приложенной к единице объема согласно (72),

$$f_x = [j \times B]_x = \frac{1}{\mu_B} [\text{rot } B \times B]_x$$

Проекция на ось  $x$  силы, действующей на элементарный объем, составляет

$$dP_{xm} = f_x F dx$$

Здесь  $F$  — площадь поперечного сечения струйки,  $dx$  — длина ее элементарного участка (в направлении вектора скорости  $\mathbf{u}$ ).

Проекция электромагнитной силы, действующей на участок струйки  $1 — 2$ ,

$$P_{xm} = \int_1^2 \frac{F}{\mu_B} [\text{rot } B \times B]_x dx$$

В случае поперечного магнитного поля этот интеграл можно преобразовать с помощью (145):

$$P_{xm} = -\frac{1}{2\mu_B} \int_1^2 F dB^2 \quad (150)$$

Электромагнитная сила, приложенная к конечному участку элементарной струйки постоянного сечения при поперечном магнитном поле, равна

$$P_{xm} = \frac{F}{2\mu_B} (B_1^2 - B_2^2) \quad (150a)$$

Сила гидродинамического давления в этом случае составляет

$$P_{xm} = F(p_1 - p_2)$$

Поэтому уравнение количества движения для элементарной струйки постоянного сечения при поперечном магнитном поле имеет следующий вид:

$$P_{xp} + P_{xm} = G(u_2 - u_1)$$

Отсюда согласно уравнению неразрывности ( $G = \rho u F = const$ ) имеем

$$p_1 - p_2 + \frac{(B_1^2 - B_2^2)}{2\mu_B} = \rho_1 u_1 (u_2 - u_1) = \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 \quad (151)$$

Вводя в уравнение (151) эффективное давление, равное сумме гидродинамического и магнитного давлений

$$p_c = p + p_m = p + \frac{B^2}{2\mu_B} \quad (152)$$

приводим уравнение количества движения для единичной струйки постоянного сечения при поперечном магнитном поле к следующему простейшему виду:

$$p_{c1} + \rho_1 u_1^2 = p_{c2} + \rho_2 u_2^2 \quad (153)$$

Иногда удобно уравнение количества движения для струйки постоянного сечения при поперечном магнитном поле представлять в следующем виде:

$$p + \frac{B^2}{2\mu_B} + \rho u^2 = const \quad (154)$$

Уравнение количества движения (154) в отличие от уравнения Бернулли (149) пригодно не только для несжимаемых жидкостей, но также и для газов, т. е. для сред переменной плотности.

## 9.8 Магнитогазодинамические ударные волны и слабые возмущения

Если в пространстве, заполненном газом бесконечно большой проводимости, возникла волна магнитной индукции  $ab$  (рис. 13.15), то, как будет показано далее, скорость ее распространения выше в тех местах, где больше значение магнитной индукции  $B$ .

Поэтому зона  $a$  у «вершины» волны перемещается быстрее, чем зона  $b$ , расположенная у «подножия» волны. Это приводит к тому, что при

перемещении в сторону меньшей напряженности поля (вправо на рис. 13.15), куда данная волна распространяется как волна сгущения, она со временем приобретает все более крутую форму, пока не превратится в скачок магнитной индукции.

При распространении в сторону большей напряженности поля (влево на рис. 13.15) волна *ab* является волной «разрежения магнитного поля», причем по-прежнему скорость ее продвижения в зоне *a* выше, чем в зоне *b*, отчего волна разрежения постепенно сглаживается и ослабляется.

Исследуем особенности скачка сгущения — ударной волны — магнитного поля. Ввиду сложности теории магнитогазодинамических волн мы ограничимся простейшим примером — прямой магнитогазодинамической ударной волной.

Пусть фронт скачка магнитной индукции *B* расположен перпендикулярно к направлению газового потока (рис. 13.16).

Сообщим невозмущенному потоку газа скорость  $u_n$ , равную по величине скорости распространения скачка  $w_b$ , но противоположную по знаку:

$$u_n = -w_b.$$

В этом случае фронт скачка будет неподвижен, а поток невозмущенного газа будет натекать на плоскость фронта со скоростью  $u_n$ .

Пусть (рис. 13.16) вектор магнитной индукции перпендикулярен к направлению течения  $B = (0, B_y, 0)$ , т. е. фронт скачка

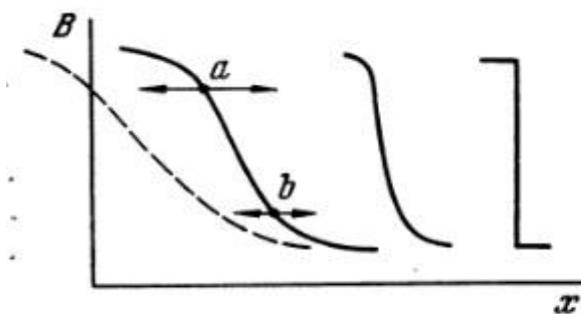


Рис. 13.15. Образование скачка сгущения и плавной волны разрежения в поле магнитной индукции

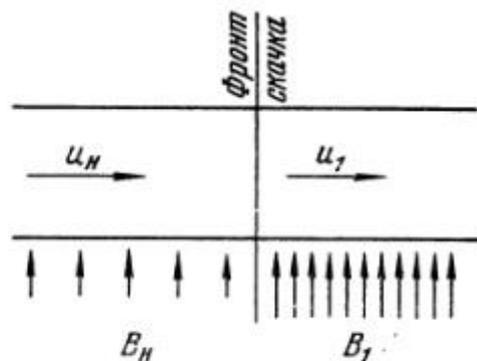


Рис. 13.16. Магнитогазодинамическая прямая ударная волна

представляет собой тангенциальный разрыв потока магнитной индукции. Будем также считать, что до и после скачка значения магнитной индукции постоянны ( $B_H = \text{const}$ ,  $B_I = \text{const}$ ). Так как проводимость среды бесконечна, то к струйке жидкости применима зависимость (147а), найденная в § 9:

$$u_H B_H = u_I B_I = \text{const} \quad (155)$$

Иначе говоря, скачкообразное возрастание магнитной индукции ( $B_I > B_H$ ) требует скачкообразного уменьшения скорости течения ( $u_I < u_H$ ).

При этом, согласно уравнению неразрывности, произойдет также скачок плотности газа ( $\rho_1 > \rho_H$ )

$$\frac{\rho_1}{\rho_H} = \frac{u_H}{u_I} \quad (156)$$

и в соответствии с уравнением количества движения (151) скачок эффективного давления

$$p_{c1} - p_{cH} = \rho_H u_H (u_H - u_I) \quad (157)$$

Поэтому согласно (155) и (156) плотность в скачке должна возрастать.

Итак, скачок магнитной индукции в газовом потоке, пересекающем линии индукции, обязательно совместится со скачком уплотнения, т. е. мы имеем дело с магнитогазодинамической ударной волной.

Для замыкания системы уравнений (155) — (157) добавим условие сохранения эффективного полного теплосодержания (146а), которое согласно (155) и (156) запишем в виде

$$i_c^* = i + \frac{u^2}{2} + \frac{B_H^2 u_H}{\mu_B \rho_H u} = \text{const} \quad (158)$$

и уравнение состояния

$$\frac{p_H}{\rho_H T_H} = \frac{p_1}{\rho_1 T_1} = R \quad (159)$$

Решая совместно систему из пяти уравнений (155) — (159), можно по заданным значениям скорости распространения прямой магнитогазодинамической волны ( $w_b = -u_H$ ) и параметров состояния газа и магнитного поля перед фронтом волны ( $\rho_H$ ,  $p_H$ ,  $T_H$ ,  $B_H$ ) найти значения

относительной скорости газа ( $u_1$ ) и параметров газа и поля ( $\rho_1, p_1, T_1, B_1$ ) за фронтом волны.

Если известны параметры состояния невозмущенного газа и прирост давления в скачке, то нетрудно определить скорость распространения магнитогазодинамической волны.

Из уравнений (157) и (156) получаем

$$p_{c1} - p_{cH} = u_H^2 (\rho_1 - \rho_H) \frac{\rho_H}{\rho_1} \quad (160)$$

откуда следует, что скорость распространения ударной магнитогазодинамической волны в покоящемся газе ( $w_b$ ) или равная ей по величине скорость потока, которая останавливает встречную волну ( $u_H$ ), составляет

$$u_b^2 = u_H^2 = \frac{p_{c1} - p_{cH}}{\rho_1 - \rho_H} \frac{\rho_1}{\rho_H} \quad (160a)$$

Из (160a) следует также

$$u_H u_1 = \frac{p_{c1} - p_{cH}}{\rho_1 - \rho_H} \quad (161)$$

Формулы (160a) и (161) отличаются от соответствующих формул (5) и (10) гл. III для обычной ударной волны только тем, что в них давление ( $p$ ) газа заменено эффективным давлением ( $p_c$ ).

Представим на основании (83) эффективное давление в виде суммы гидродинамического и магнитного давлений

$$p_c = p + p_m = p + \frac{\rho_1}{\rho_H} \frac{B^2}{2\mu_B}$$

Тогда формулы (160a) и (161) примут вид

$$w_b^2 = u_H^2 = \frac{p_1 - p_H}{\rho_1 - \rho_H} \frac{\rho_1}{\rho_H} + \frac{B_1^2 - B_H^2}{2\mu_B(\rho_1 - \rho_H)} \frac{\rho_1}{\rho_H} \quad (162)$$

$$u_H u_1 = \frac{p_1 - p_H}{\rho_1 - \rho_H} + \frac{B_1^2 - B_H^2}{2\mu_B(\rho_1 - \rho_H)} \quad (163)$$

Магнитная индукция за фронтом волны больше, чем перед ним ( $B_1 > B_H$ ), поэтому магнитогазодинамическая волна (162) распространяется быстрее, чем обычная волна сжатия той же интенсивности.

Из уравнений магнитной индукции (155) и неразрывности (156) имеем

$$\frac{B_1}{\rho_1} = \frac{B_H}{\rho_H} \quad (164)$$

Подставляя это отношение в (162), приходим к следующему выражению для скорости магнитогазодинамической ударной волны:

$$w_b^2 = \frac{p_1 - p_H}{\rho_1 - \rho_H} \frac{\rho_1}{\rho_H} + \frac{B_H^2}{2\mu_B \rho_H} \left( \frac{\rho_1}{\rho_H} + 1 \right) \frac{\rho_1}{\rho_H} \quad (165)$$

В предельном случае очень слабого разрыва ( $p_1 \approx p_H, \rho_1 \approx \rho_H, B_1 \approx B_H$ ) получаем скорость его распространения в направлении, перпендикулярном к линиям напряженности магнитного поля:

$$w_b^2 = c_{dc}^2 = \frac{dp}{d\rho} + \frac{B^2}{\mu_B \rho} = k \frac{p}{\rho} + 2 \frac{p_m}{\rho} \quad (166)$$

Здесь первое слагаемое правой части есть квадрат скорости звука в газе ')

$$a_H^2 = \frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho} \quad (167)$$

а второе слагаемое — квадрат скорости распространения волны Альфвена

$$b_H^2 = \frac{B_H^2}{\mu_B \rho_H} = 2 \frac{p_m}{\rho} \quad (168)$$

Отношение скорости волны Альфвена к скорости газа равна введенному в § 5 числу Альфвена (см. (96))

$$A = \frac{b_H}{u_H} = \frac{B_H}{u_H \sqrt{\mu_B \rho_H}} \quad (169)$$

Из (167)—(169) получаем

$$q = \frac{p_m}{\rho} = \frac{k}{2} M^2 A^2 \quad (170)$$

В магнитной газодинамике доказывается, что волна Альфвена распространяется со скоростью  $b_H$  вдоль силовых линий магнитного поля ( $b_H \parallel B_H$ ) в газе бесконечно большой проводимости ( $\sigma_R \rightarrow \infty$ ) и представляет собой слабую вращательную волну (составляющие скорости и магнитной индукции, касательные к ее плоскости, поворачиваются, не изменяя своей

величины); существование таких волн было открыто Альфвеном в 1942 г. В волне Альфвена плотность и давление не изменяются, и она имеет конечную скорость распространения в несжимаемой жидкости.

Итак, скорость (166) распространения слабой магнитогазодинамической волны (слабого разрыва) в направлении, перпендикулярном к линиям магнитной индукции, превышает скорость звука и составляет

$$c_{dc} = \sqrt{a_H^2 + b_H^2} \quad (171)$$

Можно показать, что вдоль силовых линий магнитного поля слабые магнитогазодинамические волны распространяются либо со скоростью звука  $a_H$ , либо со скоростью Альфвена  $b_H$ .

Из магнитной газодинамики известно, что в общем случае\* скорости распространения слабых магнитогазодинамических волн, которые подразделяются на быстрые ( $c$ ) и медленные ( $c'$ ), а также скорость распространения альфвеновской волны ( $b$ ) зависят от угла  $\Theta$  между выбранным направлением и вектором: магнитной индукции  $B$ :

$$b = b_H \cos \Theta$$

$$c = b_H \sqrt{\frac{r + 1 + \sqrt{(r + 1)^2 - 4r \cos \Theta}}{2}}$$

$$c' = b_H \sqrt{\frac{r + 1 - \sqrt{(r + 1)^2 - 4r \cos \Theta}}{2}} \quad (172)$$

Здесь  $r = a_H^2 / b_H^2$ .

В частном случае, когда  $\Theta = 0$  (распространение волн вдоль силовых линий), имеем

$$b = b_H, \quad c = c_{||} = a_H, \quad c' = c'_{||} = b_H \quad (\text{при } r > 1),$$

$$b = b_H, \quad c = c_{||} = b_H, \quad c' = c'_{||} = a_H \quad (\text{при } r < 1).$$

В другом частном случае  $\Theta = \pi/2$  (распространение волн в направлении нормали к силовым линиям) имеем

$$b = 0, \quad c = c_{dc} = \sqrt{a_H^2 + b_H^2}, \quad c' = c'_{dc} = 0 \quad (\text{при } r > 1).$$

В отличие от слабых (акустических) волн обычной газовой динамики, которые изотропны (распространяются во всех направлениях с одной скоростью), магнитогазодинамические слабые волны анизотропны и, кроме того, подразделяются на быстрые и медленные.

Перейдем к отысканию основных соотношений между параметрами газа и поля в магнитогазодинамической ударной волне.

Из (155), (156), (168) и (169) имеем

$$m = \frac{\rho_1}{\rho_H} = \frac{u_H}{u_1} = \frac{B_1}{B_H} = \frac{b_1^2}{b_H^2} = \frac{A_1^2}{A_H^2} \quad (173)$$

Если обозначить отношение давлений за и перед фронтом ударной волны

$$m = \frac{p_1}{p_H} \quad (174)$$

то отношение температур, согласно уравнению состояния, можно представить в виде

$$\frac{T_1}{T_H} = \frac{n}{m} \quad (177)$$

Используя известные соотношения  $c_p - c_v = R$ ,  $c_p = \kappa c_v$ , выражение (164) и уравнение неразрывности (156), преобразуем уравнение энергии (146а) к виду

$$T = T_c^* - \frac{k-1}{2kR} u^2 - \frac{k-1}{kR} \frac{B^2}{\mu_B \rho} \quad (176)$$

Из уравнения состояния (159) и формулы (176) находим давление газа

$$p = \rho R T_c^* - \frac{k-1}{2k} \rho u^2 - \frac{k-1}{k} \frac{B^2}{\mu_B} \quad (177)$$

Из (177) получаем величину перепада давлений в ударной волне

$$p_1 - p_H = (\rho_1 - \rho_H) R T_c^* + \frac{k-1}{2k} u_H u_1 (\rho_1 - \rho_H) - \frac{k-1}{k} \frac{B^2}{\mu_B} \frac{\rho_1^2 - \rho_H^2}{\rho_H^2} \quad (178)$$

Здесь приняты во внимание постоянство эффективной температуры торможения ( $T_c^* = idem$ ) и следующие из уравнения индукции (164) и уравнения неразрывности (156) равенства

$$\rho_H u_H^2 - \rho_1 u_1^2 = u_H u_1 (\rho_1 - \rho_H), \quad \rho_H u_H^2 + \rho_1 u_1^2 = u_H u_1 (\rho_1 + \rho_H)$$

$$B_1^2 - B_H^2 = B_H^2 \frac{\rho_1^2 - \rho_H^2}{\rho_H^2}, B_1^2 + B_H^2 = B_H^2 \frac{\rho_1^2 + \rho_H^2}{\rho_H^2} \quad (179)$$

Подставляя (163) и (173) в (178) и выполняя элементарные преобразования, получаем основное кинематическое соотношение для прямой магнитогазодинамической ударной волны

$$u_H u_1 = \frac{2k}{k-1} RT_c^* + \frac{2-k}{k+1} \frac{B_H^2 (m+1)}{\mu_B \rho_H} \quad (180)$$

Здесь первый член правой части представляет собой квадрат критической скорости, соответствующей эффективной температуре торможения:

$$a_{кр.с} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_c^*} \quad (181)$$

В этом случае отличие (180) от кинематического соотношения (15) гл. III для обычной ударной волны заключается в дополнительном члене, учитывающем влияние магнитного поля.

