

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»  
(Самарский университет)

*А.М. УЛАНОВ*

# РАСЧЁТ ПРОЧНОСТИ АВИАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Рекомендовано редакционно-издательской комиссией института двигателей  
и энергетических установок в качестве электронного учебного пособия

САМАРА  
2017

УДК 621.431.75 (075)  
ББК 39.55  
У 47

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В. Б. Балякин

*Уланов, Александр Михайлович*

У 47 **Расчёт прочности авиационных двигателей:** электрон. учеб. пособие / *А. М. Уланов.* - Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. - Электрон. и граф. дан. (8,91 Мбайт). - 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Рассмотрены методы расчета на статическую прочность лопаток и дисков газотурбинных двигателей, основы теории пластичности и ползучести, высокочастотной и малоцикловой усталости, механики разрушения, расчета ресурса деталей при многокомпонентной нагрузке, колебания роторов газотурбинных двигателей, колебания лопаток и дисков, вопросы защиты от случайной нагрузки, удара и вибрации, основы вибродиагностики.

Учебное пособие предназначено для обучения студентов (бакалавров, магистров и специалистов) института двигателей и энергетических установок по направлениям подготовки 24.03.05, 24.04.05, 24.05.02 – «Двигатели летательных аппаратов».

Подготовлено на кафедре конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов Самарского университета.

УДК 621.431.75 (075)  
ББК 39.55

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	5
<b>I. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ</b>	
1. Расчет лопатки ГТД на статическую прочность.....	6
1.1. Определение интенсивности газодинамических сил .....	6
1.2. Определение центробежной нагрузки.....	8
1.3. Растяжение лопатки .....	9
1.4 Изгиб лопатки .....	9
1.5. Разгрузка лопатки от напряжений изгиба посредством центробежных сил.....	11
1.6. Определение запаса прочности лопатки .....	12
2. Расчет диска рабочего колеса на статическую прочность.....	14
2.1. Получение системы дифференциальных уравнений.....	14
2.2. Граничные условия.....	16
2.3. Особенности распределения напряжений в неравномерно нагретом диске.....	17
2.4. Оценка местной прочности диска .....	18
2.5. Запас прочности диска по разрушающим оборотам.....	19
3. Основы теории пластичности .....	22
<b>II. УСТАЛОСТЬ И РЕСУРС</b>	
4. Характеристики прочности.....	25
5. Разрушение материала при статическом нагружении .....	36
6. Ползучесть, релаксация напряжений, длительная прочность.....	46
7. Малоцикловая и повторно-статическая долговечность .....	58
8. Термомеханическая усталость. Влияние основных конструктивных и технологических факторов на малоцикловую долговечность .....	67
9. Сопротивление усталости.....	72
10. Износ, контактная усталость, эрозия, коррозия, жаростойкость .....	82
11. Многокомпонентное нагружение .....	90
12. Влияние физических свойств материалов.....	94
<b>III. ВИБРАЦИЯ И УДАР</b>	
13. Колебания роторов.....	99
13.1. Динамика простейшего ротора.....	99
13.2. Влияние податливости опор на критическую частоту вращения ротора.....	105
13.3. Критические частоты вращения ротора на анизотропных упругих опорах.....	107
13.4. Влияние гироскопического момента на собственные частоты колебаний ротора.....	111

13.5. Критические частоты анизотропного вала.....	113
13.6. Методы борьбы с опасными изгибными колебаниями роторов.....	113
14. Колебания лопаток.....	116
14.1. Изгибные колебания. Получение системы дифференциальных уравнений.....	116
14.2. Колебания консольно закрепленной лопатки.....	122
14.3. Влияние податливости консольного закрепления на собственные частоты колебаний лопатки.....	123
14.4. Крутильные колебания лопаток.....	124
14.5. Классификация форм колебаний лопаток.....	127
14.6. Влияние различных факторов на собственные частоты колебаний лопаток.....	128
15. Колебания диска рабочего колеса.....	131
16. Вынужденные колебания рабочих колес ГТД.....	141
16.1. Понятие о возбуждающих гармониках.....	141
16.2. Резонансная диаграмма.....	142
16.3. Автоколебания.....	143
16.4. Борьба с опасными колебаниями рабочих колес.....	145
17. Защита от вибрации.....	150
17.1. Необходимые данные для проектирования виброзащитной системы.....	150
17.2. Расчет характеристик виброзащитной системы.....	151
17.3. Оптимальное размещение виброизоляторов.....	156
17.4. Конструкции виброизоляторов для агрегатов ГТД.....	159
17.5. Защита от случайной вибрации.....	162
18. Системы защиты от удара.....	164
19. Расчет непробиваемости корпусов.....	171
20. Основы вибродиагностики.....	173
Заключение.....	175
Литература.....	176

## **ВВЕДЕНИЕ**

Проектирование современного газотурбинного двигателя и обеспечение его надежности является очень сложной проблемой. Расчет статической и динамической прочности деталей двигателя, их резонансных частот, малоцикловой долговечности и выносливости при высокочастотной вибрации, процессов пластичности, ползучести, разрушения и так далее очень важен для ее решения. Многие инженерные расчеты сейчас проводятся с применением метода конечных элементов и других численных методов, которые более точны, чем аналитические методы, однако необходимо знание аналитических методов для понимания физической сущности процессов и определения влияющих на них параметров.

Настоящее пособие предназначено для обучающихся в магистратуре, однако возможно его использование при подготовке бакалавров при исключении некоторых частей, имеющих более сложное математическое основание.

# I. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ

## 1. РАСЧЕТ ЛОПАТКИ ГТД НА СТАТИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ

Допустим, что лопатка – закругленный стержень переменного сечения. Будем рассматривать ее в рамках гипотезы Кирхгофа – Лява. Примем систему координат, в которой ось  $Y$  совпадает с осью рабочего колеса (РК) и направлена по газовому потоку, ось  $r$  направлена по радиусу и проходит через центр тяжести корневого сечения.

Линия, соединяющая центры тяжести всех сечений лопатки, называется осевой. В общем случае это – кривая, не совпадающая с осью  $r$ . На лопатку действуют газодинамические и центробежные силы. Определим их.

### 1.1. Определение интенсивности газодинамических сил

Выделим двумя цилиндрическими поверхностями радиусом  $r$  и  $r+dr$  бесконечно малую струйку газа с массой  $dm$ , обтекающую одну лопатку (рис. 1.1).

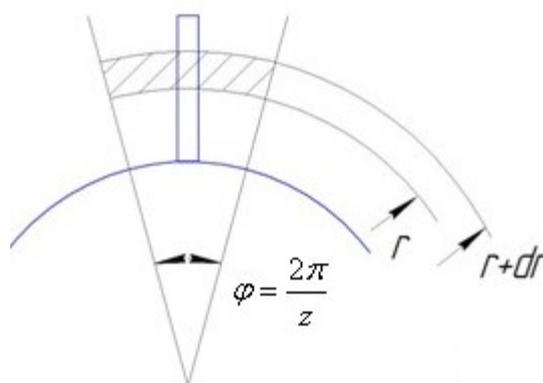


Рис. 1.1. Бесконечно малая струйка газа

Пусть  $z$  – число лопаток;  $P_1$  и  $\rho_1$ ,  $P_2$  и  $\rho_2$  – давление и плотность потока соответственно перед и за РК;  $\vec{C}_1$ ,  $C_{1a}$  и  $C_{1u}$ ,  $\vec{C}_2$ ,  $C_{2a}$  и  $C_{2u}$  – полная, осевая и окружная скорости потока соответственно перед и за РК;  $d\vec{N}$ ,  $dN_a$  и  $dN_u$  – полная, осевая и окружная силы, с которыми лопатка действует на бесконечно малую струйку газа;  $d\vec{Q}$ ,  $dQ_a$  и  $dQ_u$  – полная, осевая и окружная силы, с которыми бесконечно малая струйка газа действует на лопатку (рис. 3.2).

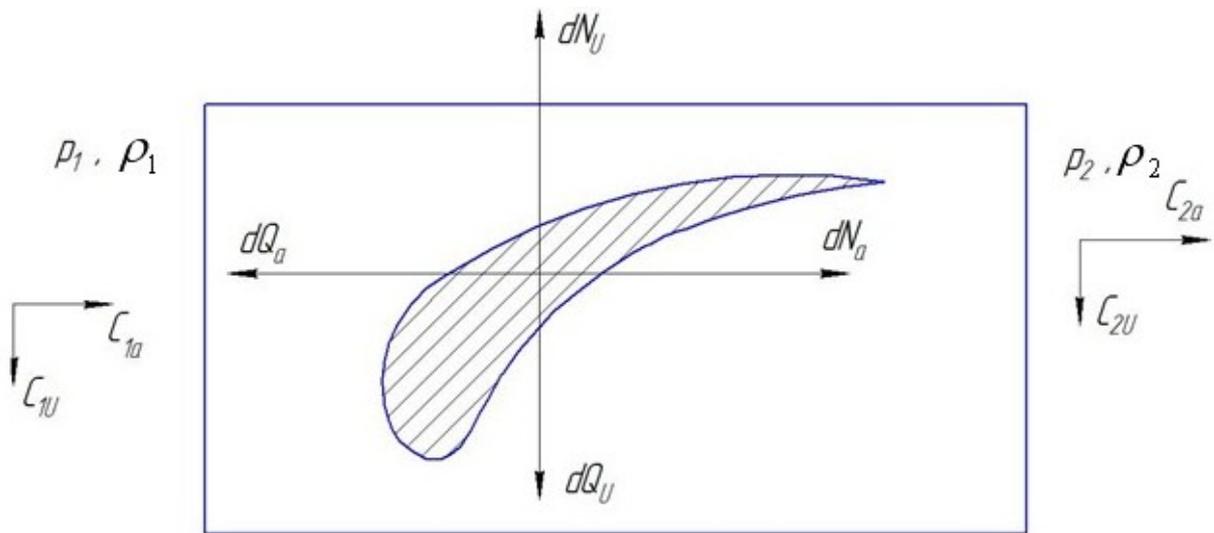


Рис. 1.2. Изменение параметров газового потока

При взаимодействии с лопаткой за время  $\Delta t$  бесконечно малая струйка газа меняет свою скорость. Соответственно меняется ее импульс. По закону сохранения импульса

$$d\vec{N} \times \Delta t = dm \times (\vec{C}_2 - \vec{C}_1)$$

Если расход газа в струйке  $dG$ , то

$$dm = dG \times \Delta t .$$

Тогда

$$d\vec{N} = dG \times (\vec{C}_2 - \vec{C}_1),$$

или в проекциях на оси координат

$$dN_a = dG \times (C_{2a} - C_{1a}),$$

$$dN_u = dG \times (C_{2u} - C_{1u}).$$

Расход газа равен

$$dG = \frac{2\pi}{z} r dr C_{1a} \rho_1 = \frac{2\pi}{z} r dr C_{2a} \rho_2 .$$

В осевом направлении:

$$dN_a = \frac{2\pi}{z} r dr (P_1 - P_2) - dQ_a ,$$

откуда

$$dQ_a = \frac{2\pi}{z} r dr (P_1 - P_2) - dG(C_{2a} - C_{1a}) = \frac{2\pi}{z} r dr [P_1 - P_2 - \rho_2 (C_{2a}^2 - C_{2a} C_{1a})] . \quad (1.1)$$

В окружном направлении:

$$dQ_u = -dN_u = -\frac{2\pi}{z} r dr C_{2a} \rho_2 (C_{2u} - C_{1u}) \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) определяют газовую нагрузку. Для расчёта часто используют интенсивность газовых сил в осевом направлении

$$P_{ra} = \frac{dQ_a}{dr} = \frac{2\pi}{z} r [P_1 - P_2 - \rho_2 (C_{2a}^2 - C_{2a} C_{1a})] \quad (1.3)$$

и в окружном направлении

$$P_{ru} = \frac{dQ_u}{dr} = -\frac{2\pi}{z} r C_{2a} \rho_2 (C_{2u} - C_{1u}) \quad (1.4)$$

Интенсивность представляет собой погонную нагрузку и измеряется в Н/м. Для РК турбин интенсивность окружной газовой нагрузки, как правило, направлена по вращению РК. Интенсивность осевой газовой нагрузки для турбин, как правило, направлена по потоку, для компрессоров – против потока. В первом приближении можно принять, что газовая нагрузка равномерно распределена по корытцу лопатки по хорде лопатки  $b$ , тогда ее можно задать в конечно-элементной программе как давление  $p_{sa} = \frac{P_{ra}}{b}$  и  $p_{su} = \frac{P_{ru}}{b}$ .

## 1.2. Определение центробежной нагрузки

Центробежная сила на бесконечно малый участок лопатки с массой  $dm$  равна

$$dQ_c = dm \omega^2 R = F dr \rho \omega^2 R,$$

где  $\rho$  - плотность материала лопатки,  $F$  – площадь сечения лопатки,  $R$  – расстояние до оси вращения  $Y$ ,  $\omega$  - угловая скорость вращения. Спроектируем эту силу на оси  $r$  и  $X$ .

$$dQ_{cr} = F dr \rho \omega^2 R \cos \alpha,$$

$$dQ_{cx} = F dr \rho \omega^2 R \sin \alpha.$$

Поскольку  $R \cos \alpha = r$ ,  $R \sin \alpha = x$ , то

$$dQ_{cr} = F dr \rho \omega^2 r,$$

$$dQ_{cx} = F dr \rho \omega^2 x.$$

Аналогично, если рассмотреть плоскость  $O rY$ , можно получить

$$dQ_{cy} = F dr \rho \omega^2 y.$$

При расчете лопатки методом конечных элементов нагрузка от центробежной силы задается как объемная. Интенсивность объемной нагрузки

$$P_{vr} = \frac{dQ_{cr}}{F dr} = \rho \omega^2 r, \quad P_{vx} = \frac{dQ_{cx}}{F dr} = \rho \omega^2 x; \quad P_{vy} = \frac{dQ_{cy}}{F dr} = \rho \omega^2 y. \quad (1.5)$$

### 1.3. Растяжение лопатки

Лопатка растягивается под действием центробежной силы. Если  $r_n$ ,  $r_k$  и  $r_b$  - радиусы центров тяжести периферийного и корневого сечений и бандажной полки соответственно, а  $m_b$  - масса бандажной полки, то центробежная сила в текущем сечении с координатой  $r$

$$Q_{cr} = \int_r^{r_n} dQ_{cr} + m_b r_b \omega^2 = \int_r^{r_n} F \rho \omega^2 r dr + m_b r_b \omega^2. \quad (1.6)$$

Этот интеграл приходится брать численно, так как площадь сечения лопатки изменяется по ее высоте.

Напряжения растяжения от центробежных сил в текущем сечении с площадью  $F_r$  равны

$$\sigma_r = \frac{Q_{cr}}{F_r}$$

### 1.4. Изгиб лопатки

Выделим бесконечно малый элемент лопатки между двумя цилиндрическими поверхностями радиусом  $r$  и  $r+dr$ . Его центр тяжести расположен в точке  $B(x, y, r)$  (рис.1.3). Определим моменты, которые создадут действующие на него силы в текущем сечении с центром тяжести, расположенном в точке  $A(x_1, y_1, r_1)$ .

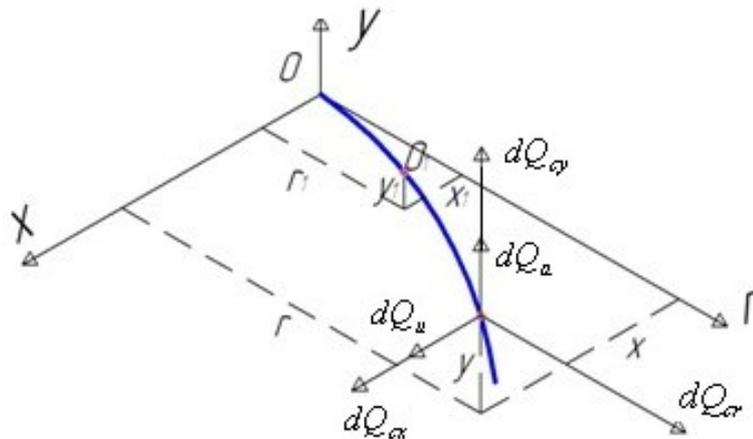


Рис. 1.3. Расчетная схема для изгиба лопатки

$$dM_x = -dQ_{cr}(y - y_1) + dQ_a(r - r_1) + dQ_{cy}(r - r_1), \quad (1.7)$$

$$dM_y = dQ_{cr}(x - x_1) - dQ_a(r - r_1) - dQ_{cx}(r - r_1). \quad (1.8)$$

Полные изгибающие моменты в текущем сечении

$$M_x = \int_{r_1}^{r_n} dM_x, \quad M_y = \int_{r_1}^{r_n} dM_y. \quad (1.9)$$

Видно, что величина и знак моментов зависит от пространственного положения осевой линии лопатки. Если линия расположена вдоль оси лопатки, то всегда  $x - x_1 = 0$ ,  $y - y_1 = 0$ , и также  $dQ_{cx} = 0$  и  $dQ_{cy} = 0$ , изгибающий момент определяется только газовыми силами.

Пусть  $\eta$ ,  $\xi$  - главные центральные оси системы координат с центром в центре тяжести сечения лопатки (рис. 1.4),  $\alpha$  - угол между осями этой системы координат и системы координат  $OXY$ . Тогда

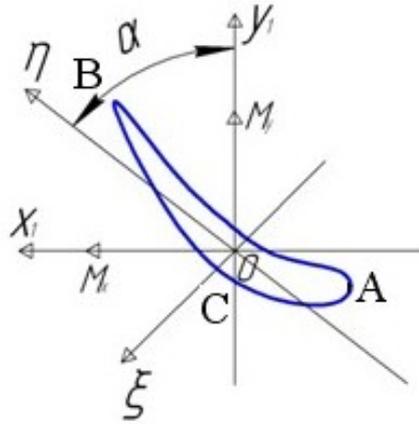


Рис. 1.4. Главные центральные оси координат

$$M_\xi = M_x \cos \alpha - M_y \sin \alpha,$$

$$M_\eta = M_x \sin \alpha + M_y \cos \alpha.$$

Напряжения изгиба  $\sigma_b$  будут складываться из напряжений изгиба от обоих этих моментов. Напряжение изгиба от момента  $M_\xi$ :

$$\sigma_{b1} = -\frac{M_\xi}{W_\xi} = -\frac{M_\xi}{J_\xi} \eta,$$

где  $W_\xi$  и  $J_\xi$  - соответственно момент сопротивления изгибу и момент инерции относительно оси  $\xi$ . Напряжение изгиба от момента  $M_\eta$ :

$$\sigma_{b2} = \frac{M_\eta}{W_\eta} = \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi,$$

где  $W_\eta$  и  $J_\eta$  - соответственно момент сопротивления изгибу и момент инерции относительно оси  $\eta$ . Суммарное напряжение изгиба

$$\sigma_b = \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi - \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta. \quad (1.10)$$

Наибольшие напряжения изгиба будут в точке, наиболее удаленной от нейтральной линии. На нейтральной линии напряжения изгиба равны нулю, то есть

$$\frac{M_\eta}{J_\eta} \xi - \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta = 0,$$

отсюда уравнение нейтральной линии

$$\xi = \frac{J_\eta}{M_\eta} \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta = a\eta.$$

Это – уравнение прямой линии. Моменты близки по величине, а  $J_\eta = 0.01 \dots 0.05 J_\xi$ , поэтому  $a$  мало и нейтральная линия близка к оси  $\eta$ .

Напряжения изгиба наибольшие в трех характерных точках, наиболее удаленных от нейтральной линии: А на входной кромке, В – на выходной и С – на спинке лопатки. В них обычно и рассчитывают напряжения.

### 1.5. Разгрузка лопатки от напряжений изгиба посредством центробежных сил

Знак момента от центробежных сил зависит от пространственного положения осевой линии лопатки. Поэтому лопатку можно спроектировать так, чтобы момент от центробежных сил в любом сечении компенсировал момент от газовых сил. Для этого необходимо сместить осевую линию от оси  $r$ . Это смещение называют выносом центров тяжести сечений. Оно выполняется в окружном и в осевом направлениях (рис. 1.5).

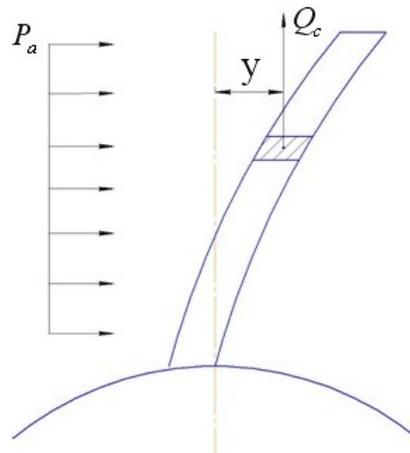


Рис. 1.5. Вынос центров тяжести сечений лопатки в направлении оси  $y$

Величина выноса зависит от соотношения газовых и центробежных сил. Они изменяются различным образом по режимам двигателя.  $P_c = f(\omega^2)$ ,  $P_2 = f(P, \rho, c)$ .

Поэтому рассматривают не полную, а частичную компенсацию момента изгиба на одном из режимов, обычно максимальном.

$$M_{cx} + \lambda M_{ex} = 0, \quad (1.11)$$

$$M_{cy} + \lambda M_{ey} = 0, \quad (1.12)$$

где коэффициент компенсации  $\lambda = 0.5 \dots 0.7$ .

Чтобы компенсация была во всех сечениях, осевая линия лопатки должна иметь сложную пространственную форму. Рассмотрим более простой случай, когда осевая линия прямолинейна, выносы изменяются по линейному закону

$$x = a_x r + b_x, \quad y = a_y r + b_y.$$

Определим постоянные коэффициенты. При линейном законе изменения выносов компенсация возможна только в одном сечении. Обычно выбирается сечение, где напряжения изгиба максимальны, это – корневое сечение. В нем выносы отсутствуют, поэтому  $b_x = -a_x r_k$ ,  $b_y = -a_y r_k$ . Тогда  $x = a_x (r - r_k)$ ,  $y = a_y (r - r_k)$ .

Из условия компенсации (пренебрегая моментом от  $dQ_{cy}$ , так как  $dQ_{cy} \ll dQ_{cr}$ ):

$$-\int_{r_1}^{r_n} P_{cr} (y - y_1) dr + \lambda \int_{r_1}^{r_n} P_a (r - r_1) dr = 0. \quad (1.13)$$

Из выражения для выносов центра тяжести

$$y - y_1 = a_y (r - r_k) - a_y (r_1 - r_k) = a_y (r - r_1).$$

Подставив это в (1.13), получим

$$-a_y \int_{r_1}^{r_n} P_{cr} (r - r_1) dr + \lambda \int_{r_1}^{r_n} P_a (r - r_1) dr = 0.$$

Из этого уравнения можно найти коэффициент  $a_y$ . Коэффициент  $a_x$  определяется аналогично. Интегралы рассчитываются численными методами.

При действии газовых и центробежных сил сечения лопатки получают упругие смещения, которые могут быть соизмеримы с выносами сечений. Эти смещения изменяют величину изгибающих моментов и напряжений изгиба. При уточненном определении выносов центров тяжести сечений необходимо учитывать и эти упругие смещения.

## 1.6. Определение запаса прочности лопатки

При расчете лопатки на статическую прочность определяются коэффициент запаса по несущей способности

$$K_b = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_r}$$

и коэффициент запаса по местной прочности

$$K_m = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{\sigma_{\text{max}}}.$$

Здесь  $\sigma_r$  - напряжение растяжения от центробежных сил,  $\sigma_{\text{max}} = \sigma_r + \sigma_b$  - максимальное напряжение растяжения и изгиба,  $\sigma_{\text{lim}}$  - предельное напряжение. Для лопаток компрессора  $\sigma_{\text{lim}} = \sigma_{\sigma}$  - пределу мгновенной прочности, для лопаток турбин  $\sigma_{\text{lim}} = \sigma_{\sigma\tau}^t$  - пределу длительной прочности.

По нормам прочности

$$K_b \geq 1.8, \quad K_m \geq 1.65.$$

## 2. РАСЧЕТ ДИСКА РАБОЧЕГО КОЛЕСА НА СТАТИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ

### 2.1. Получение системы дифференциальных уравнений

Основные допущения:

- 1) диск симметричен относительно своей срединной поверхности;
- 2) температура постоянна по толщине диска;
- 3) напряжения постоянны по толщине диска;
- 4) напряжения по окружности диска постоянны;
- 5) в сечении диска, полученном радиальными и цилиндрическими поверхностями, оси которых совпадают с осью диска, действуют только нормальные напряжения и отсутствуют касательные напряжения.

Выделим в диске двумя радиальными плоскостями, расположенными под углом  $d\varphi$ , и двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами  $r$  и  $dr$ , бесконечно малый элемент и рассмотрим условия его равновесия (рис.2.1).

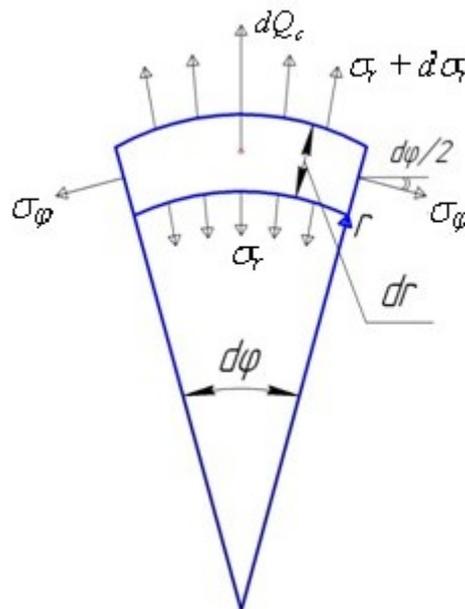


Рис. 2.1. Бесконечно малый элемент диска и силы, действующие на него

Толщина диска на радиусе  $r$  равна  $h$ , на радиусе  $r+dr$  толщина диска равна  $h+dh$ . Плотность материала диска  $\rho$ . На элемент действуют радиальные напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_r + d\sigma_r$ , окружные напряжения  $\sigma_\varphi$ , центробежная сила

$$dQ_c = rd\varphi dr h \rho \omega^2.$$

Рассмотрим проекции всех сил на ось  $r$ :

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi(h + dh) - \sigma_r r h d\varphi - 2\sigma_\varphi dr h \sin(d\varphi/2) + rd\varphi dr h \rho \omega^2 = 0 \quad (2.1)$$

Учтем

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(h + dh) = \sigma_r h + \sigma_r dh + d\sigma_r h + d\sigma_r dh \approx \sigma_r h + d(\sigma_r h) .$$

Тогда (1.1) примет вид

$$(\sigma_r h + d(\sigma_r h))(r + dr)d\varphi - \sigma_r r h d\varphi - 2\sigma_\varphi dr h \sin(d\varphi/2) + rd\varphi dr h \rho r \omega^2 = 0 .$$

После приведения подобных, учета  $2\sin(d\varphi/2) \approx d\varphi$  и сокращения на  $d\varphi$ , получим

$$\sigma_r h dr + d(\sigma_r h)r - h\sigma_\varphi dr + rh\rho r \omega^2 dr = 0 .$$

Учитывая, что напряжение равномерно распределено по толщине диска, перейдем к погонным силам

$$N_r = \sigma_r h , N_\varphi = \sigma_\varphi h .$$

Получим

$$d(N_r)r = -N_r dr + N_\varphi dr - rh\rho r \omega^2 dr .$$

Разделив на  $rdr$ , получим

$$\frac{dN_r}{dr} = -\frac{N_r}{r} + \frac{N_\varphi}{r} - \rho\omega^2 rh . \quad (2.2)$$

Запишем для цилиндрической системы координат формулы Коши и закон Гука.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} ;$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} , \text{ поскольку напряженное состояние симметрично, } \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \text{ и } \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} .$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu\sigma_\varphi) + \alpha T ,$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \mu\sigma_r) + \alpha T .$$

В законе Гука перейдем к погонным силам, умножив и разделив на  $h$  и учтя формулы Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{Eh} (N_r - \mu N_\varphi) + \alpha\Delta T = \frac{\partial u}{\partial r} , \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{Eh} (N_\varphi - \mu N_r) + \alpha\Delta T = \frac{u}{r} . \quad (2.4)$$

Выразим из (2.4)

$$N_\varphi = Eh - \alpha\Delta TEh + \mu N_r + \frac{u}{r}$$

и подставим в (2.3) и (2.2). Получим:

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\mu}{r} u + \frac{1-\mu^2}{Eh} N_r + (1+\mu)\alpha\Delta T ;$$

$$\frac{dN_r}{dr} = \frac{Eh}{r^2}u - \frac{(1-\mu)}{r}N_r - \frac{\alpha\Delta TEh}{r} - \rho\omega^2 hr \quad .$$

Получили систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных  $u$  и  $N_r$ . Она решается численным методом, например, методом Рунге-Кутты.

## 2.2. Граничные условия

Для решения системы необходимы граничные условия, количество которых должно соответствовать количеству переменных. Можно задать по одному граничному условию на внутреннем и внешнем радиусе диска.

На внутреннем радиусе диска ( $r = r_0$ ) возможны следующие случаи:

1. Диск имеет свободное центральное отверстие. В этом случае  $\sigma_r(r_0) = 0$ , соответственно,  $N_r(r_0) = 0$ .
2. Внутренняя поверхность диска жестко закреплена. В этом случае  $u(r_0) = 0$ .
3. Диск напрессован на вал с давлением  $p$ . В таком случае  $\sigma_r(r_0) = -p$ , соответственно,  $N_r(r_0) = -ph_0$ .
4. Диск напрессован на вал с натягом  $\Delta$ . В этом случае  $u(r_0) = \Delta$ .

На внешнем радиусе диска ( $r = r_e$ ) возможны следующие случаи:

1. Диск свободен (например, маховик без лопаток). В этом случае  $\sigma_r(r_e) = 0$ , соответственно,  $N_r(r_e) = 0$ .
2. Диск имеет  $z$  лопаток. Напряжение на внешнем радиусе (это радиус дна замковых пазов) создается центробежными силами, действующими на лопатки ( $P_{cb}$ ), замки ( $P_{cl}$ ) и межзамковые выступы ( $P_{cp}$ ).

$$\sigma_r(r_e) = \frac{zP_{cb} + z(P_{cl} + P_{cp})}{2\pi r_e h_e} \quad .$$

Второе слагаемое может быть найдено как центробежная сила от кольца материала между радиусом втулочного сечения лопатки  $r_k$  и радиусом  $r_e$ .

$$\sigma_r(r_e) = \frac{zP_{cb} + \pi(r_k^2 - r_e^2)h_e\rho\omega^2 \frac{r_k + r_e}{2}}{2\pi r_e h_e} \quad .$$

Для расчета центробежной силы от лопатки определим ее массу. Если известны площади втулочного сечения лопатки  $F_k$ , периферийного  $F_n$ , а также  $i$  промежуточных сечений лопатки длины  $l$ , то масса лопатки

$$m_b \approx \frac{\ell}{i+1} \left( \frac{F_n}{2} + F_1 + F_2 + \dots + F_i + \frac{F_k}{2} \right) \rho .$$

Тогда центробежная сила на одну лопатку

$$P_{cb} \approx m_b \omega^2 \frac{r_k + r_n}{2} ,$$

где  $r_k$  и  $r_n$  - соответственно, радиусы втулочного и периферийного сечений лопатки.

Если диск не имеет центрального отверстия, в центре диска  $\sigma_r(0) = \sigma_\varphi(0)$  . Поскольку  $r_0 = 0$ , возникают трудности, связанные с делением на 0. Более точный способ – получить другую систему дифференциальных уравнений. При приближенном методе интегрирование начинают с  $r_0 = 0.001r_e$  и учитывают условие  $\sigma_r(r_0) = \sigma_\varphi(r_0)$  .

### 2.3. Особенности распределения напряжений в неравномерно нагретом диске

Представим диск состоящим из двух колец: внутреннего 1 и внешнего 2. Пусть температура их  $T_1$  и  $T_2$ , причем  $T_1 < T_2$ , как это обычно бывает у дисков турбин, у которых периферия нагрета более, чем втулка. Кольцо 1 в свободном состоянии расширилось бы меньше, чем кольцо 2 (так как  $T_1 < T_2$ ), но оно прикреплено к кольцу 2. Поэтому в кольце 1 наводятся растягивающие напряжения. Кольцо 2 в свободном состоянии расширилось бы больше, но оно прикреплено к кольцу 1, поэтому в нем наводятся сжимающие напряжения. Поэтому в диске турбины окружные напряжения на периферии могут быть отрицательными, в диске компрессора окружные напряжения на периферии, как правило, положительные. Наибольшие положительные окружные напряжения – в центральном отверстии диска.

Радиальные напряжения в диске со свободным отверстием начинаются с 0 и

заканчиваются значением  $\sigma_r(r_e) = \frac{zP_{cb} + \pi(r_k^2 - r_e^2)h_e \rho \omega^2 \frac{r_k + r_e}{2}}{2\pi r_e h_e} = \sigma_k$  , если диск имеет

лопатки, и 0, если лопаток нет. Распределение радиальных и окружных напряжений в диске с лопатками показано на рис. 2.2.

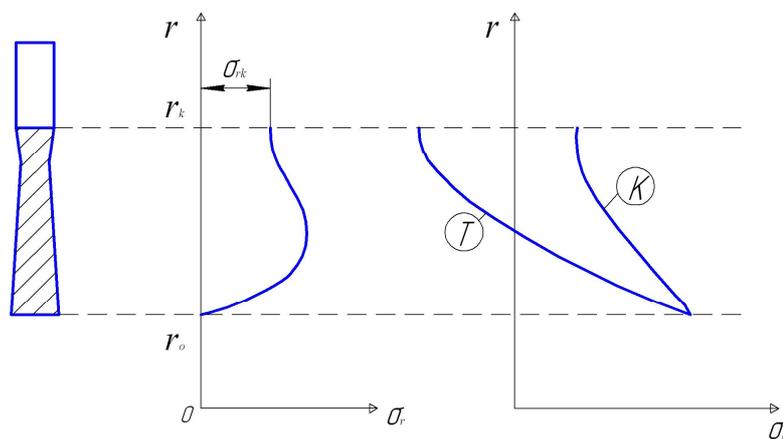


Рис. 2.2. Распределение радиальных и окружных напряжений в диске с лопатками  
 К – компрессор, Т - турбина

Если угловая скорость вращения увеличивается в 2 раза, напряжения увеличиваются в 4 раза, так как центробежная сила пропорциональна квадрату угловой скорости.

Если увеличивается температура втулки диска турбины, то разность температур между втулкой и периферией уменьшается, соответственно, уменьшаются напряжения. Поэтому в ряде двигателей втулку диска нагревают. Однако при этом уменьшается общий предел прочности  $\sigma_{bt}^t$ .

При увеличении толщины диска одновременно во всех сечениях, напряжения меняются незначительно. С одной стороны возрастает центробежная сила от большего количества материала диска, с другой – возрастает площадь, на которую эта сила действует. По этой причине увеличение толщины диска в местах с недостаточным запасом прочности может не дать эффекта. Эффективным может оказаться местное уменьшение толщины диска там, где запас прочности избыточен. Это может снизить центробежную силу, действующую на перегруженные сечения (а также снижает общую массу диска).

#### 2.4. Оценка местной прочности диска

Так как диск находится в плоском напряженном состоянии, запас прочности определяется по эквивалентным напряжениям. По IV теории прочности

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi}.$$

Запас прочности

$$K = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{eq}}.$$

По нормам прочности  $K \geq 1.6$ .

Для дисков компрессора  $\sigma_{\text{lim}} = \sigma_e$  - пределу мгновенной прочности, для дисков турбин  $\sigma_{\text{lim}} = \sigma_{eT}$  - пределу длительной прочности.

## 2.5. Запас прочности диска по разрушающим оборотам

Частота вращения диска, при которой он разрушается, называется предельной частотой вращения  $n_{\text{lim}}$ . Диск может достигнуть предельной частоты вращения при отказе регулятора оборотов, при внезапном снятии нагрузки и т.д. Разрушение диска является недопустимым видом отказа, потому что обломки диска весят несколько десятков килограммов, летят с большой скоростью и разрушают другие конструкции.

Расчет предельной частоты вращения осуществляется на основе теории предельного равновесия. В соответствии с ней напряжения в каком-либо сечении диска не могут превысить предельного значения из-за возникновения в этом сечении значительной пластической деформации. Пластическая деформация приводит к перераспределению напряжений, к росту их в соседних сечениях. Считается, что диск разрушается тогда, когда напряжения достигают предельной величины на всех радиусах. Эта теория справедлива для диска с плавно меняющейся толщиной, при отсутствии концентраторов напряжений.

Рассмотрим равновесие половины диска (рис. 2.3).

На диск действует контурная нагрузка  $\sigma_{k \text{ lim}}$ , на бесконечно малый участок поверхности от этой нагрузки приходится сила

$$dQ_k = \sigma_{k \text{ lim}} r_e h_e d\varphi,$$

ее проекция на ось  $r$

$$dQ_r = \sigma_{k \text{ lim}} r_e h_e \cos\varphi d\varphi .$$

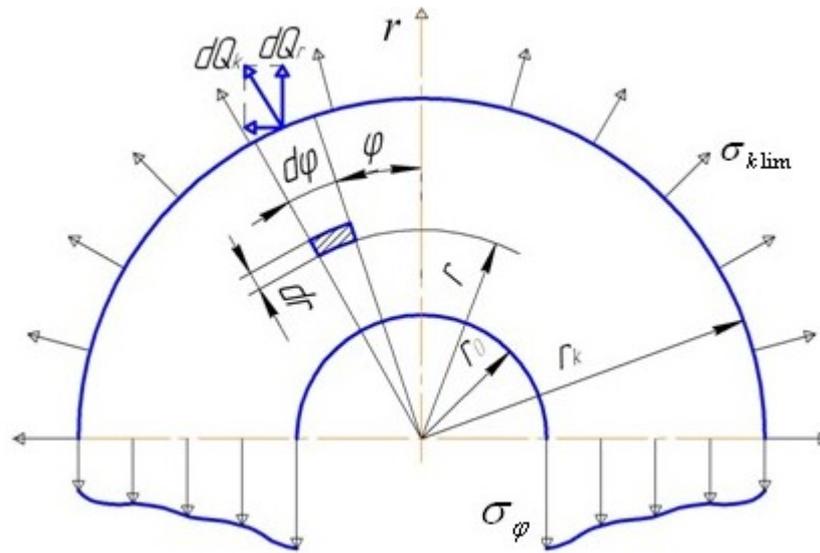


Рис. 2.3. Половина диска в условиях предельных напряжений

Поскольку контурная нагрузка зависит от центробежной силы, она пропорциональна квадрату частоты вращения.

$$\sigma_{k \text{ lim}} = \frac{n_{\text{lim}}^2}{n_{\text{max}}^2} \sigma_k,$$

где  $n_{\text{max}}$  - максимальная частота вращения двигателя на взлетном режиме,  $\sigma_k$  - контурная нагрузка на диск при взлетном режиме.

Интегральная сила от предельной контурной нагрузки

$$Q_{kr} = 2 \int_0^{\pi/2} \sigma_k \frac{n_{\text{lim}}^2}{n_{\text{max}}^2} r_e h_e \cos \varphi d\varphi = 2 \sigma_k \frac{n_{\text{lim}}^2}{n_{\text{max}}^2} r_e h_e \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 2 \sigma_k \frac{n_{\text{lim}}^2}{n_{\text{max}}^2} r_e h_e \quad (2.5).$$

Центробежная сила, действующая на бесконечно малый элемент диска, равна

$$dQ_c = \rho r dr d\varphi h(r) (2\pi n_{\text{lim}})^2.$$

Интеграл ее проекции на ось  $r$  :

$$Q_{cr} = 2 \int_0^{\pi/2} \int_{r_0}^{r_e} \rho r^2 dr h(r) (2\pi n_{\text{lim}})^2 \cos \varphi d\varphi = 8\pi^2 n_{\text{lim}}^2 \rho \int_{r_0}^{r_e} h(r) r^2 dr \quad (2.6)$$

Взять второй интеграл аналитически невозможно, так как толщина диска изменяется по его радиусу не в соответствии с какой-либо функцией.

В случае предельного нагружения окружные напряжения  $\sigma_\varphi = \sigma_{bt}^t(r)$ . Зависимость от радиуса связана с тем, что температура на разных радиусах разная, а предел длительной прочности зависит от температуры. Проекция силы, вызываемой этими напряжениями, на ось  $r$  :

$$Q_{r\varphi} = 2 \int_{r_0}^{r_e} \sigma_{b\tau}^t(r) h(r) dr \quad (2.7)$$

Этот интеграл также невозможно взять аналитически.

В соответствии с условием равновесия половины диска

$$Q_{kr} + Q_{cr} - Q_{r\varphi} = 0.$$

Подставив значения из (2.5), (2.6), (2.7), получим уравнение для определения  $n_{\text{lim}}$ :

$$2\sigma_k \frac{n_{\text{lim}}^2}{n_{\text{max}}^2} r_e h_e + 8\pi^2 n_{\text{lim}}^2 \rho \int_{r_0}^{r_e} h(r) r^2 dr - 2 \int_{r_0}^{r_e} \sigma_{b\tau}^t(r) h(r) dr = 0.$$

Запас по разрушающим оборотам  $K_\sigma = \frac{n_{\text{lim}}}{n_{\text{max}}} > 1,6$

### 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Если после снятия нагрузки тело полностью возвращается к прежним размерам, оно является идеально упругим. Если после снятия нагрузки тело полностью сохраняет деформированное состояние, оно является идеально пластическим. Конструкционные материалы являются упруго-пластическими – после того, как напряжение в них превышает некоторый предел, часть деформации остается после снятия нагрузки. Эту деформацию называют пластической (рис. 3.1).

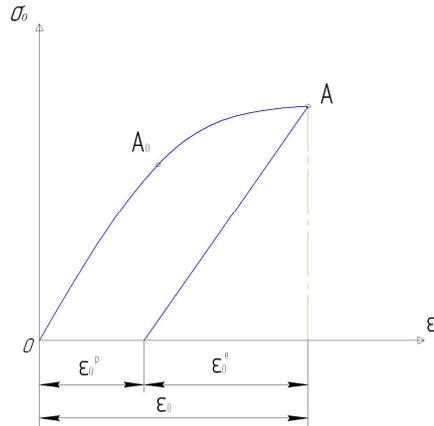


Рис. 3.1. Диаграмма нагрузки и разгрузки упруго-пластического тела

Введем понятия среднего напряжения  $\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$  и средней деформации

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}.$$

Состояние всестороннего равномерного растяжения или сжатия пластических деформаций не вызывает. Если вычесть всестороннее растяжение с напряжением, равным среднему, из реального напряженного состояния (НС), получим девиаторное напряженное состояние, ответственное за пластические деформации (рис.3.2).

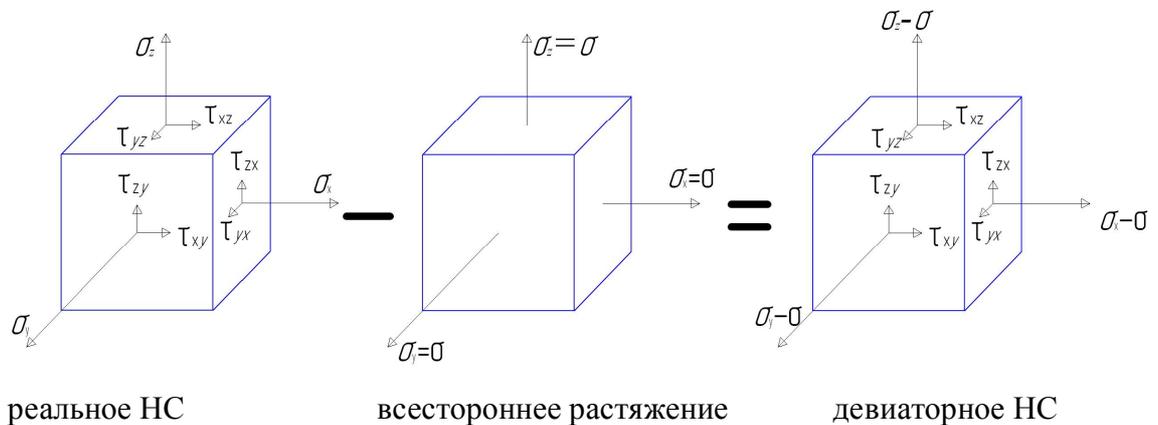


Рис. 3.2. Девиаторное напряженное состояние

Для расчета пластических деформаций используется кривая пластичности. Для одноосного напряженного состояния она легко определяется экспериментально.

Для того, чтобы использовать кривую, полученную для одноосного НС, для реального многоосного НС, используют понятия интенсивности напряжения  $\sigma_i$  и интенсивности деформации  $\varepsilon_i$ .

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma)^2 + (\sigma_y - \sigma)^2 + (\sigma_z - \sigma)^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2}, \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon)^2 + \frac{1}{2}\gamma_{xy}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{yz}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{zx}^2}. \quad (3.2)$$

Для одноосного НС :

$$\sigma_i = \sigma_0, \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}(1 + \mu)\varepsilon_0. \quad (5.4)$$

Здесь  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Расчет деформируемой детали с учетом пластической деформации ведется методом последовательных приближений при помощи обобщенной кривой деформирования (рис. 3.3) – кривой пластичности, полученной экспериментально для одноосного НС и пересчитанной в координаты  $\varepsilon_i$ ,  $\sigma_i$  при помощи уравнений (3.3), (3.4).

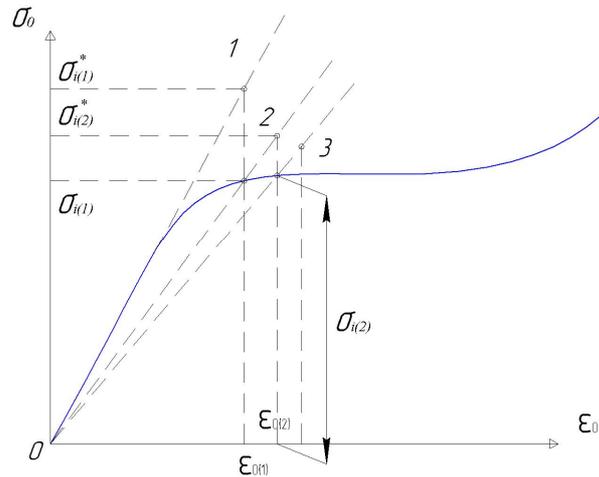


Рис. 3.3. Расчет напряжения с учетом пластической деформации

В начале расчета материал принимается абсолютно упругим с табличными значениями модуля упругости  $E_0$  и коэффициента Пуассона  $\mu_0$ . При помощи какого-либо расчетного метода (например, метода конечных элементов) определяются напряжения и

деформации в детали  $\sigma_x^{(1)}; \sigma_y^{(1)} \dots \varepsilon_x^{(1)}; \varepsilon_y^{(1)}$ . По ним рассчитываются интенсивности напряжений  $\sigma_{i(1)}^*$  и деформаций  $\varepsilon_{i(1)}$ . Точка 1 находится на упругой линии, потому что расчет велся по линейной теории. Если материал при таких напряжениях испытывает пластические деформации, реальным является напряжение  $\sigma_{i(1)}$ , определяемое при помощи обобщенной кривой деформирования. На основе этого напряжения рассчитывают секущий модуль упругости

$$E_c^{(1)} = \frac{\sigma_{i(1)}}{\varepsilon_{i(1)}}$$

Изменяется также значение коэффициента Пуассона:

$$\mu^{(1)} = \frac{1}{2} - \frac{1-2\mu_0 E_c^{(1)}}{2 E_0}$$

Расчет напряжений и деформаций повторяется с новыми значениями модуля упругости и коэффициента Пуассона. Определяется точка 2 с координатами  $\varepsilon_{i(2)}$ ,  $\sigma_{i(2)}^*$ . Если интенсивность напряжений лежит в зоне пластических деформаций, при помощи обобщенной кривой деформирования определяется реальное напряжение  $\sigma_{i(2)}$ , рассчитываются новые значения секущего модуля упругости и коэффициента Пуассона и т.д.

Расчет продолжается до выполнения двух критериев сходимости:

$$\frac{|\sigma_i^{(n+1)} - \sigma_i^{(n)}|}{|\sigma_i^{(n)}|} \leq \Delta_1,$$

который определяет достижение требуемой точности расчета, и

$$\frac{|\sigma_i^{(n)} - \sigma_i^{(n)}|}{|\sigma_i^{(n)}|} \leq \Delta_2,$$

который определяет достаточную степень приближения к обобщенной кривой деформирования.

## II. УСТАЛОСТЬ, РЕСУРС

### 4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЧНОСТИ

Большой ресурс и повышенная надежность авиадвигателей помимо решения основной задачи повышения безопасности эксплуатации, обеспечивает экономию за счет уменьшения потребного числа двигателей для обеспечения парка самолетов, уменьшения количества и стоимости ремонтов, уменьшения времени простоев самолетов и затрат на замену отработавших ресурс двигателей.

Проблема обеспечения надежности двигателей большого ресурса наряду с обычными вопросами прочности требует решения ряда специфических задач, определяемых фактором времени.