Складывая давления перед и за ударной волной, имеем из (177)

$$p_1 + p_H = (\rho_1 + \rho_H) RT_c^* - \frac{k-1}{2k} u_H u_1 (\rho_1 + \rho_H) - \frac{k-1}{k} \frac{B_H^2 \rho_1^2 + \rho_H^2}{\mu_B \rho_H^2}$$

Исключая отсюда с помощью (163) произведение скоростей, получим основное динамическое соотношение для прямой магнитогазодинамической ударной волны

$$\frac{p_1 - p_H}{(\rho_1 - \rho_H)} = k \frac{p_1 + p_H}{(\rho_1 + \rho_H)} + \frac{B_H^2 (m-1)^2 (k-1)}{2\mu_B \rho_H (m+1)} \quad (182)$$

которое отличается от аналогичного соотношения (17) гл. III (для простой ударной волны) дополнительным («магнитным») членом в правой части.

В частном случае слабого разрыва ( $p_1 \approx p_H, \rho_1 \approx \rho_H, m \approx 1$ ) из (182) имеем

$$\frac{dp}{dx} = k \frac{p}{\rho}, \quad \frac{p}{\rho^k} = const$$

что доказывает постоянство энтропии в слабой магнитогазодинамической волне. Поделив все члены уравнения (182) на величину  $P_1/P_H$  и решая его

относительно величины приходим к уравнению ударной магнитогазодинамической адиабаты

$$n = \frac{\theta_m - 1 + q(m - 1)^3}{\theta - m} \quad (183)$$

Здесь приняты обозначения

$$m = \frac{\rho_1}{\rho_H}, \quad n = \frac{p_1}{p_H}, \quad q = \frac{p_m}{p_H}, \quad \theta = \frac{k + 1}{k - 1}$$

При отсутствии магнитного поля ( $q = 0$ ) уравнение (183) совпадает с уравнением (18) гл. III для обычной ударной адиабаты. В случае очень сильной ударной волны ( $p_1 \rightarrow \infty$ ) получаем из (183) такое же предельное значение плотности

$$(\rho_1)_{max} = \frac{k + 1}{k - 1} \rho_H$$

как и в простой ударной волне (см. выражение (19) гл. III) - При  $\rho_1 \rightarrow \rho_H$  имеем  $p_1 \rightarrow p_H$

Степень отклонения магнитогазодинамической ударной адиабаты от простой ударной адиабаты показана на рис. 13.17,

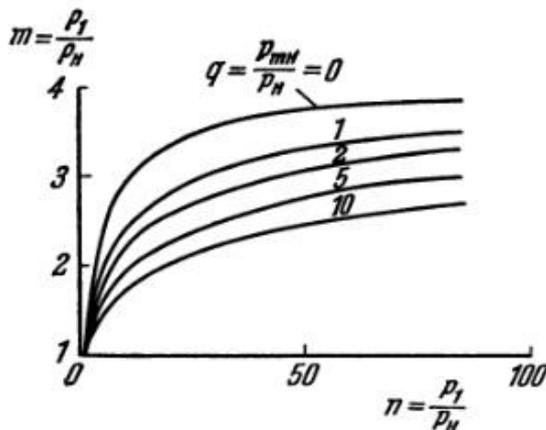


Рис. 13.17. Ударные адиабаты магнитогазодинамической волны при разных величинах параметра магнитного давления ( $k = 5/3$ )

нанесены кривые  $m(n)$  при разных величинах относительного магнитного давления  $q$  для  $k=1,67$  (одноатомный газ).

С помощью (162) и (183) можно выразить число Маха, соответствующее скорости распространения магнитогазодинамической волны, через отношение плотностей на ее фронте:

$$M_H^2 = \frac{m \theta + 1 + q[(\theta + 1)(m + 1) - 4m]}{k} \quad (184)$$

Зависимости  $M_H(m)$ , рассчитанные по формуле (184) при  $\theta = 4$  ( $k = 1,67$ ), нанесены на рис. 13.18.

Остается определить число Маха в газовом потоке за магнитогазодинамической волной, для чего используем выражения

$$M_1^2 = \frac{u_1^2}{a_1^2} = \frac{u_H^2 \rho_H^2 T_H}{a_H^2 \rho_1^2 T_1} = \frac{M_H^2}{mn} \quad (185)$$

Кривые  $M_1(m)$  при разных значениях параметра магнитного давления  $\delta$  приведены на рис. 13.19.

При вырождении магнитогазодинамической ударной волны в слабый разрыв ( $m \rightarrow 1$ ,  $n \rightarrow 1$ ) скорость ее распространения, как было установлено выше, оказывается больше скорости звука;

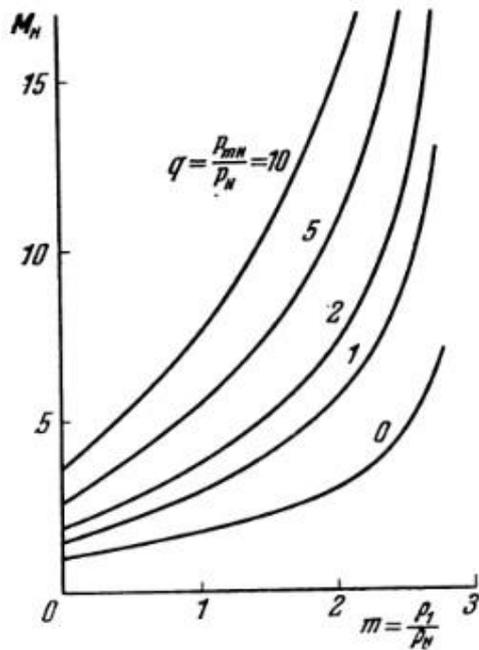


Рис. 13.18. Зависимость скорости магнитогазодинамической ударной волны от степени сжатия газа при разных величинах параметра давления ( $k = 5/3$ )

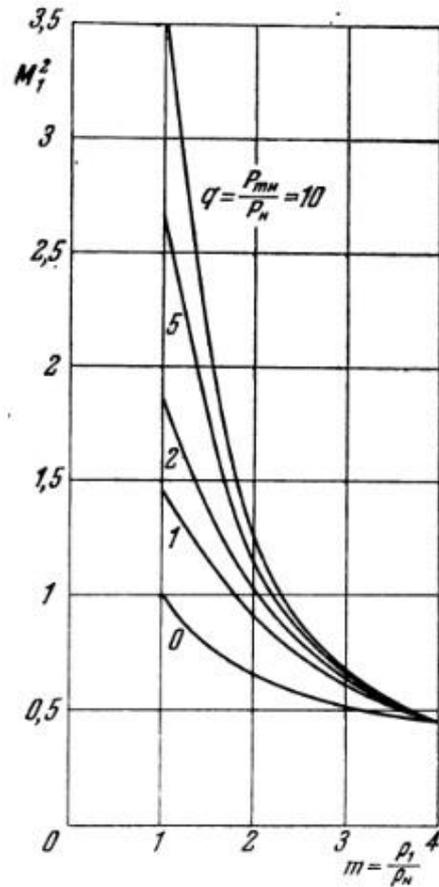


Рис. 13.19. Зависимость скорости за магнитогазодинамической ударной волной от степени сжатия газа при разных величинах параметра магнитного давления ( $k = 5/3$ )

в этом предельном случае из (184) и (185) получаем

$$M_{R0}^2 = \frac{1}{k} \left( \frac{\theta + 1}{\theta - 1} + 2q \right) = 1 + \frac{2q}{k}, \quad M_{10} = M_{R0}$$

В другом предельном случае — бесконечно сильной магнитогазодинамической волны ( $m \rightarrow \theta, n \rightarrow \infty$ ) — имеем из (184), (185) и (183).

$$M_{Rm}^2 \rightarrow \infty, \quad M_{1m}^2 \rightarrow \frac{k-1}{2k}$$

## 9.9 Условие обращения воздействия при течении газа в электромагнитном поле

Рассмотрим стационарное одномерное течение ( $W(x) = (u, 0, 0)$ ) невязкого и нетеплопроводного газа конечной проводимости в поперечных скрещенных магнитном и электрическом полях.

Предполагая, что можно пренебречь индуцированным магнитным полем, зададим распределение средних по сечению значений электрической напряженности и магнитной индукции по длине канала переменного сечения  $E(x) = (0, E_y, 0)$ ,  $B(x) = (0, 0, B_z)$ . Это позволяет решать задачу, не привлекая уравнений Максвелла.

Продифференцировав уравнение расхода

$$\rho u F = \text{const} = G$$

по направлению движения, получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = 0 \quad (186)$$

Аналогичным образом из уравнения состояния для идеального газа имеем

$$\frac{d\rho}{dx} = R\rho \frac{dT}{dx} + \frac{a^2}{k} \frac{d\rho}{dx} \quad (187)$$

Уравнение движения (82) для одномерного течения невязкого и нетеплопроводного газа при поперечных электромагнитных полях может быть приведено к виду

$$\rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = \sigma_R [E - uB] B \quad (188)$$

Уравнение энергии такого одномерного течения получим из (90) и (87)

$$\rho u \frac{di^*}{dx} = \sigma_R [E - uB] E \quad (189)$$

Учитывая, что  $i^* = i + u^2/2$ ,  $R = c_p - c_v$  и  $c_p = k c_v$  уравнению энергии (189) при  $c_p = \text{const}$  придадим следующий вид:

$$\frac{k}{k-1} R \rho u \frac{dT}{dx} + \rho u^2 \frac{du}{dx} = \sigma_R E [E - uB] \quad (189a)$$

В этих уравнениях все параметры зависят только от причём скорость  $u(x)$  направлена по оси  $x$ , а напряженности магнитного и электрического полей перпендикулярны между собой и к направлению движения:  $B_z = B(x)$ ,  $E_y = E(x)$ ; будем считать функции  $B_z$  и  $E_y$ , а также функцию  $F(x)$ , описывающую изменение площади поперечного сечения канала, заданными.

Систему уравнений (186) —(189) в общем случае нельзя решить в явном виде, но с ее помощью можно определить, как зависят производные скорости и числа Маха от основных параметров задачи.

Исключая из (187) и (189а) градиент температуры, получим

$$\frac{k}{k-1} \left( \frac{dp}{dx} - \frac{a^2}{k} \frac{d\rho}{dx} \right) + \rho u \frac{du}{dx} = \frac{\sigma_R E}{u} [E - uB] \quad (190)$$

Исключая из (188) и (190) градиент давления, имеем

$$-\frac{k}{k-1} \rho u \frac{du}{dx} = \sigma_R \left[ \frac{E}{u} - \frac{k}{k-1} B \right] [E - uB] + \frac{a^2}{k-1} \frac{d\rho}{dx}$$

Заменяя в этом выражении градиент плотности с помощью (186), приходим к выражению

$$(M^2 - 1) \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} - \frac{k}{\rho a^2} \frac{\sigma_R E}{u} \left( \frac{E}{B} - u \right) \left( \frac{E}{B} \frac{k-1}{k} - u \right) \quad (191)$$

которое показывает, как влияет изменение площади сечения и фактора, отражающего характер электромагнитного поля (второй член правой части), на изменение скорости по длине канала.

Если электромагнитное поле отсутствует, то уравнение (191) переходит в известное соотношение для сопла Лавая (гл. IV, (1)). Если добавить в исходные уравнения члены, характеризующие изменение расхода газа, работы трения, технической работы и подвода тепла извне, то путем элементарных преобразований можно уравнение (191) превратить в условие обращения воздействия еще более общего вида, чем условие (49) гл. V:

$$\begin{aligned}
(M^2 - 1) \frac{1}{u} \frac{du}{dx} &= \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} - \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} - \frac{1}{a^2} \frac{dL}{dx} - \frac{k-1}{a^2} \frac{dQ_{\text{нар}}}{dx} - \frac{k}{a^2} \frac{dL_{\text{тр}}}{dx} \\
&\quad - \frac{k}{\rho a^2} \frac{\sigma_R E}{u} \left( \frac{E}{B} - u \right) \left( \frac{E}{B} \frac{k-1}{k} - u \right) \quad (192)
\end{aligned}$$

Член, учитывающий электромагнитное воздействие в уравнении (192), отличается от всех остальных членов этого выражения тем, что в него входят значения действующих параметров, а не их производные и, кроме того, его величина зависит от абсолютных значений скорости и давления газа, а знак определяется произведением двух разностей, одна из которых есть разность между скоростью газа  $u$  и скоростью дрейфа  $W_D = E/B$ , а другая — разность между скоростью газа и некоторой скоростью

$$U_1 = \frac{E}{B} \frac{k-1}{k} = W_D \frac{k-1}{k}$$

Таким образом, если отбросить все воздействия, кроме электромагнитного, т. е. рассматривать одномерное движение идеального газа в теплоизолированном канале постоянного сечения при наличии скрещенных электромагнитных полей, то условие обращения воздействия для производной скорости, запишется так:

$$(M^2 - 1) \frac{du}{dx} = -\sigma_R E \frac{k}{\rho a^2} (u - U_1)(u - W_D) = \frac{\sigma_R B^2}{p} (u - U_1)(u - W_D) \quad (193)$$

Напомним, что при движении газа со скоростью дрейфа (см. §5) индуцированное электрическое поле равно и противоположно наложенному, в результате чего ток через газ не идет и никакого магнитогидродинамического воздействия нет. Как видим, при неизменной величине электромагнитного воздействия знак производной скорости изменяется на противоположный при переходе от дозвукового течения ( $M < 1$ ) к сверхзвуковому ( $M > 1$ ) и наоборот.

Таким же путем, как (193), можно вывести условие обращения воздействия для производной числа Маха по длине канала. В случае  $dF/dx \neq 0$  имеем сходное с (191) выражение

$$(M^2 - 1) \frac{1}{M \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} \frac{dM}{dx} = \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} - \frac{k}{\rho a^2} \frac{\sigma_R B^2}{u} \left(\frac{E}{B} - u\right) \left(\frac{E}{B} \frac{1 + kM^2}{2k + kM^2} - u\right) \quad (194)$$

Для канала постоянного сечения ( $dF/dx=0$ ) получаем

$$(M^2 - 1) \frac{1}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} \frac{dM}{dx} = -\frac{k}{\rho a^3} \sigma_R B^2 (u - W_D)(u - U_2) = -\frac{\sigma_R B^2}{\rho a} (u - U_2)(u - W_D) \quad (195)$$

где

$$U_2 = U_1 \frac{1 + kM^2}{2 + (k-1)M^2} = W_D \frac{1 + kM^2}{kM^2 + \frac{2k}{k-1}}$$

Таким образом, в выражении для  $dM/dx$  появляется новая характерная скорость  $U_2$ , величина которой зависит от числа Маха.

С помощью (194) и (195) на рис. 13.20 построена диаграмма возможных режимов одномерного течения газа в скрещенных электрическом и магнитном полях. По оси ординат отложены значения скорости, по оси абсцисс — числа Маха. Прямые линии  $u=U_1, u=W_D, M=1$  и кривая  $U_2(M)$  разбивают плоскость  $(u; M)$  на области :

| I. $M > 1$                | II. $M < 1$               |
|---------------------------|---------------------------|
| $A_1 \cdot W_D < u$       | $A_2 \cdot W_D < u$       |
| $B_1 \cdot U_2 < u < W_D$ | $B_2 \cdot U_1 < u < W_D$ |
| $C_1 \cdot U_1 < u < U_2$ | $C_2 \cdot U_2 < u < U_1$ |
| $D_1 \cdot u < U_1$       | $D_2 \cdot u < U_2$       |

Пусть  $u$  и  $M$  известны в некотором сечении  $x$ . Тогда при смещении вдоль оси  $x$  эти параметры изменяются так, что в областях  $A_1$ ,  $B_2$  и  $D_1$  происходит смещение налево вниз, в областях  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  — направо вверх, в областях  $C_1$  и  $C_2$  — налево вверх.