К ним в первую очередь относятся вопросы:

- длительной прочности, ползучести и релаксации напряжений в деталях при длительной наработке на стационарных режимах,
- повторно-статической долговечности и термоциклической прочности, связанной с большим количеством запусков, остановов и изменениями режимов работы двигателя в процессе эксплуатационного цикла,
- высокочастотной усталости, особенно жаропрочных и цветных сплавов, которая непрерывно уменьшается в процессе наработки,
- изменения состояния поверхностного слоя в результате коррозии, эрозии и выгорания легирующих элементов,
- износа и фреттинг – коррозии в контактируемых парах

В настоящее время общетехнический ресурс эксплуатируемых двигателей семейства НК-8 (НК-8-4, НК-8-2у) составляет 18000...20000ч. Ресурс до первого капитального ремонта - 6000...9000ч. Эксплуатация по техническому состоянию (ЭТС) позволяет еще увеличить наработку двигателей без съема с самолета. Так наработка современных зарубежных авиадвигателей CFM-56, PW2037, PW4000, RB211-524E4 при ЭТС без съема с самолета превышает 30000ч.

В настоящее время к вновь проектируемым двигателям выдвигается требование о равенстве ресурса двигателя и планера, т.е. ресурс двигателей должен составлять 40000...60000ч и 20000...30000 полетов, при этом требования по удельным параметрам и надежности двигателей становятся все более жесткими.

К типичным прочностным дефектам относятся:

- усталостные трещины и разрушения ~ 30% от всех видов дефектов;

- усталостные выкрашивания, вибрационные заедания, контактная коррозия, наклепы ~ 12%;
- статические разрушения и трещины ~ 2%;
- трещины и прогары от нагревов ~ 4...5%;
- износы, схватывания и заедания в контактируемых деталях ~ 3...4%, при этом износы могут быть опасны не только сами по себе, но и могут служить причиной повышенных переменных напряжений и усталостных трещин и разрушений;
- недопустимые деформации ~ 6...7%;
- повреждения поверхностей от воздействия среды ~ 1%;
- повышенные вибрации изделия, его агрегатов и узлов ~ 1.0%.

Всего прочностных дефектов ~ 60...65% от всех типов дефектов.

Основные виды нагрузок и вызываемые ими повреждения в деталях ГТД приведены в табл. 4.1.

Механические свойства материалов определяются экспериментально при помощи диаграммы кривой пластичности (диаграммы растяжения) (рис. 4. 1).

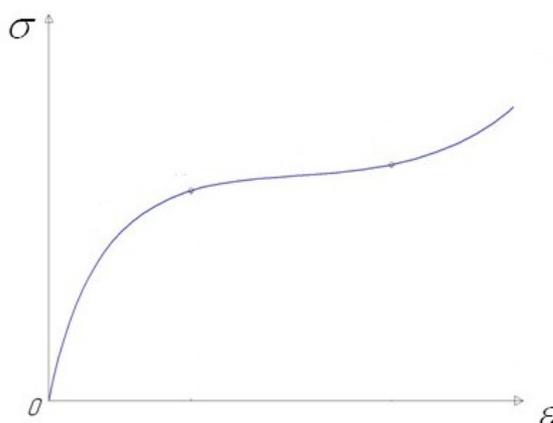


Рис. 4.1. Кривая пластичности (диаграмма растяжения)

Для описания кривых деформирования металлов используют зависимости:  $\sigma = A\varepsilon^{1/m}$ , где  $A$  и  $m$  – константы материала, зависящие от температуры,  $m=5 \dots 15$ ;

или:

$$\varepsilon = \sigma/E + r(\sigma/\sigma_{0,01})^n,$$

где  $r$  и  $n$  – коэффициенты, зависящие от материала и температуры.

По диаграмме растяжения определяют:

1. **Предел прочности** материала (предел временного сопротивления разрыву):  $\sigma_\sigma$  - условное напряжение, соответствующее максимуму растягивающей силы Р.

Предел прочности материала -  $\sigma_\sigma$  - один из важнейших параметров прочности, показывающий способность материала выдерживать внешние кратковременные нагрузки

Таблица 4.1.

Вид нагружения	Вид повреждения	% дефектов	Типичный пример дефектов
Статическое: длительное статическое,	Статические трещины и поломки: вязкие, хрупкие. Повышенная деформация, ослабление затяжки, потеря устойчивости.	2...5% 10...15%	Лопатки турбины, опоры, оболочки. Диски турбины и компрессора, болтовые соединения, бандажные полки лопаток турбины.
Ударное	Забоины, недопустимые деформации, хрупкие разрушения.		Ударное разрушение и деформации лопаток при попадании посторонних предметов.
Малоцикловое: повторно-статическое, термоциклическое	Малоцикловые трещины и разрушения, термоусталостные трещины и разрушения.	10%	Диски турбины и компрессора. Охлаждаемые рабочие и сопловые лопатки турбины.
Динамическое, высоко-частотное.	Усталостные трещины и поломки. Повреждение контактных поверхностей (выкрашивание, контактная коррозия, износ, заедание, наклеп).	40...50% 20...25%	Лопатки и диски турбины и компрессора. Подшипники, зубчатые соединения, замки лопаток компрессора и турбины, фланцевые соединения.
Термическое.	Коробление.	2...5%	Тонкостенные конструкции.
Воздействие среды.	Коррозия, эрозия, кавитация, наклеп, износ.	3...7%	Обгар лопаток турбины, эрозия лопаток компрессора

или длительные нагрузки, действующие при низких температурах.

При оценках прочности деталей работающих на срез и кручение (замковые соединения лопаток и дисков роторов, валы, рессоры и т.д.) используют предел прочности при сдвиге  $\tau_s$ . Приближенно можно считать, что он равен:

$$\tau_s = (0.4... 0.6) \sigma_s.$$

2. **Предел текучести:**  $\sigma_{0.2}$  - напряжение, при котором образец получает остаточную

деформацию  $\varepsilon=0.2\%$  от первоначальной длины.

Соотношение предела прочности и предела текучести для различных классов металлов составляет примерно:

$\sigma_{0.2}=0.5\sigma_{\varepsilon}$  - для нетермообработанных сталей и сплавов,

$\sigma_{0.2}=0.8\sigma_{\varepsilon}$  - для термообработанных сталей и сплавов,

$\sigma_{0.2}=0.9\sigma_{\varepsilon}$  - для титановых сплавов.

3. **Предел упругости:**  $\sigma_y$  ( $\sigma_{0.01}$ ) - напряжение, определяющее область упругих деформаций, при котором образец получает остаточную деформацию  $\varepsilon=0.01\%$  от первоначальной длины.

4. **Предел пропорциональности:**  $\sigma_{np}$  ( $\sigma_{0.001}$ ) – наибольшее напряжение, при котором зависимость между напряжениями и деформациями практически линейна, при котором образец получает остаточную деформацию  $\varepsilon=0.001\%$  от первоначальной длины.

5. **Коэффициент Пуассона:**  $\mu$  - отношение относительного поперечного сужения к относительному продольному удлинению. При упругом деформировании для всех металлов принимают величину  $\mu=0,3$ , при пластическом -  $\mu=0,5$ .

6. **Модуль упругости** (модуль Юнга):  $E = \sigma/\varepsilon_{np}$  - коэффициент пропорциональности в зависимости  $\sigma=E \varepsilon$  которая приближенно описывает поведение материала в области  $0 < \sigma < \sigma_{0.001}$ .

7. **Модуль сдвига:**  $G$  - отношение касательного напряжения при сдвиге к соответствующему углу сдвига в области пропорциональной зависимости  $\tau = G\gamma$  (Рис. 4.2). Между величинами  $E$  и  $G$  существует связь:

$$G=E/2(1+\mu).$$

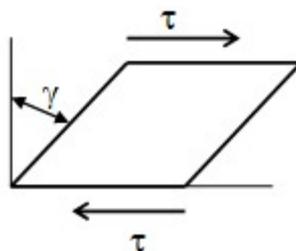


Рис. 4.2. Сдвиговые деформации

У монокристаллов металлов модуль упругости имеет значительную анизотропию по различным кристаллографическим направлениям. Так для монокристаллических литых жаропрочных сплавов, используемых для изготовления лопаток турбин величина модуля упругости в различных кристаллографических направлениях равна (рис. 4.3):

$[001] - (1.2 \dots 1.3) \times 10^5$  МПа

[011] -  $(2.2 \dots 2.5) \times 10^5$  МПа

[111] -  $(2.7 \dots 3.2) \times 10^5$  МПа

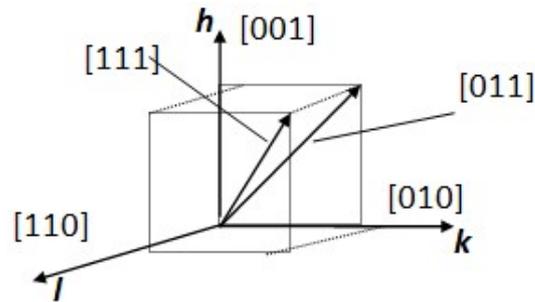


Рис. 4.3. Направления осей монокристаллов

Для определения ориентационной зависимости модуля упругости можно воспользоваться соотношением:

$$E_{hkl} = E_{001} / f(A_{hkl}),$$

где  $h, k, l$  – индексы кристаллографических осей;

$$A = \frac{h^2 k^2 + k^2 l^2 + h^2 l^2}{(h^2 + k^2 + l^2)}; \quad f(A_{hkl}) = 1 - D A_{hkl}; \quad D = 2 + 2\mu_{001} - \frac{E_{001}}{G_{001}}$$

Величина модуля упругости зависит от температуры испытания. С увеличением температуры модуль упругости уменьшается.

8. **Относительное удлинение при разрыве** определяется как:

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} 100 \%,$$

где  $l_0$  - начальная длина образца;

$l_k$  - длина образца при разрыве.

Величина относительного удлинения при разрыве  $\delta$  зависит от длины образца  $l_0$ . Т.к. при малой длине образца  $l_0$  в деформации участвуют зоны переходные от рабочей части к головке, то для испытаний используются стандартные образцы с длиной рабочей части 5 или 10 диаметров.

В связи с тем, что для испытаний используются образцы с различной длиной рабочей части, величины относительного удлинения различают в зависимости от длины рабочей части образцов и обозначают:  $\delta_5$  - при длине образца  $l_0 = 5d$ , и  $\delta_{10}$  - при  $l_0 = 10d$ , где  $d$  – диаметр образца. Как правило, испытывают круглые образцы. При испытании не круглых образцов для сравнимости результатов испытаний с круглыми образцами длину не круглых образцов берут из условия сохранения постоянным соотношения  $l_0/F$ , где  $l_0$  - длина,  $F$  - площадь поперечного сечения. В этом случае длину некруглого образца определяют из соотношения:

$$l = \left(\frac{l}{d}\right)d = kd = k\sqrt{\frac{4}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi d^2}{4}} = 1,13k\sqrt{F}.$$

9. **Относительное сужение при разрыве:**  $\phi = \frac{F_0 - F_k}{F_0} 100\%$ ,

где  $F_0$  - начальная площадь поперечного сечения,

$F_k$  - площадь поперечного сечения в месте разрыва (в шейке образца).

Если разрушение образца происходит с образованием шейки, то при разрушении площадь его поперечного сечения уменьшается. Поэтому часто определяют величину истинного сопротивления разрыву:  $S_k = P/F_k$ .

Между величинами  $S_k$  и  $\sigma_e$  можно установить связь, исходя из условия  $P = \sigma_e F_0 = S_k F_k$ .

Откуда  $\sigma_e = S_k (F_k/F_0) = S_k(1-\phi)$  или  $S_k = \sigma_e/(1-\phi)$ .

Т.к. при образовании шейки остаточная деформация по длине образца распределяется

неравномерно, то определяют истинное удлинение при разрыве:  $e = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln(1 + \varepsilon)$ ,

где  $\varepsilon = \Delta l/l_0$  - условная остаточная деформация.

Т.к. существует связь  $1 + \varepsilon = 1/(1-\phi)$ , то для определения истинного удлинения при разрыве

часто используют формулу:  $e = \ln \frac{1}{1-\phi}$ .

Истинные характеристики сопротивления разрыву  $S_k$  и остаточной деформации при разрыве “ $e$ ” играют достаточно важную роль в оценках надежности и прочности. Так по величине  $S_k$  судят о сопротивлении материала пластическому разрушению путем сдвига, т.е. вязкому, замедленному разрушению. Величина “ $e$ ” определяет сопротивление материала повторно-статическому, малоцикловому нагружению.

На величины прочности и пластичности  $S_k$ ,  $\sigma_e$ ,  $\sigma_{0.2}$ ,  $\delta$ ,  $\phi$ ,  $e$  влияют температура испытания, скорость нагружения, термообработка, структура материала. С увеличением температуры величины  $S_k$ ,  $\sigma_e$ ,  $\sigma_{0.2}$  уменьшаются, а величины  $\delta$ ,  $\phi$ ,  $e$ , как правило, увеличиваются. Соответственно при понижении температуры растут величины  $S_k$ ,  $\sigma_e$ ,  $\sigma_{0.2}$  и уменьшаются  $\delta$ ,  $\phi$ ,  $e$ , т.е. материал в этом случае упрочняется, а пластичность его снижается.

Аналогичное явление упрочнения происходит при повышении скорости деформирования. Поэтому стандартные испытания на растяжение проводят при низких и близких между собой скоростях нагружения  $V=3...100\%/мин$ , где чувствительность материала к скорости деформирования невелика. При быстром нагружении, например при пробивании корпуса двигателя оборвавшейся лопаткой, летящей со скоростью

$V=450... 500$  м/сек, величина предела прочности увеличивается и составляет  $(\sigma_{\theta})_{уд} \approx 1.3(\sigma_{\theta})_{ст}$ .

При закалке или старении материала происходит его упрочнение, и, соответственно, увеличиваются характеристики прочности  $S_k$ ,  $\sigma_{\theta}$ ,  $\sigma_{0.2}$  и уменьшаются характеристики пластичности -  $\delta$ ,  $\phi$ ,  $e$ . При отжиге или отпуске материала происходит обратное явление. Т.е. кратковременные характеристики материала зависят от режима термообработки. Материалы деталей, изготавливаемых методом литья, имеют, как правило, меньшую пластичность, чем материалы деталей, изготавливаемых штамповкой.

Для поликристаллических материалов с изотропной равноосной структурой с уменьшением размера кристаллов (зерна) характеристики пластичности увеличиваются. Поэтому при выборе и отработке режимов термообработки необходимо стремиться к однородной (равнозернистой) и мелкозернистой структуре.

При изготовлении особо ответственных деталей ГТД (детали первой группы контроля), таких как рабочие и сопловые лопатки турбины, диски рабочих колес компрессора и турбины, силовые корпуса и др, как правило, для каждой заготовки, контролируются величины прочностных характеристик материала деталей:  $\sigma_{\theta}$ ,  $\sigma_{0.2}$ ,  $\delta$ ,  $\phi$ . Контроль прочностных характеристик материала может осуществляться прямым измерением на образцах-свидетелях, отлитых совместно с деталью или вырезанных из специальных мест в заготовках деталей (при заготовках, изготовленных методом штамповки).

Для менее ответственных деталей или для деталей первой группы контроля, серийное изготовление которых хорошо налажено и не допускает отклонений по прочностным свойствам материала, для контроля состояния материала используются неразрушающие методы контроля твердости, которые проводят путем вдавливания в материал детали стального шарика (метод Бринеля) или алмазного конуса (метод Роквелла).

10. **Твердость по Бринелю** используется для контроля состояния относительно «мягких» материалов – магниевых, алюминиевых, медных, титановых и никелевых сплавов, а также незакаленных конструкционных сталей без поверхностного упрочнения

и наклепа. Твердость по Бринелю определяется как:  $HB = \frac{P}{F_u} = \frac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$ ,

где  $P$  - усилие вдавливания;

$D$  - диаметр шарика;

$d$  - диаметр отпечатка;

$F_u$  - площадь шаровой поверхности отпечатка.

Размерность величины твердости по Бринелю – НВ – кгс/мм<sup>2</sup> или кгс/см<sup>2</sup>. Для

испытаний на твердость по Бринелю обычно используют стальные шарики диаметром  $\varnothing 2,5\text{мм}$ ,  $\varnothing 5\text{мм}$  или  $\varnothing 10\text{мм}$  при усилиях вдавливания соответственно 700, 1500 и 3000 кгс.

Для конструкционных сталей без поверхностного упрочнения и наклепа между твердостью по Бринелю и пределом прочности существует связь:  $\sigma_s = (0.33 - 0.36) HB$ . Для остальных материалов надежной корреляции между твердостью по Бринелю и пределом прочности экспериментально не обнаружено.

11. **Твердость по Роквеллу** используется для контроля твердых материалов – закаленных сталей и сталей с поверхностным упрочнением, наклепом, а также с цементированной или азотированной поверхностью.

Твердость по Роквеллу определяется на специальном унифицированном приборе путем вдавливания в поверхность детали алмазного конуса с нормированными размерами и выражается отвлеченным числом:

$$HR_c = k - \frac{H - h}{i},$$

где индекс  $c$  - указывает шкалу прибора;

$h$  - глубина вдавливания алмазного конуса по действием предварительной нагрузки в 10 кгс;

$H$  - окончательная глубина вдавливания под действием нагрузки в 150 кгс;

$k$  - коэффициент, для шкалы “С” -  $k = 100$ ;

$i$  - цена деления шкалы прибора, для шкалы “С” -  $i = 0.002$ .

Пластичность материала в значительной мере определяет несущую способность деталей при изгибе и кручении. Для примера рассмотрим изгиб бруса прямоугольного поперечного сечения (рис. 4.4).

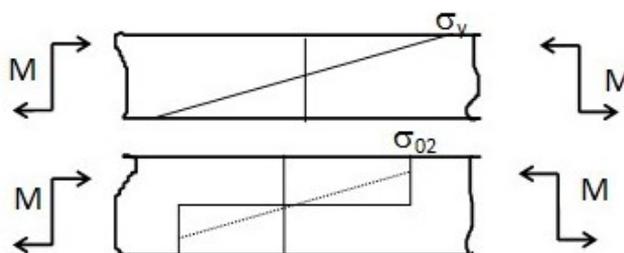


Рис. 4.4. Распределение напряжений при изгибе. а – хрупкое разрушение, б – пластическая деформация

В условиях хрупкого разрушения предельный изгибающий момент равен:

$$My = (hb^2)/6.$$

Для пластичных материалов при достижении предела текучести начнется перераспределение напряжений. При полном пластическом перераспределении напряже-

ний предельный изгибающий момент будет равен:

$$M_0 = (hb^2)/4 = 1,5M_y.$$

Если при этом пределы прочности при растяжении и сжатии различаются между собой в  $K = (\sigma_b)_{сж} / (\sigma_b)_{раст}$  раз, то предельный изгибающий момент будет равен:

$$M_0 = \sigma_b \frac{hb^2}{4} \left( \frac{3k}{1+k} \right).$$

Экспериментальные данные показывают, что предельную величину отношения предела прочности при сжатии и при растяжении можно принять  $K=3$ . Для прямоугольного сечения в этом случае  $M_{пл} = 2,25M_y$ . Экспериментальные данные при изгибе образцов квадратного сечения  $5 \times 5$  мм с разной пластичностью (табл. 4.2) показывают, что при  $\delta = 5\%$  происходит почти полное перераспределение напряжений.

Таблица 4.2. Соотношение пластического и упругого моментов

Материал	$\delta, \%$	$M_0/M_y$
АЛ4-Т6	3.5	2.04
АЛ4-Т6	0.5	1.2
ЖС6	5	2.2
ЖС6	0.5	1.02

При совместном действии изгибающего момента и растягивающей силы (при таком нагружении работают неохлаждаемые рабочие лопатки турбины и компрессора и многие другие детали ГТД) несущая способность сечения в условиях полного пластического перераспределения напряжений определяется из соотношения

$$M/M_0 + (N/N_0)^2 = 1$$

где  $M_0$  – предельный изгибающий момент при полном пластическом перераспределении напряжений;

$N_0$  – предельная осевая нагрузка при полном пластическом перераспределении напряжений.

При хрупком состоянии материала предельная несущая способность сечения при совместном действии изгибающего момента и растягивающей силы может быть определена по формуле:  $M/M_0 + N/N_0 = 1$ .

Исходя из сравнения предельных нагрузок при действии изгибающих моментов и совместном действии осевой силы и изгибающего момента остаточное удлинение материала  $\delta \geq 5\%$  является минимально необходимым условием надежной работы конструкций в условиях концентрации напряжений. С увеличением размеров деталей

требования к пластичности увеличиваются.

Вибрационные нагрузки в деталях двигателя являются неизбежным следствием его работы. Поэтому борьба с ними ведется лишь в случае их опасности, которая оценивается коэффициентом запаса по сопротивлению усталости:

$$K_v = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_v} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_{\tau,t}^b} \right)$$

Методы уменьшения опасности переменных напряжений вытекают из анализа факторов определяющие запас по выносливости. Это:

- повышение предела выносливости детали –  $\sigma_{-1}$ ;
- снижение статических напряжений –  $\sigma_m$ ;
- повышение предела прочности материала детали –  $\sigma_{\tau,t}^b$ ;
- снижение виброн нагруженности –  $\sigma_v$ .

Из опыта проектирования лопаток следует, что радиус перехода от пера к хвостовику для лопаток из титановых сплавов не может быть меньше чем 1.6мм, для лопаток из стальных или никелевых сплавов  $r_{\min}=1.3$ мм. Опыты показывают резкое снижение предела выносливости (в 1,5...2 раза) при уменьшении радиуса перехода от пера к замку до величин  $r \approx 0.6 \dots 0.8$ мм.

В охлаждаемых лопатках турбины дополнительным концентратором напряжений служит перфорация на входной кромке. Эксперименты показали, что скругление острых кромок отверстий перфорации на входной кромке повысило предел выносливости охлаждаемых лопаток турбины с  $\sigma_{-1}=140$  до 180МПа. (лопатка подобной конструкции но без перфорации имела предел выносливости  $\sigma_{-1} \approx 200$ МПа).

Минимальным радиусом входной кромки лопаток, обеспечивающим длительную работоспособность компрессора ГТД, можно считать радиус, равный  $r \approx 0,15 \dots 0,18$ мм, выходной кромки -  $r \approx 0,10 \dots 0,15$ мм.

Забоины кромок лопаток от попадания в тракт двигателя посторонних предметов приводят к сильному снижению их предела выносливости с  $\sigma_{-1} \approx 400 \dots 500$ МПа до  $\sigma_{-1} \approx 100 \dots 200$ МПа и риску возникновения усталостной поломки лопатки

Для дисков турбины и компрессора по возможности необходимо избегать отверстий и выносить элементы крепления на фланцы, как показано на рис. 4.5.

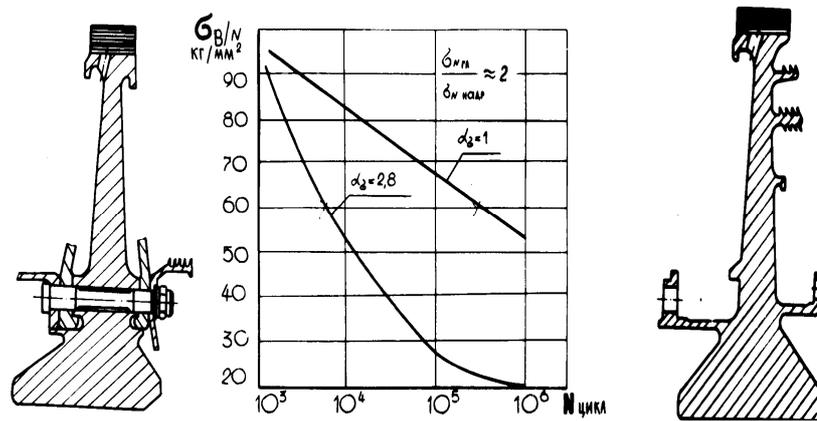


Рис. 4.5. Диск турбины оптимальной конструкции без отверстий под болты крепления.

Конструкция диска турбины без отверстий под болты крепления, показанная на рис. 4.5, имеет в 8 раз большую долговечность и на 20% меньший вес. Для устранения влияния деформаций диска на напряженное состояние фланца крепления он должен быть отнесен «тонкой оболочкой» от диска на расстояние  $l$ , при котором напряженное состояние диска не оказывает влияния на напряженность фланца. Это условие выполняется при:

$$\beta l \geq 3,$$

где  $\beta = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{rh}}$ ;

$r$  - средний радиус оболочки;

$h$  - толщина оболочки;

$\mu$  - коэффициент Пуассона.

Принимая  $\mu=0,3$  получим  $\beta = \frac{1,285}{\sqrt{rh}}$  или  $l > 2,4 \sqrt{rh}$ .

## 5. РАЗРУШЕНИЕ МАТЕРИАЛА ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Разрушение под действием статической нагрузки может происходить с накоплением значительных пластических деформаций и без пластических деформаций. Различают два основных вида разрушения: вязкое и хрупкое.

Вязкое разрушение - это разрушение, которое наступает после значительной пластической деформации. Поэтому такое разрушение можно заметить и предотвратить на ранней стадии. Хрупкое разрушение происходит лавинообразно (для хрупкого разрушения характерна высокая скорость развития трещин  $\approx 0,4...0,5$  от скорости распространения звука в материале) без заметных пластических деформаций. Большинству реальных материалов свойственно смешанный тип разрушения (одновременно вязкое и хрупкое). Разделение на чисто вязкое и чисто хрупкое разрушение условно и оценивается по преобладанию того или иного вида.

Важным в обеспечении надежности является выбор таких материалов и создание таких конструкций, разрушение которых происходило бы замедленно и его можно было бы обнаружить на ранних стадиях при регламентных осмотрах двигателя в процессе его эксплуатации.

Основное различие между вязким и хрупким разрушениями заключается в энергоемкости:

- распространение вязкой трещины происходит за счет значительной энергии, подводимой извне,
- распространение хрупкой трещины происходит за счет высвобождения накопленной в системе упругой энергии, поэтому для развития хрупкой трещины не требуется подвод энергии извне.

Поэтому с точки зрения надежности (хрупкое разрушение происходит быстро, вязкое разрушения - замедленно и поэтому его можно обнаружить на ранней стадии развития) в рабочих условиях материал и конструкция детали не должны обладать склонностью к хрупкому разрушению.

Один и тот же материал в зависимости от скорости нагружения, температуры испытания, вида напряженного состояния может иметь и хрупкое и вязкое разрушение. При неодноосном напряженном состоянии степень пластической деформации при разрушении зависит от жесткости напряженного состояния. Пластичный при испытании на простое растяжение материал в конструкции может дать хрупкий излом, если характер напряженного состояния конструкции (жесткость напряженного состояния) такой, что пластические деформации, протекающие вследствие сдвига, затруднены.

Жесткость напряженного состояния часто характеризуют отношением:

$$\gamma_p = \frac{\sigma_1}{\sigma_i},$$

где  $\sigma_1$  - максимальное главное напряжение;

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Условный предел текучести при неоднородном напряженном состоянии может быть связан с жесткостью напряженного состояния и пределом текучести при простом растяжении зависимостью:

$$\sigma_{02} = \gamma_p [\sigma_{02}]^{расм}, \quad (5.1)$$

где  $[\sigma_{02}]^{расм}$  - предел текучести при простом растяжении образца.

При  $\gamma_p = [\sigma_b]^{расм} / [\sigma_{02}]^{расм}$  из (7.1) получим, что

$$\sigma_{02} = [\sigma_b]^{расм}. \quad (5.2)$$

В соответствие с (5.2), при напряженном состоянии с жесткостью  $\gamma_p = [\sigma_b]^{расм} / [\sigma_{02}]^{расм}$  разрушение произойдет хрупко, без больших пластических деформаций. При равномерном трехосном напряженном состоянии  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , соответственно  $\gamma_p = \infty$ , поэтому любой материал должен разрушаться хрупко.

Объемное или плоское напряженное состояние в конструкции может быть вызвано механическими напряжениями, концентраторами напряжений как конструктивными, так и связанным и с наличием дефектов и трещин в материале, остаточными технологическими напряжениями после холодной обработки и в местах сварки или температурными напряжениями при неравномерном нагреве детали. Для снятия остаточных технологических напряжений в деталях применяют термообработку - отпуск.

Различный характер разрушения деталей (вязкий или хрупкий) из одного и того же материала может быть объяснен двумя различными параметрами, определяющими прочность материала: сопротивлением отрыву, определяющим хрупкое разрушение и сопротивлением сдвигу, определяющим вязкое разрушение. Характеристика сопротивления отрыву не зависит от условий испытания (температуры, скорости нагружения, вида напряженного состояния и т.д.). Сопротивление сдвигу зависит от условий испытания: скорости нагружения, температуры и др.

При хрупком разрушении трещина развивается перпендикулярно действию нормальных напряжений, при вязком – разрушение происходит под углом к нормальным напряжениям – по поверхностям наибольших касательных напряжений. Характер разрушения является важным свойством материала и конструкции, характеризующим надежность изделия.

Процесс разрушения можно представить в несколько стадий:

- зарождение микротрещины;
- замедленное развитие микротрещины в трещину значимых размеров;
- лавинообразное развитие трещины после достижения определенных размеров.

В настоящее время разработан ряд моделей образования микротрещин в процессе взаимодействия дислокаций. (Дислокации – это дефекты кристаллической решетки, представляющие собой линии, вдоль которых нарушено правильное чередование атомных плоскостей. Пластическая деформация кристаллов обусловлена движением дислокаций.)

Напряжения в вершине дислокационного скопления могут на несколько порядков превышать внешние напряжения, в результате чего может происходить слияние лидирующей дислокации с соседней. Образуются микротрещины. После объединения двух первых дислокаций трещина увеличивается в размерах, дальнейшее слияние дислокаций облегчается, начинается вторая стадия разрушения – распространение зародившейся микротрещины. Распространение трещины происходит за счет подвода энергии.

В основе современных теорий развития трещин лежит энергетическая теория Гриффитса. Подход Гриффитса состоит в том, что для развития трещины в абсолютно упругом теле необходимо затратить энергию, равную той, которая расходуется на обеспечение целостности материала перед фронтом трещины:

$$dU=Gds,$$

где  $dU$  – энергия разрушения, затрачиваемая на образование новой поверхности развития трещины площадью  $ds$ ;  $G$  – поток энергии, заставляющий трещину развиваться, отнесенный к площади трещины.

Работы на зарождение и развитие трещин определяют параметры ударной вязкости -  $KCT$  и  $KCU$  ( $KCV$ ).

Параметр ударной вязкости  $KCU$  ( $KCV$ ) определяется на стандартных образцах с надрезом и равен отношению абсолютной работы разрушения при ударном изгибе надрезанного образца к площади наименьшего сечения образца с надрезом (работы затрачиваемой на зарождение и развитие трещины). Отличия в параметрах  $KCU$  и  $KCV$  заключается в форме концентратора напряжений на образце. Вид образцов для испытания на ударную вязкость и схема испытания по ГОСТ 9454-78 показана на рис.5.1.

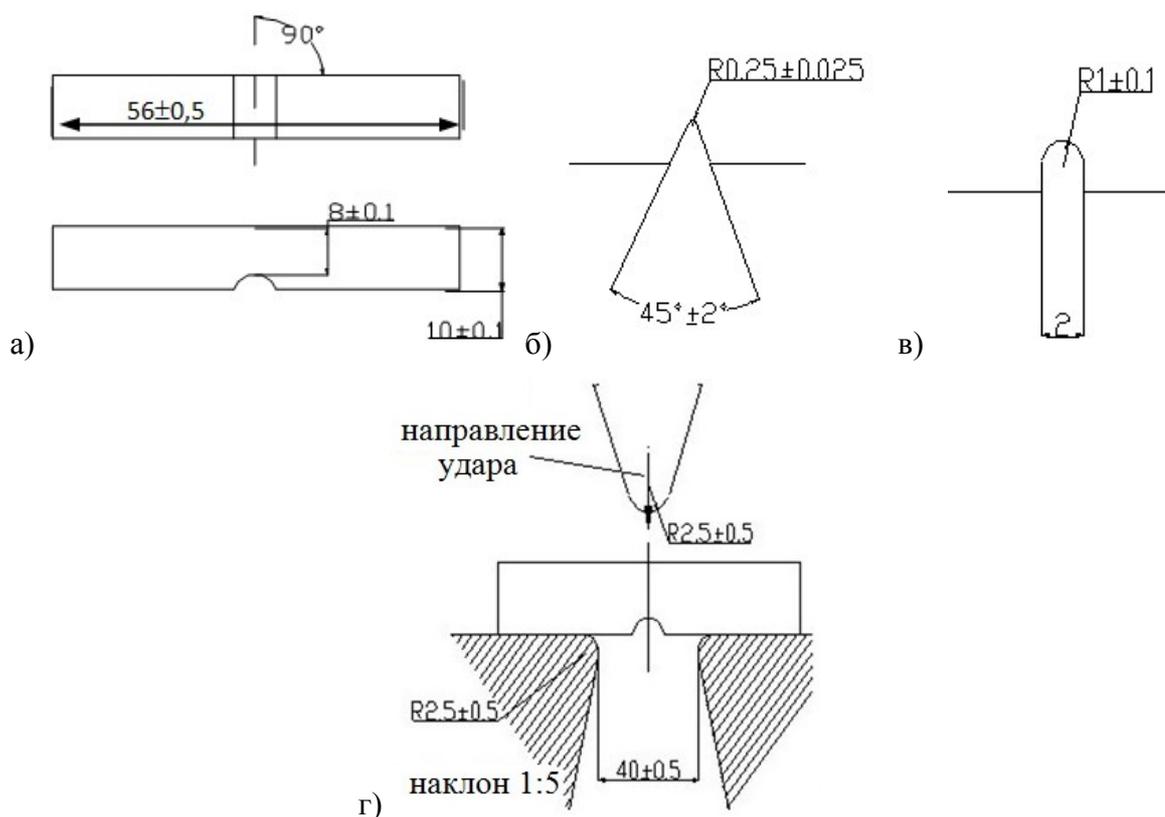


Рис. 5.1. Вид образцов (а – общий вид, б – концентратор типа U, в – концентратор типа V) и схема испытания на ударную вязкость (г)

Особенно показательными для оценки склонности материала к хрупкому разрушению являются ударные испытания образцов с начальной трещиной - *KCT*. Для этих целей используются обычно ударные образцы, изготовленные по ГОСТ 9454-78 (см. рис. 5.1.) в которых переменным нагружением создается трещина заданной протяженности (см. рис.5.2)

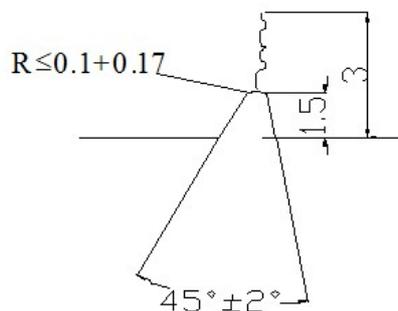


Рис. 5.2. Концентратор типа Т (усталостная трещина) для определения КСТ

Параметр *KCU* (*KCV*) характеризует работу, затрачиваемую на зарождение и развитие трещины. Параметр *KCT* определяет только работу, затрачиваемую на развитие трещины, и оценивает способность материала тормозить начавшееся разрушения.

Для предотвращения хрупкого разрушения конструкционные материалы должны обладать достаточной пластичностью -  $\delta$ ,  $\phi$  - и ударной вязкостью  $KCT$  и  $KCU$  ( $KCV$ ), однако эти параметры только качественные и для расчетов на прочность не используются.

Если материал имеет  $KCT \approx 0$ , то это означает, что после зарождения трещины процесс его разрушения идет практически без затраты работы. Такой материал хрупок и не надежен в работе. И наоборот, чем больше параметр  $KCT$ , тем выше надежность материала в условиях эксплуатации.

Параметры  $KCU$  и  $KCT$  существенно зависят от температуры испытания, а также от структуры материала и термообработки детали.

Температура, при которой разрушение переходит из вязкого в хрупкое, называется критической температурой хрупкости  $t_{cf}$  и характеризует порог хладноломкости.

Зависимость характеристик  $KCT$  и  $KCU$  от температуры показана на рис.5.3.

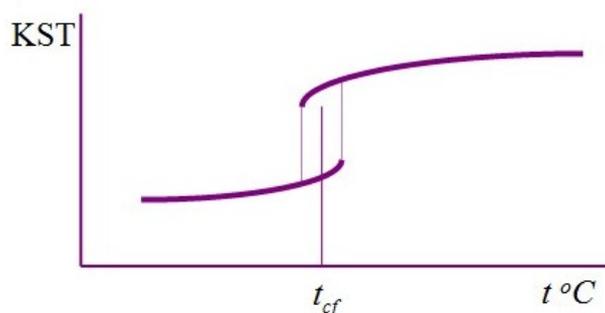


Рис. 5.3. Зависимость характеристик  $KCT$  и  $KCU$  от температуры

При температуре ниже критической происходит резкое падение характеристик ударной вязкости  $KCT$  и  $KCU$  и, соответственно, разрушение из вязкого переходит в хрупкое.

Склонность материала к хрупкому разрушению определяет отношение  $Km = KCT / KCU$ .

В табл. 5.1. ниже приведены данные по влиянию термообработки на характеристики ударной вязкости титановых сплавов ВТ-8 и ВТ-9.

Таблица 5.1

Материал	$\sigma_b$ , МПа	$KCU$ , КДж/м <sup>2</sup>	$KCT$ , КДж/м <sup>2</sup>	$K_t = KCT / KCU$
ВТ-9	1050	39,2	28,9	0,74
ВТ-8	1050	77,1	24,4	0,29

Из данных, приведенных в табл. 5.1 видно, что при одинаковых пределах прочности материал ВТ-8 более склонен к хрупкому разрушению, чем ВТ-9.

Количественные методы оценки развития дефектов и трещин рассматриваются в механике разрушения.

На условие перехода от вязкого к хрупкому разрушению существенное влияние оказывает вид напряженного состояния. При объемном или плоском напряженном состоянии вероятность хрупкого разрушения выше, чем при линейном. Так как наличие трещин и дефектов в материале вызывает концентрацию напряжений и сложное напряженное состояние в районе дефекта, то условие перехода к хрупкому разрушению можно рассматривать на основе теории развития трещин и линейной механики разрушения, основанной на работах Д.Р.Ирвина.

Концентрация нормальных напряжений на продолжении трещины определяется по формуле:

$$\sigma_y = \sigma \frac{l+r}{\sqrt{2lr+r^2}}, \quad (5.3.)$$

где  $l$  - половина длины трещины,  
 $r$  - расстояние от вершины трещины,  
 $\sigma$  - номинальные напряжения.

Д.Р.Ирвин показал, что, несмотря на то, что при  $r \rightarrow 0$  упругие напряжения у вершины трещины -  $\sigma_y$ , неограниченно возрастают (см. формулу (5.3)), величина  $K = \sigma_y \sqrt{2\pi r}$  стремится к значению

$$K = \sigma \sqrt{\pi l}. \quad (5.4)$$

Величина  $K$  называется «коэффициентом интенсивности напряжений», или сокращенно *КИН*. Несмотря на физически трудно представляемую размерность коэффициента интенсивности напряжений - кгс/мм<sup>3/2</sup>, его можно отождествлять в чисто упругой постановке задачи с напряжениями, действующими по линии распространения трещины на расстоянии  $1/2\pi$  от ее вершины.

При достижении величины номинальных напряжений -  $\sigma$  критического значения, коэффициент интенсивности напряжений характеризует предельное, разрушающее распределение напряжений у вершины трещины и может рассматриваться как силовой критерий хрупкого разрушения.

Критическое значение величины *КИН* обозначают  $K_c$ .  $K_c$  является важнейшей характеристикой материалов в механике разрушения. Критерий  $K_c$  связывает величину напряжений в момент разрушения с критическим размером трещины (дефекта материала). Чем больше величина  $K_c$ , тем выше сопротивление материала хрупкому разрушению, тем выше его надежность. Величину  $K_c$  определяют экспериментально на основании

испытаний специальных образцов с надрезом и с заранее заданной на дне этого надреза усталостной трещиной. Так как при экспериментальном определении величина  $K_{sc}$  существенно зависит от формы образца, то размеры образцов нормируются. Вид некоторых образцов для определения величины  $K_{sc}$  при статическом нагружении показан на рис.5.4.

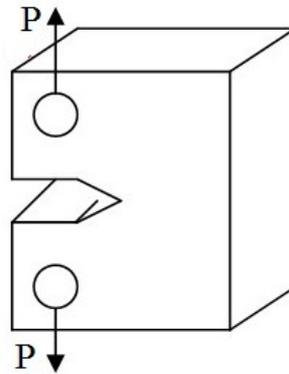


Рис. 5.4. Вид образца для определения величины  $K_{sc}$

Различают три типа раскрытия трещин (рис. 5.5): отрывом, когда растягивающие напряжения перпендикулярны к плоскости трещины (тип I); сдвигом в плоскости перпендикулярной поверхности трещины (тип II) и сколом, когда сдвиговые напряжения, действуют в плоскости трещины (тип III). Соответственно различают и три типа  $K_{ИН}$ , которые для случая бесконечной пластины определяются как:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} - \text{для раскрытия трещины типа I.}$$

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi l} - \text{для раскрытия трещины типа II.}$$

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi l} - \text{для раскрытия трещины типа III.}$$

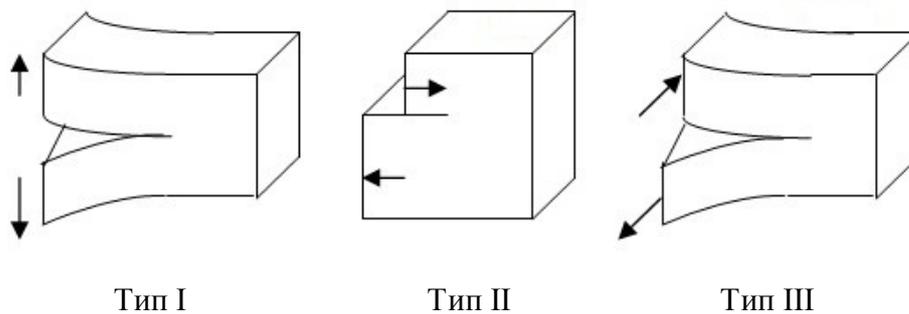


Рис. 5.5. Типы раскрытия трещин

Из трех типов раскрытия трещин наибольший интерес представляет тип I. Он встречается наиболее часто. При штамповке и вытяжке могут происходить разрушения по типу II. По типу III происходит разрушение сосудов под внутренним давлением.

Рост трещин связан с пластической деформацией, возникающей около вершины трещины, поэтому формулы Ирвина (5.3 и 5.4) применительно к пластичным материалам справедливы только в том случае, когда размер пластической зоны у вершины трещины мал по сравнению с длиной трещины и размерами детали. В условиях больших пластических деформаций условия роста трещин оценивают с помощью критериев критического раскрытия трещины ( $K_{PT}$ ),  $J$ -интеграла и др.

Таким образом, с позиций механики разрушения разрушение можно трактовать как хрупкое, если имеющаяся в конструкции трещина начинает расти под действием внешней нагрузки, а вязкое - когда трещина при нагружении не растет.

Вязкость разрушения  $K_{IC}$  тесно связана с показателями прочности и пластичности материала: пределом прочности -  $\sigma_b$ , пределом текучести -  $\sigma_{0.2}$ , пластичность материала -  $\delta$  и  $\phi$ . С ростом характеристик прочности вязкость разрушения падает, а ростом пластичности увеличивается.

Для титановых сплавов и высокопрочных сталей величина  $K_{IC}$  резко падает при уменьшении температуры. Алюминиевые сплавы сохраняют высокую вязкость разрушения при температурах, близких к абсолютному нулю. Высокие характеристики вязкости разрушения имеют мартенситно-старяющиеся сплавы.

Коррозионно-активные среды обычно снижают силы сцепления атомов у вершины трещин, поэтому разрушающие напряжения в некоторых средах будут меньше чем в атмосферных условиях. Водород оказывает влияние на докритический рост трещин, который проходит в среде водорода при меньшем коэффициенте напряжений и со значительно большей скоростью, чем в атмосферных условиях.

Размер зерна поликристаллических материалов является одним из основных параметров микроструктуры. Измельчение зерна позволяет одновременно увеличить прочность и вязкость разрушения металлов и сплавов.

Влияние легирующих элементов на вязкость разрушения обусловлено их воздействием на размер зерна. Элементы, способствующие измельчению зерна, повышают вязкость разрушения, а элементы упрочняющие твердые растворы, наоборот понижают вязкость разрушения. Трещиностойкость конструкционных материалов зависит также от природы, количества и распределения неметаллических включений. Чем ниже содержание в стали углерода, а так же вредных примесей - серы, фосфора и др., тем выше вязкость разрушения.

Имеется большое количество работ, посвященных установлению связи между вязкостью разрушения и другими механическими свойствами материалов -  $\sigma_b$ ,  $\sigma_{0.2}$ ,  $\delta$ ,  $\phi$ ,  $K_{IC}$ ,  $K_{ICU}$ , и др. Однако универсальной зависимости, связывающей вязкость разрушения

с другими легко определяемыми характеристиками прочности и пластичности, установить не удастся. Установленные корреляционные связи, носят частный характер, и могут иметь достаточно большую погрешность.

Одна из предлагаемых зависимостей для корреляции между вязкостью разрушения кратковременными механическими характеристиками, получаемыми по диаграмме растяжения, имеет вид:

$$K_c = \sqrt{2/3 E \sigma_{0.2} n^2 e}, \quad (5.5)$$

где  $E$  - модуль упругости,

$n$  - коэффициент деформационного упрочнения,

$e$  - истинная деформация при разрушении гладкого образца,

По литературным данным, расчетные значения  $K_c$  определенные по (5.5) находятся с точностью  $\pm 30\%$  в согласии с экспериментальными данными по 11 различным алюминиевым и титановым сплавам и сталям.

В связи с отсутствием надежных корреляционных связей между механическими характеристиками и вязкостью разрушения, величину вязкости разрушения необходимо определять при специальных испытаниях.

Некоторые стали, особенно высокопрочные, склонны к замедленному разрушению под напряжениями (иногда это явление называют статической усталостью). Так, например сталь 23Х13НВМФА (ЭИ-961Ф) ( $\sigma_b \geq 1500$  МПа,  $\sigma_{0.2} \geq 1050$  МПа,  $\delta \geq 110\%$ ,  $\phi \geq 35\%$ ,  $K_{CU} \geq 22/5$  КДж/м<sup>2</sup>) при длительной выдержке под нагрузкой при 20 °С обнаруживает склонность к замедленному разрушению. Образцы из некоторых плавок (гладкие и с надрезом) разрушались через 2...100 ч при номинальных напряжениях  $\sigma = 1000$  МПа. Объяснение эффекта замедленного разрушения может быть сделано на основе гипотез влияния поверхностно-активных сред. Адсорбируясь на поверхности микротрещин, поверхностно - активные вещества (например, влага воздуха или остатки масел) расклинивают трещину и приводят к хрупкому разрушению. Растягивающие напряжения усугубляют этот эффект, сжимающие - сглаживают.

Повышение хрупкости материалов при наводороживании в перспективе, с возможным применением водорода в качестве топлива для авиационных газотурбинных двигателей, может перерасти в серьезную проблему обеспечения надежности. При наводороживании материалов на их поверхности адсорбируются ионы водорода, которые частично внедряются в решетку металла, что затрудняет движение дислокаций, а, следовательно, и пластическую деформацию. Выход ионов из решетки на внутреннюю поверхность трещины или поры приводит к образованию атомарного, а затем и молекулярного

водорода, что создает во внутренних пустотах высокие давления и внутренние напряжения.

Примеры замедленного разрушения довольно часто встречаются на практике (разрушение затянутых болтовых соединений, пружин, сварных соединений, резервуаров под внутренним давлением), особенно в условиях нагружения с большим запасом упругой энергии, когда появления трещины или разрыва не приводят к существенному уменьшению внешней нагрузки.

Меры борьбы с замедленным разрушением: применение пластичных материалов, малочувствительных к начальной трещине, отпуск стали, ограничение напряжений (тарированная затяжка), создание поверхностных сжимающих напряжений и др.

Применение материалов, малочувствительных к начальной трещине и не склонных к хрупкому разрушению, важно и с точки зрения общей надежности конструкции.

Во многих деталях и узлах, особенно листовых, нормами износа допускается появление трещины определенной длины за некоторый период работы. Эти трещины могут возникать при изготовлении детали, от внешних переменных или термоциклических нагрузок. Такие трещины обнаруживаются при профилактических осмотрах. После принятия мер по локализации трещин или уменьшению скорости их распространения изделие допускается к дальнейшей эксплуатации. Важно, с точки зрения назначения сроков регламентных работ, чтобы скорость распространения трещины не превышала допустимую, и трещина за межосмотровый период не развилась до критического размера.

Применение материалов с меньшей склонностью к хрупкому разрушению важно не только с точки зрения назначения периодичности осмотров, но и как мера по уменьшению последствий разрушения отдельных деталей. Так, например, при обрыве одной лопатки турбины соседние лопатки рабочего колеса получают повреждения и разрушатся. При этом все фрагменты разрушения участвуют в пробивании наружных оболочек двигателя. Применение более пластичного материала позволит существенно уменьшить количество вторичных разрушений соседних лопаток и повысит надежность защиты над рабочим колесом.

## 6. ПОЛЗУЧЕСТЬ, РЕЛАКСАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ, ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ

Работа высоко нагруженных деталей «горячей» части авиационных ГТД (лопатки и диски турбины, диски последних ступеней компрессора, диафрагмы сопловых и направляющих аппаратов, болтовые соединения, элементы камеры сгорания и т.д.) часто обусловлена возможностью допустимых перемещений и деформаций. Это связано с малыми размерами осевых и радиальных зазоров между статорными и роторными деталями двигателя (касание ротора о статор может привести к аварии двигателя), изменением посадок в сопрягаемых деталях, ослаблением усилий в болтовых соединениях, недопустимых короблениях оболочек и др.

При повышенных температурах наблюдается явление, когда под действием напряжений ниже предела кратковременной прочности -  $\sigma_b^t$ , и предела текучести -  $\sigma_{0.2}^t$  при заданной температуре происходит накопление в материале необратимых деформаций. Это явление называется ползучестью. Таким образом, ползучесть - это непрерывный рост деформаций под действием постоянных напряжений. Так как явления ползучести наиболее интенсивно проявляются при повышенных температурах, то в основном подвержены ползучести высоко нагруженные детали «горячей части» двигателей – рабочие лопатки и диски турбины и элементы камеры сгорания.

Тесно связано с ползучестью явление релаксации напряжений. Релаксация напряжений - это уменьшение напряжений в детали во времени при постоянном во времени натяге, полученном при первоначальном нагружении. Явление релаксации напряжений в деформированной детали связано с появлением в ней деформаций ползучести под действием напряжений.

Принципиальным отличием ползучести и релаксации напряжений является то, что в процессе ползучести деформация растет неограниченно и может достичь такой величины, при которой деталь разрушается. В процессе релаксации напряжений предельная величина деформация ползучести не превосходят величины деформации, вызванной начальным нагружением. Поэтому релаксация напряжений напрямую не приводит к разрушению детали, но может привести к изменениям условий работы узла, при которых вероятность возникновения дефекта возрастает.

Наиболее типичным узлом, работоспособность которого определяется релаксацией напряжений, является болтовое соединение. При повышенных температурах в затянутом болтовом соединении в теле болта может происходить релаксация напряжений, что приводит к ослаблению усилия затяжки стыка и, соответственно, к появлению дефектов в виде усталостных разрушений болтов. Для болтовых соединений роторов ослабление

усилия их затяжки может привести к изменению жесткости ротора и, соответственно, к его повышенному дисбалансу.

Ползучесть и релаксация напряжений представляют собой две стороны одного явления - накопления необратимых деформаций при напряжениях ниже предела кратковременной прочности и предела текучести материала и поэтому они, как правило, рассматриваются совместно.

Основной характеристикой ползучести являются кривые ползучести, которые получают по результатам испытаний образцов на растяжение при постоянной температуре ( $t=Const$ ) и напряжениях ( $\sigma=Const$ ). Кривые ползучести показывают зависимость изменения величины накопленной пластической деформации образца (деформации ползучести) во времени. Общий вид кривых ползучести показан на рис. 6.1.

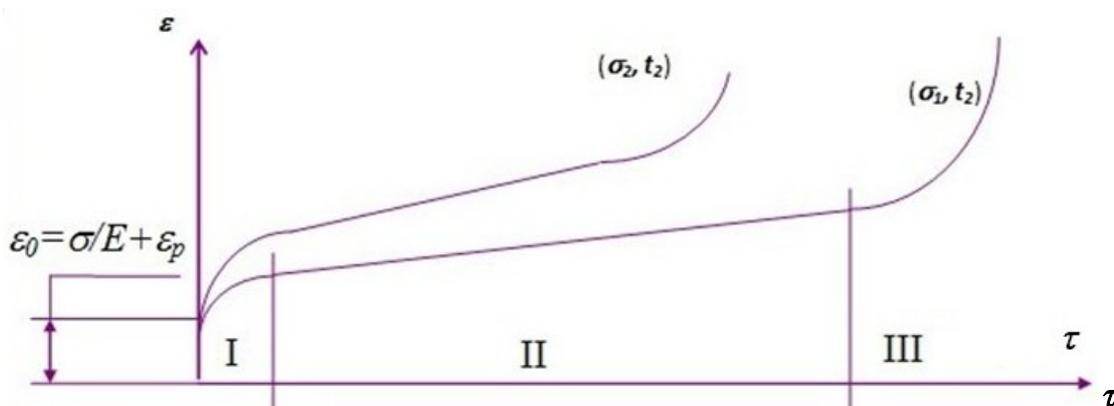


Рис. 6.1. Кривые ползучести

На кривых ползучести различают три характерных участка:

- 1 - начальный участок неустановившейся ползучести;
  - II - участок установившейся ползучести (участок с постоянной скоростью накопления деформаций);
  - III - участок ускоренной ползучести, непосредственно предшествующий разрушению;
- величина  $\varepsilon_0 = \sigma/E + \varepsilon_p$  определяет величину мгновенной упругой и пластической деформаций при начальном нагружении.

Первый участок неустановившейся ползучести имеет небольшую протяженность по времени и, как правило, реализуется при контрольных и сдаточных испытаниях двигателя. Поэтому наибольший практический интерес при проектировании, анализе технического состояния деталей и продлении ресурса ГТД представляют вторая стадия ползучести (стадия установившейся ползучести) которая является наиболее продолжительной и определяет величину накопленной деформации.

Это связано с тем, что ресурс деталей ГТД не должен превышать суммарной продолжительности первой и второй стадий ползучести.

(В соответствии с Нормами прочности авиационных ГТД, ресурс деталей назначается с учетом коэффициента запаса по долговечности как:

$$[\tau] = \tau_p / K\tau,$$

где  $\tau_p$  – долговечность до разрушения,

$K\tau$  - коэффициент запаса по долговечности).

Скорость ползучести зависит от температуры и величины действующих напряжений. На рис 6.1 показаны две кривые ползучести, соответствующие различным напряжениям и температурам. С увеличением температуры и напряжений скорость ползучести увеличивается, т.е. при  $t=Const - \sigma_1 < \sigma_2$ , соответственно при  $\sigma=Const - t_1 < t_2$ .

В литературе описываются достаточно много способов описания кривых ползучести. Наиболее распространен метод, основанный на гипотезе, что в координатах: время - деформация ползучести ( $\tau - \varepsilon_c$ ) кривые ползучести, полученные при различных температурах и напряжениях, геометрически подобны. При этом допущении уравнение кривой ползучести можно записать в виде:

$$\varepsilon_c = \varphi(\sigma) f(t) \phi(\tau), \quad (6.1)$$

где  $\varphi(\sigma)$  - функция, зависящая только от напряжений -  $\sigma$ ,

$f(t)$  - функция, зависящая только от температуры -  $t$ ;

$\phi(\tau)$  - функция, зависящая только от времени -  $\tau$ .

Функцию напряжений записывают как:

$$\varphi(\sigma) = A\sigma^m, \quad (6.2)$$

где  $A, m$  - эмпирические коэффициенты.

Функция, зависящая от температуры, может быть представлена как:

$$f(t) = \exp(-U/RT),$$

где  $R$  - газовая постоянная;

$T$  - абсолютная температура в  $K$ ;

$U$  - энергия активации ползучести.

Энергия активации ползучести зависит от напряженности и величины накопленной деформации. В общем виде величину энергии активации ползучести можно записать в виде:

$$U = U_0 - c\sigma - r\varepsilon_c,$$

где величины  $U_0, c, r$  – константы, зависящие от типа материала,

$U_0$  - постоянная составляющая энергии активации;

$c, r$  – структурно чувствительные коэффициенты.

Таким образом, на установившемся участке ползучести, при принятых допущениях (см. (3.1) и (3.2)), уравнение кривой ползучести можно записать в виде:

$$\varepsilon_c = A\sigma^m \times \exp(-U/RT) \times \tau, \text{ при степенной зависимости } \varphi(\sigma) = A\sigma^m$$

Один из методов расчета ползучести основывается на кривых ползучести, полученных для различных напряжений при постоянной температуре (рис. 6.2).

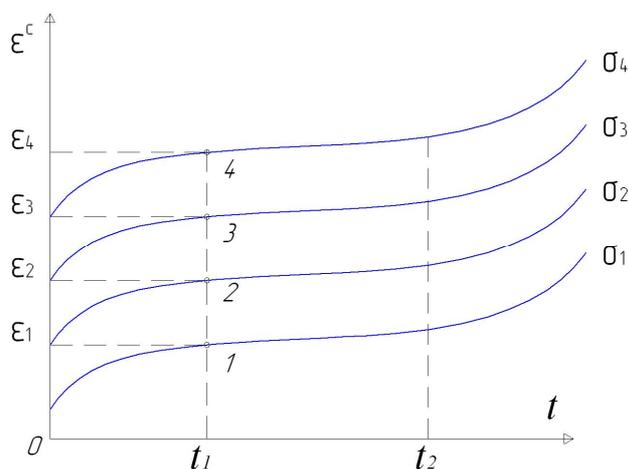


Рис. 6.2. Кривые ползучести для различных напряжений

Выбрав некоторый момент времени  $t_1$ , можно найти деформации ползучести, соответствующие различным напряжениям, и получить изохронную кривую ползучести, соответствующую моменту  $t_1$ , в координатах  $\varepsilon, \sigma$  (рис. 6.3). Эта кривая аналогична кривой пластичности, и ее используют для расчета пластической деформации за время, равное ресурсу детали.

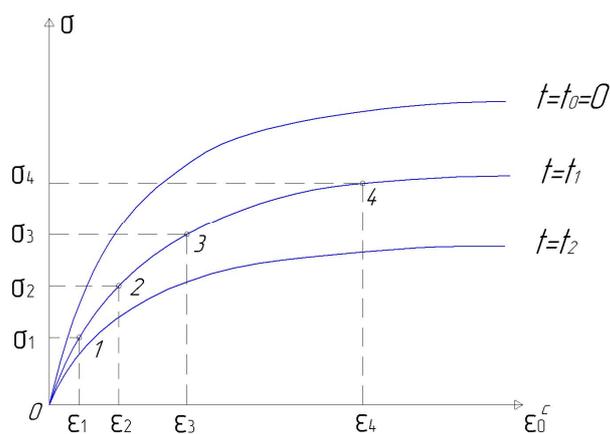


Рис. 6.3. Изохронные кривые ползучести

Рассмотренный метод применим только в том случае, если напряжение постоянно (иначе, согласно рис. 6.2., точка должна мгновенно переходить с одной кривой на другую,

в реальности на этот процесс требуется значительное время). Если напряжение меняется, используют методы, основанные на интенсивности скорости ползучести.

При изменении температуры и напряжений, что характерно для авиационных ГТД, ползучесть носит сложный характер. В первом приближении для оценок величины накопленной деформации ползучести можно пользоваться гипотезой о том, что в любой момент времени скорость ползучести при изменяющихся температурах и напряжениях совпадает со скоростью ползучести при постоянных температурах и напряжениях, соответствующих данному моменту времени. В этом случае величина суммарной накопленной деформации ползучести может быть определена как сумма величин накопленных деформаций на каждом режиме нагружения и вычисляться по формулам:

$$\varepsilon_{\Sigma} = \sum_{i=1}^I \varepsilon_i \quad (\varepsilon_{\Sigma} = \int_{\tau=0}^T \varphi(\sigma(\tau))f(t(\tau))\phi(\tau)d\tau),$$

где  $I$  – количество режимов нагружения, каждый из которых характеризуется своей напряженностью ( $\sigma_i$ ), температурой ( $t_i$ ) и продолжительностью.

Одновременно действующая вибрационная нагрузки существенно (в несколько раз) увеличивает скорость ползучести. При совместном действии статической и вибрационной нагрузки скорость ползучести может быть представлена в виде произведения двух независимых функций:

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau}(\sigma_m, \sigma_v) = \frac{d\varepsilon}{d\tau}(\sigma_m) \frac{d\varepsilon}{d\tau}(\sigma_v),$$

где вид функции  $\frac{d\varepsilon}{d\tau}(\sigma_m)$  определяется по характеристикам ползучести при статическом нагружении, а вид функции  $\frac{d\varepsilon}{d\tau}(\sigma_v)$  зависит только от величины вибрационной составляющей нагружения.

Для сплавов ЖС6у и ЖС30 функцию  $\frac{d\varepsilon}{d\tau}(\sigma_v)$  можно записать в виде:

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau}(\sigma_v) = \exp(\sigma_v / L),$$

где  $L$  - коэффициент, зависящий от температуры, при температуре  $t=900^{\circ}\text{C}$  -  $L=7...9$ , при  $t=1000^{\circ}\text{C}$  -  $L=5...6$ .

Для сопоставления характеристик ползучести различных материалов пользуются условной величиной, называемой пределом ползучести -  $\sigma_{0,2/\tau}^t$ , которая определяется напряжением при котором за установленное время -  $\tau$ , при заданной температуре -  $t$ , вызывает заданную величину остаточной деформации ползучести, равную 0.2%.

Допустимая вытяжка дисков компрессоров и турбин в процессе работы нормируется, и не должна превышать величины 0.08%.

Ремонт деталей подвергшихся деформации ползучести, путем прямого восстановления размера недопустим, так как нарушена их кристаллическая структура. Требуется переплавка или хотя бы рекристаллизация.

Явление релаксации напряжений в деформированном образце связано с появлением в образце деформаций ползучести под действием напряжений. Зависимость изменения напряжений при их релаксации во времени можно получить исходя из следующих преобразований.

Суммарную деформацию образца можно записать в виде суммы упругой деформации и деформации ползучести:  $\varepsilon_{\Sigma} = \varepsilon_e + \varepsilon_c = \sigma/E + \varepsilon_c$  (6.3).

Дифференцируя (6.3) получим:  $\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\tau} + \frac{d\varepsilon_c}{d\tau} = 0$ , откуда:

$$d\tau = -\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{(d\varepsilon_c/d\tau)} = -\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{\dot{\varepsilon}_c} \quad (6.4)$$

где  $\varepsilon = \varphi(\sigma, T)$  - деформация ползучести

Интегрируя (3.4) от начального момента времени  $\tau=0$  до текущего значения  $\tau = \bar{\tau}$ , а следовательно от начального уровня напряжений -  $\sigma(0)$  до текущего значения  $\sigma(\tau)$  получим уравнение изменения напряжений при их релаксации во времени в виде :

$$\tau = -\frac{1}{E} \int_{\sigma(0)}^{\sigma(\tau)} \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)}. \quad (6.5)$$

Принимая степенной закон ползучести в виде  $\varepsilon_c = \varphi(\sigma) = A\sigma^m$  уравнение (6.5) переписется в виде:  $\tau = \frac{1}{(m-1)E\sigma^{n-1} A^{1/n}} [1 - (\frac{\sigma}{\sigma_0})^{n-1}]$ . (6.6).

Уравнение (3.6) связывает время и соответствующие ему действующие напряжения -  $\sigma(\tau)$  с начальным уровнем напряженности -  $\sigma(0)$ . Общий вид кривой релаксации напряжений показан на рис. 6.4.

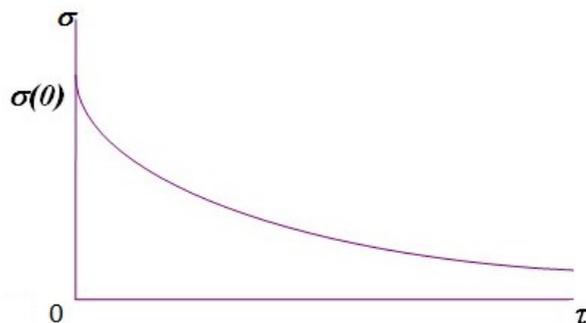


Рис. 6.4. Кривая релаксации напряжений

В качестве примера релаксации напряжений в табл. 6.1 приведено изменение усилия затяжки в болтовом соединении диска турбины работающего при температуре  $t=650^{\circ}\text{C}$ . Болт изготовлен из материала ЭИ598.

Таблица 6.1. Изменение усилия затяжки в болтовом соединении диска турбины

Время работы в часах	0	100	500	1000
Напряжения в болте, МПа	250	240	214	190

Уменьшение усилия затяжки болтового соединения может привести к повышенным вибрациям ротора после испытаний, негерметичности фланцевого соединения или поломки болтов. В качестве другого негативного последствия релаксации напряжений можно привести релаксацию остаточных поверхностных напряжений сжатия и, как следствие, снижения характеристик сопротивления усталости деталей. Однако следует отметить, что релаксировать могут и эффекты отрицательной технологической наследственности в виде остаточных поверхностных напряжений растяжения, объемных напряжений после штамповки и т.д.

Конечные точки кривых ползучести соответствуют разрушению образцов и поэтому определяют длительную прочность материала, характеристикой которой является предел длительной прочности -  $\sigma_{b/\tau}^l$  - это постоянное напряжение, которое будучи приложенным к образцу или детали при постоянной температуре приводит к их разрушению в течение заданного промежутка времени.

Длительная прочность -  $\sigma_{b/\tau}^l$  является основной характеристикой материалов, определяющей возможность его применения для изготовления нагруженных и «горячих» деталей ГТД (лопатки и диски турбины, элементы камеры сгорания, сопла, оболочки, опоры, валы и др.). Длительная прочность определяет ресурс деталей «горячей» части двигателя и, соответственно, двигателя в целом. При заданном (фиксированном) ресурсе применение более жаропрочных материалов в «горячей» части двигателя позволяет повысить его топливную эффективность за счет уменьшения количества воздуха, необходимого для их охлаждения. При этом температура деталей повышается.

Основной характеристикой длительной прочности являются кривые длительной прочности, связывающие действующие напряжения с временем до разрушения при постоянной температуре. Кривые длительной прочности строятся по результатам испытаний образцов и соответствуют крайним точкам семейства кривых ползучести, полученных при одинаковой температуре. Так как длительная прочность является

конечной характеристикой ползучести, то многие закономерности ползучести переносятся на длительную прочность.

Так время до разрушения при постоянной температуре может быть связано с уровнем действующих напряжений степенной или экспоненциальной зависимостями:

$$\tau \sigma^m = \text{Const} \quad [ \lg \tau + m \lg \sigma = P_1 ] \quad (6.7a)$$

$$\tau \exp(q\sigma) = \text{Const} \quad [ \lg \tau + q\sigma = P_2 ] \quad (6.7б)$$

где  $m$ ,  $q$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  - эмпирические коэффициенты.

На основании уравнений (6.7a) или (6.7б) представляется возможным по данным нескольких испытаний относительно небольшой продолжительности путем экстраполяции оценивать предел длительной прочности за большее время.

Кривые длительной прочности зависят от температуры испытания. При увеличении температуры длительная прочность материалов уменьшается (рис. 6.5).

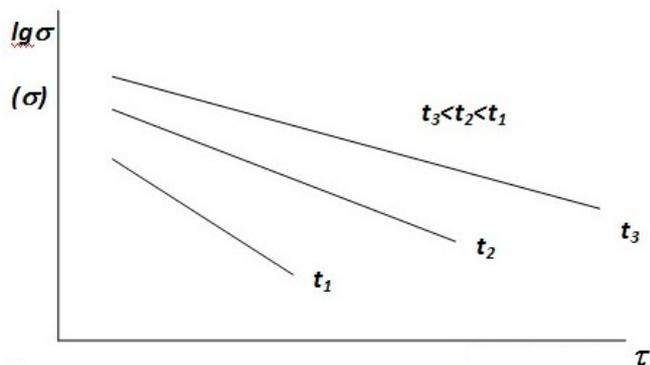


Рис. 6.5. Кривые длительной прочности

Жаростойкие покрытия несколько снижают длительную прочность образцов. Однако для деталей из никелевых сплавов, работающих в потоке продуктов сгорания топлива (рабочие и сопловые лопатки турбины, элементы камеры сгорания и др.) наличие жаростойких покрытий необходимо для предотвращения газовой коррозии и эрозии. Концентраторы напряжений слабо влияют на длительную прочность.

Для наиболее ответственных деталей ГТД, работающих при повышенных температурах (лопатки и диски турбины, диски компрессора, опоры, оболочки силовых корпусов, камеры сгорания сопла и т.д.) в производстве предусмотрен обязательный контроль длительной прочности материала детали. Для этого для деталей изготавливаемых методом литья (например, охлаждаемые лопатки турбины) одновременно с получением отливки детали отливаются образцы-свидетели. Для деталей изготавливаемых методом штамповки в заготовках предусматриваются специальные места для вырезки и изготовления контрольных образцов-свидетелей. Контрольные

образцы изготавливаются по технологии изготовления соответствующих деталей и затем испытываются на длительную прочность. Контролируется время до разрушения образца при заданном уровне напряжений и температуре. Уровень напряжений и температуры при испытаниях задаются несколько выше, чем имеется на наиболее нагруженном режиме работы двигателя, и соответствует времени до разрушения образцов, как правило, 40...100ч. с заданной вероятностью неразрушения. Объем и периодичность испытаний на длительную прочность зависят от стабильности производства и наличия дефектов деталей в эксплуатации. При стабильном производстве объем контроля уменьшается.

Поскольку условия работы деталей в двигателе различны, необходимо знание характеристик длительной прочности материалов во всем рабочем диапазоне температур.

Время до разрушения при непрерывной работе на одном режиме -  $\tau_{pi}$  зависит от уровня действующих напряжений и температур. При постоянной температуре связь между уровнем действующих напряжений -  $\sigma$  и временем до разрушения -  $\tau_p$  может быть записана в степенном виде:

$$\sigma^m \tau = P, \quad (\sigma^m \tau = Const), \quad (6.8a)$$

или экспоненциальном:

$$\sigma = A \exp(\tau) + L \quad (6.8b)$$

где:  $m$ ,  $A$ ,  $P$  и  $L$  - эмпирические коэффициенты, зависящие от материала и температуры испытаний.

Проведение испытаний при всех рабочих температурах - трудоемкий и длительный процесс. Поэтому необходимо иметь методы интерполяции и экстраполяции экспериментальных данных по длительной прочности на температуры всех режимов.

Для интерполяции и экстраполяции экспериментальных данных по длительной прочности, полученных при одних значениях температур на другие, разработаны температурно-временные зависимости, связывающие время до разрушения  $\tau_p$  с действующим уровнем напряжений  $\sigma$  и температурой испытаний -  $T$  зависимостью  $f(\sigma) = \varphi(\tau_p, T)$ . В настоящее время разработано достаточно много температурно-временных зависимостей длительной прочности.

Наибольшее распространение получила параметрическая зависимость Ларсона – Миллера, связывающая уровень действующих напряжений с температурой и временем до разрушения. При постоянном уровне действующих напряжений ( $\sigma = Const$ ) величина:

$$T(C + \lg \tau_p) = Const, \quad (6.9)$$

где  $T$  - абсолютная температура испытаний;

$\tau_p$  - время до разрушения;

$C$  – постоянная.

Для большинства сталей и жаропрочных сплавов значение величины  $C \approx 20$  ( $C=16...24$ ). В расчетах, как правило, пользуются средним значением постоянной  $C=20$ .

Зависимость Ларсона-Миллера позволяет для данного уровня напряжений по результатам испытаний материала, полученным при одной температуре, оценивать время до разрушения при другой температуре. С учетом того, что  $T_1(C + \lg \tau_1) = T_2(C + \lg \tau_2)$ , уравнение для пересчета времени до разрушения на другие температуры при постоянном уровне напряжений запишется в виде:

$$\lg \tau_2 = \frac{T_1}{T_2} (c + \lg \tau_1) - c \quad (\sigma_1 = \sigma_2),$$

где  $\tau_1$  - экспериментально определенное время до разрушения при температуре  $T_1$ , и напряжении  $\sigma_1$ ;

$\tau_2$  - прогнозируемое время до разрушения при температуре  $T_2$  и напряжениях  $\sigma_2$ .

Авиационные ГТД работают при сложном изменении режимов работы. Оценка ресурса должна вестись с учетом наработки на всех режимах работы. Методы оценки ресурса деталей, работающих на различных режимах нагружения, основываются на различных гипотезах суммирования повреждений. Под повреждением здесь подразумевается доля истощения ресурса вносимая отдельным режимом нагружения.

Впервые метод расчета долговечности при изменяющихся режимах нагружения был разработан Пальмгреном применительно к подшипникам качения в 1924г, затем независимо от него и друг от друга аналогичный метод был предложен применительно к высокочастотной усталости в работах А.Майнера в 1945г и С.В.Серенсена в 1944г. В настоящее время метод, разработанный Пальмгреном, С.В.Серенсеном и А.Майнером, носит название гипотезы линейного суммирования повреждений.

В соответствии с ней условие разрушения записывается в виде:

$$\sum_{i=1}^I \frac{\tau_i}{\tau_{pi}} = 1, \quad (6.10)$$

где  $i$  - номер режима нагружения;

$I$  - количество режимов нагружения;

$\tau_i$  - суммарное время работы на  $i$  режиме;

$\tau_{pi}$  - время до разрушения при непрерывной работе на  $i$ -ом режиме, определяется по кривым длительной прочности при соответствующих условиях нагружения.

Линейная гипотеза суммирования повреждений не учитывает влияния переходов с одного уровня нагрузок на другой и чередования нагрузок и поэтому может вносить определенную погрешность в расчеты.

Если обозначить доли наработки на отдельных режимах через  $C_i = \tau_i / [\tau]$  (сумма  $\sum_{i=1}^I C_i = 1$ ), где  $[\tau]$  - ресурс двигателя, то, принимая линейную гипотезу суммирования повреждений, суммарное время до разрушения  $\tau_{p\Sigma}$  можно определить по формуле:

$$\tau_{p\Sigma} = \frac{1}{\sum_{i=1}^I C_i / \tau_{pi}}, \quad (6.11)$$

Ресурс детали в эксплуатации  $[\tau]$  с учетом коэффициента запаса  $K_\tau$  может быть определен как:  $[\tau] = \tau_p / K_\tau$  (6.12)

Приведенными соотношениями (6.11, 6.12) можно пользоваться для определения ресурса деталей при многорежимном нагружении и нахождения условий испытаний эквивалентных по исчерпанию длительной прочности заданной программе нагружения.

Влияние цикличности нагружения на длительную прочность проявляется в том, что длительная прочность при повторном нагружении с разгрузкой за  $Z$  циклов, оказывается ниже, чем при непрерывном нагружении. Учет влияния цикличности нагружения на долговечность до разрушения при длительном нагружении удобно проводить через коэффициент повторности нагружения, который определяется как отношение предела длительной прочности, полученного при повторных нагружениях, к обычному значению предела длительной прочности при той же долговечности:  $K_z = \frac{(\sigma_{b/\tau}^I)^z}{\sigma_{b/\tau}^I}$ .

Как показывают эксперименты величина  $K_z$ , инвариантна к температуре и продолжительности выдержек при максимальных напряжениях в циклах нагружения и зависит только от числа циклов.

Вибрационная нагрузка увеличивает скорость ползучести и снижает характеристики длительной прочности материала. Для оценки длительной прочности при совместном действии длительного статического и вибрационного нагружений можно воспользоваться гипотезой линейного суммирования повреждений при различных видах нагружения в

виде: 
$$\sum_{i=1}^I \frac{\tau_i}{\tau_{pi}} + \sum_{j=1}^J \frac{N_j}{N_{pj}} = 1,$$

где  $N_j$  - число циклов нагружения на  $j$  - ом режиме,

$N_{pj}$  - число циклов до разрушения при непрерывной работе на  $j$  - ом режиме. Вели-

чины  $\tau_{pi}$  и  $N_{pj}$  определяются по кривым длительной и усталостной прочности при соответствующих условиях нагружения.

В первом приближении оценку характеристик длительной прочности при совместном действии длительного статического и вибрационного нагружений можно проводить по эквивалентным напряжениям, которые определяются как:

$$\sigma_{эkv} = \sigma_{ст} + \sigma_{вibr},$$

где  $\sigma_{ст}$  - статическая составляющая совместного нагружения,

$\sigma_{вibr}$  - вибрационная составляющая.

## 7. МАЛОЦИКЛОВАЯ И ПОВТОРНО-СТАТИЧЕСКАЯ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ

Условия работы авиационных ГТД характеризуются значительной цикличностью нагружения, связанной с запусками, остановами и изменениями режимов работы в процессе полета. Двигатель среднемагистрального самолета со средней продолжительностью полета 2 ч за ресурс 20000 ч наработывает более 10000 циклов нагружения (полетов). Дополнительно в каждом полете при заходе на посадку выполняется 15...30 изменений режимов работы двигателя. Цикличность нагружения является основным ограничителем ресурса высоконагруженных элементов двигателя, таких как диски компрессоров и турбин, охлаждаемые лопатки турбины, силовые оболочки, опоры и т.д. Дефекты малоциклового характера составляют около 10% всех дефектов авиационных ГТД. Особенно негативное влияние цикличность нагружения оказывает на детали с концентраторами напряжений.

Каждый цикл нагружения (изменение режима работы двигателя) характеризуется своим уровнем минимальных и максимальных температур и напряжений, продолжительностью и величиной наложенных вибрационных напряжений. Все эти факторы оказывают влияние на характеристики сопротивления малоциклового усталости. Так как количество видов циклов может быть достаточно велико, то необходимо иметь методы прогнозирования малоциклового долговечности на любой вид циклов по результатам стандартных испытаний, проводимых, как правило, при отнулевой, треугольной форме циклов.

На характеристики малоциклового долговечности влияют:

- температура;
- продолжительность выдержек при максимальном уровне нагрузок в циклах нагружения;
- уровень минимальных и максимальных напряжений циклов;
- величина наложенной вибрационной нагрузки.

Наиболее распространенными являются описания кривых малоциклового долговечности в "деформационном" и "силовом" виде.

Деформационные описания кривых малоциклового долговечности связывают размах деформаций в цикле нагружения  $\Delta\varepsilon$  с числом циклов до разрушения  $z$ .

Классическим описанием здесь является двучленное уравнение Мэнсона-Коффина:

$$\Delta\varepsilon = \frac{3,5\sigma_b}{E} z^n + \left[ \lg\left(\frac{1}{1-\phi}\right) \right]^m z^{-m}, \quad (7.1)$$

где  $\sigma_0$  - предел прочности материала;

$E$  - модуль упругости;

$\phi$  - остаточное сужение при разрыве;

$n, m$  – эмпирические коэффициенты, в первом приближении величины  $n = -0,12, m = 0,6$  принимаются постоянными для всех материалов и независимыми от температуры испытания;

$\Delta\varepsilon$  - размах упругопластической деформации в цикле нагружения.

Описание кривых малоциклового долговечности в «силовом» виде связывает число циклов до разрушения с уровнем действующих напряжений  $\sigma$ . Наиболее удобной записью уравнения кривой малоциклового долговечности представляется в виде:

$$\sigma^m z = \text{Const.} \quad (7.2)$$

Рассмотрим влияние основных эксплуатационных факторов на сопротивление материалов малоцикловому нагружению. Удобно использовать коэффициент чувствительности к повторному нагружению  $K_z$ . Он показывает, во сколько раз снижается предел прочности при многократном приложении нагрузки в сравнении с однократным, при одинаковом времени до разрушения:

$$K_z = \frac{\sigma_0}{\sigma_{b,\tau}^t}, \quad (7.3)$$

где  $\sigma_{b,\tau}^t$  - предел длительной прочности материала;

$\sigma_0$  - предел прочности материала при температуре  $t$  за время  $\tau$  и многократном приложении нагрузки.

Анализ большого количества экспериментов показал, что зависимость  $K^z$  от числа циклов нагружения можно записать в виде:

$$\lg z = m \lg K_z + p \quad \text{или же} \quad \lg z = m \lg \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{b,\tau}^t} \right) + p, \quad (7.4)$$

где  $m, p$  - эмпирические коэффициенты.

Предел длительной прочности  $\sigma_{b,\tau}^t$  в (7.4) определяется по температурно-временным зависимостям на ресурс, равный суммарному времени выдержек при максимальных напряжениях циклов. Как показывают результаты экспериментов зависимость  $K^z = K^z(z)$  мало чувствительна к температуре.

Влияние времени работы при статическом нагружении  $\tau_\Sigma$  можно также оценить через коэффициент  $K^z$ . На основании линейной гипотезы суммирования повреждений условие

разрушения при совместном действии малоциклового и длительного статического нагружений может быть записано в виде:  $\frac{\tau_{\Sigma}}{\tau_p} + \frac{z}{Z_p} = 1$

Здесь  $\tau_{\Sigma}$  - суммарное время статического нагружения,  $\tau_p$  - время разрушения при только статическом нагружении,  $Z_p$  - количество циклов нагрузки до разрушения только при малоциклового нагрузке.

Отсюда величина  $K^z = \sigma_0^t / \sigma_{b,\tau}^t$  может быть определена как:

$$K_z = \left(1 - \frac{z}{Z_p}\right)^m,$$

где  $m$  - показатель степени уравнения кривой длительной прочности  $\sigma^m \tau = Const$ .

Подциклы нагружения, связанные с изменениями режимов работы ГТУ, имеют большую асимметрию (коэффициент асимметрии циклов:  $r = \sigma_{min} / \sigma_{max} = 0,3 \dots 0,9$ , где  $\sigma_{min}$ ,  $\sigma_{max}$  - минимальные и максимальные напряжения асимметричных циклов.).

Влияние асимметрии циклов на малоцикловую долговечность можно определить исходя из предположения, что диаграмма асимметричных циклов, имеет линейный характер (рис. 7.1, а), т.е.:

$$\sigma_a = \sigma_{-1}^z \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_b}\right),$$

где  $\sigma_{-1}^z$  - предел малоциклового выносливости на базе  $z$  циклов при коэффициенте асимметрии циклов  $r = -1$ .

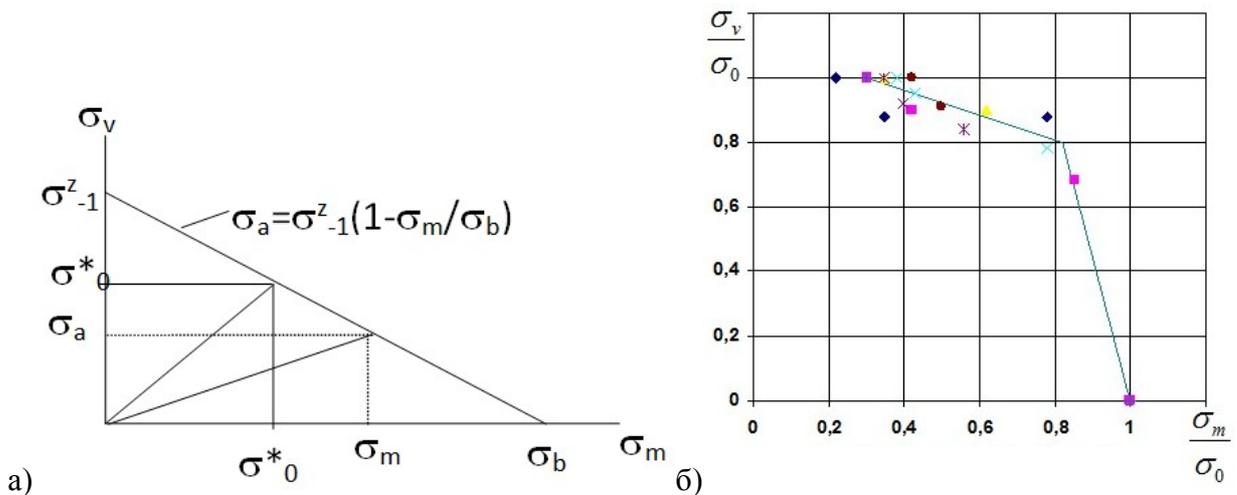


Рис. 7.1. Диаграмма предельного состояния при асимметричном малоцикловом нагружении. а - линейная схематизация, б – экспериментально полученная

Из диаграммы асимметричных циклов можно записать:

$$\sigma^*_{\theta} - \sigma_a = (\sigma_m - \sigma^*_{\theta}) \varphi, \quad (7.5)$$

Учитывая, что  $\sigma^*_{\theta} = \sigma_0/2$ , а  $K_z = \sigma_0/\sigma_b$ , величина  $\varphi$  равна:

$$\varphi = \sigma^*_{-1}/\sigma_b = \sigma^*_{\theta}/(\sigma_b - \sigma^*_{\theta}) = K_z/(2 - K_z). \quad (7.6)$$

С учетом того, что средние напряжения асимметричных циклов равны:  $\sigma_m = (\sigma_{min} + \sigma_{max})/2$ , амплитуда -  $\sigma_a = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$ , а  $r = \sigma_{min}/\sigma_{max}$  выражение (7.5) можно переписать в виде:

$$\sigma_0 = \frac{1}{1 + \varphi} \left( \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} + \varphi \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \right) = \sigma_{max} [1 - r(1 - K_z)]. \quad (7.7)$$

При крайних значениях коэффициента асимметрии циклов получим:

при  $r = 0$  -  $\sigma_{max} = \sigma_0$ , при  $r = 1$  -  $\sigma_{max} = \sigma_0$ .

Как показывают эксперименты (рис. 7.1, б) диаграмму асимметричных циклов более точно представить в безразмерных координатах в виде ломаной. Обозначив тангенс угла наклона диаграммы асимметричных циклов в безразмерных координатах на левом участке -  $\varphi^*_{left} = \alpha$ , а на правом -  $\varphi^*_{right} = \beta$ , получим в координатах  $\sigma_m - \sigma_a$  на левом участке  $\varphi_{left} = \alpha K_z/2$ , на правом участке  $\varphi_{right} = \beta K_z/2$ . И (7.6) можно представить в виде:

$$\sigma_0 = \sigma_{max} \left[ 1 - r \frac{\left( 1 - \frac{\alpha K_z}{2} \right)}{\left( 1 + \frac{\alpha K_z}{2} \right)} \right] = \sigma_{max} [1 - r(1 - \alpha K_z)] \quad (7.8)$$

на левом участке и  $\sigma_0 = \sigma_{max} [1 - r(1 - \beta K_z)]$  на правом.

Как следует из результатов экспериментов величина коэффициента "a" в уравнении (7.8) слабо зависит от материала и температуры испытания и в основном зависят от коэффициента концентрации напряжений  $\alpha_{\sigma}$ .

Для образцов без концентрации напряжений величина коэффициента "a" в уравнении (7.8) близка к 1, с увеличением коэффициента концентрации напряжений до величины  $\alpha_{\sigma} = 4,5$  величина коэффициента "a" уменьшается до  $a = 0,3$ .

График зависимости величины коэффициента "a" от теоретического коэффициента концентрации напряжений показан на рис. 7.2.

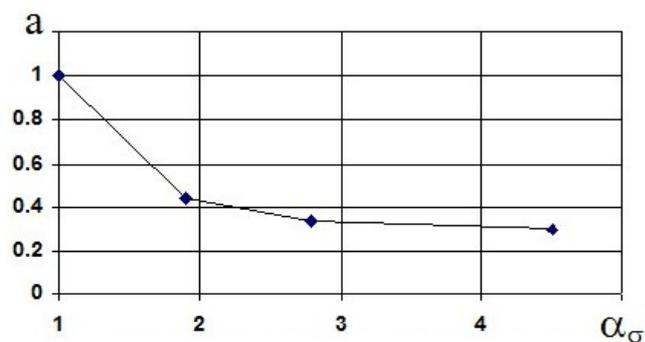


Рис. 7.2. График зависимости коэффициента “ $a$ ” в уравнении (7.7) от коэффициента концентрации напряжений

В инженерной практике важно знать не только соотношение между максимальными напряжениями циклов при отнулевом и асимметричном нагружениях с одинаковым числом циклов до разрушения, но и соотношение долговечностей при одинаковых максимальных напряжениях циклов. Принимая, что на участке  $\sigma_0 - \sigma_{max}$  кривая отнулевого малоциклового нагружения описывается уравнением  $\sigma^m z = Const$  получим:

$\eta_r = \frac{z_0}{z_{max}} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{max}}\right)^m$ . Учитывая, что  $\sigma_0 = \sigma_{max}[1-r(1-aK_z)]$ , окончательно будем иметь:

$$\eta_r = \frac{z_0}{z_r} = [1-r(1-aK_z)]^m, \quad (7.9)$$

Коэффициенты “ $m$ ” и “ $a$ ” для некоторых материалов:

ВТ-9: при  $\alpha_\sigma=1$ :  $m = 12$ ,  $a = 1$ ; при  $\alpha_\sigma=2,8$ :  $m = 3,5$ ;  $a=0,33$ .

ЭИ-698ВД: при  $\alpha_\sigma=1$ :  $m = 6$ ;  $a=1$ . при  $\alpha_\sigma=2,8$ :  $m=4,5$ ;  $a=0,33$ .

### **Оценка влияния наложенной вибрационной нагрузки на малоцикловую долговечность .**

Большинство деталей ГТД работает в условиях совместного действия вибрационных и повторно-статических нагрузок. Вибрационные нагрузки обусловлены рабочими процессами в двигателе, повторно-статические - многократными запусками и остановками, изменениями режимов работы в течение полетного цикла. Наложение вибрационной нагрузки существенно снижает долговечность при повторно-статическом нагружении. Можно считать, что вибрационная нагрузка, составляющая 1% от величины повторно-статической, снижает долговечность при повторно-статическом нагружении примерно на 10%.

Оценку влияния вибрационных напряжений на сопротивление повторно-статическому нагружению удобно проводить на основе описания кривой предельного состояния при

совместном действии малоциклового и вибрационного нагружения при одинаковом времени до разрушения кривой:

$$\sigma_a = S_h \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{zm}}{S_l} \right)^\beta \right], \quad (7.10)$$

где  $\sigma_a$  - амплитуда наложенной вибрационной нагрузки;

$\sigma_{zm}$  - максимальные напряжения малоциклового нагружения ;

$S_h$  - предел выносливости при частоте высокочастотного нагружения за время до разрушения;

$S_l$  - предел малоциклового выносливости по максимальным напряжениям циклов;

$\beta$  - эмпирический коэффициент, в первом приближении можно принять при низких температурах  $\beta = 1$ , при повышенных  $\beta = 2$ .

В общем виде уравнение кривой усталостного нагружения можно записать как:

$$S_h = A(N), \quad (7.11),$$

а уравнение кривой малоциклового усталости:

$$S_l = B(Z); \quad (7.12),$$

где  $N, Z$  - долговечности соответственно многоциклового и малоциклового нагружений.

При совместном нагружении между величинами  $N$  и  $Z$  имеет место соотношение:

$$N = (f_h / f_l) Z, \quad (7.13)$$

Здесь  $f_h$  – частота высокочастотной нагрузки,  $f_l$  – частота низкочастотной нагрузки.

Подставив уравнения (7.11), (7.12) в (7.10), получим уравнение поверхности предельного нагружения, связывающее долговечность при двухчастотном нагружении (в циклах низшей частоты) с параметрами двухчастотного цикла  $f_h / f_l$  и характеристиками материалов при простом нагружении:

$$\sigma_a = A(N) \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_m^z}{B(z)} \right)^\beta \right]. \quad (7.14)$$

Решение уравнения (4.14) относительно  $Z$  дает значение долговечности при совместном действии вибрационного и малоциклового нагружений. Положим, что кривая малоциклового выносливости имеет вид:

$$\sigma^m Z = B, \quad (7.15)$$

а многоциклового выносливости:

$$\sigma^k N = A, \quad (7.16).$$

Определив из соотношений (4.15) и (4.16) значения  $A$  и  $B$ , а следовательно и вид функций  $A(N)$  и  $B(Z)$ , с учетом (4.13) получим уравнение (4.14) в виде:

$$\sigma_a = \left( \frac{A}{(f_h/f_l)z} \right)^{1/k} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_z^m}{(B/z)^{1/m}} \right)^\beta \right], \quad (7.17)$$

Расчеты ведутся, как правило, по пределу выносливости, определенному для деталей из стальных и никелевых сплавов на базе  $2 \times 10^6$  циклов, для деталей из цветных и титановых сплавов на базе  $10 \times 10^6$  циклов.

В этом случае  $A(N) = \sigma_{-1}$ , где  $\sigma_{-1}$  - условный предел выносливости, и уравнение (7.14)

переходит в: 
$$\sigma_a = \sigma_{-1} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_z^m}{(B/z)^{1/m}} \right)^\beta \right],$$
 откуда долговечность детали (в циклах

низшей частоты) при совместном действии малоциклового и вибрационного нагружений может быть определена по формуле:

$$z = B \left( \frac{\sigma_{-1} - \sigma_a}{\sigma_{-1} - \sigma_z^m} \right)^{m/\beta}. \quad (7.18)$$

Значение величины  $\beta$  в первом приближении можно принять  $\beta=1$ . При переходе от  $\beta=1$  к  $\beta=2$  для обычного уровня вибрационных напряжений, составляющих порядка 10% от уровня повторно-статических в зависимости от коэффициента "m" погрешность расчета по (4.17) составит при  $m=3$  -  $\varepsilon=1,17$ , при  $m=10$  -  $\varepsilon=1,69$ , что вполне допустимо в инженерных расчетах.

Соотношение долговечностей при малоцикловом повторно-статическом  $z_0$  и повторно-статическом с наложением вибрационного нагружений  $z_v$  (при одинаковом уровне повторно-статического нагружения) может быть получено как:

$$\eta_v = \frac{z_v}{z_0} = \left( \frac{\sigma_{-1} - \sigma_v}{\sigma_{-1}} \right)^{m \left( 2 - \frac{1}{\beta} \right)}. \quad (7.19)$$

Принимая величину  $\beta = 1$ , что дает хорошее совпадение расчетов с результатами экспериментов, из (4.19) получим:

$$\eta_v = \left( \frac{\sigma_{-1} - \sigma_v}{\sigma_{-1}} \right)^m, \quad (7.20)$$

где  $m$  - коэффициент уравнения кривой малоциклового нагружения (7.2).

### ***Оценка эквивалентной наработки за эксплуатационный цикл.***

Величина накопленного повреждения по критерию исчерпания малоциклового долговечности за эксплуатационный цикл авиационного ГТД может быть вычислена на

основании схематизации сложного эксплуатационного цикла, системой элементарных подциклов нагружения. В примере, показанном на рис. 7.3, принято, что под элементарным подциклом нагружения подразумевается изменение нагрузки от минимума до следующего за ним максимума. Каждый элементарный подцикл нагружения характеризуется своей температурой, продолжительностью выдержек при максимальных напряжениях, уровнем минимальных и максимальных напряжений, величиной наложенной вибрационной нагрузки.

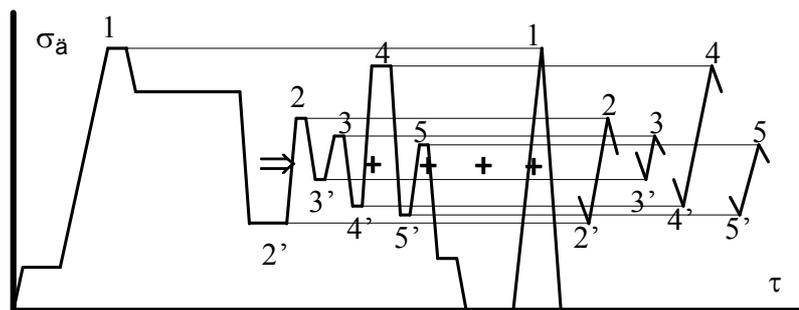


Рис. 7.3. Схематизация эксплуатационного цикла нагружения авиационного ГТД системой элементарных подциклов нагружения

Величина накопленного повреждения по критерию истощения малоциклового долговечности при сложном характере нагружения в соответствии с линейной гипотезой

суммирования повреждений вычисляется по формуле:

$$n_z = \sum_{i=1}^I \frac{z_i}{z_{pi}}$$

где  $z_i$  - количество циклов нагружения  $i$  - вида;

$z_{pi}$  - количество циклов до разрушения  $i$  - вида.

Количество циклов до разрушения  $i$ -го вида с учетом влияния основных эксплуатационных факторов (температуры, продолжительности выдержек при максимальных напряжениях, уровне минимальных и максимальных напряжений, величиной наложенной вибрационной нагрузки) может быть определен через коэффициенты влияния и описание кривой малоциклового долговечности в виде зависимости  $K_z = K_z(Z)$ . При таком подходе количество циклов до разрушения может быть определено по результатам стандартных отнулевых испытаний как:  $Z_{pi} = Z_0 / (\eta_r \eta_v)$ ,

где  $Z_0$  - количество циклов до разрушения при заданном уровне коэффициента повторности нагружения  $K_z$ , определяется по кривой малоциклового долговечности в виде  $(K_z)^m Z = Const$ ;

$\eta_r = [1-r(1-aK_z)]^m$  - коэффициент, учитывающий влияние минимальных напряжений циклов, определяется по формуле (7.9),

$$\eta_v = \left( \frac{\sigma_{-1} - \sigma_v}{\sigma_{-1}} \right)^m$$

- коэффициент, учитывающий влияние наложенной вибрационной

нагрузки, определяется по формуле (7.20).