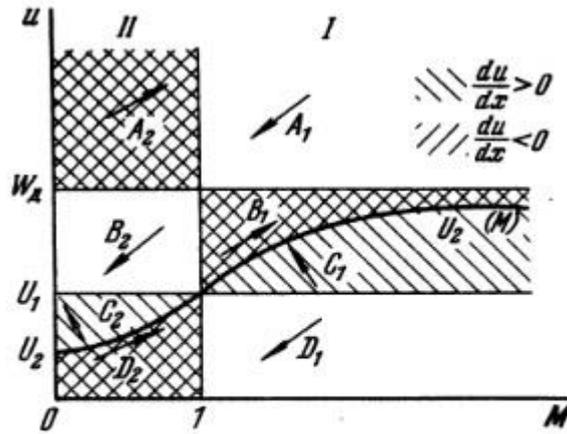


Рис. 13.20. Возможные режимы одномерного течения в скрещенных электромагнитных полях

Из уравнения (194) ясно, что на линиях  $u = W_d$  и  $u = U_1$  возможен плавный переход через значение  $M = 1$  в первой точке в сторону возрастания  $M$ , а во второй — убывания.

В областях  $C_1$  и  $C_2$  происходит ускорение потока при уменьшении числа Маха; здесь скорость звука растет быстрее скорости потока.

Полученные результаты легко объяснить, если вспомнить, что воздействие электромагнитного поля на течение газа сводится к механической работе электромагнитной силы, приложенной к единице объема<sup>1</sup>),

$$-F \cdot W = -W \cdot [j \times B]$$

и к выделению джоулева тепла, с учетом которого полная подводимая энергия на единицу объема

$$Q_H = Ej$$

В рассматриваемом одномерном случае отношение механической работы к полной энергии

$$\Pi = \frac{\sigma_{R[E-uB]}uB}{\sigma_{R[E-uB]}E} = \frac{u}{W_d} \quad (196)$$

Если  $u > W_d$ , то механическая работа электромагнитной силы превосходит изменение полного запаса энергии газа, т. е. механическая энергия частично переходит в энергию электромагнитного поля в виде тока, который может совершать работу во внешней цепи МГД-генератора. Если  $u < W_d$ , то энергия электромагнитного поля передается газу в виде механической работы или тепла (насос или ускоритель).

В первом случае электромагнитная сила направлена против движения газа, а во втором — по движению. Во втором случае при  $\Pi$ , близких к единице, воздействие поля выражается в основном в виде работы электромагнитных сил, а при  $\Pi$ , близких к нулю, — в основном в виде подвода тепла.

При  $u = U_1$ , т. е.  $\Pi = U_1/W_d$ , тепловое и механическое действия электромагнитного поля компенсируются, вследствие чего скорость газа не изменяется ( $du/dx = 0$ ), при  $u = W_d$  оба воздействия равны нулю<sup>1)</sup>, из-за чего также  $du/dx = 0$ . Особенность линии  $u = U_2$  состоит в том, что в точках пересечения с ней кривых  $u(M)$  изменение значения скорости звука пропорционально изменению значения скорости газа, в силу чего производная от числа Маха по длине канала при  $u = U_2$  всегда равна нулю. Переход через линию  $u = U_2$  возможен на диаграмме рис. 13.20 только по вертикали (при  $M = \text{const}$ ).

### **9.10 Простейшие решения уравнений одномерного течения газа в скрещенных полях**

Простейшее решение уравнения одномерного течения идеального газа в скрещенных электрическом и магнитном полях получается для канала постоянного сечения при  $B = \text{const}$  и  $E = \text{const}$ ; последние два условия можно реализовать лишь при малых значениях магнитного числа Рейнольдса ( $R_n < 1$ ), когда индуцируемые в потоке газа поля значительно слабее наложенных полей<sup>2)</sup>.

Поделив почленно уравнение (193) на уравнение (195), найдем

$$\frac{du}{dM} = \frac{a}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \frac{u-U_1}{u-U_2} \quad (197)$$

При  $B = \text{const}$  и  $E = \text{const}$  имеем  $W_D = \text{const}$  и  $U_1 = \text{const}$ ; кроме того в соответствии с обозначением, принятым в (195), имеем

$$2 \frac{U_2}{U_1} = \frac{1 + kM^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} = 1 + \frac{\frac{k+1}{2}M^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2}$$

Подставляя это выражение в (197), приводим последнее к виду

$$2 \left( \frac{u}{U_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{M^2} + \frac{k-1}{2} \right) d \frac{u}{U_1} - \frac{u}{U_1} \left( \frac{u}{U_1} - 1 \right) \frac{dM^2}{M^4} = \frac{k+1}{2} d \frac{u}{U_1} \quad (198)$$

Нетрудно показать, что левая часть (198) есть дифференциал произведения, поэтому

Откуда

$$\frac{1}{M^2} + \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2} \frac{\frac{u}{U_1} + \text{const}}{\frac{u}{U_1} \left( \frac{u}{U_1} - 1 \right)} \quad (199)$$

Постоянную интегрирования выбирают по какому-либо начальному условию. Например, если принять  $u = U_1$  при  $M = 1$ , то получим  $\text{const} = -1$ .

Тогда имеем

$$\frac{u}{U_1} = \frac{\frac{k+1}{2}M^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2}, \quad M^2 - 1 = \frac{\frac{u}{U_1} - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{u}{U_1}} \quad (200)$$

Найдем теперь изменение скорости по длине канала. Для этого воспользуемся уравнением неразрывности течения

$$\rho u = \frac{G}{F} = \text{const} = m$$

Подставляя значение  $\rho u$  в (193), находим

$$(M^2 - 1) \frac{du}{dx} = - \frac{\sigma_R B^2 k M^2}{m} \frac{1}{u} (u - U_1)(u - W_D)$$

Это выражение с помощью (200) приводится к следующему виду:

$$\frac{d \frac{u}{W_D}}{d\bar{x}} = \frac{2k}{k+1} \frac{\sigma_R B^2 h}{m} \left(1 - \frac{u}{W_D}\right) = \frac{2k}{k+1} S_0 \left(1 - \frac{u}{W_D}\right) \quad (201)$$

где  $x = x/h$ ,  $h$  — высота канала, отсчитываемая по нормали к оси  $x$ , а  $S_0 = \sigma_R B^2 h / m$  параметр магнитогидродинамического взаимодействия, определяемый соотношением (97).

Интегрируя (201), получаем закон изменения скорости по длине канала

$$\bar{u} = \frac{u}{W_D} = 1 - \frac{1}{k} e^{-\frac{\sigma_R B^2 x}{m} \frac{2h}{R+1}} = 1 - \frac{1}{k} e^{-S_1 \bar{x}} \quad (202)$$

где

$$S_1 = \frac{2k}{k+1} S_0$$

Как видим,  $\bar{u} = 0$  получается при  $x = -\ln k / S_1$ ,  $\bar{u} = -1$  при  $\bar{x} = -\infty$ . Для определения постоянной интегрирования длину отсчитывают от критического сечения, т. е. принимают  $x = 0$  при  $M = 1$ , где по условию  $u = U_1 = W_D \frac{k-1}{k}$

Изменение плотности по длине канала находится из уравнения неразрывности и зависимости (202)

$$\frac{1}{\bar{\rho}} = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{u}{u_1} = \frac{k}{k-1} \frac{u}{W_D} = \frac{k}{k-1} \left(1 - \frac{1}{k} e^{-S_1 \bar{x}}\right) \quad (203)$$

Здесь  $\rho_1$  — плотность газа в критическом сечении канала.

Градиент давления вдоль канала находим с помощью уравнения движения (188) и выражений (201) и (202)

$$\frac{dp}{dx} = \sigma_R B^2 (W_D - u) - m \frac{du}{dx} = -\frac{k-1}{2k} m \frac{du}{dx} = -\frac{U_1 \sigma_R B^2}{(k+1)} e^{-S_1 \bar{x}} \quad (204)$$

Интегрируя (204), имеем

$$p_1 = \frac{\rho_1 U_1^2}{2k} e^{-S_1 \bar{x}} + const$$

В критическом сечении ( $M = 1$ ,  $u = a = U_1$ ,  $\rho_1 = \rho$ ,  $p = p_1$ ) т. е. при  $x = 0$ ,

$$p_1 = \frac{\rho_1 U_1^2}{2k} + const$$

Но, с другой стороны, из формулы для скорости звука следует

$$p_1 = \frac{\rho_1 U_1^2}{k} = \frac{\rho_1 a_1^2}{k}$$

поэтому

$$\text{const} = \frac{\rho_1 U_1^2}{2k}$$

Итак, изменение давления по длине канала

$$\bar{p} = \frac{p}{p_1} = \frac{1}{2}(1 + e^{-s_1 \bar{x}}) \quad (205)$$

При  $\bar{u} = 0$  ( $\bar{x} = -\frac{\ln k}{s_1}$ ) имеем  $\bar{p} = 1,2$ , при  $\bar{u} = 1$  ( $\bar{x} = -\infty$ )  $\bar{p} = 0.5$

Теперь с помощью (204) и (205) нетрудно отыскать изменение температуры вдоль канала, так как из уравнения состояния

$$\bar{T} = \frac{T}{T_1} = \frac{p}{p_1} \frac{\rho}{\rho_1} \quad (206)$$

Плотность электрического тока в произвольном сечении канала

$$j = \sigma_R(E - uB) = \sigma_R E x \left(1 - \frac{u}{W_D}\right) = \frac{\sigma_R B^2}{k} e^{-s_1 \bar{x}}$$

Отсюда для плотности тока в критическом сечении ( $x = 0$ ) имеем

$$j_1 = \frac{\sigma_R B^2}{k}$$

Безразмерное плотности тока

$$\bar{j} = \frac{j}{j_1} = e^{-s_1 \bar{x}} \quad (207)$$

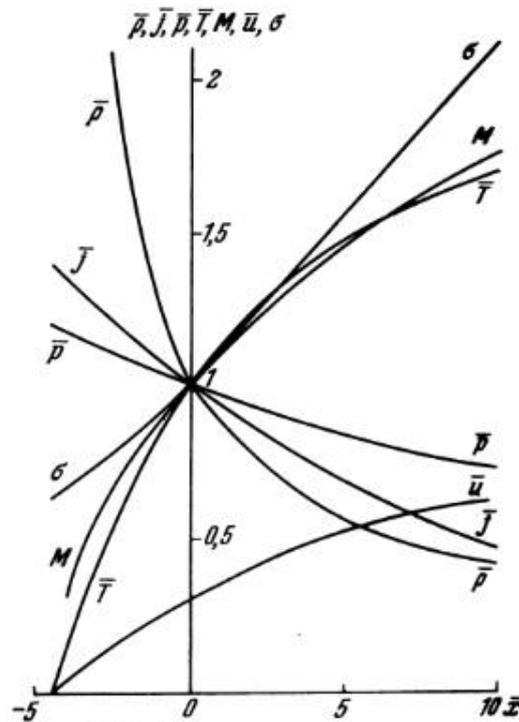


Рис. 13.21. Изменение основных параметров по длине плоского канала постоянного сечения при  $E = E_y = \text{const}$ ;  $B = B_z = \text{const}$ ;  $\sigma_R = \text{const}$ ;  $k = 1,4$ ;  $S_1 =$

Результаты расчета по формулам (164) — (207) не зависят от системы единиц, так как величина  $S = \sigma_R B^2 h / m$  — безразмерная. Кривые, показывающие изменение величина,  $p$ ,  $\bar{p}$ ,  $T$  в зависимости от безразмерной длины  $\bar{x} = x/h$ , выраженной в долях от высоты канала  $h$ , приведены на рис. 13.21; при расчете этих зависимостей использовались следующие значения параметров:  $\sigma_R = 10^2$  См/м;  $\kappa = 1,4$ ;  $T_1 = 2000$  К;  $p_1 = 9,8 \cdot 10^4$  Н/м<sup>2</sup>;  $B_1 = 1$  Тл.

Этим значениям соответствуют величины  $\rho_1 = 0,167$  кг/м<sup>3</sup>;  $U_1 = a_1 = 9,4 \cdot 10^2$  м/с;  $W_d = 32,1 \cdot 10^2$  м/с;  $E = U_1 B = 9,4 \cdot 10^2$  В/м;  $j_1 = 2,23$  А/м<sup>2</sup>.

При высоте канала  $h = 10$  см разность потенциалов на его стенках составляет  $\Delta V = Eh = 94$  В, а универсальный показатель степени

$$S_1 = \frac{\sigma_R B_1^2 h}{\rho_1 U_1} \frac{2k}{k+1} = 0.075$$

На рис. 13.21 приведены также кривые изменения по длине канала числа Маха (при  $\kappa = 1,4$ )

$$M = \frac{u}{a} = \frac{u}{a_1} \frac{a_1}{a} = \frac{k}{k-1} \frac{u}{W_d} \frac{1}{\sqrt{T}} = 3.5 \frac{\bar{u}}{\sqrt{T}} \quad (208)$$

и относительной величины полного давления

$$\sigma = \frac{p^*}{p_1^*} = \frac{p^*}{p} \frac{p}{p_1} \frac{p_1}{p_1^*} = 0.528(1 + 0.2M^2)^{3.5} \bar{p} \quad (209)$$

Разумеется, проведенный расчет носит условный характер, так как не все принятые при выводе формул (202) —(209) условия можно реализовать на практике. В частности, проводимость газа  $O_n$  существенно зависит от температуры, которая по длине канала изменяется. При переменных значениях основных параметров можно вести расчет численными или графическими методами непосредственно по дифференциальным уравнениям (201) и (204) и соответствующим соотношениям для плотности газа, температуры и плотности электрического тока.

Другой вид одномерного течения газа в скрещенных электромагнитных полях получается при постоянной температуре, но переменном сечении канала. В этом случае вывод расчетных формул основывается на следующих исходных уравнениях:

уравнении неразрывности

$$\rho u F = \text{const} = G$$

уравнении состояния

$$p = R\rho T$$

уравнении движения (188)

$$\rho u \frac{du}{dx} + \frac{du}{dx} = jB = \sigma_R [E - uB] B$$

уравнении энергии (189а), которое при  $T = \text{const}$  имеет вид

$$\rho u^2 \frac{du}{dx} = jE = \sigma_R E [E - uB] \quad (210)$$

Подставляя (210) в уравнение движения (188), получим

$$u \frac{dp}{dx} = -\frac{j^2}{\sigma_R} \quad (211)$$

Исключая из (210) плотность, имеем

$$\frac{p}{RT} u^2 \frac{du}{dx} = jE$$

Откуда

$$p = RTE \frac{j}{u^2 u'} = RTE \varepsilon' \quad (212)$$

где  $u' = \frac{du}{dx}$ ,  $\varepsilon = \frac{j}{u^2 u'}$ ,  $\varepsilon' = \frac{d\varepsilon'}{dx}$ . Отсюда при постоянной напряженности электрического тока ( $E = \text{const}$ )  $\frac{dp}{dx} = RTE \varepsilon'$ . Подставляя это выражение в (211), получаем  $RTE \varepsilon' = -\frac{j^2}{\sigma_R u} = -\frac{j}{u^4 u'^2} \frac{u^3 u'^2}{\sigma_R}$  и, следовательно,  $\sigma_R RTE \frac{\varepsilon'}{\varepsilon^2} = -u^3 (u')^2$ . Интегрируя от  $x = 0$  ( $\varepsilon = \varepsilon_0$ ) до текущего значения  $x$ , имеем

$$\sigma_R RTE \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right) = \int_0^x u^3 (u')^2 dx \quad (213)$$

Зададимся степенным распределением скорости по длине канала (при  $E = \text{const}$  и  $B = B(x)$ )

$$u = bx^n, \quad u' = bnx^{n-1}. \quad (214)$$

Подставляя (214) в (213) после интегрирования (при  $n > 1/5$ ), получим

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{b^5 n^2}{\sigma_R RTE} \frac{x^{5n-1}}{5n-1} \quad (215)$$

Здесь принято во внимание, что при  $x = 0$   $u = 0$ ,  $u' = 0$ , т. е. при  $j \neq 0$ .