Ресурс авиационных ГТД назначаются в часах наработки и числе циклов нагружения, поэтому возникает необходимость оценки циклической наработки двигателя в каких либо единых измерениях - эквивалентных циклах нагружения. В качестве эквивалентного цикла нагружения можно принять наиболее нагруженный подцикл сложного эксплуатационного цикла - цикл запуска и выхода холодного двигателя на максимальный режим в стандартных атмосферных условиях ( $t_n=15^0C, P=1,033кг/см^2$ ).

Используя принцип линейного суммирования повреждений, эквивалентное количество циклов нагружения в эксплуатации может быть определено по формуле:

$$z_{экс} = \sum_{i=1}^I z_i \eta_{\sigma_i} \eta_{r_i} \eta_{v_i} \quad (7.21)$$

где  $\eta_{\sigma_i} = (K_z^z / K_{z, equ}^z)^m$  - коэффициент, учитывающий отличия в уровнях напряжений, температур и продолжительности выдержек при максимальных напряжениях  $i$ -го и эквивалентного циклов.

Порядок определения эквивалентной циклической наработки в эксплуатации показан на рис.7.4.

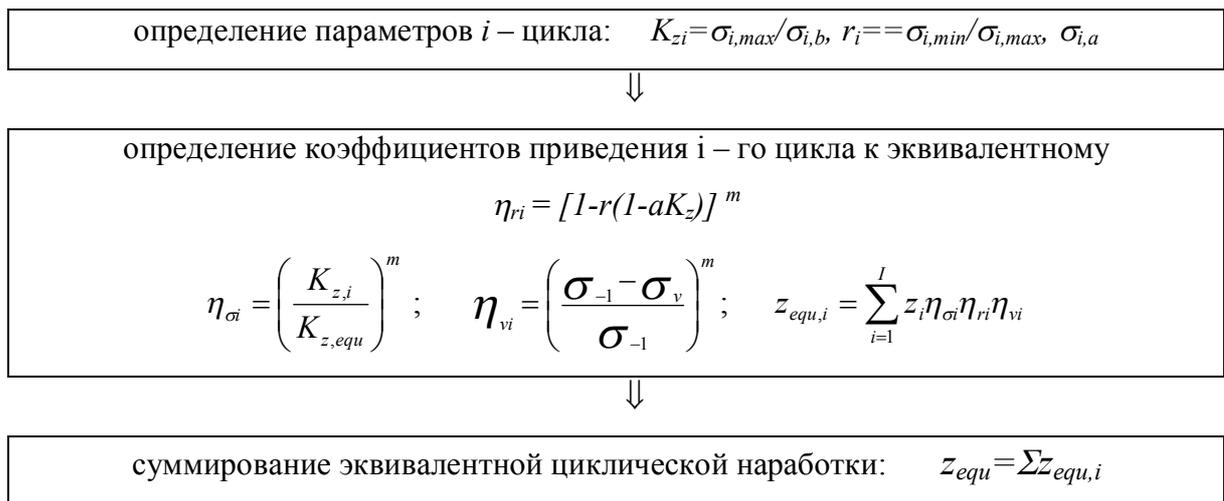


Рис. 7.4. Порядок определения эквивалентной циклической наработки в эксплуатации

## 8. ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКАЯ УСТАЛОСТЬ. ВЛИЯНИЕ ОСНОВНЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА МАЛОЦИКЛОВУЮ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ

В процессе изменения режима работы двигателя изменяются температурное состояние его деталей, что вызывает возникновение в них неравномерных полей температур и, соответственно, температурных напряжений. Поэтому при изменении режимов работе ГТД напряженность деталей определяется сочетанием «механических» и «термических» напряжений, что может вызывать малоцикловую термомеханическую усталость (термоусталость) конструкций. Особенно это свойственно охлаждаемым деталям турбины и камеры сгорания.

Специфическим вопросом термоусталости стоит вопрос о стойкости конструкций к резким изменениям температуры, когда возникают большие градиенты температур в тонких поверхностных слоях деталей, что приводит к их поверхностному растрескиванию.

При циклическом нагружении если конструкция в первом цикле нагружения деформировалась упруго, то и в последующих циклах нагружение также будет упругим. Если в первом цикле деформации были упруго-пластическими, то возможно два случая изменения деформаций во втором и последующих циклах нагружения.

В первом случае конструкция приспособливается к переменной нагрузке за счет возникновения благоприятного поля остаточных напряжений после первого цикла нагружения. И в последующих циклах деформации будут упругими за счет суммирования поля нагружения, вызываемого внешней нагрузкой с остаточным полем нагружения, возникшим после первого цикла нагружения. Во втором случае деформации во всех циклах нагружения может оставаться упруго-пластическим. Малоцикловая долговечность таких конструкций существенно ниже.

Принимая, что условием начала текучести является достижение величины эквивалентных термоупругих напряжений предела текучести -  $\sigma_{02}$ , условием приспособления при повторных нагревах считается условие:

$$\sigma_{\text{экр}}^I \leq \sigma_{02},$$

При резких изменениях температуры окружающей среды, в тонких поверхностных слоях деталей, возникают большие градиенты температур, что приводит к их поверхностному растрескиванию.

Способность конструкций выдерживать заданное количество теплосмен в условиях работы на нестационарных режимах (запуски, приемистости, остановки) называется термостойкостью.

Особенно опасно появление поверхностных трещин от недостаточной термостойкости конструкций, работающих при значительных вибрационных нагрузках (например, рабочих лопатках турбины, корпусах камеры сгорания), что приводит к существенному снижению их предела выносливости. Повысить термостойкость деталей можно нанесением на их поверхность специальных защитных покрытий. Число изменений температуры до появления трещин  $N_f$  благодаря покрытиям может быть повышено в 6 раз.

Основным конструктивным фактором, оказывающим влияние на сопротивление малоциклового долговечности является концентрация напряжений. С увеличением концентрации напряжений долговечность при малоцикловом нагружении уменьшается. В качестве примера влияния концентрации напряжений на долговечность при малоцикловом нагружении в табл. 8.1 приведены уравнения кривых малоциклового долговечности для некоторых материалов.

Таблица 8.1

Коэффициент концентрации	Материал		
	ВТ-9	ЭИ698	ЭП693
$\alpha_\sigma = 1$	$\lg Z = -20Kz + 22$	$\lg Z = -6.06Kz + 9.5$	$\lg Z = -8.05Kz + 12$
$\alpha_\sigma = 2.1$	$\lg Z = -3.17Kz + 6.2$		
$\alpha_\sigma = 2.4$	$\lg Z = -3.36Kz + 6.0$		
$\alpha_\sigma = 2.8$	$\lg Z = -3.36Kz + 6.0$	$\lg Z = -4.08Kz + 7.1$	$\lg Z = -3.39Kz + 6.5$
$\alpha_\sigma = 4.5$	$\lg Z = -3.03Kz + 5.3$	$\lg Z = -3.74Kz + 7.0$	$\lg Z = -2.99Kz + 5.8$

Наличие сварных швов может в несколько раз снизить долговечность при повторно-статическом нагружении. Термообработка для снятия остаточных напряжений несколько повышает долговечность. Электрополирование уменьшает разброс свойств, что с учетом требований расчетов по заданной вероятности неразрушения увеличивает малоцикловую долговечность. Поверхностное упрочнение положительно сказывается и увеличивает долговечность при повторно-статическом нагружении. Поверхностное упрочнение обеспечивает задержку зарождения усталостной трещины и может замедлить скорость ее развития при циклическом нагружении.

Процесс усталостного (малоциклового) разрушения материалов можно разделить на две стадии:

- стадию зарождения усталостной макротрещины,
- стадию развития макротрещины.

Малоцикловое разрушение возникает в результате постепенного развития трещины до ее критического размера. Этап развития усталостной трещины может занимать до 50% всей долговечности. При этом следует иметь в виду, что в материале деталей могут присутствовать металлургические дефекты, не выявленные при контроле или дефекты, образовавшиеся при изготовлении детали. Эти дефекты производственного характера под действием внешней нагрузки могут инициировать появление макротрещины. Кроме того, во многих деталях и узлах, особенно листовых, нормами износа допускается после испытаний или эксплуатации появление трещин определенной длины. Эти трещины обнаруживаются при регламентных и профилактических осмотрах.

Сам факт наличия трещины не снижает работоспособности двигателя. Важно обеспечить надежный контроль развития трещины. Необходимым условием обеспечения работоспособности является то, чтобы скорость развития трещины не превышала допустимую, а трещина за межосмотровый период не развилась до критического размера.

Примером эксплуатации авиационного ГТД с регламентным осмотром дисков турбины, назначаемым исходя из скорости развития трещины малоциклового усталости, может служить эксплуатация двигателя TF-4, установленного на самолетах ВВС США. Разработанная аппаратура контроля и правильное назначение периодичность осмотров позволили увеличить разрешенную наработку в 6 раз при наличии трещин в дисках турбины без снижения безопасности полетов.

Связь скорости роста длины трещины  $l$  с коэффициентом интенсивности напряжений может быть определена формулой Пэриса:

$$\frac{dl}{dZ} = C(\Delta K)^n, \quad (8.1)$$

где  $C$  и  $n$  - эмпирические коэффициенты,

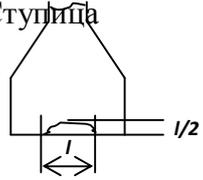
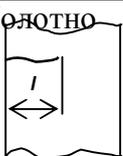
$\Delta K$  – коэффициент интенсивности напряжений (определяется по максимальным напряжениям полуциклов растяжения).

Число циклов до развития трещины от начальной длины  $l_0$  до конечной  $l_k$  определится по формуле:

$$Z = \int_{l_0}^{l_k} \frac{dl}{C(\Delta K)^n}, \quad (8.2)$$

Формулы для определения величины коэффициента интенсивности напряжений в (8.1) и (8.2) для типичных трещин дисков компрессоров и турбин приведены в табл. 8.2.  $B$  – толщина диска в месте развития трещины.

Таблица 8.2. Формулы для определения величины коэффициента интенсивности напряжений для типичных трещин дисков

Вид трещины	Значение $\Delta\sigma$	Значение $\Delta K$
<p>Ступица</p> 	$\Delta\sigma = B/(B-l) \sigma_n$	$\Delta K = 1.12\Delta\sigma\sqrt{\pi}$
<p>Полюстно</p> 	$\Delta\sigma = B/(B-l) \sigma_n$	$\Delta K = 1.12\Delta\sigma\sqrt{\pi}$
<p>Полюстно</p> 	$\Delta\sigma = B/(B-l) \sigma_n$	$\Delta K = 1.12\Delta\sigma\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$

Скорость развития трещин может увеличиться с наработкой деталей в эксплуатации. В табл.8.3 приведены скорости развития трещин в образцах из материала ЭИ698ВД в исходном состоянии без наработки и изготовленных из диска турбины после длительной наработки в эксплуатации.

Таблица 8.3 Скорость развития трещин малоциклового усталости ( $10^{-3}$  мм/цикл)

Вариант состояния	Участок развития трещины, мм		
	4	5.5	7.5
Исходное	0.86...1.0	0.82...1.26	1.51...10.0
С наработкой	5.0	10.0	33.0
Упрочнение	1.11...1.43	1.11...1.61	1.43

Наличие коррозионной среды увеличивает скорость распространения трещины.

Основными проблемами расчетов малоциклового долговечности деталей в настоящее время можно считать:

- накопление экспериментальных данных по малоцикловой долговечности образцов и натуральных элементов конструкций, в том числе и на стадии развития трещины;
- разработка и совершенствование методов суммирования повреждений и расчетов малоцикловой долговечности в реальных эксплуатационных условиях с учетом многокомпонентности нагружения;
- исследование влияния технологических особенностей изготовления деталей (структуры, состояния поверхности и др.) на их малоцикловую долговечность;
- разработка и совершенствование методов расчета развития трещин и прогнозирования остаточного ресурса;
- развитие неразрушающих методов контроля, позволяющих в условиях эксплуатации по техническому состоянию надежно контролировать возможное развитие трещин.

## 9. СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ

Усталостные поломки и дефекты составляют более 40% всех дефектов газотурбинных двигателей. Сопротивление усталости определяет работоспособность деталей, испытывающих большие переменные нагрузки (лопатки компрессора и турбины, валы, трубопроводы, подвески агрегатов и др.). Усталостное разрушение возникает в результате постепенного развития трещины. Поэтому его можно обнаружить во время регламентных работ и осмотров двигателя.

Основными характеристиками переменного нагружения (рис. 9.1) являются:

- амплитуда переменных напряжений -  $\sigma_a$ ;
- средние напряжения циклов -  $\sigma_m$ ;
- коэффициент асимметрии циклов -  $r = \sigma_{min} / \sigma_{max}$ .

В соответствии с коэффициентом асимметрии циклов вид переменного нагружения обозначают -  $\sigma_r$ :

- $\sigma_{-1}$  - симметричное нагружение ( $r = -1$ );
- $\sigma_0$  - отнулевое нагружение ( $r = 0$ );
- $\sigma_r$  - асимметричное нагружение с коэффициентом асимметрии циклов -  $r = \sigma_{min} / \sigma_{max}$ .

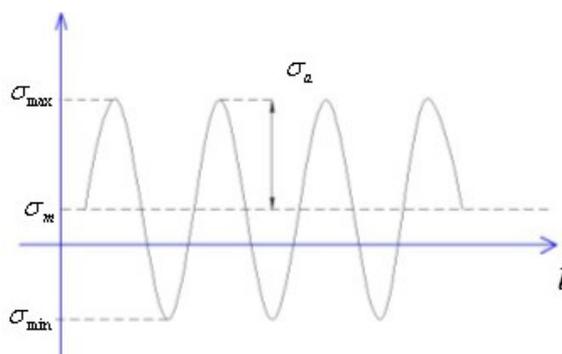


Рис. 9.1. Основные характеристики переменного нагружения

Основной характеристикой сопротивления усталости является кривая усталости, связывающая уровень переменных напряжений в детали с числом циклов до разрушения и предел выносливости. (Первые исследования сопротивления усталости начались в 1860...1870 гг. в Германии под руководством О. Веллера, поэтому кривую усталости иногда называют кривой Веллера.)

Уравнение кривой усталости, как правило, записывают в виде:

$$\sigma^m N = Const \quad (9.1a)$$

$$\text{или } Nexp(q\sigma) = Const, \quad (9.1б)$$

где  $\sigma$  - уровень переменных напряжений;

$N$  – число циклов до разрушения;

$m, q$  - эмпирические коэффициенты.

Примерный вид кривых усталости показан на рис. 9.2.

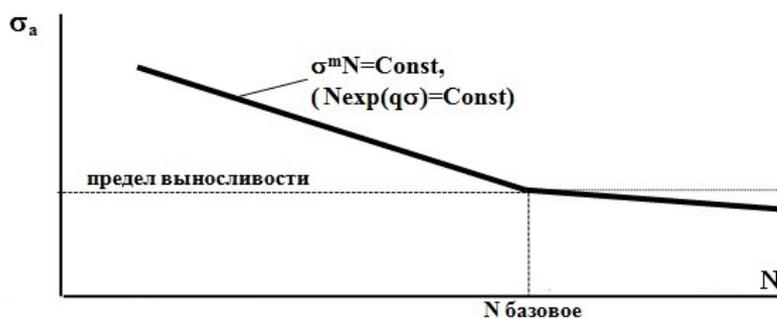


Рис. 9.2. Кривая усталости

Пределом выносливости называют предельное амплитудное значение напряжений -  $\sigma_a$ , которое может выдержать образец или деталь без разрушения базовое число циклов нагружения -  $N$ . Низколегированные стали могут иметь постоянный предел выносливости, для других сплавов наблюдается постоянное снижение предела выносливости с увеличением числа циклов нагружения. В связи с этим, в соответствии с “Нормами прочности авиационных ГТД” предел выносливости деталей из стальных и никелевых сплавов определяют на базе  $N=2 \times 10^7$  циклов, из титановых и цветных сплавов - на базе  $N=10^8$  циклов.

Наиболее влияют на сопротивление усталости:

- асимметрия циклов,
- температура испытания,
- частота нагружения.

Испытания образцов и деталей на усталость проводят, как правило, при симметричном цикле нагружения. Поэтому при оценках запасов прочности деталей важно знать влияние асимметрии циклов на сопротивление усталости. Влияние асимметрии циклов нагружения оценивается по кривым предельного состояния при совместном действии переменных и статических нагрузок (диаграммам асимметричных циклов). Пример диаграммы асимметричных циклов для стали приведен на рис. 9.3.

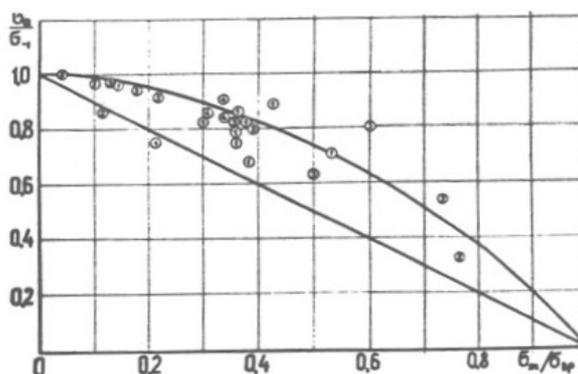


Рис. 9.3. Диаграмма асимметричных циклов при усталостном нагружении

В общем виде диаграмму асимметричных циклов можно описать уравнением:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_{b/t}} \right)^\alpha \right]^\beta, \quad (9.2)$$

где:  $\alpha$  и  $\beta$  - эмпирические коэффициенты,

$\sigma_{b/t}$  - предел длительной прочности при температуре испытания -  $t$ , за суммарное время испытания.

В первом приближении можно принять величины коэффициентов в уравнении (9.2)  $\alpha = \beta = 1$ . В этом случае (9.2) переходит в:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} (1 - \sigma_m / \sigma_{b/t}) \quad (9.3)$$

Иногда диаграмму асимметричных циклов схематизируют ломаной. В этом случае предел выносливости при асимметричном нагружении можно записать как:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \phi \sigma_m, \quad (9.4)$$

где  $\phi$  - эмпирический коэффициент влияния средних напряжений циклов,  $\phi \approx 0,2 \dots 0,25$  - для сталей и никелевых сплавов,  $\phi \approx 0,4$  - для титановых сплавов.

Величины коэффициентов запасов прочности по сопротивлению усталости можно определить по диаграмме асимметричных циклов в зависимости от характера изменения нагрузок при достижении предельного состояния, рис. 9.4.

Величина коэффициента запаса прочности по сопротивлению усталости при пропорциональном изменении среднего -  $\sigma_m$  и переменного напряжения -  $\sigma_a$  определяется по формуле:

$$K_\beta = \frac{\sigma_a^\beta}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} \frac{1}{k_m}\right)}; \quad (9.5a)$$

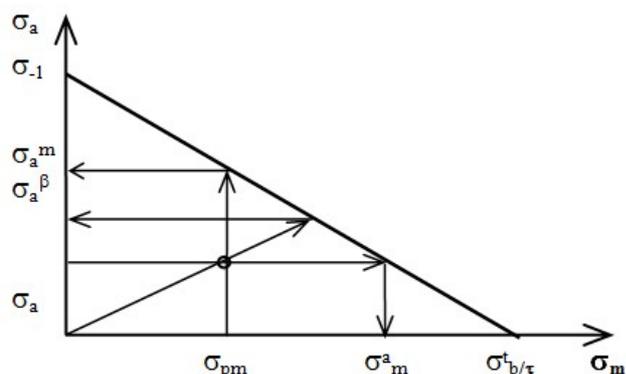


Рис. 9.4. Схема вычисления коэффициентов запасов прочности в зависимости от достижения предельного состояния

- при неизменном среднем -  $\sigma_m$  и увеличивающихся переменными напряжениями -  $\sigma_a$  по формуле:

$$K_v = \frac{\sigma_a^m}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} \left(1 - \frac{1}{k_m}\right); \quad (9.5б)$$

- при изменяющемся среднем  $\sigma_m$  и не изменяющемся переменным напряжением  $\sigma_a$  по формуле:

$$K_m^a = k_m \left(1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right), \quad (9.5в)$$

где:  $k_m$  - коэффициент запаса по статической прочности -  $k_m = \sigma_{b^t}^t / \sigma_m$  или  $k_m = \sigma_b / \sigma_m$ .

При представлении диаграммы асимметричных циклов в виде (9.4) будем соответственно иметь:

$$K_\beta = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a - \phi \sigma_m}, \quad (9.6а)$$

$$K_v = \frac{\sigma_{-1} - \phi \sigma_m}{\sigma_a}, \quad (9.6б)$$

$$K_m^a = \frac{\sigma_{-1} - \sigma_a}{\phi \sigma_m}. \quad (9.6в)$$

Уровень вибронпряжений в деталях, как правило, неравномерный и зависит от режима работы. Поэтому для многих деталей, особенно это относится к лопастям винтов и винтовентиляторов из алюминиевых сплавов, необходимо проводить оценку коэффициентов запасов по сопротивлению усталости при случайном или переменном нагружении.

Эквивалентную величину гармонического усталостного нагружения, равную по повреждаемости переменному, можно определить исходя из линейной гипотезы суммирования повреждений в виде:

$$\sum_{i=1}^I \frac{n_i}{N_i} = a ,$$

где  $n_i$  – количество циклов работы при напряжении  $\sigma_i$ ,  $N_i$  – количество циклов работы до разрушения при постоянном напряжении .

Принимая степенное описание кривой усталости в виде (9.1a) на основе гипотезы линейного суммирования повреждений будем иметь:

$$\sigma_{\text{var}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}} \sqrt[m]{\sum_{i=1}^I \sigma_i^m \frac{n_i}{N_i}} . \quad (9.7)$$

При случайном нагружении с заданной функцией плотности распределения вероятностей амплитуд переменного нагружений -  $F(\sigma_i)$ :

$$\sigma_{\text{var}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}} \sqrt[m]{\int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \sigma_i^m F(\sigma_i) d\sigma_i} . \quad (9.8)$$

Величины коэффициентов запасов по сопротивлению усталости при программном или случайном нагружении определяются по формулам (9.5) или 9.6) используя вместо величины амплитуды переменных напряжений -  $\sigma_a$  величину -  $\sigma_{\text{var}}$ , вычисленную по (9.7) или (9.8) .

На предел выносливости влияет частота нагружения. При частотах нагружения до 10000Гц с увеличением частоты нагружения наблюдается увеличение предела выносливости. Увеличение предела выносливости с увеличением частоты нагружения можно связать с отставанием частоты микропластической деформации от скорости нагружения и меньшим временем нахождения материала под напряжением. Исследования монокристаллических лопаток из сплава ЖС30 при испытаниях по основному тону изгибных колебаний с частотой  $\sim 600$ Гц показали предел выносливости  $\sigma_{-1} = 180$ МПа, а при колебаниях по обертопу с частотой 5400Гц -  $\sigma_{-1} = 360...400$ МПа.

В некоторых исследованиях для оценки влияния частоты нагружения -  $f$  на долговечность используют эмпирическую зависимость:

$$LgN = lga - C lgf,$$

где  $A$  и  $C$  коэффициенты, не зависящие от частоты нагружения.

Для некоторых жаропрочных сплавов получено, что в области повышенных температур предел выносливости одинаков при одинаковом времени до разрушения и не зависит от частоты нагружения, хотя число циклов до разрушения различно.

Вид напряженного состояния оказывает сильное влияние на характеристики сопротивления усталости. При действии нормальных и касательных переменных

напряжения  $\sigma_a$ ,  $\tau_a$  эквивалентное напряжение по Мизесу-Генки принимается равным:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}.$$

При сложном напряженном состоянии и асимметричных циклах можно принимать:

$$\sigma_s = \sqrt{\left[\sigma_a \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_a}\right)\right]^2 + 3\left[\tau_a \left(1 - \frac{\tau_m}{\tau_a}\right)\right]^2}.$$

При усталостных испытаниях в условиях одноосного напряженного состояния наблюдается разница в пределах выносливости, полученных при знакопеременном изгибе ( $\sigma_a^u$ ) и при растяжении - сжатии ( $\sigma_a^p$ ). Можно считать, что отношение  $\sigma_a^u/\sigma_a^p=1,5\pm 0,5$ . Объяснение этого явления может быть в статистической природе усталостной прочности (меньший объем материала участвует в деформировании).

Наличие концентраторов напряжений существенно снижает характеристики сопротивления усталости и оценивается эффективным коэффициентом концентрации напряжений:

$$K_\sigma = (\sigma_{-1}) / (\sigma_{-1})_k, \quad (9.9)$$

где  $\sigma_{-1}$  - предел выносливости гладких образцов,

$(\sigma_{-1})_k$  - предел выносливости образцов с концентрацией напряжений.

Величина эффективного коэффициента концентрации напряжений обычно имеет меньшее значение, чем теоретический (упругий) коэффициент концентрации -  $\alpha_\sigma$ . Количественно разница между ними оценивается коэффициентом чувствительности материала к концентрации напряжений:

$$q = (K_\sigma - 1) / (\alpha_\sigma - 1). \quad (9.10)$$

Величина  $q=0,5...0,9$ . С увеличением предела прочности и уменьшением пластичности материала величина  $q$  возрастает. С увеличением зерна микроструктуры и ростом градиента напряжений в месте концентрации величина  $q$  уменьшается. Литые детали имеют меньшую чувствительность к концентрации напряжений, чем деформированные.

В качестве иллюстрации влияния концентраторов напряжений на характеристики сопротивления усталости в табл. 9.1 ниже приведены данные по пределу выносливости лопаток компрессора и турбины с концентраторами напряжений в виде забоин и трещин.

Таблица 9.1

материал	предел выносливости, МПа				
	без повреждений	с забоинами	с надрезом	с зачисткой забоин	с растрескиванием от забоин
ВТ-6	320			0,9 $\sigma_{-1}$	90
ВТ-8	540	204	240	0,9 $\sigma_{-1}$	40...90
ЖС6у	200			0,9 $\sigma_{-1}$	70

В связи с столь сильным влиянием забоин на сопротивление усталости лопаток размеры эксплуатационных забоин нормируются, а забоины с растрескиванием не допускаются. Двигатели периодически осматриваются на наличие забоин рабочих лопаток компрессора и турбины.

С ростом абсолютных размеров детали предел выносливости снижается. Для оценки влияния масштабного фактора вводят коэффициент влияния абсолютных размеров поперечного сечения:

$$\varepsilon_{\sigma} = K_{\sigma} = (\sigma_{-1})_d / (\sigma_{-1})_{d0},$$

где  $(\sigma_{-1})_d$  - предел выносливости образцов диаметром  $d$ ;

$(\sigma_{-1})_{d0}$  - предел выносливости образцов малого диаметра  $d = 5...7\text{мм}$ .

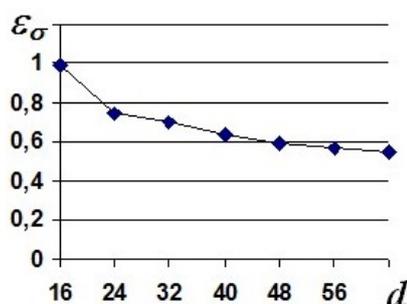


Рис. 9.5. Зависимость коэффициента влияния абсолютных размеров на предел выносливости болтового соединения.

На 9.5 приведены значения коэффициента влияния абсолютных размеров на предел выносливости болтового соединения.

Объяснения этому могут быть следующие:

- увеличение размеров детали повышает количество внутренних и поверхностных дефектов, неоднородностей материала по сечению, что снижает ее выносливость

- повышение размеров детали снижает ее прокаливаемость при термообработке и прорабатываемость при штамповке или ковке по сечению;
- детали, выполненные из заготовок больших размеров, имеют большую наследственную неоднородность и анизотропию механических свойств.

Вакуумное и центробежное литье заготовок существенно снижает неоднородность свойств по сечению.

Влияние качества поверхности.

Зарождение усталостной трещины, как правило, начинается с поверхности, поэтому качество обработки поверхностей детали оказывает очень сильное влияние на характеристики сопротивления усталости.

Одним из параметров состояния поверхности деталей является чистота обработки, шероховатость и характеристики микрогеометрии. Одной из основных причин, вызывающих снижение предела выносливости при грубом качестве обработки, является концентрация напряжений, возникающая из-за микронеровностей. Коэффициент концентрации напряжений в зависимости от параметров микрогеометрии может быть

определен как:

$$\alpha_{\sigma} = 1 + 2\sqrt{\gamma \frac{R_z}{r_c}},$$

где  $\gamma$  - коэффициент, зависящий от отношения шага микронеровностей к их высоте -  $\gamma = \gamma(t/R_z)$ , при механической обработке  $\gamma \approx 1$ ;

$R_z$  - высота микронеровностей,

$r_c$  - радиус кривизны на дне впадины, см. рис. 9.6.

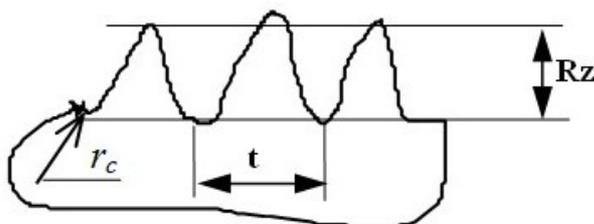


Рис. 9.6. Параметры микрогеометрии поверхности

Эффект снижения предела выносливости в связи с чистотой обработки поверхности оценивается как:

$$(\sigma_{-1})_c = \frac{\sigma_{-1}}{1 + q(\alpha_{\sigma-1})}.$$

Некоторые данные по влиянию качества обработки поверхности на выносливость титанового сплава ВТ-3-1 приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.2. Влияние обработки поверхности на выносливость

Состояние поверхности	$(\sigma_{-1})_c / \sigma_{-1}$
Грубая обработка	0.40
Шлифование	0.50
Фрезерование + полирование	1.0
Электрополирование	0.98

Существенно повысить сопротивление усталости могут упрочняющие обработки. Существенно снизить предел выносливости могут технологические дефекты на поверхности, например, прижоги при шлифовании.

Сильное влияние на сопротивление усталости оказывает и коррозионно-эрозионное воздействие среды. Влияние глубины коррозионного повреждения  $h_{cor}$  на выносливость лопаток компрессора из материала 1X12H2BMФ коррозионных повреждений пера показано на рис. 9.7.  $(\sigma_{-1})_{cor}$  - предел выносливости материала лопаток, поврежденного коррозией,  $(\sigma_{-1})_{new}$  - предел выносливости для новых лопаток.

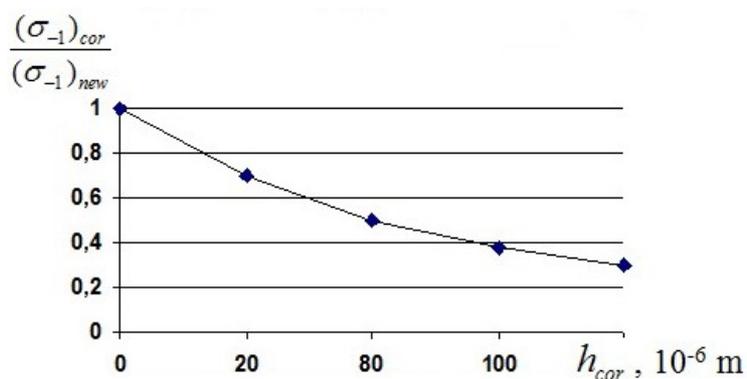


Рис. 9.7. Выносливость лопаток компрессора с коррозионными повреждениями

Предел выносливости материала лопаток турбины может понижаться вследствие повреждения их поверхности потоком продуктов сгорания топлива. Для повышения эрозионно-коррозионной стойкости лопаток на них наносят специальные покрытия. Однако они могут приводить к снижению их выносливости, что должно проверяться специальными испытаниями.

Сопротивление усталости существенно зависит от способа получения заготовки: типа штамповки или метода литья. При выборе способа получения заготовок следует помнить, что упрочнение может привести к снижению характеристик пластичности, что в

свою очередь приведет к большей чувствительности материала к концентрации напряжений.

Существенное влияние на сопротивление усталости оказывает состояние структуры материала. Для деформированных сплавов с уменьшением размеров зерна сопротивление усталости увеличивается. Для литых сплавов с равноосной мелкозернистой структурой наличие крупных зерен, появившихся вследствие неравномерной кристаллизации, может привести к снижению предела выносливости.

## 10. ИЗНОС, КОНТАКТНАЯ УСТАЛОСТЬ, ЭРОЗИЯ, КОРРОЗИЯ, ЖАРОСТОЙКОСТЬ

Износ и контактная усталость материала во многом определяют надежность таких элементов, как шестерни, шлицы, подшипники, золотниковые пары, шарнирные подвески, фланцы, болтовые соединения, лабиринтные уплотнения, контактные грани антивибрационных бандажных полок рабочих лопаток компрессора и турбины и другие контактирующие элементы.

*Износ* - это сопровождающий трение процесс постепенного изменения размеров детали в сопряжениях и рабочих органах машин. Износ определяется сочетанием ряда процессов, происходящих при взаимодействии поверхностей. Основные из них – это механическое и молекулярное взаимодействие, определяемое деформацией и температурой в контакте, химическое взаимодействие, диффузионные процессы и др.

Количественно степень износа -  $U$  оценивается потерей веса (абсолютной или удельной, отнесенной к единице площади) или изменением размера детали.

Одним из процессов износа является смятие. Под смятием понимают изменение размеров, происходящее без потери веса, за счет расплющивания поверхности деталей.

По степени интенсивности во времени -  $dU/d\tau$  можно выделить три стадии износа:

I – начальный износ, приработка - интенсивность износа снижается;

II – установившийся износ - интенсивность износа постоянна;

III – прогрессирующий, катастрофический износ - интенсивность износа резко увеличивается.

Основные факторы, влияющие на износ: среда, температура, вид трения, скорость относительного перемещения, давление, применяемые материалы.

Повреждения поверхности при контактном взаимодействии можно разделить на фреттинг-коррозию, контактную усталость, схватывание и заедание, механический, окислительный и абразивный износы.

*Фреттинг-коррозия* (или контактная коррозия, коррозия трения) - это процесс разрушения металла на плотно контактирующих поверхностях в результате повторяющихся относительных тангенциальных микросмещений. Достаточными для образования фреттинг-коррозии являются перемещения с амплитудной 0,25 мкм. Разрушение заключается в образовании на поверхностях взаимного касания язвенок и продуктов коррозии в виде налета, пятен и порошка. Интенсивность фреттинг-коррозии выше на воздухе, чем в вакууме, т.е. существенную роль играет окисление поверхности трения.

Язвины и продукты коррозии при этом виде износа встречаются на сопряженных поверхностях валов с напрессованными дисками, муфтами, кольцами подшипников, на шполах и пазах, на ступицах колес, на центрирующих поверхностях шлицевых соединений, на затянутых фланцевых соединениях, призонных болтах, замках крепления лопаток и других условно неподвижных соединениях. Фреттинг-коррозия может иметь место и на неработающей машине от вибраций, передающихся через фундамент или при перевозках. Участки поверхности, поврежденные фреттинг-коррозией, являются концентраторами напряжения, которое резко снижает выносливость материала. Часто от мест фреттинг-коррозии начинает развиваться усталостная трещина.

При фреттинг-коррозии под действием сил трения кристаллическая решетка поверхностных слоев. Происходит обрыв частиц и их быстрое окисление. Скорость износа при фреттинг-коррозии возрастает с увеличением удельного давления, амплитуды и частоты смещений. Для уменьшения фреттинг-коррозии используются меры, обеспечивающие меньшие взаимные микросмещения поверхностей, снижение сил трения (применением твердых смазок, например,  $\text{MoS}_2$ ), сосредоточение скольжения в промежуточной среде (покрытие оловом, медью, кадмием, серебром), повышение твердости (закалка, азотирование). Дефекты фреттинг-коррозии так же могут быть устранены введением гарантированного натяга по посадочным поверхностям.

*Схватывание и заедание* поверхностей - это явление прочного соединения металлов в результате взаимного трения или совместного деформирования. В местах схватывания исчезает граница между телами, происходит их сращивание. Для появления сращивания должны отсутствовать пленки и загрязнения поверхности. Эти условия могут быть получены при пластической деформации под действием нормальных нагрузок, когда происходит разрушение пленки.

*Механический износ* происходит вследствие деформации поверхности и физико-химических изменений, которые происходят в результате трения. На площадках контакта в результате многократной упругой и пластической деформации (в тонком поверхностном слое) происходит разрыхление, разупрочнение отдельных мест структуры с последующим отделением небольших блоков.

Могут возникать внутренние напряжения, приводящие вместе с рабочими напряжениями к растрескиванию поверхностного слоя и выкрашиванию его отдельных частиц, которые, попадая в стык, могут резко увеличить интенсивность износа. Для повышения сопротивления механическому износу следует применять более твердые сплавы.

*Окислительный износ* происходит в том случае, когда на соприкасающихся поверхностях образуются пленки окислов, которые при циклическом приложении нормальных нагрузок разрушаются, и образуются вновь. Продукты износа состоят из окислов. Процесс износа может происходить при нормальной и повышенной температурах. Наличие пластической деформации активизирует окисление поверхности.

Окислительному износу подвержены шарнирные и болтовые соединения, рычаги механизмов управления, и др. Повышение температуры способствует росту окисных пленок, а вибрационная нагрузка - их разрушению.

Мерами борьбы с окислительным износом могут служить улучшение смазки, снижение температуры, повышение твердости материала, снижение вибраций.

Сопротивление износу определяется, в основном, поверхностной твердостью, средством контактируемых материалов, удельным давлением, условиями теплоотвода, коэффициентом трения, вибрационным состоянием.

Существующие методы расчета износа несовершенны, сложно оценить контактные усилия и относительные перемещения в контакте.

Одной из первых расчетных моделей изнашивания является модель Г.Г.Улига в которой уравнение общего износа получено в виде:

$$W_{\Sigma} = W_{кор} + W_{мех} = (K_0 + P^{0,5} - K_1 P) N / f + K_2 L \times P N, \quad (10.1)$$

где  $P$  – нормальная нагрузка;

$L$  – амплитуда относительного проскальзывания;

$f$  – частота колебаний;

$K^0, K^1, K^2$  – эмпирические коэффициенты.

В (10.1) окислительный износ  $W_{кор} = (K_0 + P^{0,5} - K_1 P) N / f$  преобладает при малых частотах нагружения. При больших частотах нагружения преобладающим становится механический износ  $W_{мех} = K_2 L \times P N$ , линейно возрастающий при увеличении пути трения.

*Контактная усталость* (поверхностное выкрашивание) - это процесс контактной усталости поверхностей сопрягаемых деталей при качении или качении со скольжением одной детали по другой. Наиболее подвержены контактной усталости зубья шестерен, беговые дорожки, шарики или ролики подшипников качения.

Мероприятиями по повышению контактной усталости являются: уменьшение контактного давления, повышение твердости поверхности, улучшение смазки, специальные покрытия. Эффективным методом повышения контактной усталости является поверхностное упрочнение.

Уравнение кривой контактной усталости аналогично кривой обычной усталости:

$$\sigma_k^m N = C,$$

где  $\sigma_k$  - предел контактной усталости при отнулевом цикле;

$N$  - число циклов;

$C$  и  $m$  - эмпирические коэффициенты.

При качении со скольжением (в зубьях шестерен) опережающая поверхность ведущей шестерни имеет предел контактной усталости в 1.3...2 раза больше, чем отстающая, из-за расклинивающего действия масла в замкнутом объеме трещины. Наличие прижогов при шлифовании поверхностей качения существенно снижает сопротивление контактной усталости.

Долговечность зубчатых колес определяют по формуле:

$$\tau = \frac{N}{60 n} \left( \frac{[\sigma_k] N}{\sigma_k} \right)^6, \text{ часов};$$

долговечность подшипников по формуле

$$\tau = \frac{1}{n} \left( \frac{C}{Q} \right)^{3,33}, \text{ часов},$$

где  $\sigma_k$  - контактные напряжения, могут определяться по формуле Герца:

$$\sigma_k = 0,418 \sqrt{\frac{PE}{\rho}};$$

$n$  - частота вращения в об/мин;

$P$  - удельная нагрузка;

$Q$  - нагрузка в кгс;

$E$  - модуль упругости;

$\rho$  - приведенный радиус кривизны;

$C$  - коэффициент работоспособности.

Повреждение поверхности деталей может происходить как от взаимодействия с сопрягаемыми поверхностями, так и от взаимодействия с внешней средой.

*Коррозия* – это разрушение поверхности в результате химического или электрохимического воздействия среды. Наиболее часто коррозия встречается в виде окисления поверхности кислородом при повышенных температурах. Газовая коррозия в виде образования пленок проявляется уже при 200...300<sup>0</sup>С. С повышением температуры скорость коррозии растет. При коррозии происходит обезуглероживание поверхности, снижение механических свойств и резкое падение усталости.

Характеристикой сопротивления коррозии материалов и конструкций является жаростойкость. Недостаточная жаростойкость опасна как потерей несущего сечения, так и сильным влиянием на выносливость.

*Жаростойкость* во многом определяет работоспособность деталей горячей части ГТД: элементы камеры сгорания, детали проточной части турбины и др., у которых температура поверхности может быть более 850<sup>0</sup>С. Общее количество дефектов, связанных с воздействием среды, составляет 3...7% от всех прочностных дефектов. Жаростойкость характеризуется скоростью коррозии, т.е. привесом с единицы площади за единицу времени. Иногда жаростойкость определяется потерей веса, если продукты коррозии летучи или смываются потоком омывающего газа или определяется вес образца со снятыми продуктами коррозии.

Процессы окисления и сульфидной коррозии особенно интенсивно протекают у высокожаропрочных сплавов на никелевой основе, используемых для изготовления лопаток турбин. Повышение жаростойкости этих сплавов за счет увеличения содержания хрома и других легирующих элементов приводит к снижению характеристик длительной прочности. Наиболее эффективным путем повышения их работоспособности при высоких температурах является защита поверхности. Поэтому эти сплавы при температурах 800 ...1100<sup>0</sup>С, даже в условиях малоагрессивных сред (воздуха), не применяются без жаростойких защитных покрытий. Можно считать, что после разрушения защитного покрытия рабочие и сопловые лопатки турбины современных ГТД, где температура газов на входе в турбину составляет  $T > 1500\text{K}$ , практически теряют свою работоспособность из-за интенсивных процессов высокотемпературной коррозии и эрозии.

В месте нарушения покрытия под действием продуктов сгорания топлива возникает очаг коррозии, который служит концентратором напряжения и очагом зарождения и развития термоусталостной трещины. С наработкой поверхность трещины окисляется, что ускоряет скорость ее роста.

Некоторые данные по характеристикам жаростойкости в воздушных и коррозионных средах отдельных сплавов, используемых для изготовления элементов камер сгорания и лопаток турбин ГТД, приведены в табл.10.1, 10.2.

Таблица 10.1.

Удельные потери массы - g сплавов после выдержки 150ч. при $t = 850^{\circ}\text{C}$ в среде продуктов сгорания топлива							
Материал	ХН55ВМТЮК	ЭП539	ВХ6	ВХ2И	ХН60ВТ	ЭП99 18,65%Cr	ЭП99 22%Cr
g, мг/мм <sup>2</sup>	7,3	6,6	2,95	1,7	1,6	3,77	1,0

Таблица 10.2.

Глубина коррозии (окисления) $h_c$ , мм листовых жаростойких сплавов после выдержки 1000ч. на воздухе.						
Материал	ЭП126	ВЖ85	ХН78Т	ХН75МВТЮ	ХН60ВТ	ЭП99
900°С	0,0043	0,0046	0,0030	0,0035	0,0042	0,0035
1000°С	0.098	0.012	0.0083	0.011	0.021	0.022

Как следует из приведенных в табл.10.1 и 10.2 данных, с повышением температуры, интенсивность окисления возрастает.

Применение различных по характеристикам жаростойкости покрытий позволяют повысить термоциклическую долговечность, за счет увеличения срока образования очагов коррозии, примерно в 6 раз. На термоциклическую долговечность влияет толщина покрытия и технология его нанесения.

Наличие жаростойкого покрытия снижает потерю массы при окислении в 6...7 раз. Детали горячей части ГТД (камера сгорания, проточная часть турбины и др., у которых температура поверхности более 850°С) могут длительно работать только при наличии на поверхности специальных защитных покрытий. Условно защитные покрытия можно разделить на два класса:

- металлические жаростойкие покрытия для защиты поверхности деталей от коррозионно-эрозионного воздействия рабочей среды (жаростойкие покрытия могут быть одно и многослойными, где каждый слой отличается своим химическим составом и толщиной);
- комплексные теплозащитные покрытия (ТЗП) с керамическим термобарьерным слоем, которые наряду с защитой поверхности от коррозионного воздействия среды уменьшают воздействие теплового потока.

К наиболее широко применяемым жаростойким покрытиям относятся алитирование, алюмосилицирование, хромоалитирование и многокомпонентные типа  $Ni-Cr-Al-Y$  или  $Ni-Co-Cr-Al-Y$ .

В состав жаростойких покрытий входит больший, чем в основной материал деталей процент элементов, образующих устойчивые оксидные пленки, таких как алюминий или хром. Механизм действия жаростойких покрытий сводится к непрерывному образованию за счет диффузии алюминия и хрома из покрытия к поверхности деталей при высоких температурах оксидных пленок  $Al_2O_3$  и  $Cr_2O_3$  или шпинелей  $NiO \bullet Cr_2O_3$ ,  $NiO \bullet Al_2O_3$  с хорошими защитными свойствами. Повышенная жаростойкость связующих подслоев ТЗП

достигается большим, по сравнению с основным материалом детали содержание хрома и алюминия.

ТЗП увеличивает несущую способность и термостойкость деталей за счет уменьшения температуры основного материала и увеличения продолжительности темпов нагрева и охлаждения при изменении режима работы двигателя. При этом повышается сопротивление высокотемпературному окислению за счет снижения температуры поверхности детали и уменьшения доступа к ней кислорода и продуктов сгорания топлива. (Керамический слой из-за своей пористости не может полностью изолировать поверхность детали от воздействия среды).

Аналитическую зависимость между толщиной образовавшейся оксидной пленки  $h$ , температурой  $T$  и временем окисления  $\tau$  можно записать в форме:

$$h^m = K_0 \times \exp\left[\frac{-Q_0}{RT}\right] \times \tau, \quad (10.2)$$

где  $m$ ,  $K_0$  - константы зависящие от материала и коррозионной среды;

$Q_0$  - условная энергия активации;

$R$  - газовая постоянная.

Для многорежимных двигателей величину окисления можно оценивать на основе рекомендаций линейной гипотезы суммирования повреждений в виде:

$$h_{\Sigma} = \sum_{i=1}^I h_i = \sum_{i=1}^I \left( K_0 \times \exp\left[\frac{-Q_0}{RT_i}\right] \times \tau_i \right)^{\frac{1}{m}} \quad (10.3),$$

где индекс  $i$  характеризует режим работы детали.

Интенсивность процессов окисления увеличивается при увеличении давления газов, омывающих деталь. Зависимость (7.2) можно переписать в виде:

$$h^m = K_0 \times \exp\left[\frac{-Q_0}{RT}\right] \times \tau \times K_1 \times P^n, \quad (10.4)$$

где  $K_1$ ,  $n$  - эмпирические коэффициенты;

$P$  - давление газа.

Соответственно зависимость (10.3) в виде:

$$h_{\Sigma} = \sum_{i=1}^I h_i = \sum_{i=1}^I \left( K_0 \times \exp\left[\frac{-Q_0}{RT_i}\right] \times \tau_i \times K_1 \times P^m \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (10.5)$$

По данным фирмы Пратт-Уитни в первом приближении величины констант в уравнениях (10.2 ... 10.5) можно принять следующими  $m=2$ ,  $Q_0=66,43$  кал/моль.

*Эрозия и абразивный износ.* Эрозией называется разрушение поверхности вследствие механического воздействия высокоскоростного потока. В результате трения происходит расшатывание отдельных объемов материала и выламывание их. Эрозионное действие во

многих случаях усиливается взвешенными в потоке частицами. Износ становится эрозионно-абразивным. На эрозионно-абразивный износ влияет природа абразивных частиц, свойства изнашиваемой поверхности, агрессивность среды, температура поверхности. Характер разрушения поверхности при этом виде износа механический.

Наиболее сильно подвержены абразивно-эрозионному износу и эрозии детали газовоздушного тракта двигателя особенно из алюминиевых сплавов. Выносливость деталей при эрозии падает в два раза. Основным методом борьбы с эрозией лопаток компрессора является нанесение твердых эрозионно-стойких покрытий на основе карбидов или нитридов титана, ванадия или циркония. Следует отметить, что эрозионно-стойкие покрытия могут снижать предел выносливости лопаток. При повышенных температурах эрозия может носить эрозионно-коррозионный характер.

## 11. МНОГОКОМПОНЕНТНОЕ НАГРУЖЕНИЕ

Условия работы большинства деталей ГТД характеризуются многокомпонентным нагружением, т.е. совместным действием различного вида нагрузок, включающих статические нагрузки от центробежных и газовых сил при работе на стационарных режимах, вибрационные нагрузки с различной частотой, температурные напряжения. Одновременно действует и малоцикловая усталость, обусловленная запусками и остановками двигателя, переходами с режима на режим в процессе полетного цикла. Различные виды нагрузок при совместном воздействии оказывают друг на друга взаимное влияние. Так циклическое приложение статической нагрузки уменьшает ресурс работы деталей и снижает их длительную прочность; наложение вибрационной нагрузки приводит к снижению долговечности при повторно-статическом и длительном нагружении и т. д.

Условие разрушения при многокомпонентном нагружении определяется предельным состоянием материала. Методы, основанные на гипотезах суммирования повреждений, предполагают, что при одновременном воздействии нескольких видов нагрузок, каждая из них независимо от других вносит свою долю повреждения. Условие разрушения в этом случае запишется в виде:

$$\sum_{i=1}^l \phi_i(n_i) = 1, \quad (11.1)$$

где  $i$  - номер воздействующего фактора (вида нагрузки);

$n$  - количество одновременно действующих факторов;

$\phi_i(\Pi_i)$  - функция, зависящая от величины и типа нагрузки, вносимого  $i$ -ым фактором;

$\Pi_i$  - величина повреждения, вносимого  $i$ -ым фактором.

Вид функции  $\phi_i(\Pi_i)$  и величина повреждения -  $\Pi_i$  могут быть определены, исходя из эмпирических или физических представлений временного, деформационного, энергетического или какого иного типа.

Наибольшее распространение в инженерной практике получило представление уравнения (11.1) в виде:

$$(\Pi_\tau)^\alpha + (\Pi_z)^\beta + (\Pi_v)^\gamma = 1, \quad (11.2)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  - эмпирические коэффициенты;

$$\Pi_\tau = \sum_{i=1}^l \frac{\tau_i}{\tau_{pi}} - \text{повреждение, вносимое статической нагрузкой};$$

$\tau_i$  - время работы на  $i$ -ом режиме;

$\tau_{pi}$  - время до разрушения при непрерывной работе на  $i$ -ом режиме;

$$II_z = \sum_{j=1}^J \frac{z_j}{Z_{pj}} - \text{повреждение, вносимое малоциклового нагружкой};$$

$z_j$  - количество циклов малоциклового нагружения  $j$ -го вида;

$Z_{pj}$  - количество циклов малоциклового нагружения  $j$ -го вида до разрушения;

$$II_v = \sum_{m=1}^M \frac{n_m}{N_{pm}} - \text{повреждение, вносимое высокочастотной нагружкой};$$

$n_m$  - количество циклов высокочастотного нагружения  $m$ -го вида;

$N_{pm}$  - количество циклов высокочастотного нагружения  $m$ -го вида до разрушения.

В расчетах, в первом приближении, часто принимают, что:  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ .

Основным недостатком критериев (11.2) является то, что при оценках высокочастотной составляющей суммарного повреждения ( $II_v$ ) приходится экстраполировать характеристики сопротивления усталости на очень большие базы испытаний –  $N > 10^{12} \dots 10^{14}$  циклов. При этом фактических результатов испытаний деталей на таких базах нет.

В качестве альтернативного метода оценки эквивалентности эксплуатации и испытаний может быть использовано условие:

$$z_{эци}^{эке} = K_z z_{экспл}^{эке}, \quad (11.3)$$

где  $K_z$  – коэффициент запаса по малоциклового долговечности;

В этом случае величины эквивалентной циклической наработки при испытаниях  $z_{эци}^{эке}$  и в эксплуатации  $z_{экспл}^{эке}$  определяются в единых эквивалентных циклах нагружения, с учетом длительной наработки на стационарных режимах работы через коэффициент повторности нагружения –  $K_z$ , с учетом влияния величины наложенной вибрационной нагрузки через коэффициент –  $\eta_v$  и частичных изменений режимов работы двигателя через коэффициенты полноты циклов –  $\eta_r$  и  $\eta_\sigma$  как:

$$z_{эке} = \sum_{i=1}^I z_i (\eta_\sigma \eta_v \eta_r)_i. \quad (11.4)$$

Величины коэффициентов запасов прочности при многокомпонентном нагружении определяются в зависимости от характера изменения нагрузок при достижении предельного состояния как:

- при пропорциональном изменении повторно-статических  $(\sigma_m)^z$  и вибрационных нагрузок  $\sigma_a$ :

$$K_\beta = \frac{\sigma_a^\beta}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} \frac{1}{k_m}\right)};$$

- при неизменных повторно-статических  $(\sigma_m)^z$  и изменяющихся вибрационных напряжениях  $\sigma_a$ :

$$K_v = \frac{\sigma_a^m}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} \left(1 - \frac{1}{k_m}\right);$$

- при изменяющихся повторно-статических  $\sigma_m$  и неизменных вибрационных напряжениях  $\sigma_a$ :

$$K_m^a = k_m \left(1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right);$$

где:  $k_m$  - коэффициент запаса по статической прочности -  $k_m = (\sigma_{b/\tau}^z) / \sigma_m$  или  $k_m = (\sigma_b)^z / \sigma_m$ .

$(\sigma_{b/\tau}^z)$  и  $(\sigma_b)^z$  - предел длительной прочности и предел прочности с учетом цикличности нагружения.

Величины  $(\sigma_{b/\tau}^z)$  и  $(\sigma_b)^z$  определяются через коэффициент повторности нагружения -  $K^z = K^z(z)$ , как показано в разделе о малоциклового усталости.

Таким образом, для одних деталей определяющим работоспособность является весь комплекс многокомпонентного нагружения, для других преобладающими являются отдельные составляющие нагружения. Характер повреждения детали, определяющий истощение ее работоспособности связан с преобладающей нагрузкой. Виды нагрузок, определяющие работоспособность отдельных групп деталей приведены в табл. 11.1.

Программа расчета на прочность, как правило, не делает заключения о разрушении детали. Вывод об этом может сделать только конструктор на основе сравнения рассчитанных напряжений с допускаемыми предельными. Допускаемые предельные напряжения зависят от условий работы детали.

Следует учитывать, что одна и та же деталь может иметь различные пределы прочности в различных условиях. Так, для поршневого кольца двигателя внутреннего сгорания пределом прочности в рабочих условиях является  $\sigma_{b/\tau}^z$  (кольцо обеспечивает уплотнение, подвергаясь постоянному давлению со стороны стенок цилиндра при высокой температуре). Но при надевании кольца на поршень пределом прочности является предел упругости  $\sigma_y$  (необходимо сохранить форму кольца).

Таблица 11.1

Факторы, определяющие ресурс деталей ГТД				
Деталь	Длительная прочность	Усталость	Повторность нагружения	Износ
Лопатки турбины	+	+	+	–
Замки лопаток турбины	+	+	+	+
Лопатки компрессора	–	+	+	–
Диски, валы	+	+	+	–
Корпуса	+	+	+	–
Шестерни, подшипники	–	+	+	–
Опоры	+	+	+	–
Трубы , агрегаты	–	+	+	+
РТКУ	–	–	+	+
Лабиринтные уплотнения	–	+	+	+

## 12. ВЛИЯНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

Кроме прочностных “механических” характеристик материалов: кратковременная и длительная прочность, пластичность, трещиностойкость, усталость, жаростойкость и т.д, большое значение имеют и некоторые “физические” характеристики.

1. Удельная прочность - отношение предела прочности материала к его плотности:

$$\frac{\sigma_{b/\tau}^t}{\rho}, \quad (12.1).$$

Удельная прочность определяет целесообразность применения материала с точки зрения получения максимальной несущей способности при равном весе конструкции. При сравнении материалов по удельной прочности следует учитывать также характер нагружения - при нагружении собственными центробежными силами преимущества более легких сплавов увеличиваются, т.к. и нагрузка в этом случае зависит от плотности материала.

Так напряжения в свободном вращающемся кольце равны:

$$\sigma_p = \rho \omega^2 r^2, \quad (12.2),$$

где  $\omega = (\pi \times n)/30$  - частота вращения кольца в рад/сек;

$n$  - частота вращения кольца в об/мин;

$r$  - радиус кольца.

Напряжения растяжения во вращающемся стержне (лопатки компрессора или турбины) определяющие его несущую способность вычисляются по формуле:

$$\sigma_p = (m \omega^2 r)/F = (\rho V \omega^2 r)/F, \quad (12.3),$$

где  $V$  - объем стержня над расчетным сечением;

$F$  - площадь расчетного сечения;

$r$  - радиус центра тяжести части стержня над расчетным сечением.

Коэффициент запаса прочности в конструкции определяется по формуле:

$$K_b = \sigma_{b/\tau}^t / \sigma_p \quad (12.4),$$

Подставляя (12.2) или (12.3) в (12.4) видно, что коэффициент запаса прочности, а, следовательно, и надежность конструкции нагруженной собственными центробежными силами определяет удельная прочность материала:

- для вращающегося кольца -  $K_b = \frac{\sigma_{b/\tau}^t}{\rho \omega^2 r^2} = \frac{\sigma_{b/\tau}^t}{\rho} \left( \frac{1}{\omega^2 r^2} \right),$

- для вращающегося стержня -  $K_b = \frac{\sigma_{b/\tau}^t}{\rho} \left( \frac{F}{\omega^2 V r} \right).$

Удельная прочность материала зависит от температуры и длительности работы в соответствии с изменением характеристик прочности. Сравнительные данные по удельной прочности некоторых материалов приведены в табл.12.1.

Таблица 12.1

Материал	t=20 <sup>0</sup> С	t=200 <sup>0</sup> С	t=500 <sup>0</sup> С	t=600 <sup>0</sup> С	t=800 <sup>0</sup> С	t=1000 <sup>0</sup> С
ВМ-65	17.8					
МЛ-9(литой)	12.5	7.7				
ВД-17	18.2	6.9				
ВТ-8	24.5	18.9	10	3.3		
ЭИ437Б	13.0		10.3	8.4	2.9	
ЖС6КП	15.8		13.3	12.7	5.6	1.2
ЖС6К	11.1			10.5	6.3	1.9

Из табл. 12.1 видно, как при изменении температуры преимущества использования переходят от одного материала к другому. При низких температурах целесообразно использовать титановые сплавы, при повышенных - никелевые.

## 2. Коэффициент линейного расширения

$$\alpha = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \left( \frac{1}{t_1 - t_0} \right), \text{ град } ^\circ \text{C}^{-1}$$

где  $l_1$  - длина образца при температуре  $t_1$ ;

$l_0$  - первоначальная длина образца при температуре  $t_0$ .

Коэффициент линейного расширения показывает относительное изменение длины образца при изменении температуры на 1<sup>0</sup>.

Коэффициент линейного расширения во многом определяет работоспособность сопрягаемых деталей из различных материалов при высоких температурах. Типичными местами в ГТД, работоспособность которых определяется коэффициентами линейных расширений материалов деталей, являются болтовые соединения в турбине и последних ступенях компрессора, места стыка титановых и стальных дисков в компрессоре и т.д.

В условиях повышенных температур усилие затяжки болта может уменьшаться за счет разницы в коэффициентах линейного расширения материалов болта и пакета стягиваемых деталей, т.е.

$$Q_3 = Q_{30} - Q_t,$$

где  $Q_t = (\alpha_b l_b (t_b - 20^\circ\text{C}) - \sum \alpha_i l_i (t_i - 20)) E_b F_b$ ;

$\alpha_b, l_b, t_b$  - коэффициент линейного расширения, длина и температура болта;

$\alpha_i, l_i, t_i$  - коэффициенты линейного расширения, длины и температуры пакета стягиваемых деталей (рис. 12.1);

$E_b$  и  $F_b$  - модуль упругости и площадь сечения болта.

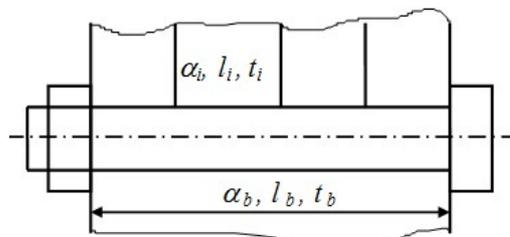


Рис. 12.1. Тепловое расширение болта и стягиваемых им деталей

При значительных отличиях и коэффициентах линейного расширения и высоких температурах, болтовое соединение в работе может раскрыться, что, как правило, приводит к усталостным поломкам болтов. Некоторые данные по коэффициентам линейного расширения конструкционных материалов приведены в табл. 12.2.

Таблица 12.2.

Материал	$t=20 \dots 200^\circ\text{C}$	$t=20 \dots 400^\circ\text{C}$	$t=20 \dots 600^\circ\text{C}$
МЛ-15	26.9	28.8	
ДТ6Т	23.8	25.7	
АЛ4	22.2	23.4	
ВТ-8	8.6	8.8	9.5
ЭИ437Б	12.9	13.8	14.6
ЭИ698	12.3	13.7	14.7
ЭИ742У	12.5	13.1	13.6
ЭИ598	12.9	14.1	15.1
ЭП693	12.1	12.7	13.3
ЭИ435	13.5	15.0	16.1

В местах соединения различных материалов необходимо учитывать их различные температурные деформации и принимать специальные конструктивные меры для обеспечения надежности таких соединений.

### 3. Коэффициент температуропроводности

$Q = \lambda/C_p - m^2/c$  - физическая константа в уравнении теплопроводности, которая характеризует способность к быстрому выравниванию температур в различных точках заданного температурного поля;

где  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности;

$C_p$  - удельная теплоемкость.

Коэффициент температуропроводности может оказаться очень важной характеристикой материала для деталей, имеющих возможность высокоскоростного касания. Например, касание лопаток ротора о статор. При низкой теплопроводности в местах касания могут развиваться высокие локальные температуры, которые могут приводить к прижогам и даже возгоранию металла. Особенно это свойственно титановым сплавам. Вследствие их низкой температуропроводности, при обработке титановых деталей шлифования возможно образование прижогов - необратимых изменений микроструктуры материала, приводящих к резкому в 2-3 раза снижению предела выносливости. При работе двигателя при касании титановых лопаток о титановый статор возможные титановые пожары.

При работе двигателя для устранения возможности возникновения титановых пожаров, введено ограничение по температуре применения титановых сплавов. Для статорных деталей максимальная температура применения титановых сплавов не превышает  $330^{\circ}\text{C}$ , для роторных -  $t \leq 500^{\circ}\text{C}$ . Применение стальных статоров практически устраняет опасность титановых пожаров, из-за большой теплопроводности стали, по сравнению с титановыми сплавами. При касании ротора о статор тепло успевает рассеяться в стальном статоре и температура в месте контакта не достигает критического значения, необходимого для возгорания титана.

Большое значение коэффициент теплопроводности имеет и для деталей жаровой части камеры сгорания, где локальные изменения температуры могут вызвать местные коробления и термоусталостные трещины.

4. Свариваемость - очень важное свойство материала особенно в последнее время в связи с широким применением сварных роторов и корпусов. Свариваемость характеризуется условиями сварки, прочностью, пластичностью и герметичностью сварочных швов. Под условиями сварки понимается тип сварки (дуговая, контактная, электронно-лучевая, лазерная, диффузионная и т.д.), наличие защитной среды, флюс, присадочный материал и др.

Статическую прочность сварных швов обычно оценивают с помощью коэффициента снижения прочности:

$$K = \sigma_w / \sigma_b,$$

где  $\sigma_w$  – предел прочности сварочного шва;

$\sigma_b$  – предел прочности основного материала.

Кроме склонности к трещинообразованию и снижению прочностных характеристик у сварочных швов могут наблюдаться повышенная склонность к коррозии и окислению.

### III. ВИБРАЦИЯ И УДАР

#### 13. КОЛЕБАНИЯ РОТОРОВ

##### 13.1. Динамика простейшего ротора

Рассмотрим изгибные колебания простейшего ротора, состоящего из невесомого вала, на котором закреплён диск массой  $m$  (рис. 13.1).

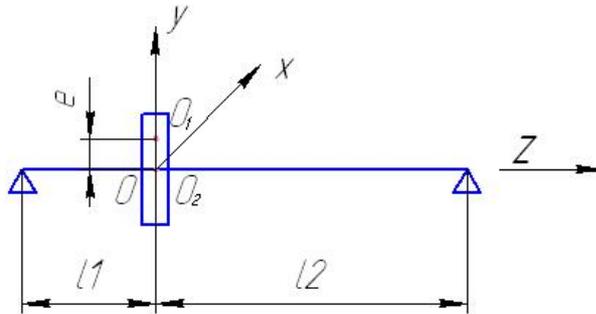


Рис. 13.1. Простейший ротор

Вал вращается на 2-х шарнирных опорах. Допустим, что опоры абсолютно жесткие, и диск расположен посередине вала ( $l_1 = l_2$ ). Точку пересечения оси вала со срединной плоскостью диска (точку крепления диска к валу) обозначим  $O_2$ . Смещение этой точки будет являться прогибом вала в месте расположения диска. Будем считать, что центр масс диска расположен в точке  $O_1$  и смещён относительно оси вала (точки  $O_2$ ) на величину эксцентриситета  $e$ . Будем рассматривать только изгибные колебания ротора. Колебания ротора будем рассматривать в глобальной системе координат  $OXYZ$ , начало которой расположено на недеформируемой оси опор в точке ее пересечения со срединной плоскостью диска.

Ось  $Z$  совпадает с осью опор и направлена так, как это показано на рисунке, оси  $X$ ,  $Y$  находятся в срединной поверхности диска ( $X$  – горизонтально;  $Y$  – вертикально).

Прогиб вала, т.е. смещение точки  $O_2$  от оси недеформируемого вала будем обозначать как  $\vec{r}$ . Проекции этого вектора на оси будем обозначать как  $\tilde{r}_x$ ,  $\tilde{r}_y$ .

Здесь и далее знак «~» обозначает, что данная величина является функцией от времени.

Опоры ротора могут деформироваться, и в этом случае точка  $O_2$  будет смещаться не только за счёт прогиба вала, но и за счёт опор. Полное смещение точки  $O_2$  будем описывать вектором  $\vec{q}$ . Проекции этого вектора на оси обозначим как  $\tilde{q}_x$  и  $\tilde{q}_y$ .

В рассматриваемом случае опоры являются абсолютно жёсткими:  $\vec{q} = \vec{r}$ .

Смещение центра масс диска (точки  $O_1$ ) от оси опор будем обозначать вектором  $\vec{R}$ . Его проекции соответственно:  $\tilde{R}_x, \tilde{R}_y$ .

Поскольку центр масс диска смещён относительно оси, то говорят, что имеет место массовая неуравновешенность. Из-за ее наличия при вращении ротора с угловой скоростью  $\omega$  возникает центробежная сила, в результате действия которой вал деформируется. Это приведёт к тому, что вал начнёт не только вращаться относительно своей оси, но и совершать круговое движение вокруг оси опор.

Примем, что в начальный момент времени ( $t=0$ ) точка  $O_1$  располагалась в горизонтальной плоскости, т.е. находилась на оси  $X$ . В произвольный момент времени  $t$  точки  $O_1$  и  $O_2$  расположены так, как показано на рисунке 13.2.

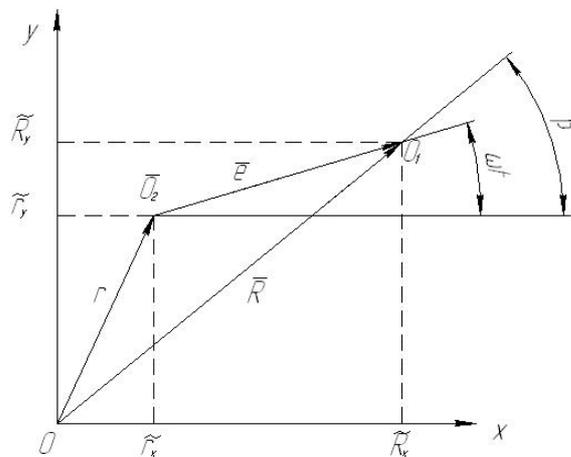


Рис. 13.2. Колебания ротора в плоскости OXY

Из рисунка находим:

$$\tilde{R}_x = \tilde{r}_x + e \cdot \cos \omega t = \tilde{q}_x + e \cos \omega t, \quad (13.1)$$

$$\tilde{R}_y = \tilde{r}_y + e \cdot \sin \omega t = \tilde{q}_y + e \sin \omega t. \quad (13.2)$$

Запишем условие равновесия для диска:

$$\vec{Q}_{уп} + \vec{Q}_{ин} = 0, \quad (13.3)$$

Здесь  $\vec{Q}_{уп}$  - сила упругости, возникающая в вале при его прогибе;  $\vec{Q}_{ин}$  - сила инерции.

Сила упругости зависит от прогиба вала и от жесткости вала  $c$ :

$$\vec{Q}_{уп} = -c\vec{r} \quad (13.4)$$

Сила инерции в соответствии с принципом Даламбера

$$\vec{Q}_{ин} = -m\vec{a} = -m\ddot{\vec{R}}, \quad (13.5)$$

Подставив (13.4) и (13.5) в (13.3) с учетом (13.1) и (13.2), получим:

$$-m \frac{d}{dt^2} (\tilde{q}_x + e \cos \omega t) - c\tilde{q}_x = 0 \quad (13.6)$$

$$-m \frac{d}{dt^2} (\tilde{q}_y + e \sin \omega t) - c \tilde{q}_y = 0. \quad (13.7)$$

Разделим все слагаемые уравнений (13.6), (13.7) на массу  $m$ , введем обозначение  $p^2 = \frac{c}{m}$  (это собственная частота колебаний вала) и продифференцируем по  $t$ . Получим:

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{q}}_x + p^2 \tilde{q}_x = e \omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{\tilde{q}}_y + p^2 \tilde{q}_y = e \omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (13.8)$$

Решение системы (1.8) имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{q}_x = C_1 \tilde{q}_{x1} + C_2 \tilde{q}_{x2} + \tilde{q}_x \\ \tilde{q}_y = C_3 \tilde{q}_{y1} + C_4 \tilde{q}_{y2} + \tilde{q}_y \end{cases} \quad (13.9)$$

Здесь  $\tilde{q}_{x1}$ ,  $\tilde{q}_{x2}$ ,  $\tilde{q}_{y1}$ ,  $\tilde{q}_{y2}$  - любые линейно независимые частные решения однородной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{q}}_x + p^2 \tilde{q}_x = 0 \\ \ddot{\tilde{q}}_y + p^2 \tilde{q}_y = 0 \end{cases}, \quad (13.10)$$

$C_{1...4}$  - неизвестные постоянные, которые определяются из начальных условий,  $\tilde{q}_x$ ,  $\tilde{q}_y$  - любые частные решения неоднородной системы (13.8).

В соответствии с этим можно записать решение (13.9) в виде:

$$\begin{cases} \tilde{q}_x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + A \cos \omega t \\ \tilde{q}_y = C_3 \cos pt + C_4 \sin pt + B \sin \omega t \end{cases}. \quad (13.11)$$

Первые два слагаемых в каждом решении описывают свободные колебания вала, которые происходят с собственной частотой вала  $p$  и быстро затухают вследствие трения. Поэтому будем рассматривать только вынужденные колебания с частотой  $\omega$ , представленные третьими слагаемыми.

$$\begin{cases} \tilde{q}_x = A \cos \omega t \\ \tilde{q}_y = B \sin \omega t \end{cases} \quad (13.12)$$

Подставим (13.12) в (13.8). Получим:

$$\begin{cases} -A \omega^2 \cos \omega t + p^2 A \cos \omega t = e \omega^2 \cos \omega t \\ -B \omega^2 \sin \omega t + p^2 B \sin \omega t = e \omega^2 \sin \omega t \end{cases}. \quad (13.13)$$

$$\text{Отсюда} \begin{cases} A = \frac{e \omega^2}{p^2 - \omega^2} \\ B = \frac{e \omega^2}{p^2 - \omega^2} \end{cases}, \quad (13.14)$$

и колебания ротора будут описываться выражениями

$$\tilde{q}_x = \frac{e\omega^2}{p^2 - \omega^2} \cos \omega t; \quad \tilde{q}_y = \frac{e\omega^2}{p^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (13.15)$$

Проследим за движением ротора в течение промежутка времени, за который вал совершит один полный оборот вокруг своей деформированной оси. Примем, что в момент начала наблюдения  $t=0$ . Тогда за указанный промежуток времени фаза колебаний  $\omega t$  изменится от 0 до  $2\pi$ . Положение сечения вала для различных значений фазы колебаний изображено на рис. 13.3. Видно, что за один полный оборот вокруг деформированной оси вал также совершит один полный оборот вокруг оси опор.

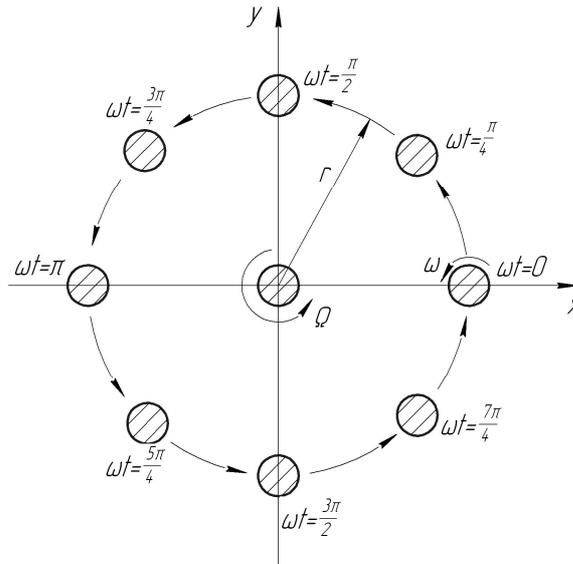


Рис. 13.3. Прецессия ротора

Вращение вала относительно своего положения равновесия называется прецессионным движением, или прецессией ротора. Частоту прецессионного вращения будем обозначать  $\Omega$ . В рассматриваемом случае частота прецессии равна частоте вращения вала вокруг своей оси, т.е.

$$\omega = \Omega \quad (13.16)$$

В общем случае  $\omega$  и  $\Omega$  могут не совпадать как по величине, так и по направлению. При соблюдении условия (13.16) прецессия называется синхронной. Если  $\omega$  и  $\Omega$  совпадают по направлению, то прецессия называется прямой, а если прецессионное движение и вращение вала происходит в разные стороны, то прецессия называется обратной.

Определим прогиб вала.

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{q_x^2 + q_y^2} = \left| \frac{e\omega^2}{p^2 - \omega^2} \right|. \quad (13.17)$$

Как видно, он является постоянным и не зависит от времени, то есть прецессионное движение происходит по окружности. Прецессия с постоянной амплитудой и угловой скоростью называется регулярной.

Видно, что при  $\omega \rightarrow p$  происходит  $r \rightarrow \infty$ . Резонансное увеличение амплитуды колебаний будет продолжаться до тех пор, пока вся энергия колебаний не будет уходить на преодоление сил трения, или пока вал не разрушится. Частота вращения ротора, на которой он вступает в резонанс, называется его критической частотой вращения.

Рассмотрим, что происходит с центром масс ротора при прохождении резонанса. В соответствии с формулами (13.1) и (13.2)

$$\tilde{R}_x = \frac{e\omega^2}{p^2 - \omega^2} \cos \omega t + e \cos \omega t = \frac{ep^2}{p^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (13.18)$$

$$\tilde{R}_y = \frac{ep^2}{p^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (13.19)$$

Из (13.18), (13.19) видно, что  $\frac{\tilde{R}_y}{\tilde{R}_x} = \operatorname{tg} \omega t$ ; из (13.15) видно, что также  $\frac{\tilde{r}_y}{\tilde{r}_x} = \operatorname{tg} \omega t$ .

Т.о. точки  $O_1$  и  $O_2$  расположены на одной прямой.

Если  $\omega < p$ , то  $R = \sqrt{\tilde{R}_x^2 + \tilde{R}_y^2} = \frac{p^2 e}{p^2 - \omega^2} > r$  (рис.13.4).

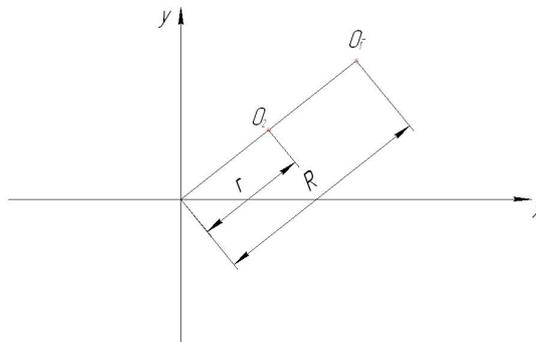


Рис. 13.4. Колебания ротора при  $\omega < p$

Если  $\omega > p$ , то  $r > R$  (рис. 13.5).

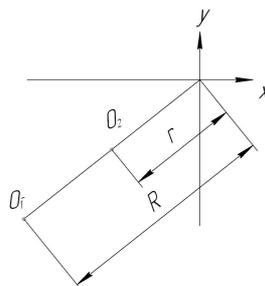


Рис. 13.5. Колебания ротора при  $\omega > p$

Если  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $R \rightarrow 0$ . Это явление называется самоцентрированием ротора.

В рассмотренной расчетной схеме вал имеет только одну степень свободы (прогиб диска). Реальный ротор ГТД имеет бесконечное множество степеней свободы, а следовательно, собственных частот колебаний и критических вращения. Низшую из них называют первой критической частотой вращения, следующую по возрастанию – второй, и так далее. Критические частоты будем обозначать как  $\omega_{k1}, \omega_{k2}, \dots$

Форма колебаний – это относительное распределение перемещений по колеблющемуся телу. Каждой критической частоте соответствует одна и только одна форма колебаний (рис. 13.6). Точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю, называются узловыми.

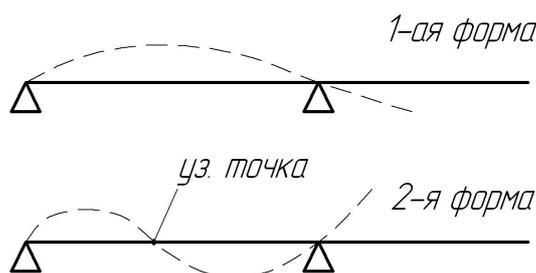


Рис. 13.6. Колебания ротора на жестких опорах.

Амплитуда колебаний зависит от соотношения силы, вызывающей колебания (в данном случае, центробежная сила, зависящая от массы ротора, эксцентриситета и угловой скорости вращения) и силы трения. Однако соотношения амплитуд между собой сохраняются для каждой формы колебаний (рис. 13.7).

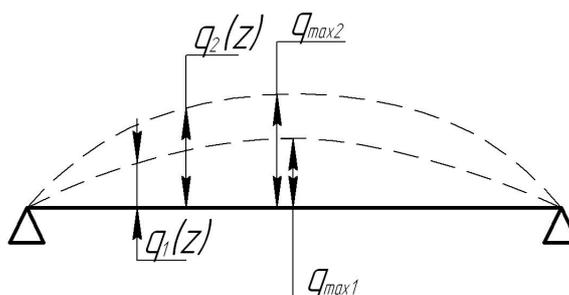


Рис. 13.7. Первая форма колебаний ротора при различных амплитудах

Роторы ГТД, делятся на жёсткие и гибкие. Ротор называется жестким, если его максимальная частота вращения  $\omega_{\max}$  меньше  $0,5 \dots 0,7 \omega_{k1}$ . Если уравнение не выполняется, то ротор называется гибким. Преимуществом гибкого ротора, у которого  $\omega_{k1} < \omega_{\max}$ , является то, что после прохождения критической частоты вращения он самоцентрируется. К его недостаткам относится то, что при запуске и остановке двигателя

ротор проходит через резонанс. Чтобы при этом избежать разрушения ротора, обычно используются демпферы колебаний, которые будут рассмотрены далее.

### 13.2. Влияние податливости опор на критическую частоту вращения ротора

Податливость опор оказывает существенное влияние на величину собственных частот колебаний ротора, и как следствие, на величину его критических частот вращения. Если жёсткости опор сопоставимы с жёсткостью вала ротора, то пренебрежение ими приводит к существенным ошибкам в расчетах. Проанализируем влияние податливости опор на динамику простейшего ротора. Пусть ротор вращается на упругих опорах, жесткость которых будем обозначать как  $C_0$ . Для упрощения уравнений будем считать, что диск расположен посередине вала (рис. 13.8).

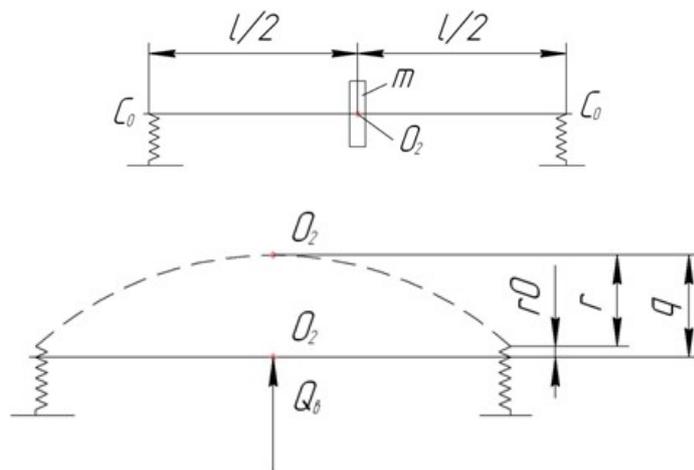


Рис. 13.8. Ротор на податливых опорах

Условие равновесия ротора имеет вид

$$\vec{Q}_{уп} + \vec{Q}_{ин} = 0, \quad (13.20)$$

где сила упругости  $\vec{Q}_{уп} = -c_p \vec{q}$ . Здесь  $c_p$  – жесткость ротора в месте закрепления диска с учетом податливости опор.

Для определения этой жесткости приложим к валу в точке  $O_2$  в произвольном направлении некоторую статическую силу  $\vec{Q}_b$ . Под действием этой силы вал прогнётся, опоры ротора деформируются. В результате точка  $O_2$  сместится. Это смещение обозначим вектором  $\vec{q}$ . Представим это смещение как сумму двух векторов

$$\vec{q} = \vec{r}_0 + \vec{r} \quad (13.21),$$

где  $\vec{r}$  – смещение за счет прогиба вала,  $\vec{r}_0$  – смещение за счет деформирования опор.

Так как сила  $\vec{Q}_b$  приложена посередине вала, то каждая из опор будет деформироваться

под действием силы  $\bar{Q}_b/2$ . Найдем связь между смещением  $\bar{q}$  и силой  $\bar{Q}_b$ . В точке приложения силы должно выполняться условие равновесия

$$\bar{Q}_b + \bar{Q}_{уп} = 0,$$

где упругая сила  $\bar{Q}_{уп} = -c\bar{r}$ . Тогда

$$\bar{Q}_b = -\bar{Q}_{уп} = c\bar{r} \Rightarrow \bar{r} = \frac{\bar{Q}_b}{c}.$$

Поскольку каждая из опор ротора будет деформироваться под действием силы  $\bar{Q}_b/2$ :

$$C_0\bar{r}_0 = \frac{\bar{Q}_b}{2} \Rightarrow \bar{r}_0 = \frac{\bar{Q}_b}{2C_0}.$$

Подставляя выражения для  $r$  и  $r_0$  в (13.21) получим:

$$\bar{q} = \frac{\bar{Q}_b}{c} + \frac{\bar{Q}_b}{2C_0} = \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{2C_0} \right) \bar{Q}_b.$$

Откуда находим:

$$\bar{Q}_b = \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{2C_0}} \bar{q} = \frac{c}{1 + \frac{c}{2C_0}} \bar{q} = c_p \bar{q}. \quad (13.22)$$

Проецируя равенство (13.20) на оси глобальной системы координат, получим

$$\begin{aligned} -m\ddot{R}_x - c_p\tilde{q}_x &= 0, \\ -m\ddot{R}_y - c_p\tilde{q}_y &= 0. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Обозначая  $p^2 = \frac{c_p}{m}$  (собственная частота колебаний ротора с учетом податливости его

опор), и учитывая выражения (13.1) и (13.2), получим

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_x + p^2\tilde{q}_x &= e\omega^2 \cos \omega t, \\ \ddot{\tilde{q}}_y + p^2\tilde{q}_y &= e\omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (13.24)$$

Решая эту систему так же, как (13.8), получим, что собственная частота ротора на упругих опорах определяется выражением

$$p = \sqrt{\frac{c}{m} \left( \frac{1}{1 + \frac{c}{2C_0}} \right)}. \quad (13.25)$$

Из анализа этого выражения видно, что собственная частота колебания ротора существенно зависит от жёсткости опор  $C_0$ . Если  $C_0=0$ , то  $p=0$ . Если  $C_0 \rightarrow \infty$ , то

$p \rightarrow \sqrt{\frac{c}{m}}$ , то есть к собственной частоте ротора на абсолютно жёстких опорах.

Зависимость критической частоты ротора от жесткости опор имеет вид (рис.13.9):

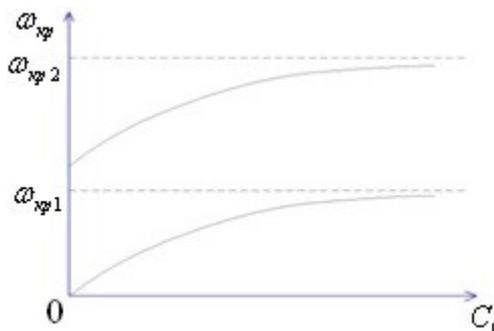


Рис. 13.9. Зависимость критической частоты ротора от жесткости опор

При рассмотрении модели с несколькими степенями свободы можно показать, что при  $c_0=0$  обращается в ноль только первая критическая частота, остальные уменьшаются, но не до нуля.

Зависимость критической частоты ротора от жесткости опор позволяет управлять критической частотой в широких пределах при помощи изменения жесткости опор.

### 13.3. Критические частоты вращения ротора на анизотропных упругих опорах

Из-за особенностей конструкции корпуса двигателя опоры вала могут обладать неодинаковой жёсткостью в горизонтальной и вертикальной плоскостях. (Например, если есть продольный разъем корпуса компрессора, то в плоскости фланца разъема жесткость больше, в перпендикулярной плоскости меньше. Различные ребра опор могут иметь различные жесткости из-за различного диаметра отверстий для подвода и отвода смазки и так далее.) Если такое различие существенно, то в динамике ротора появляются особенности, которые необходимо учитывать при проектировании и доводке двигателя. Рассмотрим динамику простейшего ротора, вращающегося на упругих анизотропных опорах. Пусть жёсткость опор в горизонтальной плоскости  $C_{ox}$ , а в вертикальной  $C_{oy}$ . Как и в предыдущем случае считаем, что диск расположен посередине вала, а его центр масс смещён на величину эксцентриситета  $e$ . Моментами инерции диска и демпфированием в роторе пренебрегаем.

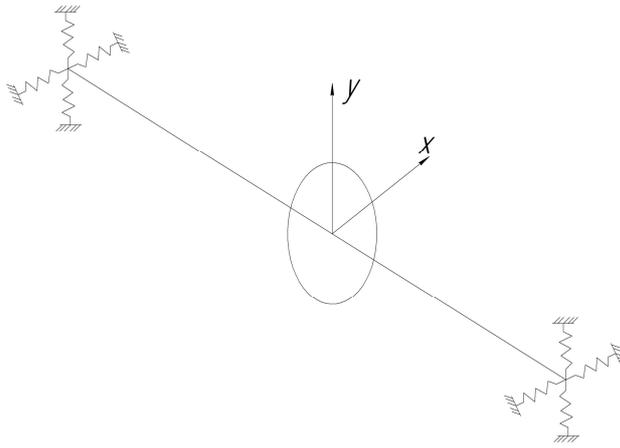


Рис. 13.10. Ротор на анизотропных опорах

Т.к. опоры имеют разную жёсткость в направлениях  $X$  и  $Y$ , ротор в точке  $O_2$  так же обладает жёсткостями, отличными в горизонтальной и вертикальной плоскостях. По аналогии с (13.22) можно записать

$$c_{px} = \frac{c}{1 + \frac{c}{2C_{ox}}}; c_{py} = \frac{c}{1 + \frac{c}{2C_{oy}}}.$$

В этом случае уравнения равновесия (13.3) для диска в проекциях на оси глобальной системы координат принимают вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{\tilde{R}}_x + c_{px}\tilde{q}_x &= 0, \\ m\ddot{\tilde{R}}_y + c_{py}\tilde{q}_y &= 0. \end{aligned} \quad (13.26)$$

Обозначим собственную частоту ротора в горизонтальной плоскости:

$$p_x^2 = \frac{c_{px}}{m},$$

в вертикальной плоскости:

$$p_y^2 = \frac{c_{py}}{m}.$$

Учитывая выражения для определения  $\tilde{R}_x$  и  $\tilde{R}_y$  (13.1) и (13.2), преобразуем (13.26) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_x + p_x^2\tilde{q}_x &= e\omega^2 \cos \omega t; \\ \ddot{\tilde{q}}_y + p_y^2\tilde{q}_y &= e\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (13.27)$$

Решение (13.27), как и системы (13.8), будем искать в виде вынужденных колебаний:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_x &= q_x \cos \omega t, \\ \tilde{q}_y &= q_y \sin \omega t. \end{aligned} \quad (13.28)$$

Подставляя (13.28) в (13.27) получаем выражения для амплитуд колебаний:

$$q_x = \frac{e\omega^2}{p_x^2 - \omega^2}; q_y = \frac{e\omega^2}{p_y^2 - \omega^2}.$$

Таким образом, если опоры ротора анизотропные, и в роторе имеется массовая неуравновешенность  $e \neq 0$ , то при вращении вала вокруг своей собственной оси возникает прецессионное движение, которое будет описываться уравнениями:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_x &= \frac{e\omega^2}{p_x^2 - \omega^2} \cos \omega t; \\ \tilde{q}_y &= \frac{e\omega^2}{p_y^2 - \omega^2} \sin \omega t \end{aligned} \quad (13.29)$$

Из анализа (13.29) можно сделать следующие выводы:

1. Ротор имеет две отличные по величине резонансные частоты колебаний, и, следовательно, две критические частоты вращения  $\omega_{1кр} = p_x; \omega_{2кр} = p_y$ . Примем для определенности, что  $p_y > p_x$ .

2. Амплитуда прецессии будет переменной:

$$|\vec{q}| = \sqrt{\tilde{q}_{1x}^2 + \tilde{q}_{2x}^2} \neq const.$$

Следовательно, прецессия является нерегулярной. Движение вала происходит по эллипсу.

Рассмотрим поведение ротора при прохождении через критические частоты вращения. Будем рассматривать движение ротора в течение промежутка времени, за который вал совершает один полный оборот, т.е.  $\omega t = 0 \dots 2\pi$ .

Разделим весь диапазон частоты вращения ротора на несколько интервалов, и рассмотрим на каждом из них прецессионное движение ротора.

а)  $\omega < p_x$  (рис. 13.11):

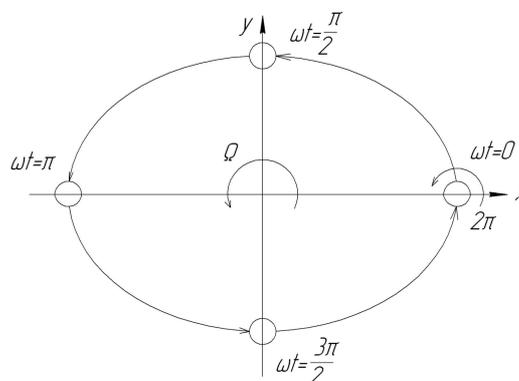


Рис. 13.11. Колебания ротора при  $\omega < p_x$

Положения сечения вала при изменении фазы колебаний от 0 до  $2\pi$  изображены на рисунке. Поскольку  $p_x^2 - \omega^2 < p_y^2 - \omega^2$ , амплитуда  $q_x < q_y$ , то есть движение происходит по эллипсу, вытянутому вдоль оси X. Так как  $\omega = \Omega$ , прецессия является синхронной. Направление вращения при прецессии совпадает с направлением вращения вала вокруг своей оси, следовательно, прецессия является прямой.

б)  $\omega \rightarrow p_x$  (рис. 13.12):

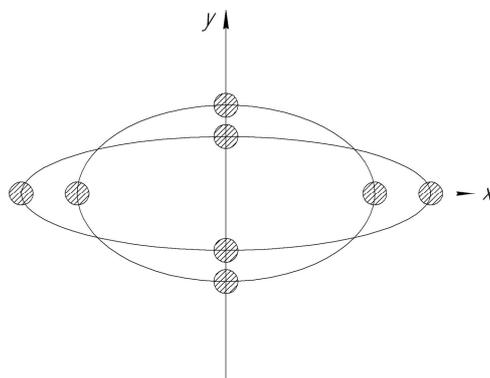


Рис. 13.12. Колебания ротора при  $\omega \rightarrow p_x$

При  $\omega \rightarrow p_x$  траектория начинает вырождаться в эллипс, вытягиваться вдоль оси X. При  $\omega = p_x$  движение фактически превращается в колебания в горизонтальной плоскости.

в)  $p_x < \omega < p_y$  (рис. 13.13):

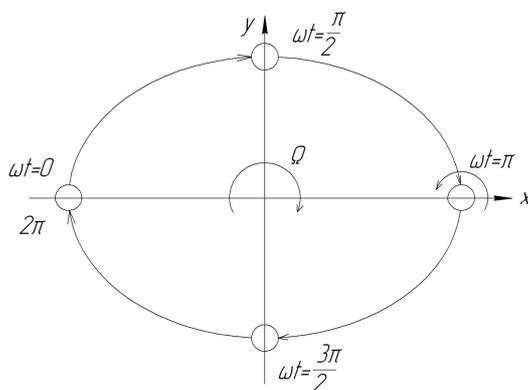


Рис. 13.13. Колебания ротора при  $p_x < \omega < p_y$

Из рисунка видно, что ротор совершает обратную нерегулярную синхронную прецессию.

г)  $\omega \rightarrow p_y$  (рис. 13.14). При  $\omega \rightarrow p_y$  траектория начинает вырождаться в эллипс, вытягиваться вдоль оси Y. При  $\omega = p_y$  движение фактически превращается в колебания в вертикальной плоскости.

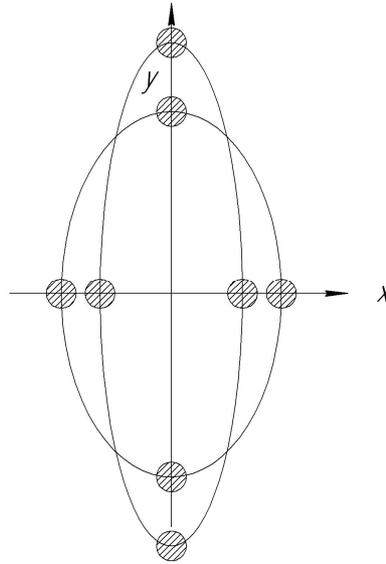


Рис. 13.14. Колебания ротора при  $\omega \rightarrow p_y$

д)  $\omega > p_y$  (рис. 13.15):

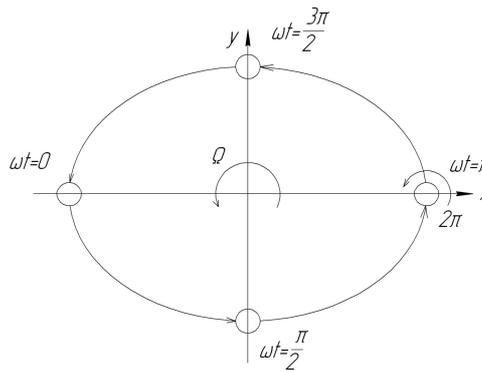


Рис. 13.15. Колебания ротора при  $\omega > p_y$

Из рисунка видно, что ротор вновь совершает прямую нерегулярную синхронную прецессию.

#### 13.4. Влияние гироскопического момента на собственные частоты колебаний ротора

Пусть простейший ротор вращается на абсолютно жестких шарнирных опорах вокруг собственной оси с угловой скоростью  $\omega$  и одновременно совершает прецессию вокруг оси опор с угловой скоростью  $\Omega$ . Считаем, что в данном случае диск с моментом инерции  $J$  расположен не посередине вала. При прогибе вала диск ротора повернётся на некоторый угол  $\vec{\beta}$  (рис. 13.16). При прецессии он всегда нормален плоскости, в которой происходит изгиб вала, и, следовательно, к вектору прогиба вала  $\vec{r}$ .

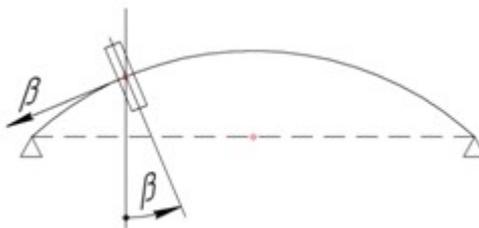


Рис. 13.16. Колебания ротора с диском, расположенным не посередине вала

При прецессионном движении на ротор действует гироскопический момент  $M_g$ . Из теоретической механики известно, что  $\vec{M}_g = J(\vec{\omega} \times \vec{\Omega})$ ;  $|\vec{M}_g| = J\omega\Omega \sin \beta \approx J\omega\Omega\tilde{\beta}$ , где  $\beta$  - угол между векторами  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\Omega}$ . Вектор гироскопического момента направлен таким образом, что со стороны его стрелки кратчайший поворот вектора  $\vec{\omega}$  к вектору  $\vec{\Omega}$  виден против часовой стрелки. Из рисунка (13.17) видно, что при прямой прецессии гироскопический момент стремится вернуть диск в исходное положение, т.е. он увеличивает возвращающий момент, что эквивалентно увеличению жёсткости. Таким образом, гироскопический момент при прямой прецессии увеличивает жёсткость вала и, как следствие, все его собственные частоты колебания и критические частоты.