В случае  $n = 1/5$  интеграл (213) дает логарифмическую функцию, что изменяет вид всех расчетных формул. В рассматриваемом примере плотность электрического тока в канале

$$j = \varepsilon u^2 u' = \frac{\sigma_R RTE}{b^2 n} \frac{5n-1}{x^{2n}} \quad (216)$$

и напряженность магнитного поля

$$B = \frac{E}{bx^n} \left[ 1 - \frac{RT(5n-1)}{b^2 n x^{2n}} \right] \quad (217)$$

Давление находим из (212) и (215)

$$p = \frac{\sigma_R (RTE)^2}{b^5 n^2} \frac{5n-1}{x^{5n-1}} \quad (218)$$

Площадь сечения канала находится из уравнения неразрывности

$$F = \frac{Gb^4n^2}{\sigma_R RT(E)^2} \frac{x^{4n-1}}{5n-1} \quad (219)$$

Число Маха согласно (214) составляет

$$M = \frac{u}{a} = \frac{b x^n}{\sqrt{kRT}} \quad (220)$$

В критическом сечении ( $x=x_1$ ) $M=1$ , поэтому

$$b = \frac{\sqrt{kRT}}{x_1^n} \quad (221)$$

Подставляя значение  $B$  в полученные формулы, окончательно имеем

$$M = \left(\frac{x}{x_1}\right)^n, u = \sqrt{kRT} \left(\frac{x}{x_1}\right)^n, j = \frac{\sigma_p E(5n-1)}{kn} \left(\frac{x_1}{x}\right)^{2n}$$

$$B = \frac{E}{\sqrt{kRT}} \left[ \left(\frac{x_1}{x}\right)^n - \frac{(5n-1)}{kn} \left(\frac{x_1}{x}\right)^{2n} \right] \quad (222)$$

$$p = \frac{\sigma_R E^2(5n-1)x_1}{n^2 k^2 \sqrt{kRT}} \left(\frac{x_1}{x}\right)^{5n-1}, F = \frac{Gn^2 k^2}{\sigma_R E^2 x_1} \frac{RT}{5n-1} \left(\frac{x_1}{x}\right)^{4n-1},$$

В критическом сечении ( $x = x_1$ ):

$$M_1=1, j = \frac{\sigma_p E(5n-1)}{kn}, u = \sqrt{kRT}, B = \frac{E}{\sqrt{kRT}} \left[ 1 - \frac{(5n-1)}{kn} \right]$$

$$p = \frac{\sigma_R E^2(5n-1)x_1}{n^2 k^2 \sqrt{kRT}}, F = \frac{Gn^2 k^2}{\sigma_R E^2 x_1} \frac{RT}{5n-1} \quad (223)$$

Абсциссу критического сечения можно найти по заданному значению давления  $p_1$  в критическом сечении. В безразмерном виде основные расчетные формулы выглядят так:

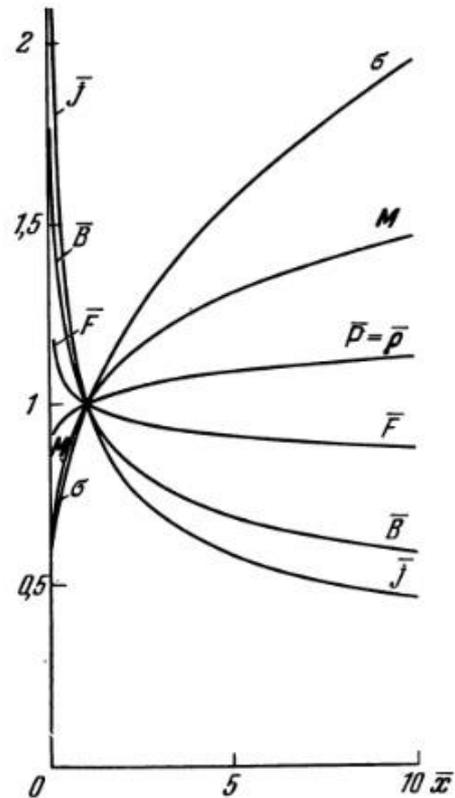
$$M = \left(\frac{x}{x_1}\right)^n = \bar{x}^n, \bar{j} = \frac{j}{j_1} = \frac{1}{M^2}$$

$$\bar{B} = \frac{B}{B_1} = \frac{1 + knM - 5n}{M^2 (1 + kn - 5n)}$$

$$\bar{p} = \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{p}{p_1} = \frac{1}{M^{5n-1}}, \quad \bar{F}_1 = \frac{F}{F_1} M^{4n-1} \quad (224)$$

Из (224) следует, что при  $n = 1/4$  канал имеет постоянное сечение. На рис. 13.22 изображены кривые  $M(\bar{x})$ ,  $j(\bar{x})$ ,  $B(\bar{x})$ ,  $p(\bar{x})$ , и  $F(\bar{x})$ , для рассматриваемого изотермического течения в канале при  $n = 1/6$  и  $k = 1,4$ . Кривая изменения полного давления по длине канала была рассчитана по формуле (209), в которую подставлялись значения  $p$ , отыскиваемые с помощью (224). При выбранном законе изменения скорости по длине канала ( $n = 1/6$ ) площадь сечения канала изменяется не очень сильно. При больших значениях  $n$  все параметры будут изменяться более заметно.

Рис. 13.22. Изменение параметров по длине канала при  $E = E_v = \text{const}$ ;  $\sigma_R = \text{const}$ ;  $k = 1,4$ ;  $T = \text{const}$ ;  $n = 1/6$

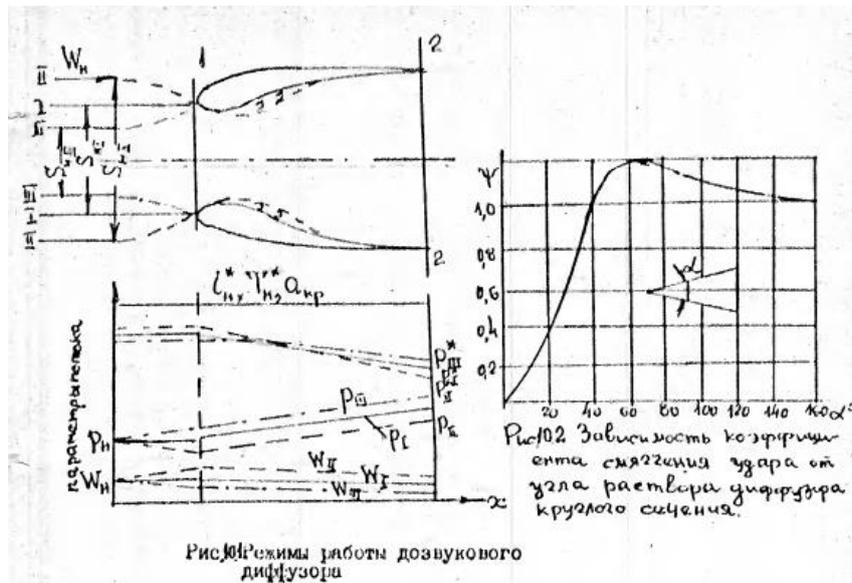


## Глава 10 Диффузоры

### 10.1 Дозвуковые диффузоры ВРД. Диффузоры для умеренных сверхзвуковых скоростей

Диффузоры предназначены для преобразования кинетической энергии в потенциальную энергию давления (кратко в напор) жидкости. Для несжимаемой жидкости диффузоры представляют собой расширяющиеся каналы ( $W_2 = W_1 S_1 / S_2$ ). Рассмотрим диффузоры ВРД, которые подразделяются по числу Маха полета  $M_H$  на дозвуковые  $M_H < 1$ ; для малых сверхзвуковых скоростей полета  $M_H < 1,5$  и для сверхзвуковых скоростей полета  $M_H > 1,5$ . Все диффузоры должны иметь минимальные габариты, массу и потери.

Дозвуковые диффузоры представляют расширяющиеся каналы с плавно очерченными входными кромками для предотвращения отрыва потока на входе (рис. 10.1). Чем больше  $dS / dx > 0$ , тем больше  $dp / dx$  и тем меньше масса и длина диффузора. На практике приходится ограничивать  $dp / dx$  для того, чтобы избежать отрыва пограничного слоя - источника наиболее существенных потерь полного давления. Вторым источником потерь является трение в пограничном слое.



Температура торможения при энергетически изолированном течении в диффузорах остается постоянной  $T_2^* = T_1^* = T_H^*$ . Полное давление из-за гидравлических потерь уменьшается, что приводит к потерям тяги и экономичности двигателя. Статическое давление и плотность увеличиваются за счет уменьшения скорости.

Расчет пограничного слоя в диффузорных течениях затруднителен, поэтому потери в диффузорах обычно рассчитывают с помощью экспериментальных коэффициентов.

Рассчитаем потери полного давления, связанные с отрывом пограничного слоя, образованием и поддержанием вихревых зон, как потери на удар Борда-Карно при внезапном расширении канала с  $S_1$  до  $S_2$ , который смягчен плавным расширением диффузора. Обычно при расчетах бывает задана приведенная скорость  $\lambda_2$  на выходе из диффузора.

Поэтому выразим коэффициент полного давления в долях скоростного напора не на входе, а на выходе из диффузора. Полагая, что газ приближенно несжимаем, т.е.  $\rho_2 = \rho_2^* = \rho_H^*$  и учитывая, что

$$p_H^* / \rho_H^* = RT^* = \frac{k+1}{2k} Q_{кр}^2, \text{ получим:}$$

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_H^*} = 1 - \frac{p_H^* - p_2^*}{p_H^*} = 1 - \psi \left( \frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 \frac{\rho_H W_2^2}{2 p_H^*} = 1 - \psi \left( \frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 \frac{k}{k+1} \lambda^2,$$

здесь  $\left( \frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 = \zeta_{y\partial}$  - коэффициент потерь на удар Борда-Карно при

внезапном расширении канала с  $S_1$  до  $S_2$ ,  $\psi$  - экспериментальный коэффициент смягчения удара, зависящий только от угла раскрытия диффузора  $\alpha$  (рис.10.2). Максимальное значение  $\psi = 1,2$  получается при  $\alpha = 60^\circ$ , т.е. при этом потери больше, чем при внезапном расширении капала ( $\alpha = 180^\circ$ ). Объясняется это тем, что при  $\alpha = 180^\circ$  течение устойчиво, а при  $\alpha = 60^\circ$  неустойчиво и периодически смывается потоком. На непрерывное восстановление вихревой зоны и затрачивается дополнительная энергия потока. Минимальные потери соответствуют  $\alpha \approx 6^\circ$ . На практике для уменьшения длины диффузора углы раскрытия делают  $\alpha \approx 8^\circ \dots 12^\circ$ . При таких углах видимый отрыв пограничного слоя от стенок диффузора обычно еще не наблюдается. При  $\alpha > 15^\circ$  целесообразно выполнить стенки диффузора криволинейными с постепенно возрастающим углом  $\alpha$ , так чтобы градиент давления вдоль оси сил был постоянным  $\frac{dp}{dx} = const$ . Снижение потерь может составлять 40%. Хороший результат дает также ступенчатый диффузор с организованным срывом потока. Уменьшение потерь в диффузоре при больших  $\alpha$  может быть достигнуто отсосом или сдувом пограничного слоя.

Пусть самолет летит с постоянной скоростью  $W_H$  на постоянной высоте  $H$ . Тогда изменяя частоту вращения компрессора, т.е. изменяя  $p_2$  можно получить три различных режима работы диффузора (рис. 10.1):

I. Режим без преобразования скорости и давления воздуха до диффузора  $W_1 = W_H$  и  $p_1 = p_H$ . Струя воздуха попадает в диффузор из бесконечности без изменения сечения  $S_H = S_1$ . Коэффициент дохода  $\psi = 1$ .

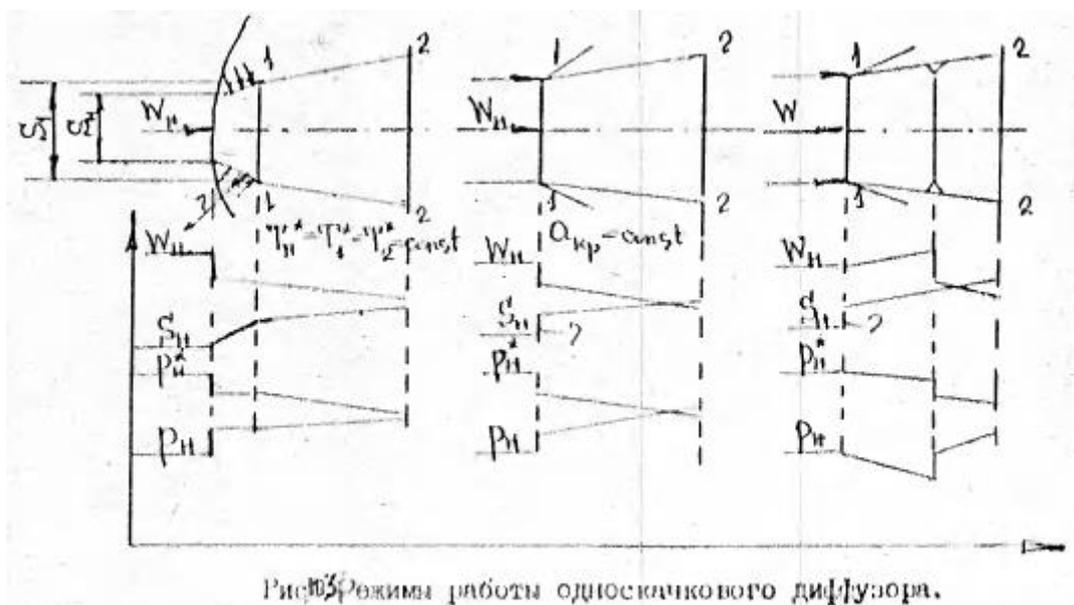
II. Режим с внешним расширением потока  $W_1 > W_H$ ,  $p_1 < p_H$ ,  $\rho_1 < \rho_H$ ,  $\psi = \frac{S_H}{S_1} > 1$ . Этот режим возникает при снижении давления  $p_2$  за счет увеличения частоты вращения компрессора. Режим II нежелателен, т.к. сопровождается повышенными потерями полного давления  $\sigma_H < \sigma_1$ , за счет увеличения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а также возникновения отрыва пограничного слоя на входе в диффузор из-за увеличения угла притекания струй к передней кромке диффузора.

III. Режим с внешним сжатием газа  $S_1 > S_H$ ;  $\psi = \frac{S_H}{S_1} < 1$ ;  $W_1 < W_H$ ;  $p_1 > p_H$ ;  $p_1^* = p_H^*$ . Получается при уменьшении частоты вращения компрессора и увеличении  $p_2$ . Как показывают опыты оптимальным режимом работы дозвукового воздухозаборника является режим, при котором  $W_1 = 0,5W_H$ . В этом случае перед диффузором возникает изоэнтропное торможение газа, в котором реализуется примерно 75% общей степени повышения давления в диффузор  $\frac{p_2}{p_H}$ . Дальнейшее повышение сжатия воздуха перед диффузором приводит к чрезмерному увеличению углов притекания воздуха к передней кромке диффузора и может вызвать отрыв пограничного слоя от наружной поверхности диффузора, что приведет к увеличению лобового сопротивления. Если диффузор задресселировать полностью на выходе, то воздух будет тормозиться вне диффузора изоэнтропно и  $p_2 = p_H^*$ ;  $\sigma = 1$ ;  $\psi = 0$ . При открытии дросселя появляется расход воздуха ( $\psi > 0$ ) и потери в диффузоре ( $\sigma < 1$ ).

Степень повышения давления в диффузоре  $\pi_d = \frac{p_2}{p_H}$  зависит от режима работы диффузора, числа  $M$ , отношения площадей  $\frac{S_2}{S_1}$  и гидравлических потерь. Расчеты и опыты показывают, что при нормальной работе диффузора, увеличение степени расширения  $\frac{S_2}{S_1}$  сверх четырёх малоэффективно. Так, например, при  $M_1 = 0,75$  и  $\frac{S_2}{S_1} = 4 : \pi_d = 1,32$ , а при  $\frac{S_2}{S_1} = 5 : \pi_d = 1,33$ .

## 10.2 Диффузоры для небольших сверхзвуковых скоростей

При  $M \leq 1,5$  используются обычные расширяющиеся диффузоры с острыми входными кромками. В зависимости от коэффициента расхода  $\psi$  наблюдаются следующие режимы работы таких диффузоров (рис. 10.3).



I. При  $\psi < 1$  перед диффузором возникает отошедшая ударная волна. Струя сечением  $S_H < S_1$ , попадающая в диффузор, пересекает участок скачка, близкого к прямому. Дозвуковой поток  $\lambda'_1 = \frac{1}{\lambda_H}$  изоэнтропно

тормозится на участке между ударной волной и входным сечением диффузора до  $\lambda_1 < \lambda_1'$  в дозвуковом диффузоре, и затем до  $\lambda_2 < \lambda_1$ . При этом на поверхности струи между скачком и сечением 1-1 действует повышенное давление, вызванное центробежными силами частиц воздуха, движущегося по граничной (раздельной) поверхности. Проекция суммарной силы этого давления на ось x называется дополнительным сопротивлением диффузора.