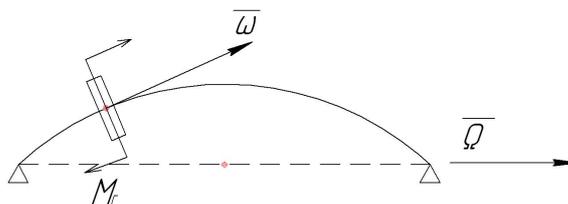


Рис. 13.17. Случай прямой прецессии

При обратной прецессии (рис. 13.18) гироскопический момент уменьшает упругий возвращающий момент, что эквивалентно уменьшению жесткости системы.

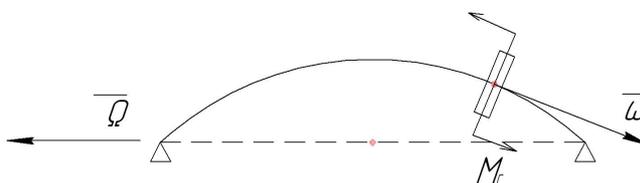


Рис. 13.18. Случай обратной прецессии

Графически зависимость собственной частоты колебаний ротора от частоты прецессии имеет вид (рис. 13.19.):

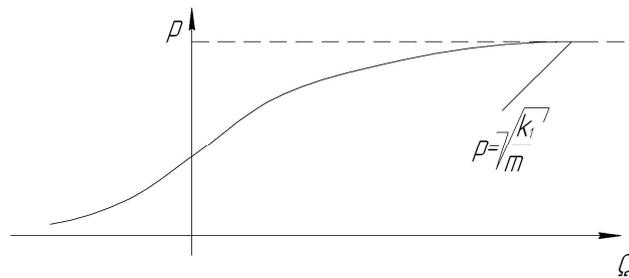


Рис. 13.19. Зависимость собственной частоты колебаний ротора от частоты прецессии

При  $\Omega \rightarrow \infty \Rightarrow p = \sqrt{\frac{c}{m}}$ .

### 13.5. Критические частоты анизотропного вала

Вал может иметь различную жесткость  $c_x$  и  $c_y$  в направлении осей X и Y вследствие различных канавок, пазов, а также из-за погрешностей изготовления. Можно показать, что в диапазоне частот

$$\omega \in \left[ \sqrt{\frac{c_x}{m}}, \sqrt{\frac{c_y}{m}} \right] \quad (13.30)$$

ротор теряет устойчивость. Движение ротора происходит с непрерывным нарастанием амплитуды, до тех пор, пока вся энергия колебаний не будет уходить на преодоление сил трения, или пока вал не разрушится. Все частоты, лежащие в диапазоне (13.30), являются критическими.

### 13.6. Методы борьбы с опасными изгибными колебаниями роторов

Существует три способа снижения уровня поперечных вибраций ротора:

- 1) уравнивание ротора (балансировка);
- 2) отстройка от опасных резонансных режимов (частотная отстройка)
- 3) введение в конструкцию опор специальных гасителей колебаний (демпферов).

#### Балансировка

Главным источником возбуждения изгибных колебаний ротора является его массовая неуравновешенность. Чем больше неуравновешенность, тем больше уровень вибрации. Уровень вибрации зависит от частоты вращения. Он особенно велик на резонансе.

Для того, чтобы ротор находился в состоянии динамического равновесия, необходимо, чтобы выполнялось два условия:

- 1)  $\vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0$  - главный вектор всех неуравновешенных сил равен нулю.

2)  $\vec{M} = \Sigma \vec{M}_i = 0$  - главный момент всех неуравновешенных сил равен нулю, где  $\vec{F}_i$  - сила от неуравновешенной массы,  $\vec{M}_i$  - момент от неуравновешенной силы.

Этого добиваются, подвешивая ротор на специальном балансирующем станке и добавляя в необходимых местах небольшие грузы (обычно в турбине) или убавляя массу в необходимых местах (для этого обычно сошлифовывается часть периферии диска компрессора).

### Частотная отстройка

Частотная отстройка – это смещение критической частоты вращения ротора за пределы рабочего диапазона частот вращения ротора (рис. 13.20).

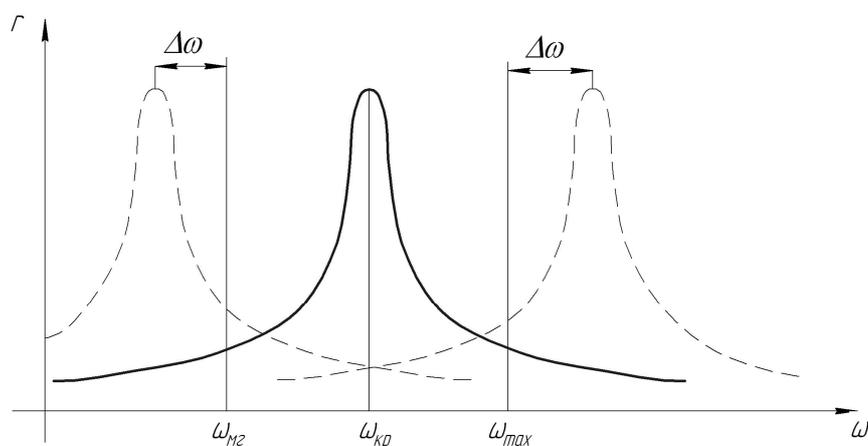


Рис. 13.20. Частотная отстройка

Если вывод критической частоты осуществляется за  $\omega_{\max}$ , то это отстройка называется отстройкой вверх, если отстройка осуществляется за  $\omega_{\min}$ , то это отстройка вниз.

Отстройка должна осуществляться с некоторым запасом  $\Delta\omega$ , который должен быть не менее 10 %, а в некоторых случаях достигает 50 %.

При отстройке вверх ротор не проходит резонанс, но отстройка вверх сопровождается увеличением массы, и ротор является жестким, не используя преимуществ самоцентрирования. При отстройке вниз при запуске ротор проходит через резонанс, что приводит к повышенным вибрациям. Для борьбы с ними обычно необходим демпфер.

Изменение критической частоты вала обычно производится не за счет изменения толщины вала (уменьшение толщины ведет к потере валом статической прочности, увеличение толщины ведет к чрезмерному росту массы), а за счет изменения жесткости опор.

### Демпфирование

Демпфер – это специальное устройство, рассеивающее энергию колебаний на трение. Существуют гидродинамические демпферы, в которых энергия колебаний рассеивается на

вязкое трение в жидкости (рис. 13.21), и демпферы сухого трения (пластинчатые), в которых энергия колебаний рассеивается на трение пластин (рис. 13.22).

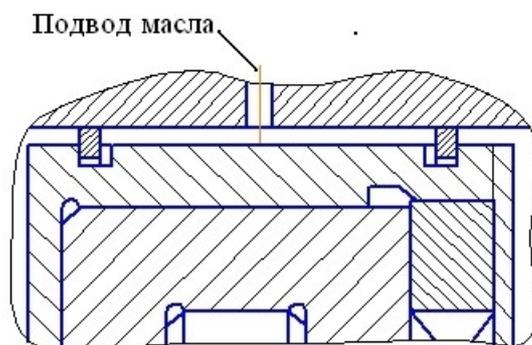


Рис. 13.21. Гидродинамический демпфер

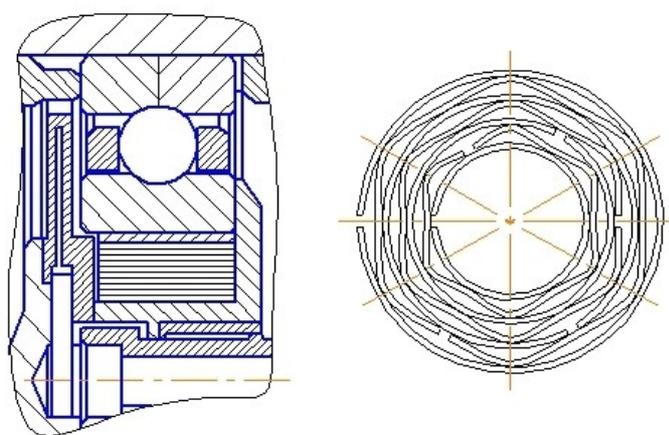


Рис. 13.22. Демпфер сухого трения

Введение в опоры ротора демпферов позволяет снизить прогиб вала при прохождении через резонанс за счёт рассеяния энергии колебания. Амплитудно-частотная характеристика ротора с различной степенью демпфирования показана на рис. 6.23.

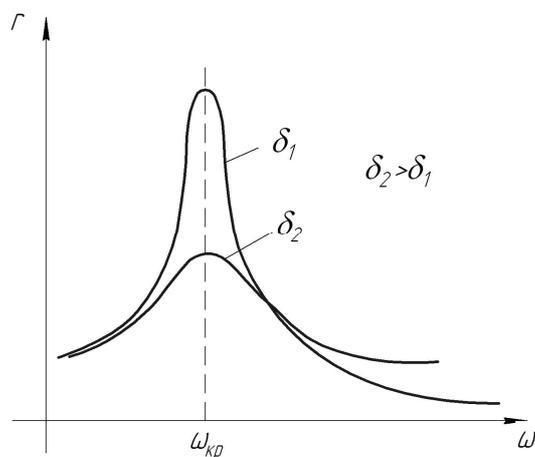


Рис. 13.23. Влияние демпфирования на колебания

## 14. КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК

### 14.1. Изгибные колебания. Получение системы дифференциальных уравнений

Допущения:

- лопатку рассматриваем как закрученный стержень переменного сечения;
- отсутствует связь изгибных и крутильных колебаний;
- ось лопатки проходит через центры тяжести всех сечений и нерастяжима;
- при колебаниях все сечения остаются плоскими и перпендикулярными упругой линии (гипотеза Кирхгофа – Лява).

Примем систему координат  $OXYZ$ , начало которой  $O$  расположено в центре тяжести корневого сечения, оси  $X$  и  $Y$  совпадают с главными центральными осями инерции корневого сечения (пусть  $J_y \ll J_x$ ), ось  $Z$  направлена по оси лопатки. Оси вспомогательной системы координат  $O_1X_1Y_1Z_1$  параллельны осям главной системы координат, начало  $O_1$  находится в центре тяжести текущего сечения. Выделим в лопатке бесконечно малый элемент высотой  $dz$  (рис. 14.1).

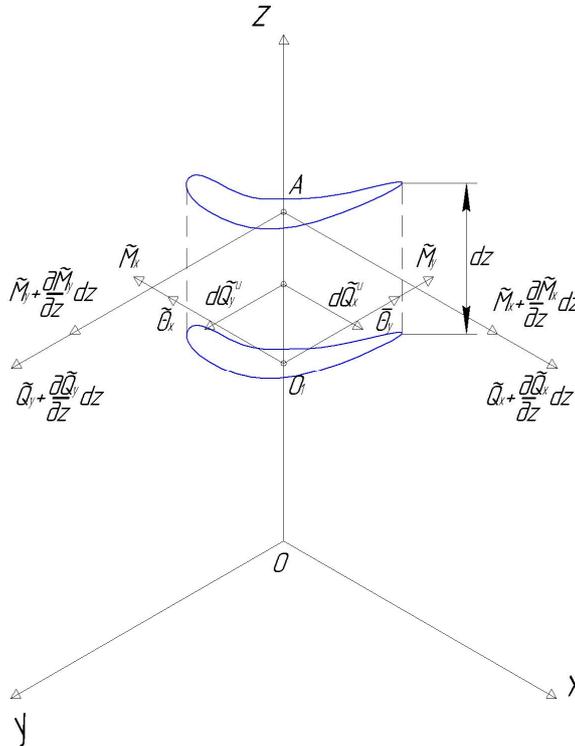


Рис. 14.1. Бесконечно малый элемент лопатки и динамические силы, приложенные к нему при изгибных колебаниях

Рассмотрим условия равновесия элемента с учетом сил инерции

$$\partial \tilde{Q}_x^u = -m \frac{\partial^2 \tilde{q}_x}{\partial t^2} = -F dz \rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_x}{\partial t^2} \text{ и}$$

$$\partial \tilde{Q}_y^u = -m \frac{\partial^2 \tilde{q}_y}{\partial t^2} = -F dz \rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_y}{\partial t^2},$$

где  $\tilde{q}_x$  и  $\tilde{q}_y$  - упругие смещения в направлении осей  $X$  и  $Y$ . Знак волны над переменной означает то, что она зависит от времени.

В направлении оси  $X_1$

$$\tilde{Q}_x + \frac{\partial \tilde{Q}_x}{\partial t} dz - \tilde{Q}_x - Fdz\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_x}{\partial t^2} = 0, \text{ откуда}$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}_x}{\partial z} = Fdz\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_x}{\partial t^2} \quad (14.1)$$

Из условия равновесия в направлении оси  $Y_1$  аналогично получаем

$$\frac{\partial \tilde{Q}_y}{\partial z} = Fdz\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_y}{\partial t^2} \quad (14.2)$$

Вокруг оси  $X_1$  :

$$\tilde{M}_x + \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial z} dz - \tilde{M}_x + \tilde{Q}_y dz + \frac{\partial \tilde{Q}_y}{\partial z} dz dz + d\tilde{Q}_y \frac{dz}{2} = 0 .$$

Приводя подобные и пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, получаем

$$\frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial z} = -\tilde{Q}_y . \quad (14.3)$$

Вокруг оси  $Y_1$  :

$$\tilde{M}_y + \frac{\partial \tilde{M}_y}{\partial z} dz - \tilde{M}_y - \tilde{Q}_x dz - \frac{\partial \tilde{Q}_x}{\partial z} dz dz - d\tilde{Q}_x \frac{dz}{2} = 0 .$$

Приводя подобные и пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, получаем

$$\frac{\partial \tilde{M}_y}{\partial z} = \tilde{Q}_x . \quad (14.4)$$

Установим связь моментов и углов поворота сечений. В плоскости  $OXZ$  (рис. 14.2)

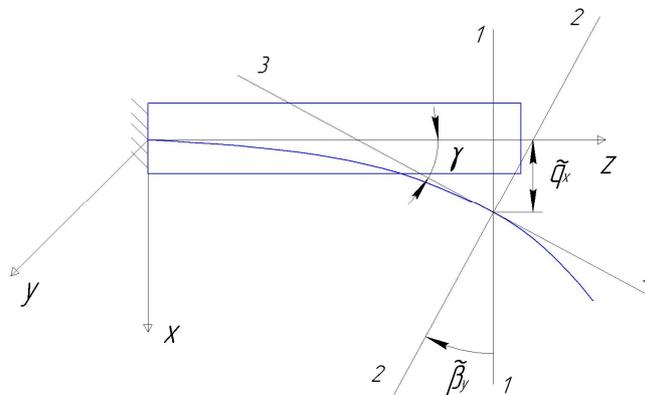


Рис. 14.2. Изгиб оси лопатки в плоскости  $OXZ$

- 1 – положение сечения в равновесном состоянии; 2 - положение изогнутой оси лопатки;  
3 - касательная к изогнутой оси лопатки в месте расположения сечения.

Из рис. 14.2 видно, что

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial z} \approx \gamma$$

С учетом знаков момента и угла поворота

$$\tilde{\beta}_y = -\gamma = -\frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial z} \quad (14.5)$$

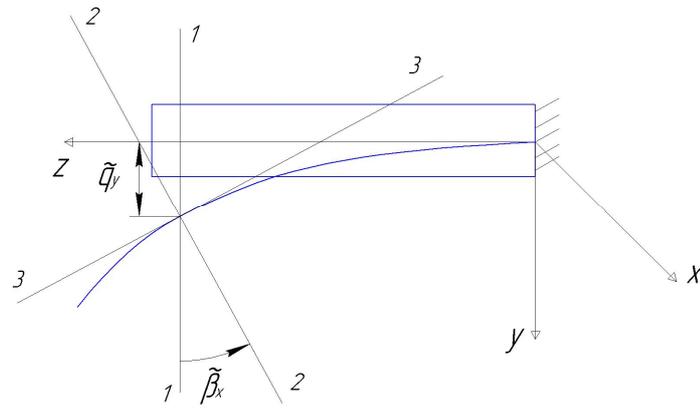


Рис. 14.3. Изгиб оси лопатки в плоскости  $OYZ$

1 – положение сечения в равновесном состоянии; 2 - положение изогнутой оси лопатки;  
3 - касательная к изогнутой оси лопатки в месте расположения сечения.

В другой плоскости из рис. 14.3 видно

$$\tilde{\beta}_x = \frac{\partial \tilde{q}_y}{\partial z} \quad (14.6)$$

Сечение лопатки поворачивается вокруг осей  $X$  и  $Y$ . Из рис. 14.4 видно, что (с учетом знаков углов поворота) перемещение произвольной точки сечения  $A(X_1, Y_1)$  в направлении оси  $Z$  вследствие поворота сечения вокруг оси  $X$  составляет

$$\tilde{\delta}_1 = -Y_1 \tilde{\beta}_x,$$

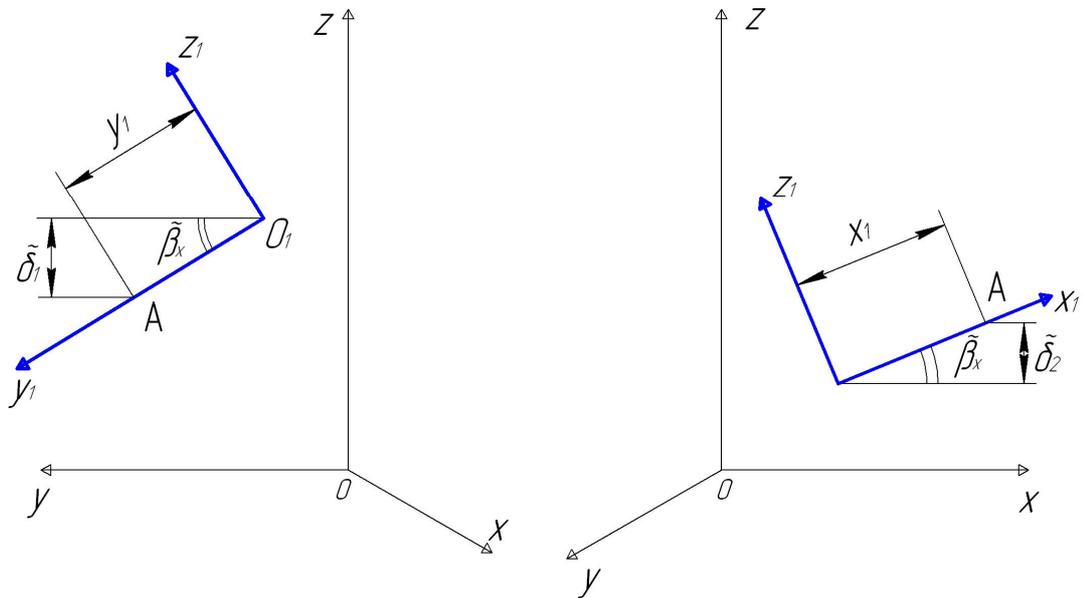


Рис. 14.4. Поворот сечения лопатки в плоскостях  $OXZ$  и  $OYZ$

вследствие поворота сечения вокруг оси  $Y$  составляет

$$\tilde{\delta}_2 = X_1 \tilde{\beta}_y.$$

Есть также перемещение  $\tilde{q}_z$  в направлении оси  $Z$  сечения в целом, связанное с перемещением его центра, точки  $O_1$ . Полное перемещение точки  $A(X_1, Y_1)$  в направлении оси  $Z$

$$\tilde{W} = \tilde{q}_z + \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2 .$$

Согласно формулам Коши

$$\tilde{\varepsilon}_z = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{q}_z}{\partial z} - Y_1 \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} + X_1 \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} .$$

Тогда напряжение в окрестности точки  $A(X_1, Y_1)$

$$\tilde{\sigma}_z = E \tilde{\varepsilon}_z = E \frac{\partial \tilde{q}_z}{\partial z} - E Y_1 \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} + E X_1 \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} .$$

Это напряжение создает бесконечно малые моменты вокруг осей (рис. 14.5)

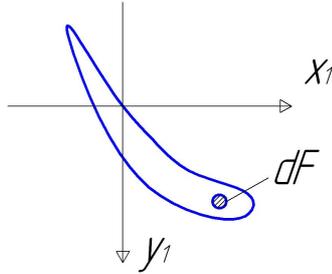


Рис. 14.5. Определение знаков моментов сил от напряжения на бесконечно малой площади  $dF$

$$d\tilde{M}_{x_1} = -dF \tilde{\sigma}_z Y_1 ,$$

$$d\tilde{M}_{y_1} = dF \tilde{\sigma}_z X_1 .$$

Полный момент

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{x_1} &= - \int_F E \frac{\partial \tilde{q}_z}{\partial z} Y_1 dF - \int_F E Y_1^2 \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} dF + \int_F E Y_1 X_1 \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} dF = \\ &= -E \frac{\partial \tilde{q}_z}{\partial z} \underbrace{\int_F Y_1 dF}_{S_x} + E \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} \underbrace{\int_F Y_1^2 dF}_{J_x} - E \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} \underbrace{\int_F Y_1 X_1 dF}_{J_{xy}} \end{aligned}$$

В первое слагаемое входит статический момент вокруг оси  $X_1$ . Поскольку  $X_1$  – главная ось инерции, этот момент равен нулю. Во второе слагаемое входит момент инерции относительно оси  $X_1$ , в третье – центробежный момент инерции. Таким образом,

$$\tilde{M}_{x_1} = E \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} J_{x_1} - E \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} J_{x_1 y_1}$$

Аналогично:

$$\tilde{M}_{y_1} = -E \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} J_{y_1 x_1} + E \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} J_{y_1}$$

Поскольку деформации лопатки при колебаниях малы, будем считать, что оси главной и вспомогательной систем координат приблизительно параллельны. Тогда

$$\tilde{M}_{x_1} \approx \tilde{M}_x ; \tilde{M}_{y_1} \approx \tilde{M}_y , \text{ моменты инерции тоже приблизительно одинаковы.}$$

Запишем два последних уравнения в матричной форме.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{M}_x \\ \tilde{M}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EJ_x & -EJ_{xy} \\ -EJ_{xy} & EJ_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} \end{Bmatrix}.$$

Обозначив матрицу как  $[A]$ , получим

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{M}_x \\ \tilde{M}_y \end{Bmatrix}.$$

Пусть матрица  $[A]^{-1}$  имеет вид  $\begin{bmatrix} a_x & a_{xy} \\ a_{xy} & a_y \end{bmatrix}$ . Тогда

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} = a_x \tilde{M}_x + a_{xy} \tilde{M}_y \quad (14.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} = a_{xy} \tilde{M}_x + a_y \tilde{M}_y \quad (14.8)$$

Уравнения (14.1)...(14.8) образуют систему дифференциальных уравнений, описывающих изгибные колебания лопатки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial z} = -\tilde{\beta}_y \\ \frac{\partial \tilde{\beta}_y}{\partial z} = a_{xy} \tilde{M}_x + a_y \tilde{M}_y \\ \frac{\partial \tilde{M}_y}{\partial z} = \tilde{Q}_x \\ \frac{\partial \tilde{Q}_x}{\partial z} = F\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tilde{q}_y}{\partial z} = \tilde{\beta}_x \\ \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial z} = a_x \tilde{M}_x + a_{xy} \tilde{M}_y \\ \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial z} = -\tilde{Q}_y \\ \frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial z} = F\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_y}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

Параметры в первых четырех уравнениях, а именно:  $q_x$ ;  $\beta_y$ ;  $M_y$ ;  $Q_x$  имеют отношение к плоскости  $OXZ$ , поэтому первые четыре уравнения описывают колебания в плоскости  $OXZ$ , а последние четыре – определяют колебания в плоскости  $OYZ$ . Связь между колебаниями в этих плоскостях осуществляется через коэффициент  $a_{xy}$  при  $M_x$  и  $M_y$ . Если лопатка не слишком закрученная, то оси  $X_1$  и  $Y_1$  приблизительно совпадают с главными осями инерции во всех сечениях, в таком случае центробежные моменты

инерции близки к нулю, коэффициент  $a_{xy} = 0$  и связь между колебаниями в плоскостях  $OXZ$  и  $OYZ$  отсутствует. В этом случае

$$a_y = \frac{1}{EJ_y}; a_x = \frac{1}{EJ_x}.$$

Рассмотрим колебания в плоскости  $OXZ$ , т. е. только первые четыре уравнения. Их решение будем искать в гармоническом виде (где  $p$  – собственная частота колебаний):

$$\begin{cases} \tilde{q}_x = q_x \cos pt \\ \tilde{\beta}_y = \beta_y \cos pt \\ \tilde{M}_y = M_y \cos pt \\ \tilde{Q}_x = Q_x \cos pt \end{cases}$$

После подстановки в дифференциальные уравнения получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial q_x}{\partial z} \cos pt = -\beta_y \cos pt \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial z} \cos pt = \frac{1}{EJ_y} M_y \cos pt \\ \frac{\partial M_y}{\partial z} \cos pt = Q_x \cos pt \\ \frac{\partial Q_x}{\partial z} \cos pt = -F\rho p^2 q_x \cos pt \end{cases}$$

Из первого уравнения  $\beta_y = -\frac{\partial q_x}{\partial z}$ . Подставим это во второе уравнение, получим

$M_y = -EJ_y \frac{\partial^2 q_x}{\partial z^2}$ . Подставив в третье уравнение, получим  $Q_x = -EJ_y \frac{\partial^3 q_x}{\partial z^3}$ . Подставив в

четвертое уравнение, получим  $-EJ_y \frac{\partial^4 q_x}{\partial z^4} = -F\rho p^2 q_x$ . Окончательно получили

дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 q_x}{\partial z^4} - \frac{F\rho p^2}{EJ_y} q_x = 0.$$

Обозначим

$$\alpha^4 = \frac{F\rho p^2}{EJ_y}. \text{ Тогда}$$

$$p = \alpha^2 \sqrt{\frac{EJ_y}{F\rho}},$$

$$\frac{\partial^4 q_x}{\partial z^4} - \alpha^4 q_x = 0.$$

Решение уравнения четвертого порядка - сумма четырех линейно независимых частных решений.

$$q_x = C_1 q_{x1} + C_2 q_{x2} + C_3 q_{x3} + C_4 q_{x4}$$

Частными решениями уравнения являются  $\sin \alpha z$ ,  $\cos \alpha z$ , а также гиперболические косинус и синус

$$ch \alpha z = \frac{e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}}{2}$$

$$sh \alpha z = \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{2}$$

$$ch(0) = 1$$

$$sh(0) = 0$$

В решение будем подставлять их суммы, которые называются функциями Крылова.

$$S(\alpha z) = \frac{1}{2}(ch \alpha z + \cos \alpha z) ,$$

$$T(\alpha z) = \frac{1}{2}(sh \alpha z + \sin \alpha z) ,$$

$$U(\alpha z) = \frac{1}{2}(ch \alpha z - \cos \alpha z) ,$$

$$V(\alpha z) = \frac{1}{2}(sh \alpha z - \sin \alpha z) .$$

Преимущество этих функций состоит в том, что при дифференцировании они переходят друг в друга:  $dS/dz = V$ ;  $dT/dz = S$ ;  $dU/dz = T$ ;  $dV/dz = U$ .

При этом  $S(0)=1$ ;  $T(0) = U(0) = V(0) = 0$ .

Подставим решение вида  $q_x(\alpha z) = C_1 S(\alpha z) + C_2 T(\alpha z) + C_3 U(\alpha z) + C_4 V(\alpha z)$  в полученные уравнения.

$$\beta_y(\alpha z) = -\alpha(C_1 V(\alpha z) + C_2 S(\alpha z) + C_3 T(\alpha z) + C_4 U(\alpha z)) ,$$

$$M_y(\alpha z) = -\alpha^2 EJ_y(C_1 U(\alpha z) + C_2 V(\alpha z) + C_3 S(\alpha z) + C_4 T(\alpha z)) ,$$

$$Q_x(\alpha z) = -\alpha^3 EJ_y(C_1 T(\alpha z) + C_2 U(\alpha z) + C_3 V(\alpha z) + C_4 S(\alpha z)) .$$

Неизвестные постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  определяются из граничных условий.

#### 14.2. Колебания консольно закрепленной лопатки

Система имеет по две степени свободы (перемещение и угол поворота) на каждой из границ, соответственно, необходимы по 2 граничных условия на каждую границу.

При  $z=0$  при консольном абсолютно жестком закреплении  $q_x=0$ ;  $\beta_y=0$ .

$$q_x = 0 = C_1 S(0) + C_2 T(0) + C_3 U(0) + C_4 V(0);$$

$$0 = C_1 * 1 + C_2 * 0 + C_3 * 0 + C_4 * 0;$$

откуда следует

$$C_1 = 0.$$

Также

$$\beta_y = 0 = -\alpha(C_1 V(0) + C_2 S(0) + C_3 T(0) + C_4 U(0))$$

$$0 = C_1 * 0 + C_2 * 1 + C_3 * 0 + C_4 * 0,$$

откуда следует

$$C_2 = 0.$$

При  $z=l$  на свободном краю лопатки  $M_y(l) = 0$ ;  $Q_x(l) = 0$ . Подставив в решение, получим

$$M_y(l) = -\alpha^2 EJ_y (C_3 S(\alpha l) + C_4 T(\alpha l)) = 0$$

$$Q_x(l) = -\alpha^3 EJ_y (C_3 V(\alpha l) + C_4 S(\alpha l)) = 0 .$$

Или

$$C_3 S(\alpha l) + C_4 T(\alpha l) = 0$$

$$C_3 V(\alpha l) + C_4 S(\alpha l) = 0 .$$

Эта однородная система уравнений имеет решения, если ее определитель равен нулю.

$$T(\alpha l)V(\alpha l) - S^2(\alpha l) = 0$$

Это имеет место при  $\alpha l = K_i$ , где

$$K_1 = 1,875 ,$$

$$K_2 = 4,69 ,$$

$$K_3 = 7,8$$

и т.д.

Поскольку  $\alpha_i = K_i/l$ ,

$$p_i = \left( \frac{K_i}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ_y}{\rho F}} .$$

Это уравнение определяет бесконечное количество собственных частот колебаний, каждой из которых соответствует своя форма колебания (форма колебания – это распределение относительных перемещений по колеблющемуся телу). Первая, вторая и третья формы изгибных колебаний приведены на рис. 14.6.

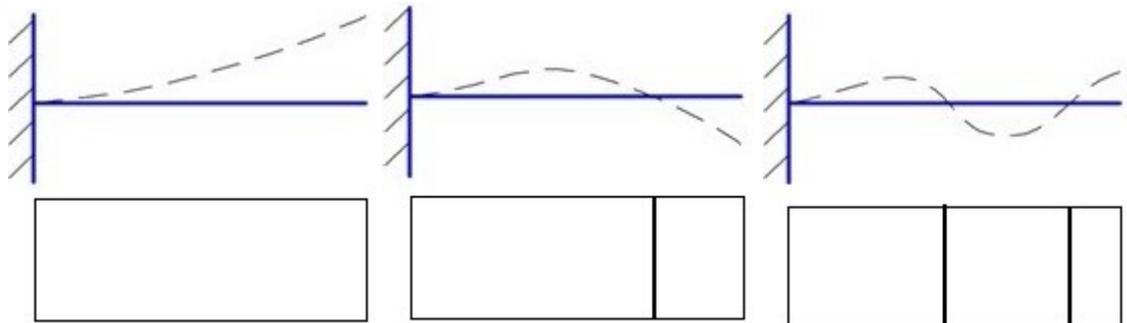


Рис. 14.6. Первая, вторая и третья формы изгибных колебаний

### 14.3. Влияние податливости консольного закрепления на собственные частоты колебаний лопатки

Рассмотрим случай, когда закрепление исключает линейные перемещения, но податливо с жесткостью  $C_m$  для угловых перемещений.

На краю  $z=0$  имеет место  $q_x=0$ , откуда  $C_1=0$ .

Закрепление создает момент  $M_3 = -C_m \beta_y$ .

Поскольку  $M_y(0) + M_3 = 0$ ,

$$-\alpha^2 EJ_y (C_2 V(0) + C_3 S(0) + C_4 T(0)) + C_m \alpha (C_2 S(0) + C_3 T(0) + C_4 U(0)) = 0 ,$$

получаем

$$\frac{C_m}{EJ_y} C_2 - \alpha C_3 = 0.$$

При  $z=l$  на свободном краю лопатки  $M_y(l)=0$ ;  $Q_x(l)=0$ . Подставив в решение, получим

$$-\alpha^2 EJ_y (C_3 S(\alpha l) + C_4 T(\alpha l)) = 0$$

$$-\alpha^3 EJ_y (C_3 V(\alpha l) + C_4 S(\alpha l)) = 0.$$

Объединив эти уравнения с предыдущим, получим систему из трех уравнений для определения  $C_2; C_3; C_4$ .

Если  $C_m=0$  (это соответствует шарнирному замку лопатки), то частота первой изгибной формы равна нулю, то есть первая изгибная форма колебаний отсутствует. В этом состоит преимущество применения шарнирного замка (который, однако, имеет больший вес). Остальные формы изгибных колебаний сохраняются, но частоты их уменьшаются (рис. 14.7).



Рис. 14.7. Влияние податливости консольного закрепления на собственные частоты колебаний лопатки

#### 14.4. Крутильные колебания лопаток

Лопатку будем рассматривать как стержень постоянного сечения. Допустим, что центр тяжести и центр жесткости во всех сечениях лопатки совпадают, и кручение не зависит от изгиба.

Крутящий момент вокруг оси  $z$

$$\tilde{M}_z = GJ_K \frac{\partial \tilde{\beta}_z}{\partial z},$$

$$\text{откуда } \frac{\partial \tilde{\beta}_z}{\partial z} = \frac{1}{GJ_K} \tilde{M}_z, \quad (14.9)$$

где  $G$  – модуль сдвига, а момент инерции на кручение

$$J_K \approx \frac{1}{3} \int_0^b (f_2(x) - f_1(x))^3 dx,$$

где  $b$  – длина хорды лопатки, функция  $f_1(x)$  описывает корытце лопатки, а  $f_2(x)$  – спинку (рис. 14.8). Если сечение близко к круглому,  $J_K \approx J_\rho$  – полярному моменту инерции.

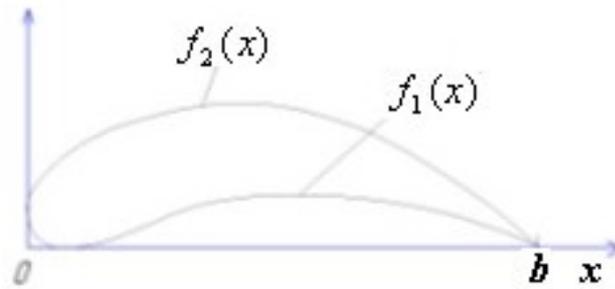


Рис. 14.8. Расчет момента инерции на кручение

На бесконечно малый элемент лопатки действует также момент от сил инерции

$$d\tilde{M}_z^i = -dJ_m \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_z}{\partial t^2} ,$$

где массовый момент инерции

$$dJ_m = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dF dz = \rho dz \int_F r^2 dF = \rho dz J_\rho .$$

Тогда  $d\tilde{M}_z^i = -\rho J_\rho \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_z}{\partial t^2} dz$

Рассмотрим равновесие бесконечно малого элемента лопатки (рис. 14.9):

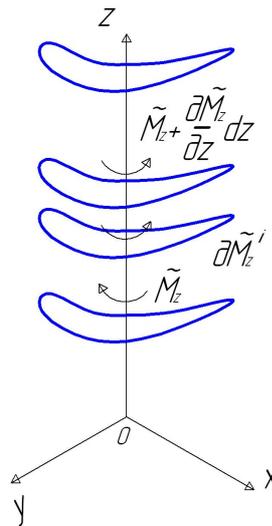


Рис. 14.9. Бесконечно малый элемент лопатки и приложенные к нему динамические силы при крутильных колебаниях

$$\tilde{M}_z + \frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial z} dz - \tilde{M}_z - \rho J_\rho \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_z}{\partial t^2} dz = 0 ,$$

откуда

$$\frac{\partial \tilde{M}_z}{\partial z} = \rho J_\rho \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_z}{\partial t^2} \quad (14.10)$$

Уравнения (14.9) и (14.10) образуют систему дифференциальных уравнений, описывающих крутильные колебания лопатки. Решение будем искать в гармоническом виде

$$\tilde{\beta}_z = \beta_z \cos pt , \quad \tilde{M}_z = M_z \cos pt .$$

Подставив решение в уравнения (14.9) и (14.10), продифференцировав и сократив на  $\cos pt$ , получим

$$\frac{d\beta_z}{dz} = \frac{1}{GJ_K} M_z ,$$

$$\frac{dM_z}{dz} = -\rho J_\rho p^2 \beta_z .$$

Выразив  $M_z$  из первого уравнения и подставив его во второе, получим

$$\frac{d^2 \beta_z}{dz^2} + \frac{\rho J_\rho p^2}{GJ_K} \beta_z = 0 .$$

Обозначим  $\alpha^2 = \frac{\rho J_\rho p^2}{GJ_K}$ , тогда  $p = \alpha \sqrt{\frac{GJ_K}{\rho J_\rho}}$ , и

$$\frac{d^2 \beta_z}{dz^2} + \alpha^2 \beta_z = 0 .$$

Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение имеет вид  $\beta_z = C_1 \cos(\alpha z) + C_2 \sin(\alpha z)$ .

Постоянные найдем из граничных условий.

В каждом сечении лопатка имеет одну степень свободы, поэтому получаем по одному граничному условию на каждой границе лопатки.

При  $z=0$  при консольном абсолютно жестком закреплении  $\beta_z = 0$ , откуда следует  $C_1 = 0$ .

При  $z=l$  на свободном краю лопатки  $M_z(l) = 0$ .

$$M_z = GJ_K \frac{d\beta_z}{dz} = GJ_K C_2 \alpha \cos \alpha l = 0 .$$

Это эквивалентно условию  $\cos \alpha l = 0$ ,  $\alpha l = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , где  $n=1,2,3\dots$

Значению  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2l}$  соответствует частота колебаний  $p_1 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{GJ_K}{\rho J_\rho}}$  и

распределение углов поворота по лопатке вида  $\beta_z = C_2 \sin(\frac{\pi}{2l} z)$  (рис. 14.10, вверху). Это – первая крутильная форма колебаний. Ее узловая линия расположена вдоль лопатки.

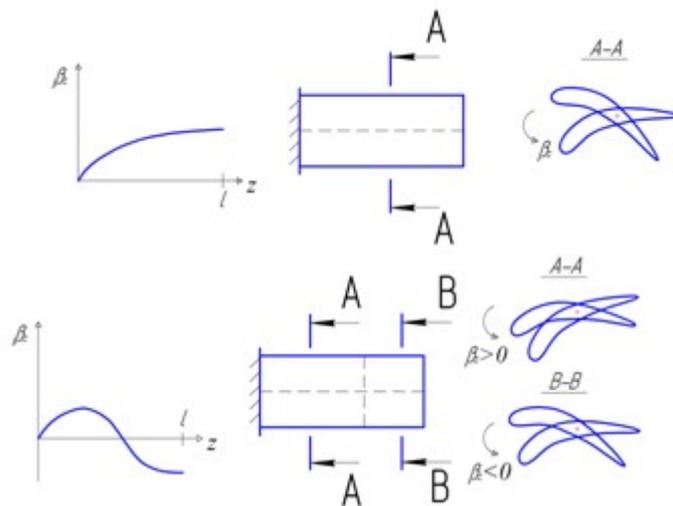


Рис. 14.10. Узловые линии при крутильных колебаниях лопатки

Значению  $\alpha_2 = \frac{3\pi}{2l}$  соответствует частота колебаний  $p_2 = \frac{3\pi}{2l} \sqrt{\frac{GJ_K}{\rho J_\rho}}$  и

распределение углов поворота по лопатке вида  $\beta_z = C_2 \sin(\frac{3\pi}{2l} z)$  (рис. 14.10, внизу). Это – вторая крутильная форма колебаний. Ей соответствует еще одна узловая линия поперек лопатки. По разные стороны этой линии колебания происходят в противоположных направлениях.

#### 14.5. Классификация форм колебаний лопаток

Лопатка имеет бесконечное количество собственных частот и форм колебаний. Для их качественного описания используются числа  $n_1$  и  $n_2$ . При движении, описываемом числом  $n_1$ , все точки поперечного сечения одновременно смещаются в одну сторону (рис. 14.11 слева). Число  $n_2$  характеризует распределение смещений в поперечном сечении лопатки. При  $n_2 = 1$  все точки смещаются в одну сторону. Это соответствует чисто изгибным колебаниям. При



Рис. 14.11. Изгибные, крутильные и оболочечные колебания

$n_2 = 2$  часть точек сечения смещается в одну сторону, часть в другую. Это соответствует крутильным колебаниям (рис. 14.11 в центре). При  $n_2 = 3$  происходят более сложные колебания, которые называют оболочечными (рис.14.11 справа). Формы колебаний можно представить в виде таблицы (рис.14.12). Частоты колебаний увеличиваются вправо и вниз:  $f_{1x1} < f_{2x1} < f_{3x1} < \dots$  ;  $f_{1x1} < f_{1x2} < f_{1x3} < \dots$

Реальная лопатка закручена и имеет различную толщину в различных сечениях, ее узловые линии могут быть не прямыми и не перпендикулярными относительно её оси.

$n/\pi$	1	2	3
1			
2			
3			

Рис. 14.12. Таблица форм колебаний консольно закрепленной лопатки

#### 14.6. Влияние различных факторов на собственные частоты колебаний лопаток

1. Влияние материала проявляется через множитель  $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . Для используемых в двигателестроении металлических материалов  $\sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx const$  (с точностью три - пять процентов), и изменение материала на собственную частоту лопатки не влияет. Для композитных материалов это не так, и для них нужно также учитывать анизотропию свойств, то, что  $E_x \neq E_y$ .

2. Влияние центробежной силы связано с тем, что при отклонении лопатки от положения равновесия при колебаниях у центробежной силы появляется плечо, и появляется момент, возвращающий лопатку в положение равновесия (рис.14.13). Поэтому для вывода лопатки из положения равновесия необходимо преодолеть не только жесткость лопатки, но и действие момента центробежной силы. Это эквивалентно увеличению жесткости лопатки, поэтому частота колебаний при этом увеличивается.

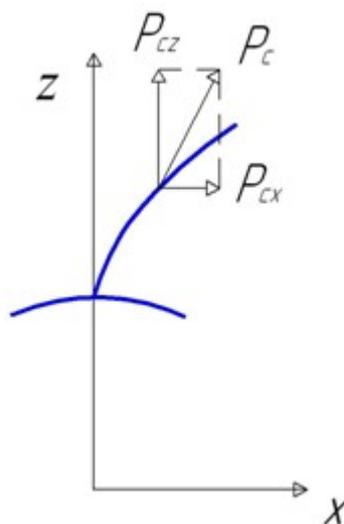


Рис. 14.13. Плечо центробежных сил

Различают статическую частоту  $f_0$  лопатки на неподвижном роторе и динамическую частоту  $f_d$ , которая растет с увеличением оборотов. Для первой изгибной формы

$$f_d = \sqrt{f_0^2 + Bn^2},$$

где  $n$  – обороты ротора,

$$B \approx 0.81 \frac{D_m}{l} - \cos^2 \alpha_m - 0.37,$$

здесь  $D_m$  - средний диаметр рабочего колеса,  $\alpha_m$  - средний угол установки лопатки.

Влияние центробежной силы наибольшее на низшие формы колебаний. На крутильные колебания центробежная сила не влияет, так как при кручении у нее не появляется плечо.

3. Влияние температуры происходит вследствие уменьшения модуля жесткости  $E$  с ростом температуры. Температурная поправка

$$f_t = f_0 \sqrt{\frac{E_t}{E_0}},$$

где  $E_t$  - модуль жесткости нагретой лопатки,  $E_0$  - модуль жесткости при нормальной температуре.

Поскольку при увеличении оборотов двигателя растет и температура, влияние температуры накладывается на влияние центробежной силы. Температура лопаток компрессора меняется незначительно, поэтому их динамическая частота только увеличивается. В турбине при больших температурах влияние температуры сильнее, поэтому динамическая частота лопаток на малых оборотах увеличивается, а на больших уменьшается.

4. Влияние геометрических параметров (рис. 14.14) при равномерном изменении по длине лопатки можно оценить, пользуясь приближенными формулами для площади сечения

$$F \approx 0.7b\delta_{\max}$$

и момента инерции профиля

$$J_y \approx 0.41b\delta_{\max}(\delta_{\max}^2 + l_{\max}^2)$$

(здесь  $b$  - хорда лопатки,  $\delta_{\max}$  - максимальная толщина ее профиля,  $l_{\max}$  – максимальный подъем средней линии, см. рис. 14.14).

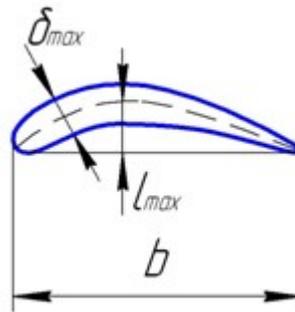


Рис. 14.14. Геометрические параметры профиля лопатки

$$p_i = \left( \frac{Ki}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{0.41Eb\delta_{\max}(\delta_{\max}^2 + l_{\max}^2)}{0.7\rho b\delta_{\max}}}$$

Видно, что хорда лопатки на частоту не влияет, увеличение длины существенно уменьшает частоту, увеличение  $\delta_{\max}$  и  $l_{\max}$  – увеличивает частоту.

5. При неодинаковом изменении геометрических параметров по длине лопатки жесткость лопатки определяется теми участками, где имеются большие относительные деформации (вблизи мест закрепления или узловых линий), а инерционные свойства – теми участками, где имеются большие перемещения (вдали от мест закрепления или узловых линий). Например, при увеличении толщины лопатки в корневом сечении, увеличится ее жесткость и вырастет частота первой изгибной формы (рис. 14.15, первый рисунок). При увеличении толщины лопатки на периферии увеличатся ее инерционные свойства, и частота первой изгибной формы уменьшится (рис. 14.15, второй рисунок).



Рис. 14.15. Утолщение различных сечений лопатки

При подрезке уголка (рис. 14.16) уменьшатся инерционные свойства периферии, что также вызовет увеличение частоты первой изгибной формы.



Рис. 14.16. Лопатка со срезанным уголком

## 15. КОЛЕБАНИЯ ДИСКА РАБОЧЕГО КОЛЕСА

Диск будем рассматривать как круглую пластину переменной толщины в рамках модели Тимошенко. Для пластины в цилиндрической системе координат:

$$\tilde{M}_r = D \left( \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial r} - \mu \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\mu}{r} \tilde{\beta}_r \right), \quad (15.1)$$

$$\tilde{Q}_r = \frac{k^2 E h}{2(1 + \mu)} \left( \frac{\partial \tilde{q}_r}{\partial r} - \tilde{\beta}_r \right), \quad (15.2)$$

$$\tilde{M}_{r\varphi} = -\tilde{M}_{\varphi r} = \frac{1}{2} D (1 - \mu) \left( \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \tilde{\beta}_\varphi - \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{r \partial \varphi} \right), \quad (15.3)$$

$$\tilde{M}_\varphi = D \left( \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \tilde{\beta}_r - \mu \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial r} \right), \quad (15.4)$$

$$\tilde{Q}_\varphi = \frac{k^2 E h}{2(1 + \mu)} \left( \frac{\partial \tilde{q}_r}{r \partial \varphi} + \tilde{\beta}_\varphi \right), \quad (15.5)$$

где  $D$  – цилиндрическая жесткость,  $k$  учитывает характер распределения напряжений.

$\tilde{M}_{r\varphi}$  – крутящий момент, который образуется от касательных напряжений на площадке с нормалью  $r$ .  $\tilde{Q}_r$  – погонная перерезывающая сила, которая возникает от касательных напряжений. Она действует в направлении оси  $Z$  на площадке с нормалью  $r$ .  $\tilde{M}_\varphi$  – скручивающий момент, который возникает от нормальных напряжений на площадке с нормалью  $\varphi$ .  $\tilde{M}_{\varphi r}$  – крутящий момент от касательных напряжений на площадке с нормалью  $\varphi$ .  $\tilde{Q}_\varphi$  – погонная перерезывающая сила от касательных напряжений  $\tau_{z\varphi}$ , действующая в направлении оси  $Z$  на площадке с нормалью  $\varphi$ .

Выделим элемент диска двумя радиальными плоскостями, расположенными под углом  $d\varphi$ , и двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами  $r$  и  $dr$  (рис. 15.1).

Получим систему дифференциальных уравнений, описывающую колебания диска, из рассмотрения уравнений (15.1) – (15.5) и условий равновесия элемента диска.

Из (15.1) (также умножив и разделив на  $r$ ) получим

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial r} = \mu \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{r \partial \varphi} - \frac{\mu}{r} \tilde{\beta}_r + \frac{1}{Dr} (\tilde{M}_{r\varphi}). \quad (15.6)$$

Из (15.3) получим

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial r} = \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \tilde{\beta}_\varphi + \frac{2}{D r (1 - \mu)} (\tilde{M}_{r\varphi} r) \quad (15.7)$$

Из (3.2)

$$\frac{\partial \tilde{q}_r}{\partial r} = \tilde{\beta}_r + \frac{2(1 + \mu)}{k^2 E h r} (\tilde{Q}_r r) \quad (15.8)$$

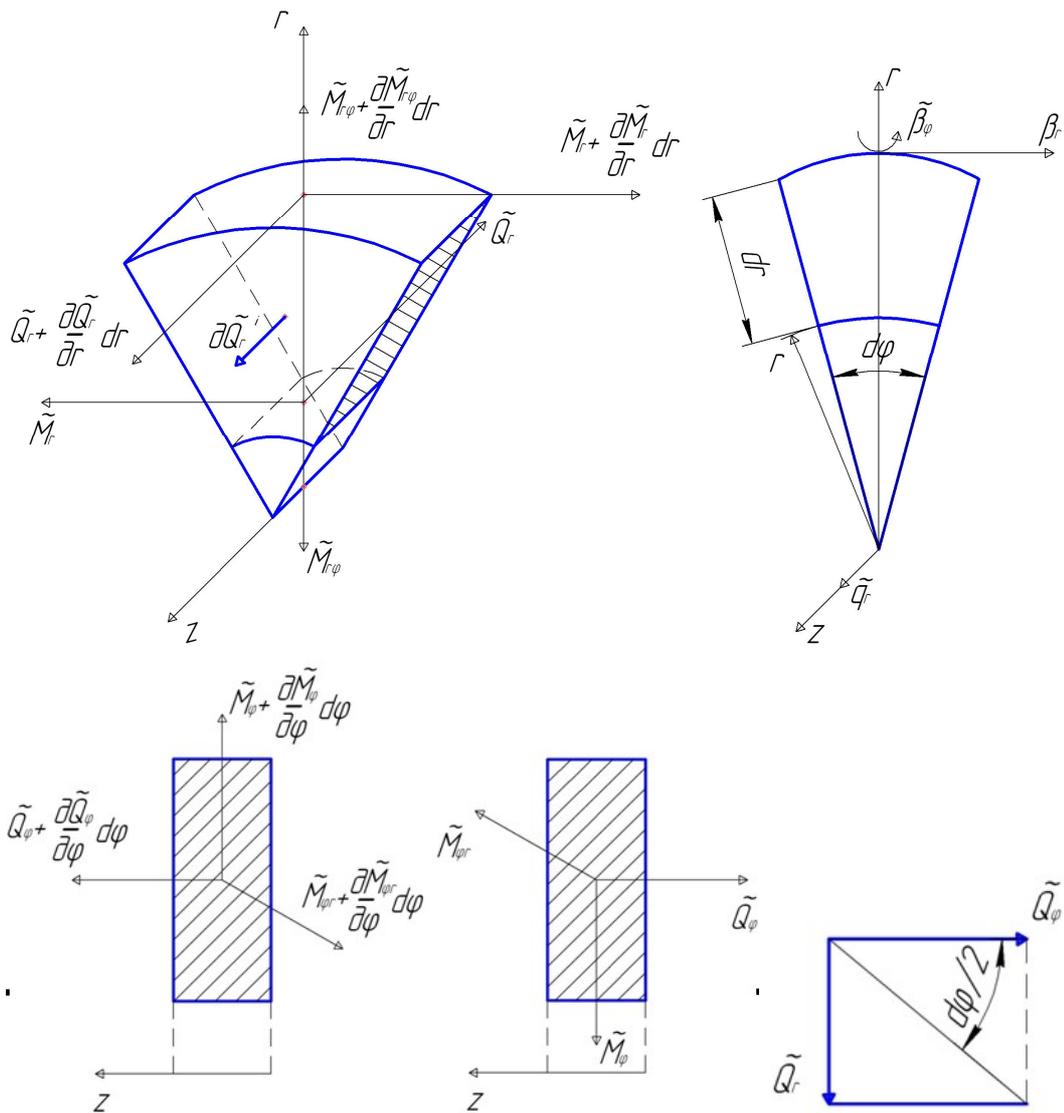


Рис. 15.1. Бесконечно малый элемент диска и действующие на него динамические силы

Преобразуем (15.4), подставив  $\frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial r}$  из (15.6):

$$\begin{aligned} \tilde{M}_\varphi &= D \left( \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \tilde{\beta}_r - \mu^2 \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{r \partial r} + \frac{\mu^2}{r} \tilde{\beta}_r - \frac{\mu}{Dr} (\tilde{M}_{r,r}) \right) = \\ &= D \left( \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1 - \mu^2}{r} \tilde{\beta}_r - \frac{\mu}{Dr} (\tilde{M}_{r,r}) \right) \end{aligned} \quad (15.9)$$

Сила инерции

$$dQ_r^i = -r dr d\varphi \rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{\partial t^2} \quad (15.10)$$

Рассмотрим равновесие элемента. Проекция сил на ось Z:

$$\left( \tilde{Q}_r + \frac{\partial \tilde{Q}_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\varphi - \tilde{Q}_r r d\varphi + \left( \tilde{Q}_\varphi + \frac{\partial \tilde{Q}_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) dr - \tilde{Q}_\varphi dr - r dr d\varphi \rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{\partial t^2} = 0 \quad (15.11)$$

Преобразуем

$$\begin{aligned}
(\tilde{Q}_r + \frac{\partial \tilde{Q}_r}{\partial r} dr)(r + dr) &= \tilde{Q}_r r + \tilde{Q}_r dr + \frac{\partial \tilde{Q}_r}{\partial \varphi} r dr + \frac{\partial \tilde{Q}_r}{\partial r} (dr)^2 \approx \\
&\approx \tilde{Q}_r r + (\tilde{Q}_r \frac{\partial r}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{Q}_r}{\partial r} r) = \tilde{Q}_r r + \frac{\partial(\tilde{Q}_r r)}{\partial r} dr
\end{aligned} \tag{15.12}$$

С учетом (15.12), (15.11) примет вид

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_r r d\varphi + \frac{\partial(\tilde{Q}_r r)}{\partial r} dr d\varphi - \tilde{Q}_r r d\varphi + \tilde{Q}_\varphi dr + \frac{\partial \tilde{Q}_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi dr - \tilde{Q}_\varphi dr - r dr d\varphi \rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{\partial(\tilde{Q}_r r)}{\partial r} dr d\varphi + \frac{\partial \tilde{Q}_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi dr - r dr d\varphi \rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{\partial t^2} &= 0.
\end{aligned}$$

Поделив на  $dr d\varphi$ , получим

$$\frac{\partial(\tilde{Q}_r r)}{\partial r} = -\frac{\partial \tilde{Q}_\varphi}{\partial \varphi} + rh\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{\partial t^2} = 0. \tag{15.13}$$

Продифференцируем (15.5) по  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \tilde{Q}_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{r \partial \varphi^2} + \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} \right).$$

Подставив это в (15.13), получим

$$\frac{\partial(\tilde{Q}_r r)}{\partial r} = -\frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{r \partial \varphi^2} - \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + rh\rho \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{\partial t^2} \tag{15.14}$$

Сумма моментов относительно оси  $r$ :

$$\begin{aligned}
(\tilde{M}_{r\varphi} + \frac{\partial \tilde{M}_{r\varphi}}{\partial r} dr)(r + dr)d\varphi - \tilde{M}_{r\varphi} r d\varphi + (\tilde{M}_\varphi + \frac{\partial \tilde{M}_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi)dr \cos \frac{d\varphi}{2} - \\
- \tilde{M}_\varphi dr \cos \frac{d\varphi}{2} - 2\tilde{M}_{\varphi r} dr \sin \frac{d\varphi}{2} - \tilde{Q}_\varphi r dr d\varphi = 0
\end{aligned}$$

Пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, полагая  $\cos \frac{d\varphi}{2} = 1$  и  $\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$ ,

получаем

$$\frac{\partial(\tilde{M}_{r\varphi} r)}{\partial r} dr d\varphi + \frac{\partial \tilde{M}_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi dr - \tilde{M}_{\varphi r} dr d\varphi - \tilde{Q}_\varphi r dr d\varphi = 0.$$

Разделив на  $dr d\varphi$  и учтя  $\tilde{M}_{r\varphi} = \tilde{M}_{\varphi r}$ , а также умножив и разделив на  $r$ , получим:

$$\frac{\partial(\tilde{M}_{r\varphi} r)}{\partial r} = -\frac{\partial \tilde{M}_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}(\tilde{M}_{r\varphi} r) + \tilde{Q}_\varphi r.$$

Подставив  $\tilde{M}_\varphi$  и  $\tilde{Q}_\varphi$  из (15.9) и (15.5), получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\tilde{M}_{r\varphi} r)}{\partial r} &= -D \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi^2} + D \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial \varphi} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial(\tilde{M}_{r\varphi} r)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}(\tilde{M}_{r\varphi} r) + \\
&+ \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \frac{\partial \tilde{q}_r}{\partial \varphi} + \frac{k^2 Ehr}{2(1+\mu)} \tilde{\beta}_\varphi
\end{aligned} \tag{15.15}$$

Проекция моментов на окружное направление:

$$(\tilde{M}_r + \frac{\partial \tilde{M}_r}{\partial r} dr)(r + dr)d\varphi - \tilde{M}_r r d\varphi + (\tilde{M}_{\varphi r} + \frac{\partial \tilde{M}_{\varphi r}}{\partial \varphi} d\varphi)dr \cos \frac{d\varphi}{2} - \tilde{M}_{\varphi r} dr \cos \frac{d\varphi}{2} - 2\tilde{M}_{\varphi} dr \sin \frac{d\varphi}{2} + \tilde{Q}_r r dr d\varphi = 0$$

Раскроем скобки аналогично (15.12):

$$\frac{\partial(\tilde{M}_r r)}{\partial r} dr d\varphi + \frac{\partial \tilde{M}_{\varphi r}}{\partial \varphi} d\varphi dr + \tilde{M}_{\varphi} dr d\varphi + (\tilde{Q}_r r) dr d\varphi = 0 .$$

Разделив на  $dr d\varphi$ , а также умножив и разделив на  $r$ , получим:

$$\frac{\partial(\tilde{M}_r r)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{M}_r r)}{\partial \varphi} - \tilde{M}_{\varphi} - (\tilde{Q}_r r) .$$

Подставив  $\tilde{M}_{\varphi}$  из (15.9), получим

$$\frac{\partial(\tilde{M}_r r)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{M}_r r)}{\partial \varphi} - D \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \tilde{\beta}_{\varphi}}{\partial \varphi} + D \frac{1-\mu^2}{r} \tilde{\beta}_r + \frac{\mu}{r} (\tilde{M}_r r) - (\tilde{Q}_r r) . \quad (15.16)$$

Уравнения (15.8), (15.6), (15.7), (15.14), (15.16), (15.15) образуют систему (15.17) относительно 6 переменных

$$\tilde{q}_r, \tilde{\beta}_r, \tilde{\beta}_{\varphi}, (\tilde{Q}_r r), (\tilde{M}_{\varphi r}), (\tilde{M}_r r) .$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{q}_r}{\partial r} &= \tilde{\beta}_r + \frac{2(1+\mu)}{k^2 E h r} (\tilde{Q}_r r) \\ \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial r} &= \mu \frac{\partial \tilde{\beta}_{\varphi}}{r \partial \varphi} - \frac{\mu}{r} \tilde{\beta}_r + \frac{1}{D r} (\tilde{M}_r r) \\ \frac{\partial \tilde{\beta}_{\varphi}}{\partial r} &= \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \tilde{\beta}_{\varphi} + \frac{2}{D r (1-\mu)} (\tilde{M}_r r) \\ \frac{\partial (\tilde{Q}_r r)}{\partial r} &= -\frac{k^2 E h}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{r \partial \varphi^2} - \frac{k^2 E h}{2(1+\mu)} \frac{\partial \tilde{\beta}_{\varphi}}{\partial \varphi} + \rho r h \frac{\partial^2 \tilde{q}_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial (\tilde{M}_r r)}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (\tilde{M}_r r)}{\partial \varphi} - D \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \tilde{\beta}_{\varphi}}{\partial \varphi} + D \frac{1-\mu^2}{r} \tilde{\beta}_r + \frac{\mu}{r} (\tilde{M}_r r) - (\tilde{Q}_r r) \\ \frac{\partial (\tilde{M}_{\varphi r})}{\partial \varphi} &= -D \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + D \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \tilde{\beta}_r}{\partial \varphi} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial (\tilde{M}_r r)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} (\tilde{M}_{\varphi r}) + \\ &+ \frac{k^2 E h}{2(1+\mu)} \frac{\partial \tilde{q}_r}{\partial \varphi} + \frac{k^2 E h r}{2(1+\mu)} \tilde{\beta}_{\varphi} \end{aligned} \quad (15.17)$$

Решение системы (15.17) должно быть периодическим по  $\varphi$ .

$$\tilde{q}_r(r, \varphi, t) = q_r(r, \varphi + 2\pi, t) .$$

Поэтому решение будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_r(r, \varphi, t) &= q_r(r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma) \\ \tilde{\beta}_r(r, \varphi, t) &= \beta_r(r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma) \\ \tilde{\beta}_{\varphi}(r, \varphi, t) &= \beta_{\varphi}(r) \sin m\varphi \cos(pt - \gamma) \\ (\tilde{Q}_r r)(r, \varphi, t) &= (Q_r(r)r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma) \end{aligned} \quad (15.18)$$

$$(\tilde{M}_r)(r, \varphi, t)r = (M_r(r)r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma)$$

$$(\tilde{M}_{r\varphi})(r, \varphi, t)r = (M_{r\varphi}(r)r) \sin m\varphi \cos(pt - \gamma)$$

Здесь  $p$  – собственная частота,  $t$  – время,  $\gamma$  – сдвиг фазы колебаний.

Подставив (15.18) в (15.17), взяв производные по  $\varphi$  и сократив на  $\cos(pt - \gamma)$ , получим систему дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{aligned} \frac{dq_r}{dr} &= \beta_r + \frac{2(1+\mu)}{k^2 Ehr} (Q_r r) \\ \frac{d\beta_r}{dr} &= \frac{\mu}{r} m\beta_\varphi - \frac{\mu}{r} \beta_r + \frac{1}{Dr} (M_r r) \\ \frac{d\beta_\varphi}{dr} &= -\frac{m}{r} \beta_r + \frac{1}{r} \beta_\varphi + \frac{2}{D r(1-\mu)} (M_{r\varphi} r) \\ \frac{d(Q_r r)}{dr} &= \left( \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} \frac{m^2}{r} - \rho r h p^2 \right) q_r - \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} m\beta_\varphi \\ \frac{d(M_r r)}{dr} &= -\frac{m}{r} (M_{r\varphi} r) - D \frac{1-\mu^2}{r} m\beta_\varphi + D \frac{1-\mu^2}{r} \beta_r + \frac{\mu}{r} (M_r r) - (Q_r r) \\ \frac{d(M_{r\varphi} r)}{d\varphi} &= \left( D \frac{1-\mu^2}{r} m^2 + \frac{k^2 Ehr}{2(1+\mu)} \right) \beta_\varphi - D \frac{1-\mu^2}{r} m\beta_r + \\ &+ \frac{\mu m}{r} (M_r r) - \frac{1}{r} (M_{r\varphi} r) - m \frac{k^2 Eh}{2(1+\mu)} q_r \end{aligned} \quad (15.19)$$

Общее решение системы имеет вид

$$\{q_r, \beta_r, \beta_\varphi, Q_r r, M_r r, M_{r\varphi} r\}^T = C_1 \{P^{(1)}\} + \dots + C_6 \{P^{(6)}\},$$

где  $\{P^{(1)}\} \dots \{P^{(6)}\}$  – любые линейно независимые частные решения (15.19).

Частные решения находим численным методом. На радиусе начала интегрирования примем

$$\{P^{(1)}\} = \{1, 0, 0, 0, 0, 0\}^T$$

$$\{P^{(2)}\} = \{0, 1, 0, 0, 0, 0\}^T$$

.....

$$\{P^{(6)}\} = \{0, 0, 0, 0, 0, 1\}^T.$$

Постоянные  $C_1 \dots C_6$  определим из граничных условий.

Рассмотрим определение собственных частот колебаний диска переменного сечения, закрепленного на внутреннем радиусе  $r_0$  и свободного на периферии  $r_n$ .

Граничные условия на радиусе  $r_0$ :

$$q_r(r_0) = 0, \beta_r(r_0) = 0, \beta_\varphi(r_0) = 0.$$

$$q_r(r_0) = 0 = C_1 \times 1 + C_2 \times 0 + \dots + C_6 \times 0, \text{ отсюда } C_1 = 0.$$

Аналогично получаем  $C_2 = C_3 = 0$ .

Граничные условия на радиусе  $r_n$ :

$$Q_r(r_n)r_n = 0, M_r(r_n)r_n = 0, M_{r\varphi}(r_n)r_n = 0. \text{ Из этого получаем систему уравнений:}$$

$$\begin{aligned}
C_4 Q_r^{(4)}(r_n) r_n + C_5 Q_r^{(5)}(r_n) r_n + C_6 Q_r^{(6)}(r_n) r_n &= 0 \\
C_4 M_r^{(4)}(r_n) r_n + C_5 M_r^{(5)}(r_n) r_n + C_6 M_r^{(6)}(r_n) r_n &= 0 \\
C_4 M_{r\varphi}^{(4)}(r_n) r_n + C_5 M_{r\varphi}^{(5)}(r_n) r_n + C_6 M_{r\varphi}^{(6)}(r_n) r_n &= 0
\end{aligned}
\tag{15.20}$$

Система имеет решения, если ее определитель равен нулю.

Приведем алгоритм расчета собственных частот колебаний диска:

1. Задается  $m=0$ .
2. Принимается начальная частота колебаний  $p_0$ .
3. Интегрируется три раза система (15.19) с начальными значениями
$$\{P^{(4)}\} = \{0,0,0,1,0,0\}^T$$

$$\{P^{(5)}\} = \{0,0,0,0,1,0\}^T$$

$$\{P^{(6)}\} = \{0,0,0,0,0,1\}^T .$$
4. Вычисляется определитель системы (15.20) и сравнивается со значением на предыдущем шаге. Если его знак изменился, перейти к п.6. Если не изменился – к п.5.
5. Частота увеличивается на шаг  $\Delta p$ . Перейти к п.3.
6. Меняется шаг  $\Delta p = -\Delta p / 2$ . Перейти к п.5.
7. Дробление шага продолжается до тех пор, пока не выполнится  $\Delta p < \varepsilon$  (погрешности расчета).
8. Определяется собственная частота  $p_i$ .
9. Принимается начальная частота  $p_0 = p_i + 2\varepsilon$ . Перейти к п.3.
10. Если найдены все собственные частоты колебаний для заданного  $m$  (в пределах рассматриваемого диапазона частот), то  $m = m+1$ . Перейти к п. 1.

После расчета собственных частот рассчитываются собственные формы колебаний диска. В выражении  $\tilde{q}_r(r, \varphi, t) = q_r(r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma)$  первые два сомножителя определяют распределение амплитуды колебаний по диску.

При  $m=0$  амплитуды во всех точках окружности одинаковы.

При  $m=1$  имеются две линии, на которых амплитуда колебаний равна нулю. Эти линии образуют узловой диаметр (рис. 15.2).

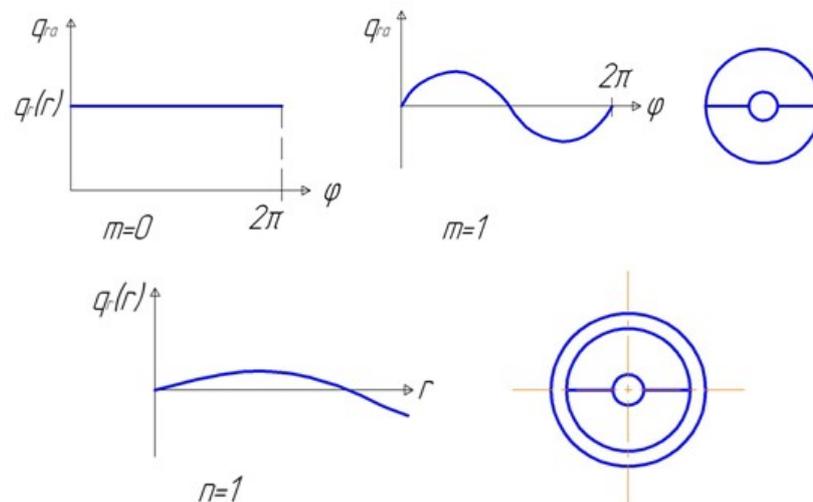


Рис. 15.2. Колебания диска с узловыми диаметрами и узловыми окружностями

При  $m=2$  имеются четыре линии, на которых амплитуда колебаний равна нулю. Эти линии образуют два узловых диаметра. И т.д.

Функция  $q_r(r)$  также может менять знак по радиусу диска. При  $n=0$  все значения  $q_r(r)$  в один и тот же момент времени имеют одинаковый знак. Амплитуды колебаний с ростом  $m$  в центре убывают. При большом значении  $m$  колеблется только обод диска.

При  $n=1$  функция  $q_r(r)$  имеет одну переменную знака по радиусу диска. При этом появляется узловая окружность (см. рис. 15.2). При  $n=2$  функция  $q_r(r)$  имеет две переменные знака по радиусу диска. При этом появляются две узловых окружности. И т.д.

Формы колебаний с  $m=0$  и различным количеством узловых окружностей называют зонтичными.

С увеличением  $m$  и  $n$  частота колебаний растет, за единственным исключением:

$$f_{10} < f_{00} .$$

Формы колебаний диска можно представить в виде таблицы (рис.15.3).

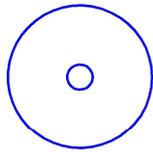
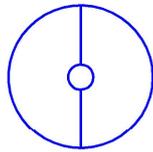
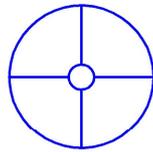
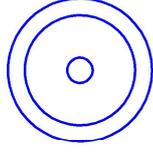
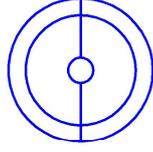
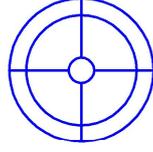
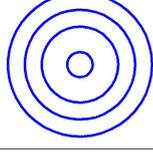
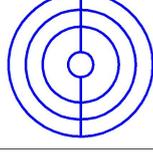
$\frac{m}{n}$	0	1	2
0			
1			
2			

Рис. 15.3. Таблица форм колебаний центрально закрепленного диска

Удобно представить частоты колебаний в виде единого графика в зависимости от количества узловых диаметров  $m$ . Такой график называют спектром колебаний диска (рис. 15.4).

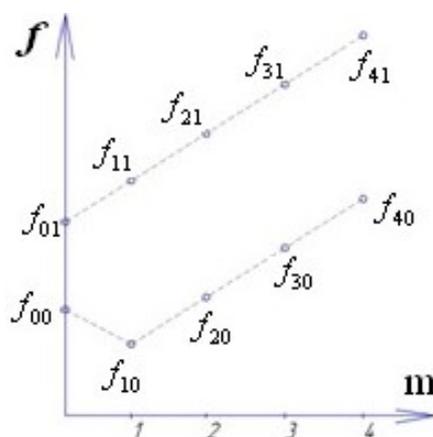


Рис. 15.4. Спектр колебаний диска

Поскольку лопатки увеличивают массу на ободу диска, собственные частоты колебаний диска с лопатками уменьшаются. Узловые диаметры могут проходить только между лопатками, поэтому их количество у диска с лопатками не бесконечно, а ограничено числом  $z/2$ , если количество лопаток  $z$  четное, и  $(z-1)/2$ , если количество лопаток нечетное.

Узловые окружности зонтичных форм колебаний диска с лопатками могут проходить по лопаткам (рис. 15.5).

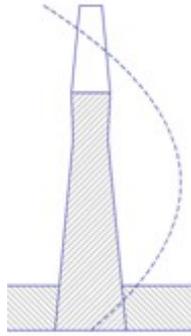


Рис. 15.5. Форма колебаний диска с лопатками

Все незонтичные ( $m > 1$ ) формы колебаний являются парными. Кроме решения (15.18) существует решение

$$\begin{aligned}
 \tilde{q}_r(r, \varphi, t) &= q_r(r) \sin m\varphi \cos(pt - \gamma) \\
 \tilde{\beta}_r(r, \varphi, t) &= \beta_r(r) \sin m\varphi \cos(pt - \gamma) \\
 \tilde{\beta}_\varphi(r, \varphi, t) &= \beta_\varphi(r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma) \\
 (\tilde{Q}_r)(r, \varphi, t)r &= (Q_r(r)r) \sin m\varphi \cos(pt - \gamma) \\
 (\tilde{M}_r)(r, \varphi, t)r &= (M_r(r)r) \sin m\varphi \cos(pt - \gamma) \\
 (\tilde{M}_{r\varphi})(r, \varphi, t)r &= (M_{r\varphi}(r)r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma)
 \end{aligned} \tag{15.21}$$

Его подстановка в систему (15.17) приводит к системе, аналогичной (15.19). Частоты колебаний при этом будут те же самые, но распределение смещений будет сдвинуто на  $1/4$  волны, то есть на угол  $\frac{\pi}{2m}$ . Парные формы колебаний не зависят друг от друга. Пусть

$$\begin{aligned}
 \tilde{q}_r^* &= D^* \bar{q}_r(r) \cos m\varphi \cos(pt - \gamma^*) , \\
 \tilde{q}_r^{**} &= D^{**} \bar{q}_r(r) \sin m\varphi \cos(pt - \gamma^{**}) ,
 \end{aligned}$$

где  $D^*$ ,  $D^{**}$ ,  $\gamma^*$ ,  $\gamma^{**}$  - соответственно, амплитуды и сдвиги фаз, которые зависят от начальных условий,  $q_r(r)$  - распределение смещений по радиусу диска ( $\bar{q}_r(r)_{\max} = 1$ ). При колебаниях диска возбуждаются обе парные формы, результатом является их суперпозиция. Рассмотрим частные случаи.

1.  $\gamma^* = \gamma^{**} = \gamma$ . Результирующее движение

$$\begin{aligned}
 \tilde{q}_r &= (D^* \bar{q}_r(r) \cos m\varphi + D^{**} \bar{q}_r(r) \sin m\varphi) \cos(pt - \gamma) = \\
 &= \bar{q}_r(r) D \cos(m\varphi - \psi) \cos(pt - \gamma) .
 \end{aligned}$$

Здесь  $D = \sqrt{D^* + D^{**}}$ ,  $\psi = \text{arctg} \frac{D^{**}}{D^*}$ .

Видно, что диск имеет  $m$  узловых диаметров. Их положение определяется из условия  $\tilde{q}_r = 0$  при  $\cos(m\varphi - \psi) = 0$ . Отсюда

$$m\varphi - \psi = \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$\varphi = \frac{\psi}{m} + \frac{\pi}{2m} + \frac{\pi k}{m}.$$

Положение узловых линий в этом случае не зависит от времени. Это – колебания со стоячими волнами.

Положение узловых линий зависит от соотношения  $D^*$  и  $D^{**}$ , которое зависит от начальных условий и может быть любым – следовательно, положение узловых линий произвольное.

2. Пусть  $D^* = D^{**} = D$ , возбуждение колебаний приложено к точке 1 диска и перемещается по окружности (рис. 15.6). Для формы  $m=1$  узловая линия имеет вид диаметра. Если для формы  $\tilde{q}_r^{**}$  она проходит через точку 1, форма  $\tilde{q}_r^{**}$  возбуждаться не будет (энергия передается посредством работы, а работа при нулевом перемещении равна нулю). Будет возбуждаться перпендикулярная узловая линия формы  $\tilde{q}_r^*$ . Когда источник возбуждения колебаний перейдет в точку 3 (под углом  $90^\circ$ ), перестанет возбуждаться форма  $\tilde{q}_r^*$ , но появится форма  $\tilde{q}_r^{**}$ . При положении источника в промежуточной точке 2, возбуждается суперпозиция форм  $\tilde{q}_r^*$  и  $\tilde{q}_r^{**}$ , линия, противоположная точке 2.

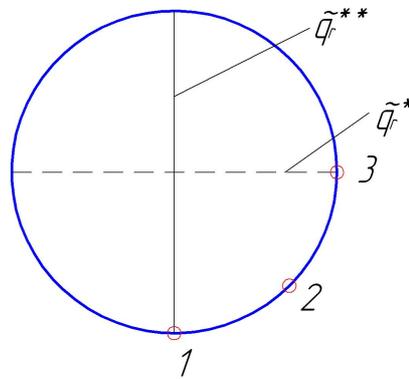


Рис. 15.6. Возбуждение парных форм колебаний

Таким образом, узловые линии стоячих волн перемещаются по диску при перемещении источника возбуждения колебаний.

3. Возможны также колебания диска с бегущими волнами. Пусть  $D^* = D^{**} = D$ ,  $\gamma^* = \frac{\pi}{2}$ ,  $\gamma^{**} = 0$ . Результирующее колебание

$$\tilde{q}_r = \tilde{q}_r^* + \tilde{q}_r^{**} = D\bar{q}_r(r)(\cos m\varphi \sin pt + \sin m\varphi \cos(pt)) = D\bar{q}_r(r) \sin(m\varphi + pt).$$

Узловые линии определяются выражением  $\sin(m\varphi + pt) = 0$ , откуда

$$m\varphi + pt = \pi k, \quad \varphi = -\frac{p}{m}t + \frac{\pi k}{m}.$$

Видно, что положение узловых линий зависит от времени. Это – колебания с бегущей волной. Угловая скорость вращения узловых линий

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{p}{m},$$

так как она отрицательна, это – колебания с назад бегущей волной.

4. Если  $D^* = D^{**} = D$ ,  $\gamma^* = 0$ ,  $\gamma^{**} = \frac{\pi}{2}$ , то

$$\tilde{q}_r = D\bar{q}_r(r)(\cos m\varphi \cos pt + \sin m\varphi \sin(pt)) = D\bar{q}_r(r) \cos(m\varphi - pt).$$

Узловые линии определяются выражением  $\cos(m\varphi - pt) = 0$ , откуда

$$m\varphi - pt = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \varphi = \frac{p}{m}t + \frac{\pi}{2m} + \frac{\pi k}{m}, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p}{m}.$$

Это – колебания с вперед бегущей волной.

В ГТД все резонансные колебания происходят с назад бегущей волной. Автоколебания – в 90% случаев с вперед бегущей волной.

## 16. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РАБОЧИХ КОЛЕС ГТД

### 16.1. Понятие о возбуждающих гармониках

Основной источник колебаний РК – окружная неравномерность поля давлений и поля скоростей в газовом потоке перед и за РК. Действующая на лопатку газовая сила  $Q_r$  неодинакова и зависит от условий на входе в двигатель, от обтекания всех элементов проточной части до РК и непосредственно за РК. Так как  $Q_r$  периодическая по окружности, ее можно разложить в ряд Фурье:

$$Q_r = \sum_{m=0}^{\infty} Q_{rm} \cos(m\varphi_1 - \psi_m). \quad (16.1)$$

Угол  $\varphi_1$  определяет положение лопатки в неподвижной системе координат, угол  $\varphi$  - в системе координат, вращающейся вместе с РК (рис.16.1).

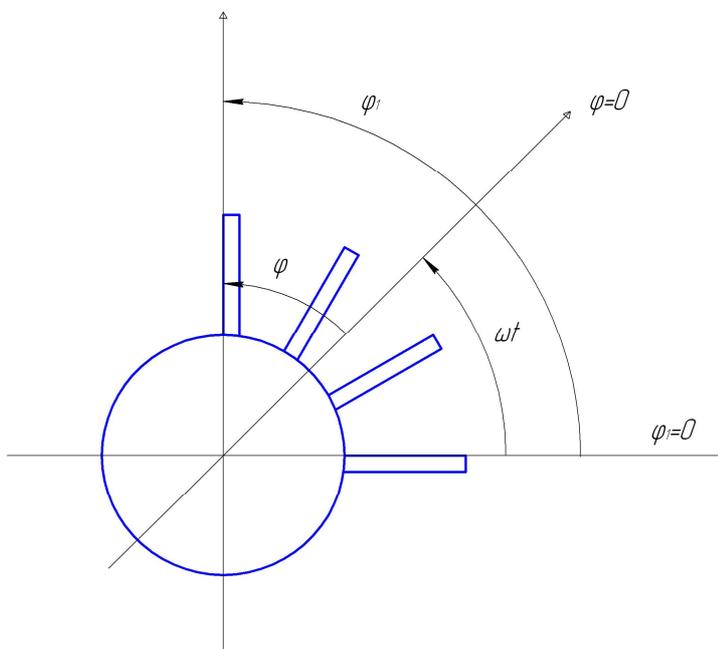


Рис. 16.1. Подвижная и неподвижная системы координат

$$\varphi = \varphi_1 - \omega t$$

Отсюда  $\varphi_1 = \varphi + \omega t$

Одно из слагаемых разложения (16.1) имеет вид

$$\tilde{Q}_{rm} = Q_{rm} \cos(m\varphi + m\omega t - \psi_m) = Q_{rm} \cos(m\varphi - \psi_m) \cos m\omega t - Q_{rm} \sin(m\varphi - \psi_m) \sin m\omega t.$$

То есть каждое слагаемое разложения эквивалентно двум нагрузкам с частотой  $\omega t$  и сдвигом по фазе на 1/4 периода. Это соответствует колебаниям с назад бегущей волной.

Так как каждое слагаемое разложения (16.1) может возбуждать колебания, его называют возбуждающей гармоникой. Так как

$$\frac{m\omega}{2\pi} = mn_{cek},$$

частота возбуждающей гармоники линейно зависит от частоты вращения ротора  $n_{cek}$ .  $m$  называют номером гармоники. Гармоника с номером  $m$  возбуждает только колебания, кратные  $m$ . Амплитуда  $Q_{rm}$  зависит от условий обтекания элементов проточной части перед и за РК. Гармонический анализ неоднородностей полей давлений по окружности показывает, что наибольшей интенсивностью обладает 1-я гармоника. С увеличением номера гармоники интенсивность возбуждения падает. Если принять интенсивность 1-й гармоники за 100 %, то интенсивность 2-й составляет ~ 30%, 3-й ~ 10%, интенсивность 4-й гармоники уже пренебрежимо мала. Но если есть конструктивные элементы (лопатки НА, ребра и т.д.) с количеством  $m$ , то амплитуда гармоники с номером  $m$  будет значительно больше.

## 16.2. Резонансная диаграмма

Диаграмма, отражающая зависимость собственных частот колебаний РК и частот возбуждающих гармоник от частоты вращения ротора и позволяющая находить режимы работы двигателя, на которых происходят резонансные колебания РК, называется резонансной диаграммой (рис.16.2). На резонансной диаграмме отображаются:

- частотная линия рабочего колеса, показывающая изменение той или иной собственной частоты в зависимости от режима работы двигателя (реально из-за небольшого различия геометрических характеристик лопатки, жесткости закрепления и т.д. это не линия, а полоса шириной около 3% в обе стороны от скелетной линии);
- линии возбуждающих гармоник (прямые с угловым коэффициентом  $m$ );
- линии продолжительных рабочих режимов двигателя: максимального, крейсерского, малого газа и т.д. (реально из-за погрешности работы регулятора оборотов это также диапазоны шириной около 3% в обе стороны).

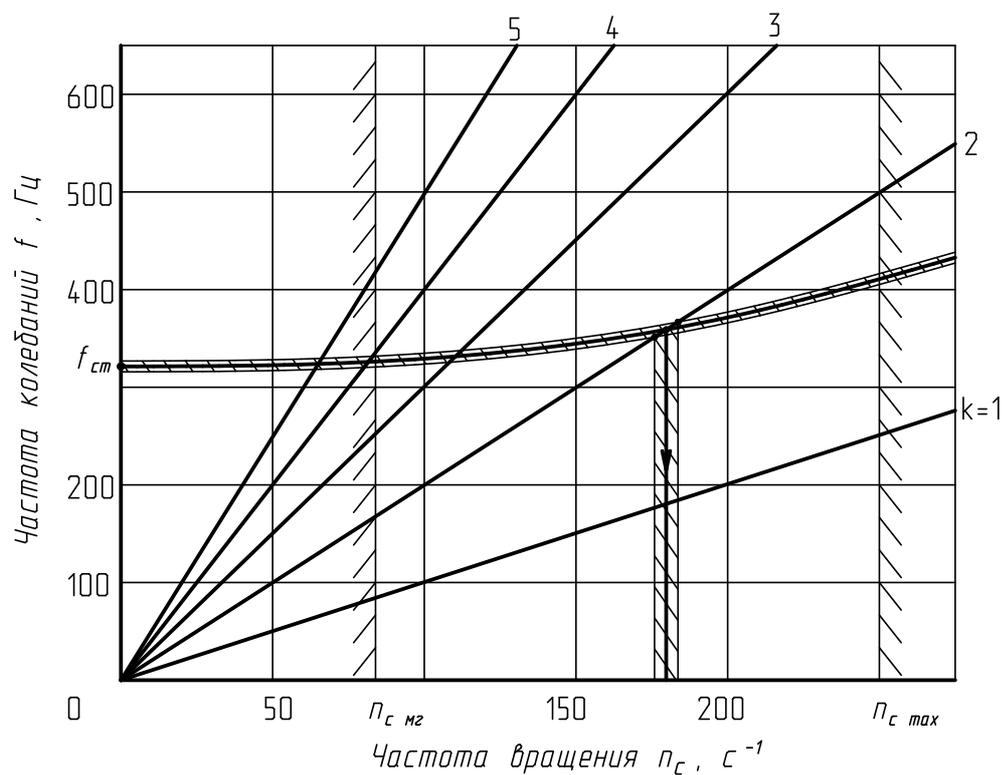


Рис. 16.2. Резонансная диаграмма

Там, где линия возбуждающей гармоники пересекается с частотной линией, имеет место резонанс. Однако опасны только резонансы, совпадающие с продолжительными рабочими режимами. Другие резонансные частоты двигатель достаточно быстро проходит, и опасные колебания не успевают развиваться.

### 16.3. Автоколебания

Автоколебания – это незатухающие колебания, происходящие без воздействия возбуждающих гармоник и других переменных во времени сил. Для возникновения автоколебаний необходим источник энергии и механизм превращения ее в энергию колебаний.

Источником энергии для рабочего колеса является газовый поток. Механизм передачи энергии связан с обтеканием лопаток. Рассмотрим плоскопараллельные автоколебания незакрученной лопатки в незакрученном потоке. Пусть поток набегаёт на лопатку со скоростью  $\vec{W}$  под углом атаки  $i$ . Пусть в результате случайного воздействия лопатка вышла из положения равновесия и стала совершать гармонические колебания с частотой  $p$ .

$$\tilde{q} = q \sin pt.$$

Разложим движение  $\tilde{q}$  на перпендикулярное скорости потока  $\tilde{q}_1 = q_1 \sin pt$  и параллельное  $\tilde{q}_2 = q_2 \sin pt$ . Соответствующие этим движениям скорости равны  $\tilde{V}_1 = \frac{d\tilde{q}_1}{dt} = q_1 p \cos pt$  и  $\tilde{V}_2 = \frac{d\tilde{q}_2}{dt} = q_2 p \cos pt$ . Таким образом, относительная скорость потока становится равной  $\vec{W}_1$  и угол атаки изменяется на величину  $\Delta i$  (рис. 16.3), причем при  $\tilde{V}_1 > 0$  изменение угла атаки  $\Delta i < 0$ .

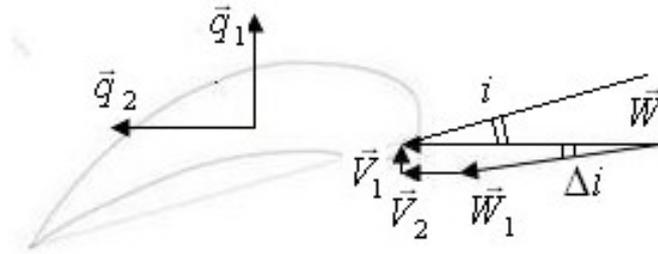


Рис. 16.3. Изменение угла атаки

$$\operatorname{tg} \Delta i \approx -\frac{V_1}{W - V_2} = -\frac{q_1 p \cos pt}{W - q_2 p \cos pt}.$$

Так как  $q_1$  и  $q_2$  малы,  $\operatorname{tg} \Delta i \approx \Delta i$ ,  $W - q_2 p \cos pt \approx W$ ,  $\Delta i \approx -\frac{q_1 p \cos pt}{W}$ .

На лопатку действует аэродинамическая сила  $Q_a = \frac{1}{2} \rho b W^2 C_y$ . Здесь  $\rho$  - плотность потока,  $b$  - хорда лопатки,  $C_y$  - коэффициент подъемной силы. Он зависит от угла атаки (рис. 16.4).

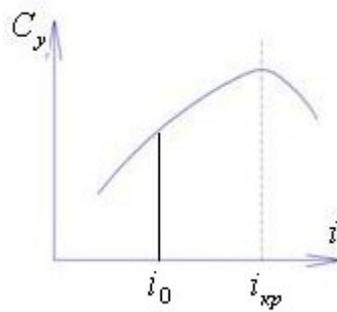


Рис. 16.4. Зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки

Разложим  $C_y$  в ряд Тейлора в окрестностях  $i_0$ :

$$C_y = C_{y0} + \frac{dC_y}{di} \Delta i + \frac{d^2 C_y}{di^2} \frac{\Delta i^2}{2} + \dots$$

Оставив два первых слагаемых разложения, получаем

$$C_y = C_{y0} + \frac{dC_y}{di} \Delta i = C_{y0} - \frac{q_1 p}{W} \frac{dC_y}{di} \cos pt$$

Соответственно аэродинамическая сила будет переменной во времени:

$$Q_a = \frac{1}{2} \rho b W^2 (C_{y0} - \frac{q_1 p}{W} \frac{dC_y}{di} \cos pt) = \frac{1}{2} \rho b W^2 C_{y0} - \frac{1}{2} \rho b W q_1 p \frac{dC_y}{di} \cos pt = Q_{a0} - B \frac{dC_y}{di} \cos pt$$

Найдем работу аэродинамической силы на перемещении лопатки.

$$dA = Q_a d\tilde{q} = Q_a qp \cos pt \times dt$$

Работа за период колебаний T

$$\begin{aligned} A &= \int_0^T Q_a qp \cos pt \times dt = \int_0^{2\pi} Q_{a0} q \cos pt \times d(pt) - \int_0^{2\pi} qB \cos^2 pt \frac{dC_y}{di} d(pt) = \\ &= 0 - Bq \frac{dC_y}{di} \int_0^{2\pi} \cos^2 pt d(pt) = -\pi Bq \frac{dC_y}{di} \end{aligned}$$

Если  $\frac{dC_y}{di} > 0$  (докритическое обтекание, см. рис. 4.4), то  $A < 0$ , энергия колебаний

лопатки рассеивается. Рассеивание энергии колебаний за счет взаимодействия с набегающим потоком называется аэродинамическим демпфированием.

Если  $\frac{dC_y}{di} < 0$  (закритическое обтекание), то  $A > 0$ , газовый поток добавляет

лопатке энергию, и амплитуда ее колебаний будет увеличиваться до разрушения.

По нормам прочности автоколебания недопустимы. При их возникновении необходим перерасчет течения газа в двигателе, чтобы не допускать закритического обтекания лопаток.

#### 16.4. Борьба с опасными колебаниями рабочих колес

Борьба с колебаниями рабочих колес – сложная задача, не имеющая универсальных решений. Всякое предлагаемое мероприятие может быть, с одной стороны, недостаточно эффективным, а с другой стороны, ухудшает какие-то иные параметры двигателя. Борьба с колебаниями ведется по трем направлениям.

##### 1. Уменьшение силы, вызывающей колебания.

Поскольку источником колебаний является окружающая неравномерность газовой силы, меры борьбы с колебаниями направлены на уменьшение этой неравномерности. Неравномерность газового потока за лопаткой уменьшается очень быстро,

пропорционально  $\frac{1}{\Delta^3}$  (где  $\Delta$  - расстояние до источника неравномерности), поэтому небольшое увеличение расстояния между рабочим колесом и направляющим аппаратом (рис. 16.5) дает значительный эффект. Величину осевого зазора для обеспечения минимального уровня возбуждения удобно задавать в относительных величинах как:

$$\Delta = a/b, \text{ или в виде: } K=A/C_m,$$

где  $a$  - средний осевой зазор между венцами,

$b$  - хорда возбуждающего венца;

$A$  - расстояние между положениями максимальной толщины -  $C_m$  - возбуждаемой и возбуждающей лопатки или стойки опоры.

На основе экспериментальных исследований установлено, что при  $\Delta = 0.5$  или  $K=6$  уровень переменных напряжений в лопатках стабилизируется на минимальном уровне. Однако увеличение зазора увеличивает габариты и вес двигателя.

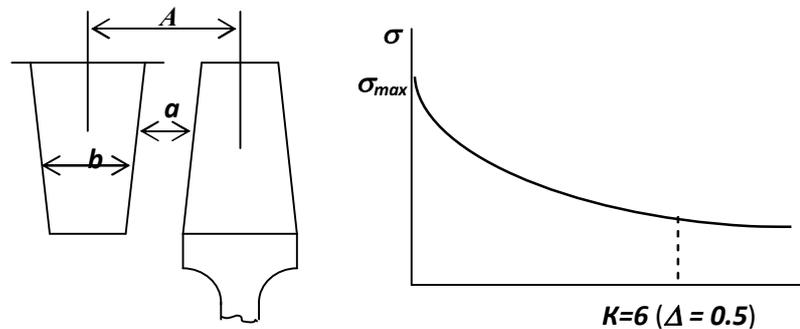


Рис. 16.5. Влияние осевого зазора между рабочей лопаткой и возбудителем колебаний (стойками опор, лопатками направляющих аппаратов)

В случае применения наклонного направляющего аппарата (рис. 16.6) рабочая лопатка попадает в зону неравномерности потока, вызванную направляющим аппаратом, не одновременно по всей своей высоте, а только в окрестностях точки А, которая к тому же перемещается по высоте лопатки по мере ее поворота вокруг оси двигателя. Однако наклонный направляющий аппарат тяжелее обычного.

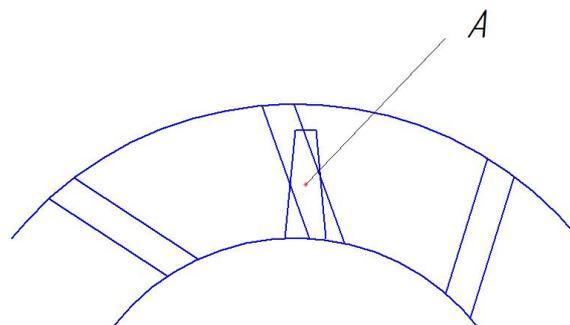


Рис. 16.6. Наклонный направляющий аппарат

Для уменьшения сил, вызывающих колебания, желательно неравномерное расположение стоек опор, ребер и т.д. (так, на рис. 16.7 желательно  $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$ ). Однако при этом жесткость конструкции будет различна в различных направлениях, а анизотропия опор нежелательна при колебаниях валов двигателя.

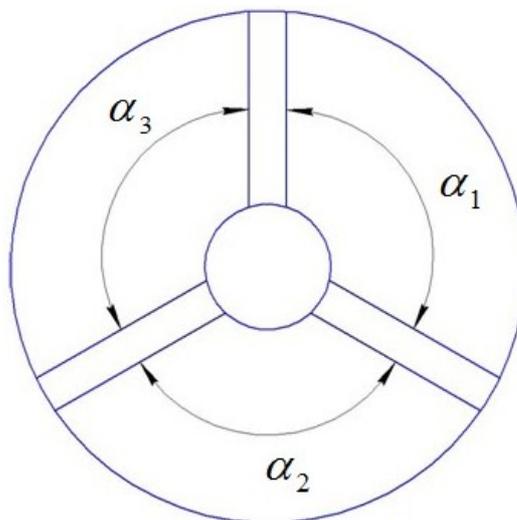


Рис. 16.7. Неравномерное расположение ребер

Нежелательно применение конструкций, увеличивающих неравномерность газового потока. Например, если клапан перепуска установлен непосредственно на проточную часть, при его открытии возникнет очень значительная окружная неравномерность. Поэтому обычно в проточной части выполняется много маленьких отверстий по окружности, выводящих в ресивер, а клапан перепуска размещается на ресивере против того места на окружности, где отверстия отсутствуют. Выпуск воздуха через много распределенных по окружности малых отверстий искажает газовый поток не так сильно, как могло бы исказить одно большое отверстие к перепускному клапану. По этой же причине порой применяются ленты перепуска, открывающие щель для выхода воздуха почти по всей окружности.

## 2. Частотная отстройка.

Частотная отстройка является наиболее распространенным способом борьбы с колебаниями лопаток.