II. При увеличении расхода воздуха до  $\psi = 1$  скачок уплотнения располагается непосредственно во входном сечении 1-1 диффузора, а внешний поток тормозится на косых скачках уплотнения, что соответствует минимальному внешнему сопротивлению диффузора.

На этом режиме потери в дозвуковом диффузоре больше чем при первом режиме за счет увеличения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  из-за расхода воздуха.

III. При увеличении объёмного расхода воздуха через сечение 2 диффузора вследствие повышения режима работы компрессора и соответствующего уменьшения  $p_2$  сверхзвуковая струя сечением  $S_H = S_1$  входит в диффузор, ускоряется в расширяющемся канале и ударно тормозится в более интенсивном скачке уплотнения внутри диффузора. Поэтому потери полного давления ещё возрастают  $\sigma_H < \sigma_1$ . На этом режиме  $\psi = 1$  и  $W_1 = W_H$ . Режим  $\psi > 1$  в сверхзвуковом полете не реализуется.

Коэффициент сохранения полного давления рассмотренного входного устройства ВРД определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_H^*} = \frac{p_1^*}{p_H^*} \frac{p_2^*}{p_1^*} = \sigma_{п.с.} \cdot \sigma_d$$

где  $\sigma_{п.с.} \cdot \sigma_d$  - коэффициенты сохранения полного давления в прямом скачке уплотнения и в дозвуковом диффузоре. Потери полного давления на прямом скачке уплотнения при  $M_H \leq 1,5$  невелики  $\sigma > 0,93$ . Это и позволяет с успехом применять такой простейший односкачковый диффузор.

### 10.3. Сверхзвуковые диффузоры

Потери полного давления на прямом скачке уплотнения, весьма малые при  $M_n$ , незначительно превосходящем единицу, резко увеличиваются с увеличением  $M_n$ . Уже при  $M_n = 2$  имеем  $\sigma = 0,72$ . Из-за таких потерь полного давления тяга ВРД уменьшалась бы примерно на 40% по сравнению с тягой ВРД при изоэнтропном сжатии и тогда эффективный полёт невозможен. Исследования показали, что волновые потери в сверхзвуковом диффузоре снижаются при замене сильного прямого скачка системой слабых косых скачков, за которыми скорость остается сверхзвуковой, с дальнейшим слабым прямым скачком. Последовательный ряд косых скачков возникает у поверхности торможения сверхзвукового диффузора, которые располагаются под углами  $\omega$  к сверхзвуковому потоку.



По расположению скачков уплотнения относительно плоскости входа входные устройства подразделяются на три типа:

- а) внешнего сжатия - косые скачки уплотнения располагаются перед плоскостью входа;
- б) внутреннего сжатия - часть скачков уплотнения располагаются внутри капала;
- в) смешанного сжатия - часть скачков уплотнения находится вне и часть - внутри канала.

Каждый тип воздухозаборника имеет свои преимущества и недостатки, которые здесь не рассматриваются. Отметим только, что из рис. 10.4 видно, что при одинаковой площади входа, воздухозаборник внешнего сжатия имеет максимальное внешнее сопротивление, а внутреннего – минимальное. Входные устройства в основном выполняются плоскими или осесимметричными. Число скачков системы выбирается из условия получения высокого значения коэффициентов сохранения полного давления  $\sigma$  при расчетном числе  $M_H$  полета во входом устройстве приемлемых габаритов, массы и выполнения регулирования с минимально-возможном количестве регулируемых элементов.

В оптимальной системе внешнего сжатия все скачки уплотнения должны сходиться на передней кромке обечайки (рис. 10.4). В этом случае обеспечивался максимальные значения  $\sigma_m$  расхода воздуха ( $\psi = 1$ ) и минимальное внешнее сопротивление.

Исследования показывают, что максимальное значение  $(\sigma_m)_{\max}$  для системы из  $m$  плоских скачков уплотнения, т.е. из  $(m - 1)$  косых скачков и одного замыкающего прямого:

$$(\sigma_m)_{\max} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{m-1} \sigma_m.$$

имеет место при одинаковой интенсивности всех косых скачков

$$\sigma_1 = \sigma_2 \dots \sigma_{(m-1)} \sigma_k.$$

Это значит, что для всех косых скачков оптимальной системы одинаковы нормальные составляете чисел  $M_{in}, \lambda_{in} = \frac{W_{in}}{Q_{i_{спн}}}$  повышение давления, температуры и плотности и увеличение энтропии, т.е.

$$M_{Hn} = M_{1n} = \dots = M_{(m-2)n}; \quad \frac{p_1}{p_H} = \frac{p_2}{p_1} = \dots = \frac{p_{m-1}}{p_{m-2}};$$

$$\frac{T_1}{T_H} = \frac{T_2}{T_1} = \dots = \frac{T_{m-1}}{T_{m-2}}; \quad \frac{\rho_1}{\rho_H} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \dots = \frac{\rho_{m-1}}{\rho_{m-2}};$$

$$S_1 - S_2 = S_3 - S_2 = \dots = S_{m-1} - S_{m-2}.$$

Замыкающий прямой скачек оптимальной системы при  $1,5 < M_H < 5$  немного слабее косых скачков:

$$M_{m-1} = 0,94 M_{Hn} = 0,94 M_H \sin \alpha_H.$$

Поэтому получаем:  $(\sigma_m)_{\max} = \sigma_k^{(m-1)} \sigma_{\Pi}$ .

Следовательно, расчет оптимальной системы скачков для заданного  $M_H$  состоит в определении величин углов наклона поверхности торможения  $\omega_i$  и углов фронтов косых скачков уплотнения  $\alpha_i$ , которыми определяется  $\sigma$  всех скачков системы и, наконец, величин  $(\sigma_m)_{\max}$ . Остальные геометрические размеры оптимальной системы определяется на основании заданного расхода воздуха, фокусировки скачков на обечайке и уравнения неразрывности.

Профиль диффузора рассчитывается для первого косого скачка значения  $\omega_1, \sigma_{k2}, M_1$  для различных  $\alpha_H$  при заданном  $M_H$ . По результатам расчётов строится график, по которому определяются оптимальные параметры компоновки. На диаграмме  $i-s$  сравниваются ударное сжатие воздуха на прямом скачке и в трехскачковой системе при одинаковых начальных условиях. Сжатие в каждом из слабых скачков системы сопровождается незначительным увеличением энтропии и снижением полного давления. Поэтому и суммарные потери в системе меньше чем для прямого скачка  $\sigma_{2k+\Pi} > \sigma_{\Pi}$ . В соответствии с этим статическое давление, плотность и кинетическая энергия воздуха после сжатия в системе скачков выше, а температура ниже, чем после сжатия в прямом скачке уплотнения.

Если  $M_H$  находится в пределах  $1,8 \dots 2,0$ , то используется двухскачковая система, если и пределах  $2 \dots 2,5$  - трехскачковая и так далее.

Оптимальная компоновка входного устройства соответствует только расчетному числу  $M_{Hp}$  и режиму работы двигателя. При неизбежных отклонениях  $M_H$  от  $M_{Hp}$  и изменениях режима работы двигателя компоновка

теряет оптимальность. Например, при  $M_H < M_{Hp}$  углы косых скачков увеличиваются и они отходят от кромки обечайки, превращаясь в отошедшую (выбитую) ударную волну. Это приводит к увеличению потерь, т.е. к уменьшению и к уменьшению расхода воздуха  $S_H < S_1, \psi < 1$ . Кроме того, взаимодействие ударной волны с пограничным слоем вызывает его отрыв и неустойчивую работу воздухозаборника (помпаж). Оптимальность системы нарушается и при  $M_H > M_{Hp}$ .

Для обеспечения оптимальной работы входного устройства при различных  $M_H$  и режимах работы двигателя устройства делают с регулируемыми элементами: изменение углов  $\omega$  установки поверхностей торможения, относительное осевое смещение обечайки и центрального тела, изменение проходных сечений или регулирование расхода воздуха перепуском, а также управление пограничным слоем.

При сверхзвуковом полёте в диффузоре дозвуковой поток за прямым скачком снова ускоряется в сужающемся канале до  $\lambda \approx 1$ , в горле воздухозаборника и до  $\lambda > 1$  расширяющемся канале и переходит в дозвуковой  $\lambda < 1$  на прямом скачке уплотнения. Только после этого дозвуковой поток тормозится в расширяющемся дозвуковом диффузоре до заданного  $\lambda_\beta \approx 0,5$  перед компрессором. При такой организации течения небольшие изменения режима работы двигателя и, следовательно, объемного расхода воздуха, сказываются только на положении этого прямого скачка и не нарушают расчетной системы скачков. Замыкающий скачок уплотнения играет положительную роль газодинамического регулятора постоянства массового расхода воздуха через двигатель при переменном объемном расходе за счёт изменения потерь.

Для уменьшения вредного влияния пограничного слоя на скачки уплотнения (отрыв, искажение) применяются различные способы управления им: слив, отсос, охлаждение поверхностей торможения.

## Глава 11 Математическое моделирование

### 11.1 Анализ уравнений движения жидкости и методов их решения

Механика жидкости и газа основана на справедливости утверждений классической механики Ньютона, термодинамики и гипотезы сплошности.

Первое утверждение предполагает, что изучаются движения со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, и рассматриваются макроскопические объекты, размеры которых существенно превосходят размеры микромира.

Второе утверждение предполагает, что в окрестности каждой точки жидкость находится в состоянии термодинамического равновесия или близком к нему, вследствие чего можно пользоваться термодинамическими законами.

И наконец, третье утверждение предполагает замену реальной жидкости (газа) с её дискретным молекулярным строением моделью сплошного распределения вещества по рассматриваемому объему. Согласно гипотезе сплошности жидкость моделируется непрерывной сплошной средой. С математической точки зрения это означает, что функции, характеризующие состояние среды, должны быть достаточно гладкими, т.е. непрерывными и дифференцируемы в пространстве и времени. Нарушение непрерывности допускается лишь на отдельных линиях или поверхностях. Гипотеза сплошности объединяет жидкости и газы в единую категорию текучих легко деформируемых сред.

Если в механике твердого тела рассматриваются как сосредоточенные, так и распределенные силы, то в жидкости имеют место только распределённые силы. Приложение к жидкости сосредоточенных сил ведет к ее разрыву.

Для характеристики массовых сил вводится вектор напряжения массовых сил  $J$ , имеющий размерность ускорения. Разлагая вектор  $J$  по координатным осям (ортам), получаем:

$$J = iX + jY + kZ,$$

где  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  – проекции напряжения массовых сил на оси координат (единичные массовые силы), а  $i$ ,  $j$ ,  $k$  – единичные орты.

При рассмотрении поверхностных сил вводится вектор напряжения поверхностной силы в точке жидкости  $p_n$ , численно равный давлению.

В общем случае  $p_n$  зависит не только от положения точки на поверхности (координат  $x, y, z$ ) и времени  $t$ , но и от ориентации в пространстве площадки  $\Delta S$ , т.е.

$$\vec{p}_n = (x, y, z, t, \vec{n})$$

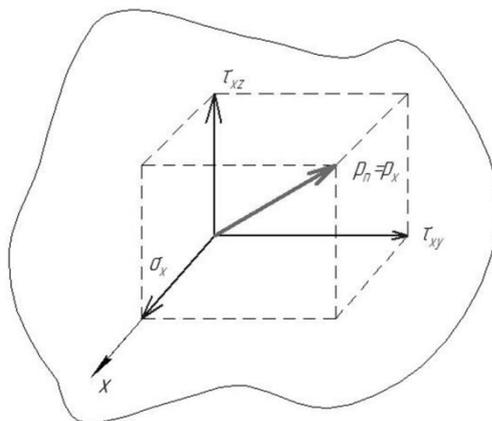


Рис. 11.1. Элементарный объем

Следовательно, напряжение  $p_n$ , вообще говоря, не является обычным вектором, так как может принимать различные значения в зависимости от положения площадки. Если зафиксировать ее положение, то  $p_n$  будет обычным вектором, который можно разложить на составляющие по координатным осям. Пусть, например, выбрана площадка, перпендикулярная оси  $Ox$ . Вектор напряжения  $p_n = p_x$ , в общем случае не совпадает с направлением нормали  $n$  (в данном случае с направлением оси  $Ox$ ) и может быть разложен на нормальную и касательные  $\tau_{xy}, \tau_{xz}$  составляющие  $p_x = i\sigma_x + j\tau_{xy} + k\tau_{xz}$ . Второй индекс у касательных напряжений указывает ось, в направлении которой проецируется напряжение  $\tau$ .

Располагая площадки перпендикулярно к осям  $y$  и  $x$ , получим еще два разложения напряжения:

$$p_y = i\tau_{yx} + j\sigma_y + \tau_{yz},$$

$$p_z = i\tau_{zx} + j\tau_{zy} + k\sigma_z.$$

При произвольном расположении площадки с внешней нормалью  $n$  вектор  $p_n$ , может быть выражен через векторы  $p_x, p_y, p_z$  следующим соотношением:

$$p_n = np_{nn} = p_x \cos(nx) + p_y \cos(ny) + p_z \cos(nz)$$

Проецируя  $p_n$  на координатные оси, получаем

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz), \\ p_{ny} &= \tau_{xy} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny) + \tau_{zy} \cos(nz), \\ p_{nz} &= \tau_{zx} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) + \sigma_z \cos(nz). \end{aligned}$$

Физическую величину, характеризуемую в данной точке вектором  $p_n$ , который принимает различные значения в зависимости от ориентации площадки, называют тензором. Таким образом, поверхностное напряжение определяется девятью скалярными величинами  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ . Тензор напряжений в произвольной точке пространства обладает свойством симметрии (теорема Коши о взаимности касательных напряжений), то есть  $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ .

Следовательно, поверхностное напряжение определяется не девятью, а шестью скалярными величинами.

Возникновение в жидкости касательных напряжений обусловлено ее вязкостью и движением (относительным сдвигом).

В неподвижной жидкости, а также в движущейся жидкости, лишенной вязкости (идеальная жидкость), касательные напряжения равны нулю ( $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ) и поверхностные силы определяются только нормальными напряжениями  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , не зависящими от ориентации площадки, т.е.  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p_{nn}$ .

Величину  $p$ , равную любому нормальному напряжению с обратным знаком, называют напряжением давления или просто давлением.

$$p = -\sigma_x = -\sigma_y = -\sigma_z = -p_{nn}.$$

Уравнения движения Эйлера для идеальной жидкости в декартовой системе координат имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dc_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \\ \frac{dc_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y \\ \frac{dc_z}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial c_x}{\partial t} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \\ \frac{\partial c_y}{\partial t} + c_x \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_y}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y \\ \frac{\partial c_z}{\partial t} + c_x \frac{\partial c_z}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_z}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Рассматриваемые уравнения (11.1), (11.2) представляют собой математическое выражение закона сохранения количества движения в каждой точке жидкого элемента: скорость изменения вектора количества движения равна сумме всех массовых и поверхностных сил, действующих на жидкий элемент.

Система дифференциальных уравнений движения Эйлера (11.2) с частными производными от неизвестных функций (проекции вектора скорости  $c_x, c_y, c_z$ , плотность  $\rho$  и давление  $p$ ) не замкнута в том смысле, что число неизвестных функций превышает число уравнений. Кроме того, система уравнений нелинейна: неизвестные функции и их частные производные входят в виде произведений.

Для замыкания системы воспользуемся дифференциальным уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho c_z)}{\partial z} = 0. \quad (11.3)$$

Это уравнение отражает закон сохранения массы жидкости и условие сплошности, поэтому имеет место не только для идеальной, но и для вязкой жидкости.

Для несжимаемой жидкости ( $p = \text{const}$ ) из (11.3) имеем:

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0. \quad (11.4)$$

Уравнения движения несжимаемой жидкости, записанные с учетом сил вязкости, существенно усложняются по сравнению с системой уравнений (11.2):

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial c_x}{\partial t} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_x}{\partial z} \right) &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2} \right); \\ \rho \left( \frac{\partial c_y}{\partial t} + c_x \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_y}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_y}{\partial z} \right) &= \\ &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 c_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial z^2} \right); \quad (11.5) \\ \rho \left( \frac{\partial c_z}{\partial t} + c_x \frac{\partial c_z}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_z}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} \right) &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Написанные уравнения движения (11.5), называемые уравнениями Навье-Стокса, при использовании оператора Лапласа объединяются в одно векторное уравнение

$$\rho \frac{d\vec{c}}{dt} = \vec{J} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{c}.$$

Для математической формулировки задачи уравнения Эйлера и Навье-Стокса необходимо дополнить уравнением неразрывности и другими зависимостями. Для решения конкретных задач необходимо определить начальные и граничные условия. Для несжимаемой вязкой жидкости граничные условия вытекают из гипотезы прилипания жидкости к обтекаемой поверхности, согласно которой как нормальная, так и тангенциальная составляющие скорости на поверхности обтекаемого тела обращаются в ноль. Опыты показывают, что эта гипотеза хорошо соответствует действительности и нарушается только при обтекании твердых поверхностей сильно разреженными газами.

Для однородной жидкости при отсутствии свободной поверхности массовые силы уравновешиваются гидростатической подъёмной силой и, если под давлением  $p$  понимать разницу между действительным давлением и давлением в состоянии покоя, эти силы выпадают из уравнений движения. Тогда имеем:

$$\rho \frac{d\vec{c}}{dt} = -\text{grad} p + \mu \Delta \vec{c}.$$

Дифференциальные уравнения движения Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости содержат те же зависимые переменные Эйлера:  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$ ,  $p$ , которые входят в дифференциальные уравнения для идеальной несжимаемой жидкости. Различие между этими уравнениями заключается только в том, что в правых частях уравнений системы появилось дополнительное слагаемое, равное произведению динамического коэффициента вязкости  $\mu$  на оператор Лапласа от соответственной проекции вектора скорости.

Таким образом, введение вязкости привело к повышению порядка частных производных от проекций вектора скорости, а также к изменению граничных условий. Если для идеальной жидкости достаточно было на обтекаемой твердой поверхности условие непроницаемости и безотрывности частиц жидкости, то для вязкой несжимаемой жидкости необходимо условие прилипания частиц жидкости к непроницаемой твердой поверхности, т.е. обращение в нуль полной скорости.

На основе выше изложенного следует, что уравнения движения Эйлера и Навье-Стокса в общем случае проинтегрировать не удастся.

Однако при некоторых дополнительных условиях такое интегрирование оказывается возможным. Так, простейшие задачи о течении идеальной жидкости эффективно решаются с помощью методов теории функций комплексного переменного. Точные решения уравнений Навье-Стокса для некоторых частных случаев тоже имеются. Эти решения относятся к задачам, где все инерционные члены в левой части уравнений исчезают. В частности, указанным свойством обладают так называемые слоистые течения, признаком которых является наличие только одной составляющей скорости. Если этой составляющей является скорость  $c_x$ , а составляющие  $c_y$  и  $c_z$  равны нулю, то из уравнения неразрывности следует, что  $\frac{\partial c_x}{\partial x} = 0$  и, следовательно,  $c_x$  от координаты  $x$  не зависит. Таким образом, для слоистых течений имеем

$$c_x = c_x(y,z), c_y = 0, c_z = 0, \frac{dp}{dy} = 0, \frac{dp}{dz} = 0$$

и вместо полной нелинейной системы уравнений (11.2) получим для установившегося (стационарного) течения линейное дифференциальное уравнение относительно скорости  $c_x(y,z)$

$$\frac{dp}{dy} = \mu \left( \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2} \right)$$

Заметим, что, поскольку в соотношении слева стоит функция координаты  $x$ , а справа – функция координат  $y$  и  $z$ , то равенство указанных функций возможно только при условии постоянства градиента давления, т.е.  $\frac{dp}{dz} = \text{const}$ .

С использованием уравнения получены точные решения уравнений движения Навье-Стокса для случаев: плоскопараллельного течения в канале, ограниченном двумя параллельными плоскими стенками; течения Куэтта и слоистого движения несжимаемой жидкости в трубах. В первом случае течения скорость  $c_x$  не зависит от координаты  $z$ . Течение Куэтта имеет место между двумя параллельными пластинами, из которых одна движется с постоянной скоростью  $c_{x0}$ . Этот случай отличается от предыдущего только граничными условиями. Слоистое движение несжимаемой жидкости в трубах обладает осевой симметрией. При этом решение задачи упрощается, если использовать уравнения движения Навье-Стокса, записанные в цилиндрических координатах.

Применение уравнений движения Навье-Стокса к другим разнообразным случаям течений вязкой несжимаемой жидкости создавало большие трудности

из-за их нелинейности. Это вынуждало многих исследователей изыскивать возможности применения не полных точных уравнений движения, а соответственно упрощенных приближенных дифференциальных уравнений.

Например, для некоторых задач инерционные силы могут быть очень малыми по сравнению с силами вязкости. Отбрасывая в уравнениях все члены в левой части, вместо нелинейной системы приходим к неоднородным линейным уравнениям Пуассона, решения которых известны. Этот путь линеаризации наиболее прост, но применим к очень медленным ползущим течениям.

Другой пример упрощения уравнений относится к течениям при больших числах Рейнольдса. В этом случае можно воспользоваться методом сравнительных оценок членов, входящих в уравнения Навье–Стокса, и на их основе попытаться упростить исходную систему, опустив члены, которые имеют относительно малый порядок. Подобное упрощение было предложено Прандтлем в 1904 г. для области течения, расположенной непосредственно вблизи обтекаемой поверхности. Это послужило основой для создания и дальнейшего развития теории пограничного слоя. Дифференциальные уравнения пограничного слоя следуют из уравнений Навье–Стокса.

Турбулентное движение является наиболее распространенной формой движения жидкостей и газов в природе и в технических устройствах. Однако достаточно универсальных и обоснованных методов расчета турбулентных течений не существует, несмотря на уже более чем вековую историю развития исследований турбулентности.

Полуэмпирические теории турбулентности применяются главным образом для течений типа пограничного слоя (пристеночных и струйных). Задачи со сложной внутренней структурой (пространственные течения, отрывные течения и др.) с помощью полуэмпирических теорий практически не рассчитываются. Это объясняется следующими причинами: сложностью математического описания механизма самого явления, ограниченностью возможностей традиционного направления в теории турбулентности, а также отсутствием необходимых детальнейших экспериментальных данных. Очевидно, необходимы новые подходы при построении теории турбулентности.

В настоящее время существуют две точки зрения математического описания развитого турбулентного течения. Согласно первой из них, базирующейся на основополагающих идеях О. Рейнольдса, за основу принимаются уравнения Навье–Стокса, видоизмененные соответствующим образом (уравнения движения Рейнольдса) и дополненные недостающими соотношениями турбулентного движения. Эта точка зрения является доминирующей. Вторая точка зрения заключается в том, что турбулентное

движение является вероятностным процессом, а следовательно, и уравнения, описывающие его, должны составляться на статистической основе.

Краткий анализ на примере уравнений движения жидкости позволяет отметить, что при решении сложных нелинейных задач деформируемой сплошной среды классические методы математического анализа непрерывных функций для получения количественной информации оказываются в большинстве своем непригодными.

## 11.2 Краткие сведения о численных методах, используемых в CFD пакетах

Как известно течение жидкостей может быть описано системой частных дифференциальных (или интегрально-дифференциальных) уравнений, которая не может быть решена аналитически, за исключением небольшого числа частных случаев. Ее приближенное решение в цифровой форме, может быть получено *методом дискретизации*, который аппроксимирует дифференциальные уравнения системой алгебраических уравнений. Они тогда могут быть решены с помощью компьютера. Аппроксимации применены к небольшим областям в пространстве и/или по времени. Таким образом, числовое решение обеспечивает результаты в *дискретных точках* в пространстве и времени. Точность числовых решений зависит от степени совершенства используемых методов дискретизации.

При использовании численных методов математической физики всегда необходимо помнить тот факт, что *результаты численных решений всегда приближительны* [1]. Есть несколько причин для расхождений между результатом расчета и реальным физическим процессом. Ошибки накапливаются в каждой части процесса, используемого для получения численных результатов:

- исходные дифференциальные уравнения содержат допущения, обусловленные идеализацией реальных физических процессов;
- алгебраические уравнения содержат ошибки аппроксимации, полученные в процессе дискретизации дифференциальных уравнений;
- при решении алгебраических уравнений используются итерационные методы.

Когда расчетные уравнения имеют точные аналитические решения (например, уравнения Навье-Стокса для несжимаемых Ньютонических жидкостей), результаты расчета могут быть получены с любой желаемой степенью точности. Однако, для многих физических явлений, таких как турбулентность, горение, многофазные течения, точные уравнения или

невозможно сформулировать, или невозможно получить их точное численное решение. Если бы даже численное решение уравнения было точным с вычислительной точки зрения, оно не являлось бы правильным представлением действительности. Чтобы *проверить адекватность* моделей, необходимо привлечение экспериментальных данных [1,8,12].

Ошибки дискретизации могут быть уменьшены при использовании более точной интерполяции, аппроксимации или за счет осреднения параметров течения в пределах меньших областей, но это увеличивает время и затраты на получение решения. Поэтому для применения численных методов в инженерных задачах необходимо найти компромисс.

Компромиссы также необходимы при решении дискретизованных уравнений. Прямое моделирование, с помощью которого можно получить точное решение, на практике используется редко, поскольку оно является слишком дорогостоящим в вычислительном плане. Итерационные методы решения распространены больше, но при их использовании необходимо принимать во внимание ошибки, обусловленные неполной сходимостью итерационного процесса.

Визуализация численных решений с использованием векторов, контуров или других видов графики и видео важна для интерпретации результатов. Они являются самым эффективным средством интерпретации огромного количества данных, полученных в результате расчета. Однако, есть опасность, что ошибочное решение может выглядеть правдоподобно, но, возможно, не соответствовать реальным процессам! Пользователи коммерческих программ *CFD* должны быть особенно внимательны, поскольку оптимизм продавцов программ по поводу их возможностей очень велик. Замечательные цветные картинки производят большое впечатление, но совершенно бесполезны, если они количественно не соответствуют эксперименту.

## 11.3 Компоненты численного метода

### 11.3.1 Математическая модель

Отправная точка любого численного метода – математическая модель. Она представляет собой систему дифференциальных или интегрально-дифференциальных уравнений в частных производных и граничных условий. Каждый выбирает соответствующую модель для целевого применения (несжимаемый, вязкий, турбулентный; двух - или трехмерный поток и т.д.). Эта модель может включать упрощения точных законов сохранения. Метод решения обычно создается с учетом специфики системы уравнений.

### 11.3.2 Метод дискретизации

После выбора математической модели нужно выбрать подходящий метод дискретизации, то есть метод аппроксимации дифференциальных уравнений системой алгебраических уравнений для переменных в некотором множестве дискретных местоположений (точек) в пространстве и времени. Есть много методов, из которых наиболее известны:

- Метод конечных разностей (МКР (*FD*)), подробно описан в работах [1,2,4,12]. Преимуществом метода является его простота. Метод конечных разностей используется программами *FlowEr*, ЦИАМ, ЦАГИ и др. [7].
- Метод конечных элементов (МКЭ), подробно описан в работах [1,5,9]. Метод конечных элементов используется программами *Flotran*, *Flow Plus*, *Cosmos Flow* и др. [7].
- Метод конечных объемов (МКО (*FV*)). Классическое описание этого метода приведено в работе [8]. Этот метод используется программами *CFX*, *Fluent*, *StarCD* и др. [7].

Использование в CFD других методов, таких как спектральные схемы, метод предельного элемента ограничено специальными классами задач.

Каждый метод приводит к одному и тому же решению, если используется относительно густая сетка. Однако, некоторые методы являются более подходящими для конкретных классов задач чем другие.

### **11.3.3. Система координат**

Уравнения сохранения могут быть написаны в различных формах, в зависимости от системы координат и используемых базисных векторов. Например, можно выбрать СК: декартову, цилиндрическую, сферическую, криволинейную, прямоугольную или непрямоугольную, которая может быть стационарной или перемещающейся. Выбор СК зависит от характера конкретной решаемой задачи. На выбор СК также может влиять метод дискретизации и тип конечноэлементной сетки [1,4,8,12].

Кроме того, нужно выбрать точку отсчета (начало течения), в которой будут определены векторы и тензоры (постоянные или переменные, ковариантные или контравариантные, и т.д.).

### **11.3.4. Расчетная конечноэлементная сетка**

Положения дискретных точек, в которых вычисляются переменные, определяются расчетной конечноэлементной сеткой, которая является дискретным представлением геометрической области течения. Она делит расчетную область на конечное число подобластей (элементы, контрольные объемы и т.д.). Расчетная сетка делится на структурированные и неструктурированные.

Классификация неструктурированных расчетных сеток приведена на рис 1.1.

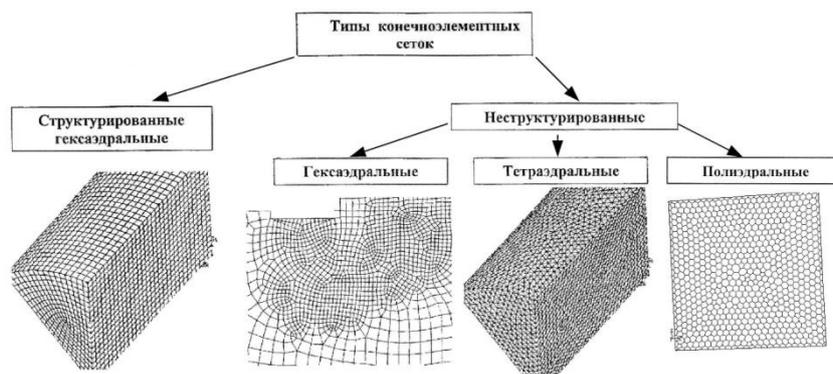


Рис. 11.2. Классификация конечноэлементных расчетных сеток

Структурные (регулярные) сетки состоят из рядов линий координатной сетки, элементы одного рода не пересекают друг друга и пересекают каждый элемент других родов только однажды. Это позволяет линии данного множества пронумеровать последовательно. Позиция любой сеточной точки (или контрольного объема) в пределах области однозначно определена индексом в два (в двумерном поле) или в три номера (в трехмерном поле), например  $(i, j, k)$ . Это самая простая сеточная структура, так как она логически эквивалентна декартовой системе координат. У каждой точки есть четыре самых близких соседа в двумерном пространстве и шесть в трехмерном; один из индексов каждого соседа точки  $P$  (индексы  $i, j, k$ ) отличается на  $\pm 1$  от соответствующего индекса  $P$ . Это задание соседних связей упрощает программирование и у матрицы системы алгебраических уравнений есть регулярная структура, которая может использоваться в создании метода решения. Недостатком структурированных сеток является то, что они могут быть построены только для геометрически простых областей решения. Другой недостаток заключается в трудности управления распределением сеточных точек: большая концентрация точек в одной области для обеспечения точности результатов расчета создает излишне малый интервал в других частях области решения и обуславливает неоправданные затраты ресурсов. Эта проблема

осложняется в трехмерных задачах. Длинные тонкие ячейки также могут также затруднять сходимость решения.

### **11.3.5 Конечные аппроксимации**

После выбора типа сетки нужно выбрать алгоритм аппроксимации, которые будут использоваться в процессе дискретизации. В методе конечных разностей должны быть выбраны аппроксимации для производных в сеточных точках. В методе конечных элементов нужно выбрать функции формы (элементы) и весовые функции.

Их выбор влияет на точность аппроксимации. Это также касается трудности разработки метода решения. Более точные аппроксимации включают больше узлов и дают более полные матрицы.

### **11.3.6 Метод решения**

Результатом дискретизации является система с большим количеством нелинейных алгебраических уравнений.

Для нестационарных потоков применяются методы, основанные на использовании в задачах с начальными условиями дифференциальных уравнений с шагом по времени. Каждый раз в решении эллиптической задачи должен быть задан шаг по времени.

Задачи в стационарной постановке обычно используют решение с псевдошагом по времени, или эквивалентную итерационную схему. Так как уравнения нелинейны, для их решения используется итерационная схема. Эти методы используют последовательную линеаризацию уравнений, и получающиеся линейные системы почти всегда решаются итерационными методами.

Выбор метода решения зависит от типа сетки и количества узлов, выбранных для аппроксимации производных в каждом алгебраическом уравнении [1,8,12,17].

### 11.3.7 Критерии сходимости

Для итерационного метода нужно установить критерии сходимости. Обычно, выделяют два уровня итераций: внутренние итерации, в пределах которых решается линейное уравнение, и внешние итерации, когда решение связано с нелинейностью и взаимосвязью уравнений. Очень важно решение, когда необходимо остановить итерационный процесс с точки зрения точности и эффективности.

## 11.4 Свойства численных методов решения

### 11.4.1 Надежность

Дискретизация осуществляется тем точнее, чем ближе интервал сетки стремится к нулю. Разность между дискретизованным уравнением и точным решением называют *погрешностью метода*. Она обычно оценивается заменой всех значений дискретной аппроксимации в узлах разложением в ряд Тейлора в каждой отдельной точке. В результате восстанавливается оригинальное дифференциальное уравнение плюс остаточный член, который представляет погрешность метода. Для обеспечения *надежности* метода, погрешность метода должна стремиться к нулю, когда интервал сетки  $\Delta t \rightarrow 0$  и/или  $\Delta x_i \rightarrow 0$ . Погрешность метода обычно пропорциональна степени интервала сетки  $\Delta x_i$  и/или шага по времени  $\Delta t$ . Если самый важный член пропорционален  $(\Delta x)^n$  или  $(\Delta t)^n$  метод называется аппроксимацией  $n$ -го порядка. Для надежности требуется чтобы  $n > 0$ . В идеале, все члены должны быть дискретизованы с аппроксимациями одного порядка точности; однако, некоторые члены (например, конвективные члены в потоках с высоким числом Рейнольдса или диффузионные члены в потоках с низким числом Рейнольдса), могут быть доминирующими в данном потоке, и это может потребовать расчета с большей точностью, чем других.

Некоторые методы дискретизации приводят к погрешностям метода, которые являются функциями отношения  $\Delta x_i$  к  $\Delta t$  или наоборот. В таком случае, требование надежности выполняется только при условии когда  $\Delta x_i$  и  $\Delta t$  должны уменьшаться так, чтобы соответствующее отношение стремилось к нулю.

Даже если аппроксимации последовательны, это не обязательно означает, что решение дискретизованной системы уравнений станет точным решением дифференциального уравнения при неограниченном уменьшении размера шага. Для того, чтобы это произошло, метод решения должен быть *устойчивым*.

#### **11.4.2 Устойчивость**

Решение численным методом, устойчиво, если оно не увеличивает (не накапливает) ошибки, которые появляются в процессе решения. Для нестационарных задач (задач с зависимостью от времени) устойчивость гарантирует, что метод дает конечное решение всякий раз, когда решение точного уравнения ограничено по времени. Для итерационных методов устойчивый метод - тот, который не расходится. Устойчивость может быть трудно диагностируемой, особенно когда присутствуют граничные условия и нелинейность. Поэтому проводят исследование устойчивости метода для линейных задач с постоянными коэффициентами без граничных условий. Опыт показывает, что результаты, полученные таким образом, могут часто применяться к более сложным задачам, но есть и исключения.

Наиболее широко используемый метод в изучении устойчивости численных схем – метод Неймана.

#### **11.4.3 Сходимость**

Численный метод обладает сходимостью, если решение дискретизованных уравнений стремится к точному решению дифференциальных

уравнений, когда интервал сетки стремится к нулю. Для линейных задач с начальными условиями *простая теорема эквивалентности* (Richtmyer и Morton, 1967) гласит, что "сформулированная должным образом линейная задача с начальными условиями и аппроксимациями конечными разностями, которая удовлетворяет условиям надежности и устойчивости - необходимое и достаточное условие для сходимости". Очевидно, надежная схема бесполезна, если метод решения не сходится.

Для нелинейных задач, которые находятся под влиянием граничных условий, устойчивость и сходимость метода являются трудными для идентификации. Поэтому сходимость обычно проверяется с использованием численных экспериментов, то есть повторением вычислений на последовательно модернизируемых сетках. Если метод устойчив и если все аппроксимации, используемые в процессе дискретизации совместимы, решение сходится к *независящему от сетки решению*. Для достаточно больших размеров сетки величиной сходимости управляют в соответствии с основным компонентом погрешности метода.

#### **11.4.4 Выполнение законов сохранения**

Так как уравнения системы Навье - Стокса являются законами сохранения, численная схема должна соблюдать эти законы, как на локальном, так и на глобальном уровне. Это означает, что, в стационарной задаче количество вещества, покидающего замкнутый объем равно количеству вещества, входящему в объем. Если используется жесткая форма уравнений сохранения и метод конечных объемов, это гарантирует выполнение законов сохранения для каждого индивидуального контрольного объема и для расчетной области в целом. Другие методы дискретизации могут быть менее точны в выполнении законов сохранения.

Это важное свойство метода решения, так как оно определяет ошибку решения. Если обеспечены сохранения массы, импульса и энергии, ошибка в

расчете может быть только в их ненадлежащем распределении по расчетной области.

#### **11.4.5 Ограничения при расчете**

Численные решения должны лежать в пределах надлежащих границ. Физически неотрицательные параметры, такие как плотность, кинетическая энергия турбулентности, должны быть всегда положительными. Другие параметры, такие как концентрация, должны лежать в интервале между 0 % и 100 %. В отсутствии источников некоторые уравнения (например, уравнение теплопроводности для температуры, когда источники теплоты отсутствуют) требуют, чтобы минимальные и максимальные значения переменной находились в диапазоне величин, заданных на границах области. Эти условия должны быть учтены численной аппроксимацией.

Соблюдение этих ограничений трудно гарантировать. Ниже будет показано, что только некоторые схемы первого порядка гарантируют соблюдение этого условия. Схемы более высокого порядка могут приводить к неограниченному изменению результатов решения. Это обычно случается только на слишком крупных сетках. Таким образом, обычно результаты решения, выходящие за пределы указанных ограничений, являются индикатором того, что ошибки решения являются большими, и сетка нуждается в некотором усовершенствовании (по крайней мере, локально).

#### **11.4.6 Адекватность**

Модели сложных явлений, описание которых включает турбулентность, горение или течение многофазного рабочего тела должны гарантировать получение физически реалистичных решений. Это не численная проблема *по существу*, но неверные модели могут привести к нефизичным решениям или расходящемуся итерационному процессу.

### 11.4.7 Точность

Численные методы расчета течений жидкости и теплообмена дают только *приближенные* решения. В дополнение к ошибкам, которые могли быть допущены в ходе разработки алгоритма решения или в ходе постановки граничных условий, результаты численных решений всегда включают три вида систематических ошибок:

- *ошибки моделирования*, которые определены как разность между результатами эксперимента и результатами решения математической модели;
- *ошибки дискретизации*, определенные как разность между точным решением дифференциальных уравнений сохранения и точным решением алгебраической системы уравнений, полученных дискретизацией дифференциальных уравнений.
- *итерационные ошибки*, определенные как разность между итерационным и точным решением системы алгебраических уравнений.

Итерационные ошибки часто называют *ошибками сходимости*. Однако термин *сходимость* используется не только применительно к несовершенству итерационной процедуры, но также определяется сходимостью численных решений в независимости от сетки и связан с ошибкой дискретизации.

Важно знать о существовании этих ошибок, и более того, отличать одну от другой. Различные ошибки могут компенсировать друг друга так, что решение, полученное на крупной сетке, может согласовываться лучше с экспериментом, чем решение на более мелкой сетке - которое, по определению, должно быть более точным.

Ошибки моделирования зависят от допущений, сделанных при получении физических уравнений для переменных. Ими можно пренебречь при исследовании ламинарных потоков, так как уравнения Навье-Стокса представляют достаточно точную модель потока. Однако, для турбулентных течений, двухфазных потоков, горения и т.д., ошибки моделирования могут

быть очень значительными. То есть даже точное решение уравнений может быть *качественно* неверно. Ошибки моделирования также возможны из-за упрощения геометрии – области решения, а также из-за упрощения граничных условий и т.д. Эти ошибки не известны сразу; их оценка может быть сделана только в результате сравнения решения, в котором дискретизация и ошибки сходимости незначительны с точными экспериментальными данными или с данными, полученными более точными моделями (например, данными, полученными в результате прямого численного моделирования турбулентности, и т.д.). Это сравнение очень важно для управления процессом сходимости и оценки ошибок дискретизации, для создания моделей физических явлений.

## 11.5 Метод конечных объемов

### 11.5.1 Введение

При использовании метода конечных объемов, область решения делится сеткой на конечное число небольших контрольных объемов, которая, в отличие от метода конечных разностей, определяет границы контрольного объема, а не вычислительные узлы.

Метод конечных объемов использует как отправную точку интегральную форму уравнения сохранения:

$$\int_S \rho \phi v \cdot n dS = \int_S \tilde{A} \text{grad } \phi \cdot n dS + \int_{\Omega} q_{\phi} d\Omega \quad (11.1)$$

Классический метод должен определить контрольные объемы сеткой и назначить вычислительный узел в центре контрольного объема. Однако, для структурированных сеток также возможно вначале определить расположение узлов, а затем создать контрольные объемы вокруг них, так, чтобы грани контрольного объема лежали на середине между узлами (см. рис. 11.3). Узлы, на которые наложены граничные условия, показаны как черные точки.

Преимущество первого метода состоит в том, что величина узла

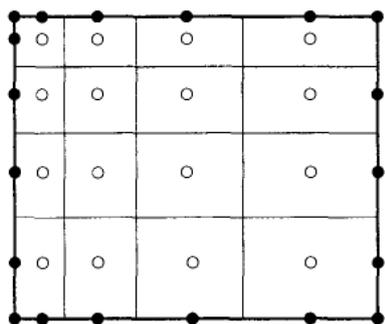


Рис. 11.3. Узлы, центрированные в контрольных объемах [17]

представляет среднюю величину по всему объему контрольного объема с более высокой точностью (второго порядка) чем во втором методе, так как узел расположен в средней точке контрольного объема. Преимущество второго метода состоит в том, что аппроксимации производных по граням контрольного объема более точны на середине грани между двумя узлами. На практике чаще используется первый

вариант.

Принципы дискретизации одни и те же для всех вариантов. Единственное, что нужно принять во внимание – это отношение между различными местоположениями (точками) в пределах объема интегрирования.

Интегральное уравнение сохранения (1.1) относится к каждому контрольному объему, так же как и к области решения в целом. Если суммировать уравнения для всех контрольных объемов, то получится глобальное уравнение сохранения, так как интегралы по поверхностям и по внутренним граням контрольного объема уравниваются. Таким образом, глобальное сохранение встроено в метод, что обеспечивает ему одно из главных преимуществ.

Чтобы получить алгебраическое уравнение для специфического контрольного объема, поверхностные и объемные интегралы должны быть аппроксимированы по методу наименьших квадратов.

### 11.5.2 Аппроксимация интегралов по поверхностям

На рисунках 1.3 и 1.4 показаны типичные двухмерные и трехмерные контрольные объемы в декартовой системе координат. Поверхность контрольного объема состоит из четырех (в двухмерной постановке) или

шести (в трехмерной) граней плоскостей, обозначенных строчными буквами, соответствующими их направлению (*e*, *w*, *n*, *s*, *t*, и *b*) относительно центрального узла (*P*). Двухмерный вариант может быть принят как частный случай трехмерного, в котором зависимые переменные независимы от *z*.

Поток через границу контрольного объема – это сумма интегралов по четырем (в двухмерном случае) или шести (в трехмерном) граням контрольного объема:

$$\int_S f dS = \sum_k \int_{S_k} f dS, \quad (11.2)$$

где *f* компонент конвективного  $\rho \phi v \cdot n$  или диффузионного ( $\bar{A} \text{grad } \phi \cdot n$ ) вектора потока в направлении, нормальном к грани контрольного объема.

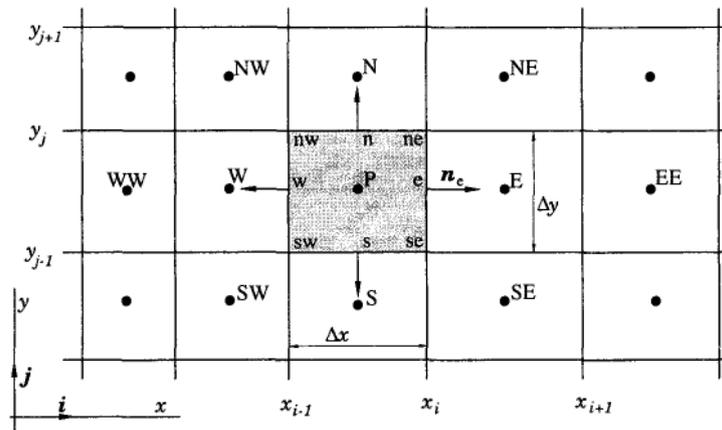


Рис. 11.4. Типичный двухмерный контрольный объем в декартовой системе координат [17]

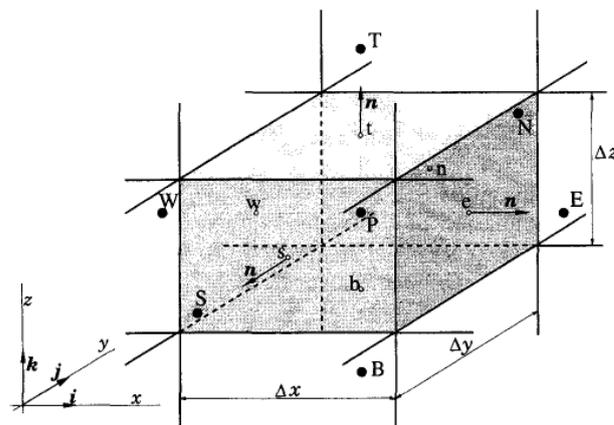


Рис. 11.5. Типичный трехмерный контрольный объем в декартовой системе координат [17]

Поскольку скоростное поле и свойства жидкости приняты известными, единственная неизвестная переменная –  $\varphi$ . Если поле скоростей не известно – значит это более сложная задача, включающая двойные нелинейные уравнения.

Для поддержания уравнения сохранения важно, чтобы контрольные объемы не накладывались друг на друга; каждая грань контрольного объема является единственной для двух контрольных объемов, которые лежат с обеих сторон.

В дальнейшем, будет рассмотрена только грань 'e' типичная для двумерного контрольного объема показанного на рис. 11.4. Аналогичные выражения могут быть получены для всех граней, делая соответствующие подстановки индекса.

Чтобы точно вычислить интеграл по поверхности в уравнении (11.2), единственное, что нужно знать - это подынтегральное выражение  $f$  по всей поверхности  $S_e$ , которое не известно. Как только значения в узлах  $\varphi$  (центр контрольного объема) будут вычислены, аппроксимация может быть возможна. Это лучше всего сделать, используя два уровня аппроксимации:

- интеграл аппроксимирован в терминах переменных значений в одном или более местоположениях на грани ячейки;
- номинальные значения ячейки аппроксимированы в терминах узлового (центра контрольного объема) значения.

Самая простая аппроксимация по интегралу - это правило середины: интеграл аппроксимирован как произведение подынтегрального выражения в центре грани ячейки (который является самостоятельно аппроксимацией к среднему значению по поверхности) и области грани ячейки:

$$F_e = \int_{S_e} f dS = \bar{f}_{eS_e} \approx f_{eS_e} \cdot \quad (11.3)$$

Эта аппроксимация интеграла обеспечивает значение  $f$  в местоположении 'e' и имеет точность второго порядка.

Так как значение  $f$  не доступно в центре грани ' $e$ ', оно должно быть получено интерполяцией. Чтобы сохранить точность второго порядка аппроксимации правила середины поверхностного интеграла, значение  $f_e$  должно быть вычислено с точностью, по крайней мере второго порядка.

Другая аппроксимация второго порядка поверхностного интеграла для двухмерного случая – правило трапеций:

$$F_e = \int_{S_e} f dS \approx \frac{S_e}{2} (f_{ne} + f_{se}). \quad (11.4)$$

В этом случае необходимо оценить поток в углах контрольного объема.

Для аппроксимации более высокого порядка поверхностных интегралов поток должен быть оценен в более чем двух точках. Аппроксимация четвертого порядка – правило Симпсона, которое оценивает интеграл по  $S_e$  как:

$$F_e = \int_{S_e} f dS \approx \frac{S_e}{6} (f_{ne} + 4f_e + f_{se}). \quad (11.5)$$

Здесь значения  $f$  необходимо знать в трех точках: в центре грани ' $e$ ' и двух углах ' $ne$ ' и ' $se$ '. Чтобы сохранить точность четвертого порядка, эти значения должны быть получены интерполяцией узловых значений, по крайней мере столь же точных как правило Симпсона.

В трехмерном случае, правило середины – самая простая аппроксимация второго порядка. Аппроксимации более высокого порядка, которые требуют подынтегрального выражения в расположениях кроме центра грани ячейки (например, углах и центрах краев) возможны, но они являются более трудными для осуществления.

Если у вариации  $f$ , как предполагается, есть некоторая специфическая простая форма (например, интерполяционный многочлен), интегрирование сделать легко. Точность аппроксимации тогда зависит от порядка функций формы.

### 11.5.3 Аппроксимация интегралов по объему

Некоторые переменные в исходных дифференциальных уравнениях требуют интегрирования по всему контрольному объему. Самая простая аппроксимация второго порядка точности должна заменить интеграл по объему произведением среднего значения подынтегрального выражения и объема контрольного объема и аппроксимировать форму как значение в центре контрольного объема:

$$Q_p = \int_{\Omega} q d\Omega = \bar{q} \Delta\Omega \approx q_p \Delta\Omega, \quad (11.6)$$

где  $q_p$  замещает значение  $q$  в центре контрольного объема. Это количество легко вычисляется; так как все переменные доступны в узле  $P$ , и нет необходимости в интерполяции. Вышеупомянутая аппроксимация становится точной, если  $q$  - постоянная или изменяется линейно в пределах контрольного объема; иначе, она содержит ошибку второго порядка.

Аппроксимация высшего порядка требует значений  $q$  в большем количестве точек, чем только в центре. Эти значения должны быть получены, интерполируя значения в узлах или, эквивалентно, при использовании функций формы.

В двухмерной постановке объемный интеграл становится интегралом поверхности. Аппроксимация четвертого порядка может быть получена при использовании биквадратной функции формы:

$$q(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy + a_6 x^2 y + a_7 xy^2 + a_8 x^2 y^2. \quad (11.7)$$

Эти девять коэффициентов получены путем приспособления функции к значениям  $q$  в девяти точках ('nw', 'w', 'sw', 'n',  $P$ ,  $V$ , 'ne', 'e' и 'se', см. рис. 11.4). Интеграл может тогда быть вычислен. В двухмерном случае интегрирование дает (для сеток в декартовой системе координат):

$$Q_p = \int_{\Omega} q d\Omega = \bar{q} \Delta\Omega \approx \Delta x \Delta y \times \left[ a_0 + \frac{a_3}{12} (\Delta x)^2 + \frac{a_4}{12} (\Delta y)^2 + \frac{a_8}{144} (\Delta x)^2 (\Delta y)^2 \right]. \quad (11.8)$$

В этом случае должны быть определены только четыре коэффициента, но они зависят от значений  $q$  во всех девяти упомянутых выше точках. На равномерной сетке в декартовой системе координат мы получаем:

$$Q_P = \frac{\Delta x \Delta y}{36} \begin{bmatrix} 16q_P + 4q_S + 4q_N + 4q_W + \\ + 4q_E + 4q_{SE} + 4q_{SW} + 4q_{NE} + 4q_{NW} \end{bmatrix}. \quad (11.9)$$

Так как имеется значение только в узле  $P$ , интерполяция должна использоваться так, чтобы получить  $q$  в других точках. Это должен быть, по крайней мере, четвертый порядок точности, удерживающий точность интегральной аппроксимации.

Вышеупомянутая аппроксимация четвертого порядка интеграла по объему в двумерном случае может использоваться для того, чтобы аппроксимировать поверхностные интегралы в трехмерной постановке. Аппроксимации более высокого порядка объемных интегралов в трехмерном случае являются более сложными, но могут быть найдены, используя те же самые методы.

#### 11.5.4 Интерполяция и методы дифференцирования

Аппроксимации к интегралам требуют значений переменных в точках кроме вычислительных узлов (центрах контрольного объема). Подынтегральное выражение, обозначенное в предыдущих разделах как  $f$ , включает произведение нескольких переменных и/или переменных градиентов в следующих точках:  $\Delta f = \rho \phi v \cdot n$  для конвективного потока и  $\Delta f = \Gamma \text{grad} \phi \cdot n$  для диффузионного потока. Если предположить, что поле скоростей  $\Gamma$  и свойства жидкости  $\rho$  известны во всех точках, то, чтобы вычислить конвективные и диффузионные потоки, необходимо знать значение  $\phi$  и его градиента, нормального к грани ячейки в одной или более точках на поверхности контрольного объема. Интегралы по объему источников членов могут также потребовать этих значений. Они должны быть выражены интерполяцией как члены значений в узлах.

### 11.5.4.1 Интерполяция против потока (UD)

Аппроксимация  $\phi_e$  его значением в узле, расположенном выше по потоку чем 'e', эквивалентна использованию обратной- или прямой-разностной аппроксимации для первой производной (в зависимости от направления потока), следовательно для эту аппроксимацию можно назвать *схемой вычисления разностей против потока (UD)*. В UD  $\phi_e$  аппроксимирован как:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P \text{ if } (v \cdot n)_e > 0 \\ \phi_E \text{ if } (v \cdot n)_e < 0 \end{cases}.$$

Это единственная аппроксимация, которая безоговорочно удовлетворяет критерию ограничений, то есть, использование этой интерполяции никогда не будет приводить к колебательным решениям. Однако, это достигается, за счет *численной диффузии*.

Разложение в ряд Тейлора по  $P$  дает (для сетки в декартовой системе координат  $(v \cdot n)_e > 0$ ):

$$\phi_e = \phi_P + (x_e - x_P) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P + \frac{(x_e - x_P)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P + H,$$

где  $HH$  – переменные более высокого порядка. Аппроксимация  $UD$  сохраняет только первую переменную на правой стороне, таким образом – это схема первого уровня. Основная погрешность метода – диффузионность, то есть это напоминает диффузионный поток:

$$f_e^d = \tilde{A}_e \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e$$

Коэффициент числовой, искусственной, или ложной диффузии равен  $\Gamma_e^{num} = (\rho u)_e \Delta x / 2$ . Эта числовая диффузия увеличивается в трехмерных задачах, если поток является наклоненным к сетке. Погрешность метода тогда создает диффузию в направлении, нормальном к потоку, такую же, как в и направлении по течению потока, что приводит к особенно серьезной ошибке. Пики или быстрые вариации переменных будут убраны и, так как разряд понижения ошибки – первого порядка.

### 11.5.4.2 Линейная интерполяция (CD)

Другая прямая аппроксимация для значения в центре грани контрольного объема – линейная интерполяция между двумя самыми близкими узлами. В точке 'e' сетки в декартовой СК имеем (см. рис. 11.4 и 11.5):

$$\phi_{\hat{a}} = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e), \quad (11.13)$$

где линейный коэффициент интерполяции  $\lambda_e$  определен как:

$$\lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P}. \quad (11.14)$$

Уравнение (11.13) является уравнением второго порядка точности, что может быть показано при использовании разложения в ряд Тейлора  $\phi\beta$  в точке  $x_P$ , чтобы устранить первую производную в уравнении (11.11):

$$\phi_{\hat{a}} = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) - \frac{(x_e - x_P)(x_e - x_P)}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P + H.$$

Основная погрешность метода пропорциональна квадрату сеточного интервала на равномерных или неравномерных сетках.

Как со всеми аппроксимациями порядка выше первого порядка, эта схема может приводить к колебательным решениям. Это самая простая схема второго порядка. Она является наиболее широко используемой. Эта схема соответствует центрально-разностной аппроксимации первой производной в методах МКР и получила название *CD*.

Предположение о линейной связи между узлами P и E также предлагает самую простую аппроксимацию градиента, который необходим для оценки диффузионных потоков:

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P}.$$

При использовании разложения в ряд Тейлора вокруг  $\phi_e$  можно показать, что погрешность метода вышеупомянутой аппроксимации:

$$e_\tau = \frac{(x_e - x_P)^2 - (x_E - x_e)^2}{2(x_E - x_P)} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_e - \frac{(x_e - x_P)^3 + (x_E - x_e)^3}{6(x_E - x_P)} \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_e + H.$$

Когда точка 'e' находится на середине между узлами E (например, при регулярной сетке) и аппроксимация имеет точность второго порядка, так как первый член на правой стороне обращается в нуль, и ведущий остаточный член тогда пропорционален  $(\Delta x)^2$ . Когда сетка неравномерна, ведущий остаточный член пропорционален произведению  $\Delta x$  и сеточного коэффициента расширения. Несмотря на формальную точность первого уровня, в данной схеме наблюдается снижение ошибки на усовершенствованной сетке, подобно аппроксимации второго порядка даже на неравномерных сетках.

### 11.5.4.3 Квадратичная интерполяция против потока (QUICK)

Следующим логическим уточнением в направлении уточнения аппроксимации стало описание изменение переменной между точками параболой, а не прямой. Чтобы создать параболу, необходимо использовать данные в еще одной точке. В соответствии с природой конвекции, третья точка взята в расположенном выше по потоку месте, то есть  $W$ , если поток от  $PP$  до  $EE$  (то есть  $u_x > 0$ ) или  $EE$ , если  $u_x < 0$ , см. рис. 11.5. Таким образом, получаем:

$$\phi_e = \phi_u + g_1(\phi_D - \phi_U) + g_2(\phi_U - \phi_{UU}), \quad (1.15)$$

где  $D$ ,  $U$ , и  $UU$  обозначают основное направление, первый расположенный выше по потоку узел, и второй расположенный выше по потоку узел, соответственно ( $E$ ,  $P$ , и  $W$  или  $EP$ ,  $PE$ , и  $EE$ , в зависимости от направления потока). Коэффициенты  $g_2$  и  $g_1$  могут быть выражены через узловые координаты:

$$g_1 = \frac{(x_e - x_U)(x_e - x_{UU})}{(x_D - x_U)(x_D - x_{UU})};$$

$$g_2 = \frac{(x_e - x_U)(x_D - x_e)}{(x_U - x_{UU})(x_D - x_{UU})}.$$

Для регулярных сеток берутся коэффициенты трех узловых значений, включенных в интерполяцию:  $3/8$  для точки основного направления,  $6/8$  для первого расположенного выше по потоку узла,  $1/8$  для второго расположенного выше по потоку узла.

Эта схема является несколько более сложной, чем схема *CD*, поскольку расширяет вычислительную область на еще один узел в каждом направлении (в двухмерном случае, включены узлы *EE*, *WW*, *NN* и *SS*). При этом на неортогональных и/или неравномерных сетках, выражения для коэффициентов  $g_i$  не просты. Леонард (1979) сделал эту схему популярной и дал ей название *QUICK* (Квадратичная интерполяция против потока для конвективной кинематики).

У этой квадратичной схемы интерполяции погрешность метода соответствует третьему порядку точности и на равномерных и на неравномерных сетках. Это можно показать, устраняя вторую производную от уравнения (11.15), использование  $\phi_w$ , который, на равномерной сетке в декартовой СК с  $u_x > 0$ , приводит:

$$\phi_a = \frac{6}{8}\phi_D + \frac{3}{8}\phi_A - \frac{1}{8}\phi_W - \frac{3(\Delta x)^2}{48} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^3} \right)_P + H .$$

Первые три члена на правой стороне представляют аппроксимацию *QUICK*, в то время как последний член – основную погрешность метода. Когда используется эта схема интерполяции вместе с аппроксимацией правила середины поверхностного интеграла, полная аппроксимация второго порядка точности (точность аппроксимации квадратуры). Аппроксимация *QUICK* немного более точна, чем *CD*.

#### 11.5.4.4 Другие схемы

Можно аппроксимировать  $\phi_\beta$  линейной экстраполяцией от двух расположенных выше по потоку узлов, приводя к так называемой *линейной противоточной схеме (LUD)*. Эта схема имеет точность второго порядка, но она является более сложной чем *CD*.

Также существуют различные сложные схемы, включающие в себя две или более схем интерполяции.

### **11.5.5 Реализация граничных условий**

Каждый контрольный объем обеспечивает одно алгебраическое уравнение. Интегралы по объему вычислены таким же образом как для каждого контрольного объема, но потоки через грани контрольного объема, совпадающие с границей области, требуют специального обращения. Эти потоки должны быть известны, или выражены как комбинация внутренних значений и граничных условий. Так как они не дают дополнительных уравнений, они не должны давать дополнительных неизвестных. Там нет узлов вне границы, поэтому эти аппроксимации должны быть основаны на односторонних разностях или экстраполяциях.

Обычно, конвективные потоки приписываются к входной границе. Конвективные потоки равны нулю в непроницаемых стенках и плоскостях симметрии, и обычно используются независимыми от координатной нормали к границе оттока; в этом случае, могут использоваться аппроксимации против потока. Диффузионные потоки иногда определяются в стенке, например, определенный поток теплоты (включая частный случай адиабатической поверхности с нулевым потоком теплоты) или когда предписаны граничные значения переменных. В таком случае диффузионные потоки оценивают, используя односторонние аппроксимации для нормальных градиентов. Если сам градиент определен, он используется, чтобы вычислить поток, и аппроксимация для потока может использоваться в терминах узловых значений, чтобы вычислить граничное значение переменной.

### **11.5.6 Алгебраическая система уравнения**

Суммируя все аппроксимации потока и источник переменных, мы создаем алгебраическое уравнение, которое связывает переменное значение в центре контрольного объема со значениями точек в нескольких соседних контрольных объемах. Номера уравнений и неизвестных равны номеру контрольных объемов, таким образом система хорошо изложена. У алгеб-

раического уравнения для специфического контрольного объема есть форма [17], и система уравнений для целой области решения дало матричную форму уравнения [17].

### 11.6 Решение уравнений Навье - Стокса

В результате дискретизации каждое из исходных уравнений представляется в виде системы линейных уравнений, неизвестными в которой являются параметры течения, определяемые из решения данного уравнения. Для решения системы алгебраических уравнений в настоящее время используется две группы методов. Методы сопряженных градиентов основаны на отыскании многомерной векторной функции для минимизации невязки, полученной от подстановки приближенного решения в систему линейных уравнений. Наиболее перспективным методом поиска решения системы линейных уравнений является второй, многосеточный метод. В некоторых программах используются некоторые упрощенные алгоритмы – трехдиагональный алгоритм Томаса (*TDMA*) и метод Гаусса-Зейделя [1,8].

Для повышения устойчивости и сходимости решения чаще всего применяется релаксация [7,8] – ограничение на изменение переменной в течение итерации:

$$\varphi^i = \varphi^{i-1} + \alpha \Delta \varphi ,$$

где

$\alpha$  – коэффициент релаксации;

$i$  – номер итерации.

Решение уравнений Навье – Стокса численными методами само по себе не представляет сложностей. Действительная сложность связана с определением поля скоростей с неизвестным полем давления. Градиент давления составляет часть источникового члена уравнения Навье – Стокса. Однако в решаемую систему не входят уравнения для определения давлений.

Поэтому поле давлений определяется с помощью уравнения неразрывности. Если «правильное» поле давлений подставить в уравнение Навье – Стокса, получаемые в результате его решения скорости будут удовлетворять уравнению неразрывности [7].

Один из вариантов решения системы уравнений выглядит следующим образом:

- задается приближенное поле давлений  $p^*$ ;
- решается уравнение Навье – Стокса, из которого определяются  $u^*, v^*, w^*$ ;
- определяется поправка давления  $p' = p - p^*$ , где  $p$  - поле давлений, удовлетворяющее уравнению неразрывности;
- определяется  $p = p' + p^*$ ;
- находятся уточненные значения скоростей  $u, v, w$ ;
- определяют распределение температуры  $T$ ;
- обновляют свойства среды, зависящие от температуры -  $\lambda, \mu, c_p, R$ ;
- определяют распределение параметров турбулентности;
- обновляют свойства среды, зависящие от параметров турбулентности -  $\mu_t$ .

Приведенный алгоритм называется полунявным методом для связывающих давление уравнений и более известен под названием *SIMPLE* [8].

Примерный алгоритм решения уравнений газовой динамики численными методами приведен на рис. 1.5 [25,26].

В качестве критерия сходимости решения чаще всего используется понятие невязки. Пусть для дифференциального уравнения  $L(\hat{\phi}) = 0$  было найдено приближенное решение  $\bar{\phi}$ . Невязкой называется величина  $R = L(\bar{\phi})$ . Очевидно, что чем ближе невязка к нулю, тем ближе полученное численное решение к действительному решению системы уравнений.



Рис. 11.6. Алгоритм решения уравнений газовой динамики численными методами

Условием сходимости является следующее условие: максимальное значение  $|r|$  не должно превышать некоторого малого числа [8]. Максимальная невязка назначается обычно в пределах  $1 \cdot 10^{-2} \dots 1 \cdot 10^{-4}$  [25,26].

Описанный выше алгоритм решения системы уравнений Навье – Стокса реализован в современных *CFD* программных комплексах. С его помощью может быть рассчитано течение в каналах произвольной формы. Процесс численного исследования любого течения с помощью универсальных программных комплексов можно разделить на восемь этапов [1,7,8,9,12,25,26]:

1. выбор расчетной схемы, граничных условий и основных допущений;
2. определение границ рассматриваемой области;
3. создание расчетной конечно-элементной сетки;
4. задание граничных условий;
5. назначение параметров счета (настройка решателя);
6. непосредственно расчет;

7. визуализация результатов расчета и определение основных расчетных параметров (интегральных величин скорости, давления, температуры и т.п.);
8. анализ полученных результатов, оценка адекватности распределения параметров по расчетной области.

## **Библиографический список**