Необходимость отстройки определяется на этапе проектирования при помощи резонансной диаграммы. Как и для роторов ГТД, применяется частотная отстройка вверх или вниз. Поскольку собственные частоты лопаток имеют небольшие индивидуальные различия, а регулятор двигателя также поддерживает обороты с некоторой

индивидуальной погрешностью, отстройка от резонанса должна быть не менее, чем на 10% по оборотам двигателя.

Изменение собственной частоты лопатки обычно производится при помощи изменения толщины ее сечений в требуемых местах (применение шарнирного замка, устраняющего первую изгибную форму колебаний, также можно рассматривать как способ частотной отстройки). Если изменение толщины сечения превышает 20%, необходимо перепрофилировать лопатку, произведя новый расчет течения газа через лопаточную решетку. В качестве экстренного способа частотной отстройки применяется подрезка уголков лопатки (например, турбина двигателя P11-300), но это нежелательно, так как рассчитанное оптимальное течение газа в таком случае будет искажено.

После частотной отстройки необходим повторный расчет статической прочности лопатки, так как ее сечения были изменены.

Частотную отстройку затрудняет то, что, уходя от одного резонанса, можно попасть на другой. Против автоколебаний частотная отстройка бесполезна.

Для дисков ГТД частотная отстройка также является наиболее распространенным способом борьбы с колебаниями (тем более, что применение демпферов в дисках не всегда возможно). Изменение собственных частот диска осуществляется за счет изменения его сечения.

### **3. Демпфирование.**

Для борьбы с колебаниями лопаток и дисков применяются, как правило, демпферы сухого трения.

Энергия колебаний может рассеиваться при трении проволок внутри троса, пропущенного через отверстия в пере лопатки (рис. 16. 8, а). Трос может быть заменен трубкой (рис. 16. 8, б), при этом трение реализуется между поверхностями трубки и отверстия в пере лопатки. Трение может осуществляться между боковыми поверхностями антивибрационных (рис. 16. 8, в) или бандажных полок. Однако все эти демпферы, расположенные в проточной части, ведут к некоторым газодинамическим потерям на их обтекание.

Детали из композиционных материалов обладают большим рассеиванием энергии при внутреннем трении в материале (в десятки раз больше, чем у стали). В этом одна из важных причин стремления к применению композиционных материалов.

Демпфирование за счет рассеивания энергии уменьшает амплитуду колебаний на резонансе. Частота при этом изменяется незначительно (на несколько процентов даже при

большом демпфировании). В отличие от этого частотная отстройка изменяет собственную частоту колебаний, практически не меняя амплитуду колебаний на резонансе.

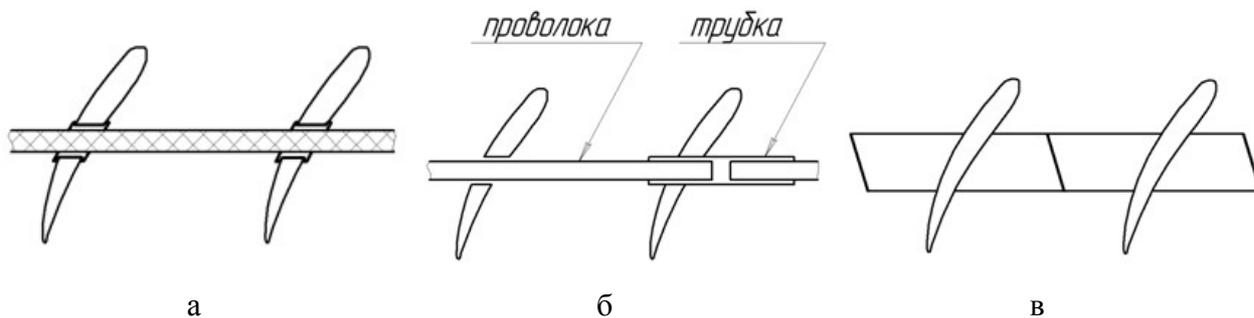


Рис. 16.8. Демпферы лопаток, устанавливаемые в проточной части

Поверхность трения может быть образована разрезом замка или пера лопатки (рис. 16.9, а). На лопатки устанавливаются штифты (рис. 16.9, б), демпфирующие втулки (рис. 16.9, в), многослойные пакеты металлических лент (рис. 16.9, г).

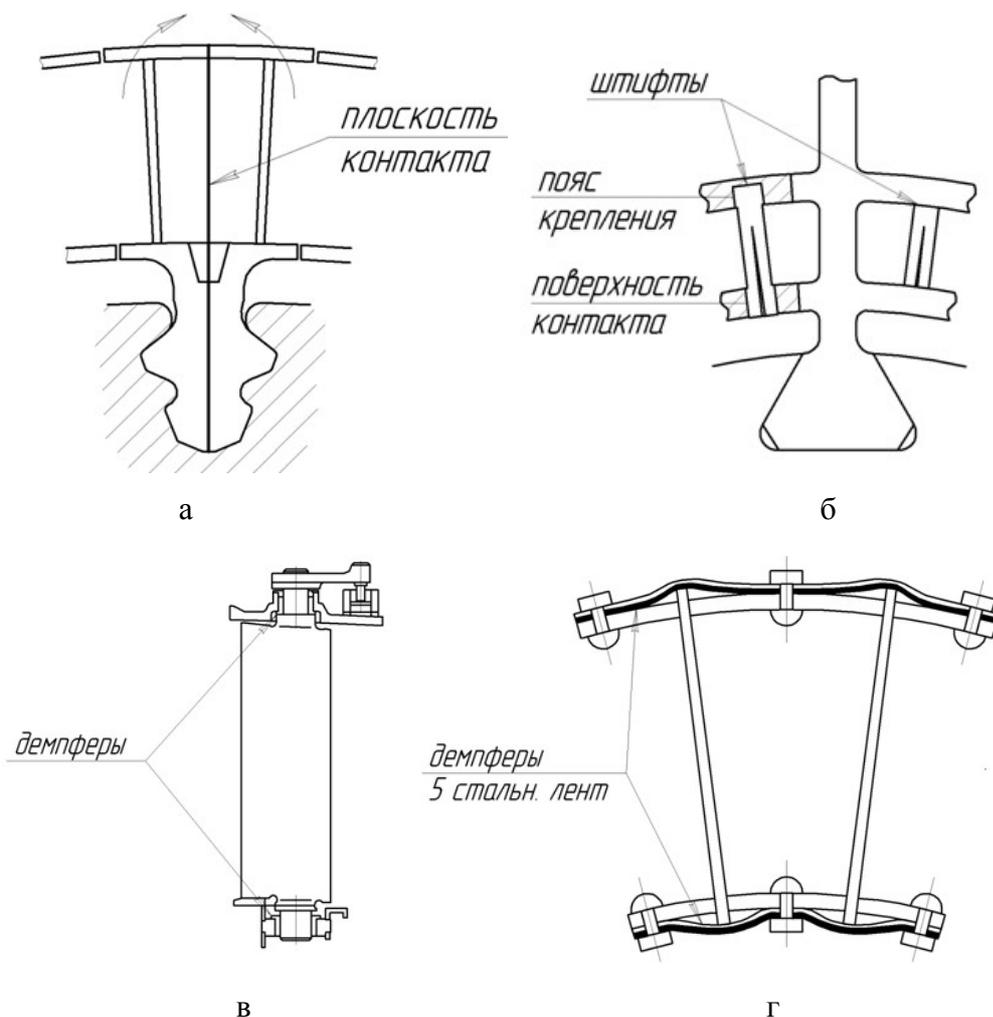


Рис. 16.9. Демпферы колебаний в замках лопаток

## 17. ЗАЩИТА ОТ ВИБРАЦИИ

Виброизоляция является действенным средством уменьшения динамических нагрузок на агрегаты двигателя и увеличения их работоспособности.

### 17.1. Необходимые данные для проектирования виброзащитной системы

Для проектирования виброизоляции какого-либо объекта необходимы:

а) чертежи объекта с указанием возможного расположения мест крепления виброизоляторов;

б) данные:

- о весе агрегата  $m$ ,

- о положении центра тяжести агрегата, обычно принимаемом за начало координат при расчете виброзащитной системы (координаты центра тяжести агрегата определяются по формулам:

$$x_o = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^n Q_i x_i; y_o = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^n Q_i y_i; z_o = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^n Q_i z_i; \quad (17.1)$$

где  $Q_i$  — вес  $i$ -того элемента агрегата;  $x_i, y_i, z_i$  — координаты центра тяжести  $i$ -того элемента агрегата в системе координат  $X, Y, Z$ ;  $n$  — число элементов агрегата);

- о моментах инерции  $J_k$  агрегата относительно  $k$ -ой оси системы координат;

- о действующей вибрации (ее частоте  $\omega_k$  и амплитуде  $s_k$  в направлении  $k$ -ой оси системы координат);

в) характеристика различных подводок (трубопроводов, кабелей и т.д. - их назначение, материал, форма, размеры и др.) с указанием мест их присоединения к объекту;

г) требования, предъявляемые к виброизоляции:

- допускаемые амплитуды перемещения  $[A_k]$  и ускорения  $[W_k]$  защищаемого объекта (допускаемое перемещение связано обычно с возможностью разрыва подведенных к объекту трубопроводов и кабелей, с возможностью удара защищаемого объекта о соседние конструкции, с точностью работы агрегата; допускаемое ускорение обычно связано с тем, какие инерционные нагрузки может выдержать объект, не теряя работоспособности);

- эффективность виброзащиты на рабочей частоте, определяемая коэффициентом передачи вибрации  $\eta_{kp} = \frac{A_k}{s_k}$  (где  $A_k$  - амплитуда перемещения защищаемого объекта в направлении  $k$ -ой оси);

- д) сведения о возможности воздействия на виброизоляторы различных агрессивных веществ (топлива, масла и т. п.) и температуре в местах установки виброизоляторов;
- е) требуемый ресурс виброзащитной системы.

### 17.2. Расчет характеристик виброзащитной системы

Виброизолятор, как любое упругое тело, при деформации несет потенциальную энергию деформирования  $\Pi$ . В виброisolляторе также, как правило, существует трение, благодаря которому рассеивается энергия колебаний. При колебаниях направление деформирования виброизолятора меняется, при этом изменяется также направление силы трения, поэтому в координатах «перемещение  $\delta_k$  - реакция виброизолятора  $P_k$ » процесс нагрузки виброизолятора не совпадает с процессом его разгрузки. Эти процессы вместе образуют петлю гистерезиса виброизолятора, площадь которой  $\Delta\Pi$  равна энергии, рассеиваемой за один цикл деформации виброизолятора (рис. 17.1).

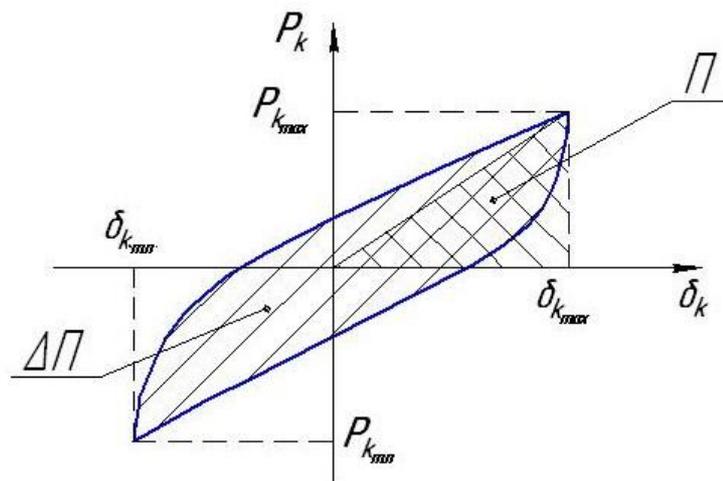


Рис. 17.1. Петля гистерезиса виброизолятора

По петле гистерезиса легко определить экспериментально коэффициент рассеивания энергии виброизолятора

$$\psi = \frac{\Delta\Pi}{\Pi}. \quad (17.2)$$

Рассмотрим случай возбуждения колебаний в направлении  $k$ -ой оси переменной гармонической силой с амплитудой  $F_k$  и частотой  $\omega_k$  («силовое» возбуждение). В этом случае дифференциальное уравнение движения линейной виброзащитной системы имеет вид

$$m \frac{d^2 \delta_k}{dt^2} + b_k \frac{d\delta_k}{dt} + C_k \delta_k = F_k \sin \omega_k t \quad (17.3)$$

Здесь  $C_k$  - жесткость системы,  $\delta_k$  - перемещение,  $b_k$  - коэффициент демпфирования, все параметры в направлении  $k$ -ой оси,  $t$  - время. Это уравнение можно преобразовать в вид

$$\frac{d^2 \delta_k}{dt^2} + \gamma_k \frac{d\delta_k}{dt} + \omega_0^2 \delta_k = \frac{F_k}{m} \sin \omega_k t, \quad (17.4)$$

где  $n_k = \frac{b_k}{m}$ , и  $\omega_{0k} = \sqrt{\frac{C_k}{m}}$  - частота собственных колебаний системы.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\delta_k(t) = A_1 \cos \omega_{0k} t + A_2 \sin \omega_{0k} t + A_k \sin(\omega_k t - \varphi),$$

где  $\varphi$  - сдвиг фазы колебаний системы относительно колебаний внешней силы.

Первые два слагаемых описывают свободные колебания системы, которые быстро прекращаются вследствие действия трения. Подставим в уравнение (17.4) только третье слагаемое решения, описывающее вынужденные колебания. Заменяем также

$$\begin{aligned} \sin(\omega_k t) &= \sin((\omega_k t - \varphi) + \varphi) = (\sin(\omega_k t - \varphi) \cos \varphi + \cos(\omega_k t - \varphi) \sin \varphi). \text{ Получим} \\ -\omega_k^2 A_k \sin(\omega_k t - \varphi) + n_k \omega_k A_k \cos(\omega_k t - \varphi) + A_k \omega_{0k}^2 \sin(\omega_k t - \varphi) &= \\ = \frac{F_k}{m} (\sin(\omega_k t - \varphi) \cos \varphi + \cos(\omega_k t - \varphi) \sin \varphi) & \quad (17.5). \end{aligned}$$

Это уравнение должно выполняться при любом значении  $t$ . Поэтому коэффициенты при  $\sin(\omega_k t - \varphi)$  и  $\cos(\omega_k t - \varphi)$  должны быть равны между собой.

$$(\omega_{0k}^2 - \omega_k^2) A_k = \frac{F_k}{m} \cos \varphi \quad \text{и} \quad n_k \omega_k A_k = \frac{F_k}{m} \sin \varphi \quad (17.6).$$

Возведем оба уравнения (17.6) в квадрат и сложим.

$$(\omega_{0k}^2 - \omega_k^2)^2 A_k^2 + (n_k \omega_k)^2 A_k^2 = \left(\frac{F_k}{m}\right)^2,$$

отсюда амплитуда вынужденных колебаний

$$A_k = \frac{F_k}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_{0k}^2 - \omega_k^2)^2 + (n_k \omega_k)^2}}. \quad (17.7)$$

Если учесть  $\omega_{0k} = \sqrt{\frac{C_k}{m}}$ , получим

$$A_k = \frac{F_k}{C_k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega_{0k}^2}\right)^2 + \left(\frac{n_k \omega_k}{\omega_{0k}}\right)^2}}. \quad (17.8)$$

Если  $\omega_k = 0$ , то  $A_k = \frac{F_k}{C_k} = s_k$ . Это случай статической деформации.

Амплитуда колебаний максимальна при  $\omega_k = \omega_{0k}$ . В этом случае амплитуда колебаний равна  $A_{0k} = s_k \frac{\omega_{0k}}{n_k}$ . Это случай резонанса. Величину

$$\gamma_k = \frac{n_k}{\omega_{0k}} \text{ называют коэффициентом демпфирования. } A_{0k} = \frac{s_k}{\gamma_k}$$

Коэффициент усиления колебаний на резонансе

$$\eta_{0k} = \frac{A_{0k}}{s_k} = \frac{1}{\gamma_k}. \quad (17.9)$$

Коэффициент передачи вибрации на любой частоте

$$\eta_k = \frac{A_k}{s_k} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega_{0k}^2}\right)^2 + \left(\gamma_k \frac{\omega_k}{\omega_{0k}}\right)^2}}. \quad (17.10)$$

Максимальное ускорение при резонансе

$$W_{k0} = \omega_{0k}^2 A_{0k}. \quad (17.11)$$

В случае, если источником колебаний является перемещение основания с амплитудой  $s_k$  («кинематическое» возбуждение колебаний), уравнение (17.3) принимает вид

$$m \frac{d^2 \xi_k}{dt^2} + b_k \frac{d\xi_k}{dt} + C_k \xi_k = 0, \quad (17.12)$$

где

$$\xi_k = \delta_k - s_k \sin \omega_k t \quad (17.13)$$

- перемещение центра масс системы в абсолютных координатах ( $\delta_k$  в этом случае – относительное перемещение). После дифференцирования и деления на  $m$  уравнение (17.12) принимает вид

$$\frac{d^2 \delta_k}{dt^2} + n_k \frac{d\delta_k}{dt} + \omega_{k0}^2 \delta_k = -s_k \omega_k^2 \sin \omega_k t \quad (17.14).$$

Решение аналогично (17.4). С учетом (17.13) амплитуда деформации виброизолятора

$$A_k = s_k \frac{\sqrt{1 + \gamma_k^2 \left(\frac{\omega_k}{\omega_{0k}}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_{0k}}\right)^2\right)^2 + \gamma_k^2 \left(\frac{\omega_k}{\omega_{0k}}\right)^2}}, \quad (17.15)$$

откуда коэффициент передачи вибрации

$$\eta_k = \frac{A_k}{s_k} = \frac{\sqrt{1 + \gamma_k^2 \left(\frac{\omega_k}{\omega_{0k}}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_{0k}}\right)^2\right)^2 + \gamma_k^2 \left(\frac{\omega_k}{\omega_{0k}}\right)^2}} . \quad (17.16)$$

На резонансе амплитуда деформации равна

$$A_{k0} = s_k \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma_k^2}} . \quad (17.17)$$

Амплитуда абсолютного ускорения на резонансе

$$W_{k0} = \omega_{0k}^2 s_k (1 + \gamma_k^2) \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma_k^2}} . \quad (17.18)$$

Резонансная частота виброзащитной системы с учетом демпфирования равна

$$f_{0k} = \frac{\omega_{0k}}{2\pi} \sqrt{1 + \gamma_k^2} . \quad (17.19)$$

Из (17.14) – (17.18) видно, что отличие «силового» и «кинематического» возбуждения связано с величиной  $\gamma_k$ . Для большинства виброзащитных систем  $\gamma_k < 0.1$ , поэтому различие результатов невелико.

Линейная система имеет петлю гистерезиса в виде эллипса. Петли гистерезиса многих виброизоляторов (особенно сухого трения) имеют другую форму. Чтобы иметь возможность использовать для расчета таких систем уравнения (17.3) или (17.14), применяется линеаризация – определяется эквивалентный коэффициент демпфирования  $\gamma_k$ , при котором площадь петли гистерезиса виброизолятора равна площади эллиптической петли с такими же амплитудой деформации и  $\gamma_k$ .

При подстановке в (17.3) решения  $\delta_k(t) = A_k \sin(\omega_k t - \varphi)$  видно, что максимальная сила трения равна  $b_k \omega_k A_k$ . Площадь эллиптической петли гистерезиса с амплитудой деформации  $A_k$  в этом случае равна  $\Delta\Pi = \pi b_k \omega_k A_k^2$ .

Потенциальная энергия деформированного до амплитуды  $A_k$  упругого тела равна

$\Pi = \frac{1}{2} C_k A_k^2$ . В таком случае коэффициент рассеивания энергии

$$\psi_k = \frac{\Delta\Pi}{\Pi} = \frac{2\pi b_k \omega_k}{C_k} .$$

Значение коэффициента рассеивания энергии любого виброизолятора можно определить по его петле гистерезиса по уравнению (17.2). Тогда эквивалентный коэффициент демпфирования

$$\gamma_k \approx \frac{b_k}{m\omega_{0k}} = \frac{C_k \psi_k}{2\pi\omega_k m\omega_{0k}} \quad (17.20)$$

Поскольку  $\omega_{0k} = \sqrt{\frac{C_k}{m}}$ , то  $\gamma_k \approx \frac{\omega_{0k} \psi_k}{2\pi\omega_k}$ . В случае резонанса ( $\omega_k = \omega_{0k}$ )

$$\gamma_k \approx \frac{\psi_k}{2\pi} \text{ и амплитуда колебаний равна } A_{0k} \approx \frac{2\pi s_k}{\psi_k}.$$

Если агрегат установлен на  $n$  виброизоляторов, вместо  $C_k$  следует использовать суммарную жесткость виброзащитной системы в направлении  $k$ -ой оси  $C_{\Sigma k} = \sum_{i=1}^n C_{ik}$ , где  $C_{ik}$  - жесткость  $i$ -того виброизолятора в направлении этой же оси.

Если пренебречь трением, коэффициент передачи вибрации на частоте  $\omega_k$  равен

$$\eta_k \approx \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_{0k}}\right)^2} \right|. \quad (17.21)$$

Видно, что ослабление вибрации ( $\eta_k < 1$ ) происходит в случае  $\omega_k > \omega_{k0}\sqrt{2}$  и будет тем больше, чем больше различие  $\omega_k$  и  $\omega_{k0}$ . Диапазон частот после  $\omega_{k0}\sqrt{2}$  называется диапазоном вибрационной защиты. Однако чрезмерное уменьшение для его увеличения  $\omega_{k0}$  (т.е. суммарной жесткости виброзащитной системы) недопустимо, так как мягкая виброзащитная система будет иметь амплитуду колебаний на резонансе, превышающую предельно допустимую. Чрезмерной будет и деформация системы под действием статической нагрузки  $q_{0k}$ . Поскольку  $mg = C_{\Sigma k} q_{0k} = m\omega_{0k}^2 q_{0k}$ , получаем  $q_{0k} = g/\omega_{0k}^2$ . Так, например, чтобы обеспечить собственную частоту объекта 10 Гц, необходимо разместить его на виброизоляторах такой жесткости, чтобы их статическое перемещение составляло 2,5 мм. При собственной частоте 5 Гц статическое перемещение виброизоляторов будет составлять 10 мм, а для собственной частоты объекта в 1 Гц необходимы виброизоляторы с перемещением 250 мм, что невозможно по соображениям как компоновки агрегатов, так и конструкции виброизоляторов.

Из анализа уравнения (17.10) для коэффициента передачи вибрации с учетом трения видно, что при слишком больших значениях  $\gamma_k$  ослабление виброизолятором вибрации в диапазоне вибрационной защиты очень мало, и виброзащитная система неэффективна. Но при слишком малых значениях  $\gamma_k$  будет велика амплитуда колебаний

виброзащитной системы на резонансе, и защищаемый агрегат может выйти из строя при прохождении резонанса.

Силы трения целесообразно учитывать, если выполняется условие

$$\gamma_k \geq 0,05 \quad . \quad (17.22)$$

Жесткость виброизолятора может быть так же, как и коэффициент рассеивания энергии, экспериментально определена по петле гистерезиса. Если максимальная и минимальная деформация виброизолятора в направлении  $k$ -ой оси  $\delta_{k \max}$  и  $\delta_{k \min}$ , максимальная и минимальная реакция  $P_{k \max}$  и  $P_{k \min}$  соответственно (рис. 17.1), то

$$C_k = \frac{P_{k \max} - P_{k \min}}{\delta_{k \max} - \delta_{k \min}} \quad . \quad (17.23)$$

Поскольку жесткость и коэффициент рассеивания энергии виброизолятора зависят от формы петли гистерезиса, они в общем случае нелинейных характеристик виброизолятора зависят от амплитуды деформации виброизолятора и от деформации виброизолятора под действием статической нагрузки.

### 17.3. Оптимальное размещение виброизоляторов

При поступательном перемещении основания, возбуждающем колебания агрегата, агрегат может совершать также и вращательные колебания. Приближенную оценку наибольших амплитуд колебаний виброизолированного объекта в какой-либо  $i$ -ой точке можно производить по формулам:

$$\bar{a}_{xi} = |a_{0x}| + |\varphi_{0y} z_{0i}| + |\varphi_{0z} y_{0i}|; \quad (17.24)$$

$$\bar{a}_{yi} = |a_{0y}| + |\varphi_{0z} x_{0i}| + |\varphi_{0x} z_{0i}|; \quad (17.25)$$

$$\bar{a}_{zi} = |a_{0z}| + |\varphi_{0x} y_{0i}| + |\varphi_{0y} x_{0i}|; \quad (17.26)$$

где  $x_{0i}$ ,  $y_{0i}$ ,  $z_{0i}$  — координаты  $i$ -ой точки в системе осей  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$  с началом в центре тяжести установки,  $a_{0x}$ ,  $a_{0y}$ ,  $a_{0z}$  — амплитуды поступательного перемещения центра тяжести агрегата в направлении соответствующих осей,  $\varphi_{0x}$ ,  $\varphi_{0y}$ ,  $\varphi_{0z}$  — амплитуды вращательных колебаний агрегата вокруг соответствующих осей. Видно, что в точках, удаленных от центра тяжести агрегата, амплитуды колебаний могут быть велики, что может повести к разрыву подведенных к агрегату трубопроводов и кабелей, удару агрегата о соседние конструкции. Ресурс виброизоляторов также снижается при больших амплитудах деформации. Поэтому оптимальным является такое размещение виброизоляторов, при котором вращательные колебания отсутствуют.

Если агрегат, установленный на  $n$  виброизоляторов, совершает поступательные колебания в направлении оси  $Z$  с амплитудой  $a_{0z}$ , то в  $i$ -ом виброизоляторе возникает реакция  $C_{zi} a_{0z}$ , которые ведут к появлению момента вокруг оси  $X$ , равного  $y_{vi} C_{zi} a_{0z}$ , где  $y_{vi}$  – координата точки крепления  $i$ -ого виброизолятора (рис. 17.2).

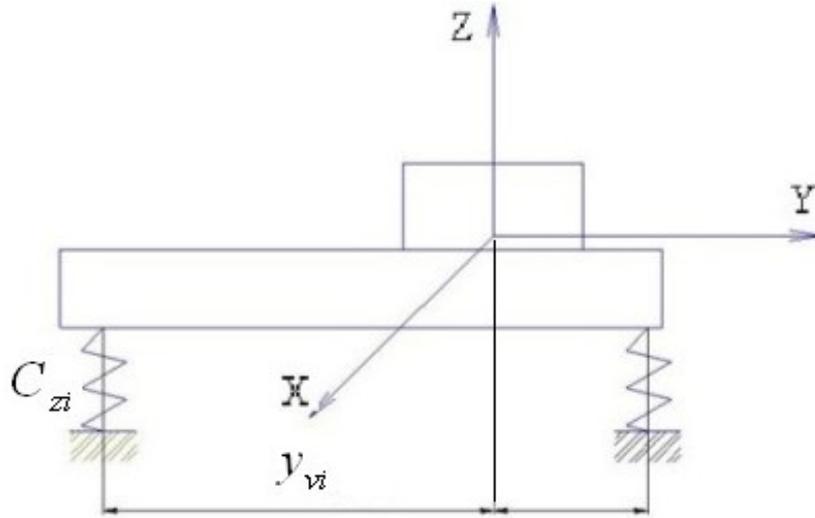


Рис. 17.2. Определение условий отсутствия вращательных колебаний

Для того, чтобы вращательные колебания вокруг оси  $X$  отсутствовали, сумма моментов должна быть равна нулю, то есть  $\sum_{i=1}^n y_{vi} C_{zi} a_{0z} = 0$ , или, сократив на одинаковый множитель  $a_{0z}$ ,

$$\sum_{i=1}^n y_{vi} C_{zi} = 0. \quad (17.27)$$

Из условия равенства нулю моментов относительно оси  $Y$  получаем

$$\sum_{i=1}^n x_{vi} C_{zi} = 0. \quad (17.28)$$

Если рассмотреть поступательные колебания агрегата в направлении оси  $X$ , получим условие

$$\sum_{i=1}^n z_{vi} C_{xi} = 0. \quad (17.29)$$

Если рассмотреть поступательные колебания агрегата в направлении оси  $Y$ , получим условие

$$\sum_{i=1}^n z_{vi} C_{yi} = 0. \quad (17.30)$$

Условия (17.27) – (17.30) определяют оптимальное размещение виброизоляторов. Точка, относительно которой они выполняются, называется центром жесткости

виброзащитной системы. Для отсутствия вращательных колебаний стремятся совместить центр жесткости с центром масс агрегата, или хотя бы расположить центр жесткости и центр масс на одной прямой, вдоль которой действует возбуждающая вибрация.

Исходя из этого, можно рассмотреть различные схемы размещения виброизоляторов на защищаемом объекте (рис. 17.3).

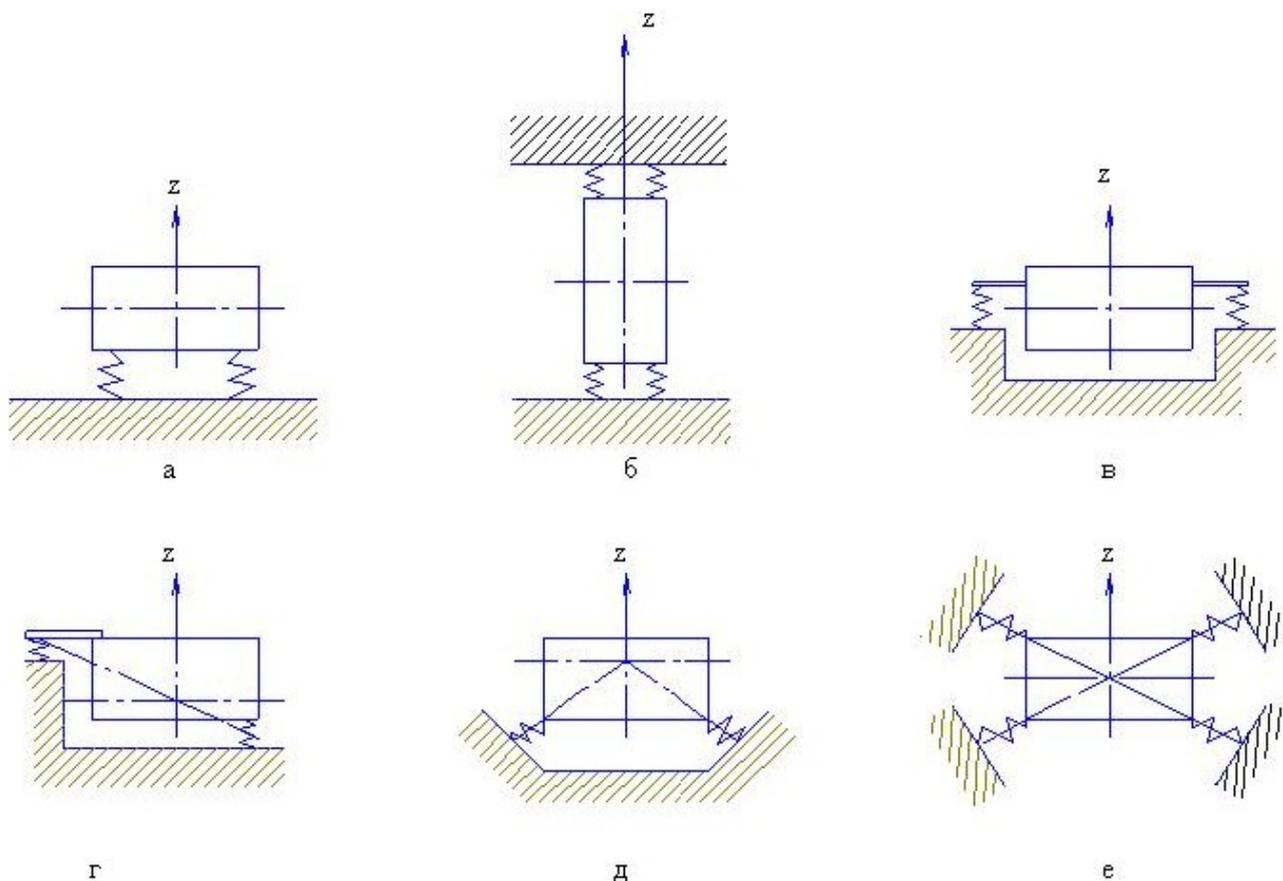


Рис. 17.3. Различные схемы размещения виброизоляторов

Схема (а) проста для монтажа, но неоптимальна при воздействии вибрации в боковом направлении. В схеме (б) центр масс совмещен с центром жесткости, но для этого требуется дополнительная плоскость размещения виброизоляторов, что увеличивает вес системы. Недосток схемы (в) – увеличение габаритов виброзащитной системы в ширину. При размещении виброизоляторов по схеме (г) вращательные колебания будут отсутствовать, но агрегат будет иметь перекося в статическом состоянии. Схемы (д) и (е) очень хорошо уравновешены, но требуются специальные наклонные кронштейны для монтажа виброизоляторов.

Виброизоляторы, кроме того, следует располагать так, чтобы был удобен их монтаж и замена, а также была бы возможность наблюдения за их состоянием в процессе эксплуатации. Для этого необходимо предусмотреть зазоры или проходы, обеспечивающие доступ ко всем виброизоляторам.

#### **17.4. Конструкции виброизоляторов для агрегатов ГТД**

*Известно большое количество типов виброизоляторов, каждый из которых обладает своими преимуществами и недостатками.*

*1. Стальные пружины. Обладают значительной прочностью, невысокой стоимостью, их характеристики линейны, что упрощает расчет виброзащитной системы. Однако они обладают слишком низким рассеиванием энергии колебаний – коэффициент передачи на резонансе достигает 100 и более, что может повести к разрушению оборудования при переходе через резонанс.*

*2. Эластомерные виброизоляторы. Стоимость их невысока, рассеивание энергии колебаний связано с внутренним трением в материале (резина, иные полимеры) и существенно больше, чем в пружинах (коэффициент передачи на резонансе около 10 или менее), вес существенно меньше, чем у стальных виброизоляторов. Но они обладают низкой способностью выдерживать воздействие окружающей среды (высокие и низкие температуры, масло, топливо, кислоты, вакуум, радиация, свет и т.д.), недостаточной прочностью.*

*3. Гидравлические и пневматические виброизоляторы и демпферы. Обладают высокой нагрузочной способностью (десятки и сотни тонн, например, амортизаторы, гасящие удар самолета при посадке). Рассеивание энергии колебаний связано в них с протеканием жидкости или газа через малые отверстия с высоким гидравлическим сопротивлением. Оно достаточно велико (коэффициент передачи на резонансе может быть не более 3). Однако конструкция таких виброизоляторов сложна, они часто нуждаются для своей работы в сложных системах, обеспечивающих давление жидкости или газа (насосы, фильтры и т.д.), а также чувствительны к засорению рабочих органов. Их характеристики зависят от частоты колебаний (для гидравлических виброизоляторов) или от квадрата частоты колебаний (для пневматических виброизоляторов), что затрудняет расчет виброзащитной системы.*

*4. Виброизоляторы сухого трения, как правило, цельнометаллические (пластинчатые, тросовые, из прессованной проволочной сетки, в частности, разработанного в КуАИ/СГАУ проволочного материала МР). Рассеивание энергии колебаний связано в них с внешним трением элементов конструкции друг о друга. Они обладают очень высоким рассеиванием энергии (коэффициент передачи на резонансе до 1,5), высокой прочностью и стойкостью к воздействию окружающей среды. Но технология изготовления этих виброизоляторов сложнее, что определяет их более высокую стоимость. Характеристики их нелинейны, что затрудняет расчет виброзащитной системы.*

Исходя из вышеизложенного, для защиты неприводных агрегатов применяются, как правило, виброизоляторы сухого трения в зоне высоких температур и воздействия топлива и масла, и виброизоляторы на основе эластомеров там, где это позволяет температура и отсутствие агрессивной среды.

Виброизоляторы могут иметь различную форму упругодемпфирующих элементов. На рис. 17.4 приведены виброизоляторы с упругодемпфирующим элементом втулочного типа – бескорпусной (а) и корпусной (б). К втулочным виброизоляторам относятся, например, виброизоляторы из материала МР типа ВВ, ВП. На рис. 17.5 приведены виброизоляторы с упругодемпфирующим элементом кольцевого типа (АМГ, АК). На рис. 17.6 - виброизоляторы с упругодемпфирующим элементом колокольчикового типа (ДКА, ДКУ). В качестве упругодемпфирующего элемента может применяться трос (рис. 17.7).

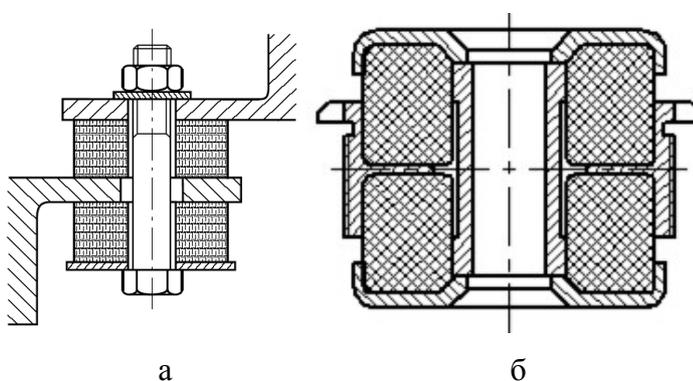


Рис. 17.4. Виброизоляторы втулочного типа: а – бескорпусной, б - корпусной

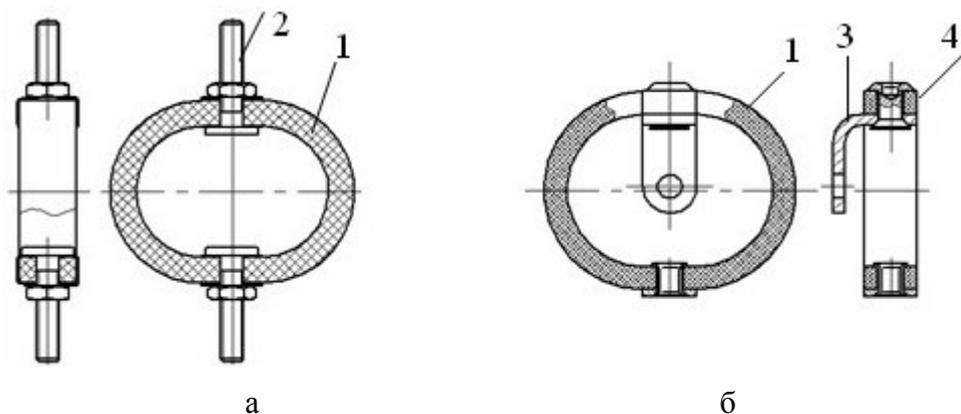


Рис. 17.5. Виброизоляторы втулочного типа: АМГ (а) и АК (б):

1 – упругодемпфирующий элемент, 2 – болт, 3 – кронштейн, 4 - заклепка

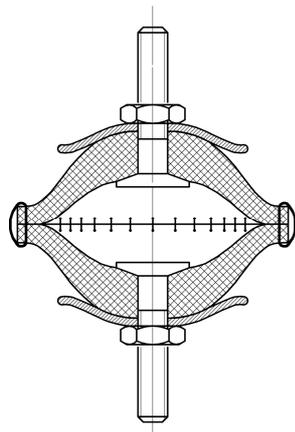


Рис. 17.6. Виброизолятор колокольчикового типа

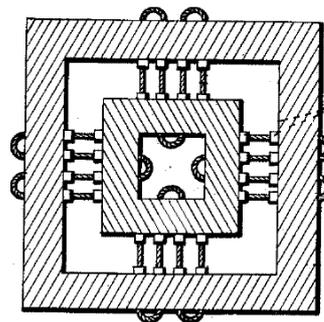
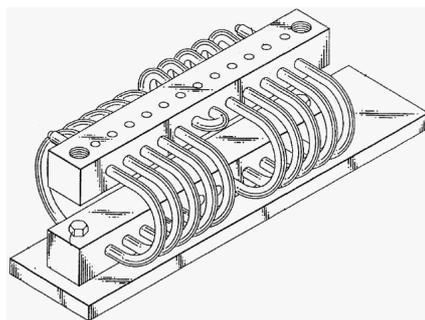


Рис. 17.7. Тросовые виброизоляторы

Виброизолятор может иметь упругодемпфирующий элемент из эластомера или прессованной проволоки, и одновременно пружину для дополнительной жесткости (рис. 17.8).

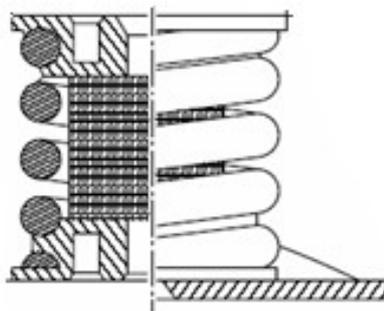


Рис. 17.8. Виброизолятор втулочного типа с пружиной

На рис. 17.9, 17.10, 17.11 приведены некоторые виброизоляторы с упругодемпфирующими элементами из резины (типов АКСС, АР, АРМ).

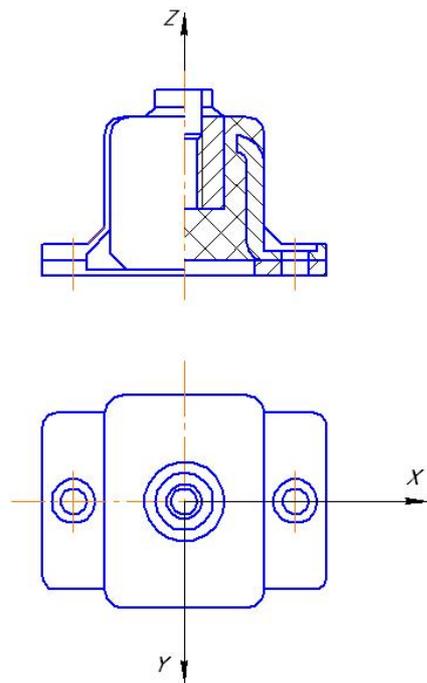


Рис. 17.9. Виброизолятор типа АКСС

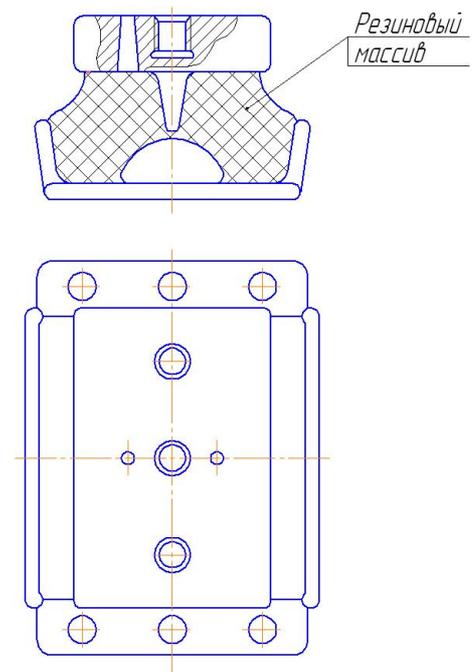


Рис. 17.10. Виброизолятор типа AP

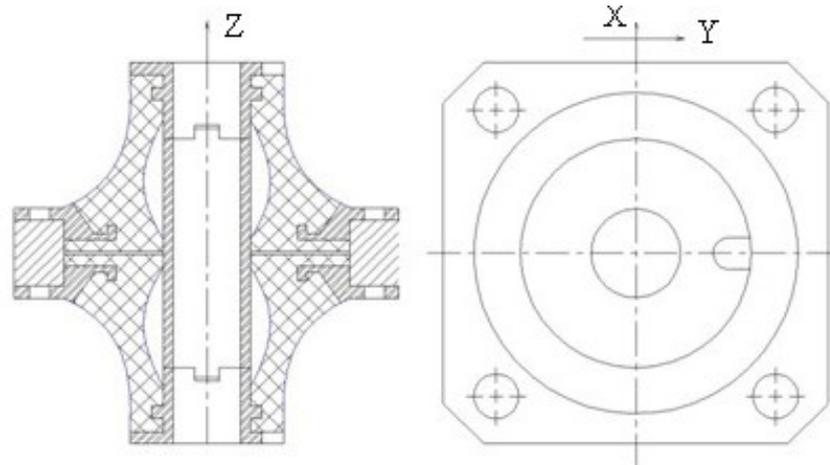


Рис. 17.11. Виброизолятор типа APM

## 17.5. Защита от случайной вибрации

Во многих случаях действующая на объект сила изменяется не по гармоническому закону, а случайно. Один из примеров этого – вибрация при транспортировке (неровности дороги расположены случайно и имеют случайную высоту). Другой пример – наложение очень большого количества возбуждающих колебания сил, каждая из которых изменяется по своему сложному закону.

Ускорение не может служить характеристикой случайной вибрации, так как его математическое ожидание для случайного процесса равно нулю (рис. 17.12).

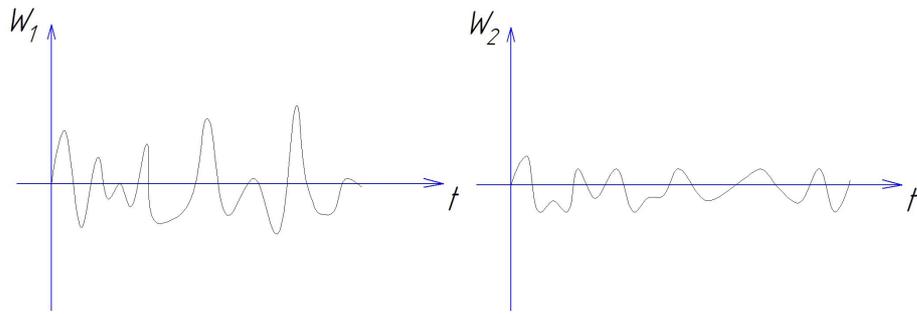


Рис. 17.12. Случайное воздействие с различной амплитудой

В качестве характеристики случайной вибрации применяется квадрат ускорения, отнесенный к ширине частотного диапазона, в котором задана случайная вибрация (рис. 17.13). Эта величина называется спектральной плотностью случайной вибрации  $W_\rho$  и

измеряется в величинах  $\frac{(м/с^2)^2}{Гц}$ .

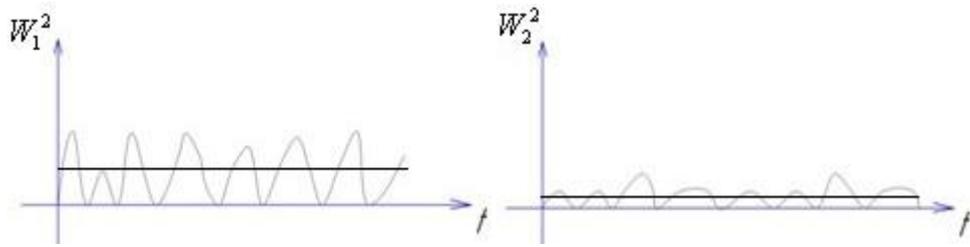


Рис. 17.13. Средние квадратичные значения случайного воздействия

Среднее значение ускорения, действующего на защищаемый объект,

$$W_R = \sqrt{D_A} \approx \pi \sqrt{\frac{W_\rho \omega_0}{\psi}}$$

среднее значение перемещения защищаемого объекта

$$X_R = \frac{W_R}{\omega_0^2} \approx \pi \sqrt{\frac{W_\rho}{\omega_0^3 \psi}}$$

Максимальное перемещение с доверительной вероятностью 0,95 равно  $X_{\max} = 3X_R$ , максимальное ускорение защищаемого объекта  $W_{\max} = 3W_R$ . По найденному максимальному значению ускорения  $W_{\max}$  определяется максимальная инерционная нагрузка на защищаемое оборудование, и сравнивается с допустимой. Значение максимального перемещения  $X_{\max}$  позволяет оценить целостность подведенных к объекту трубопроводов и кабелей, отсутствие ударов защищаемого оборудования о соседние конструкции. По среднему значению ускорения оценивается комфортность подвески для человека.

## 18. СИСТЕМЫ ЗАЩИТЫ ОТ УДАРА

Ударом в технике называют кинематическое или силовое возмущение относительно большой интенсивности и относительно малой продолжительности. При кинематическом возмущении удар определяется законом изменения ускорения основания  $w$ , на котором расположен защищаемый объект, от времени  $t$ .

Наибольшее значение имеют максимальное ускорение основания  $w_0$ , время удара  $\tau$  и полный импульс ударного воздействия на тело с массой  $m$

$$S = m \int_0^{\tau} w(t) dt \quad (18.1)$$

Для упрощения при расчетах форму ударного импульса рассматривают как прямоугольную, треугольную, полусинусоидальную, пилообразную и т.д. (рис.18.1).

В некоторых случаях рассматривают длительность удара на уровне  $w_d$ , понимая под этим промежуток времени длительностью  $\tau_d$ , при котором  $w(t) > w_d$ .

Расчетная модель системы защиты от удара с одной степенью свободы состоит из тела, движущегося вдоль оси  $X$ , виброизолятора, создающего силу  $R(x, \dot{x})$ , и основания. При силовом возмущении внешняя сила  $F(t)$  приложена к телу в направлении оси  $X$ , основание при этом считается неподвижным и является объектом защиты.

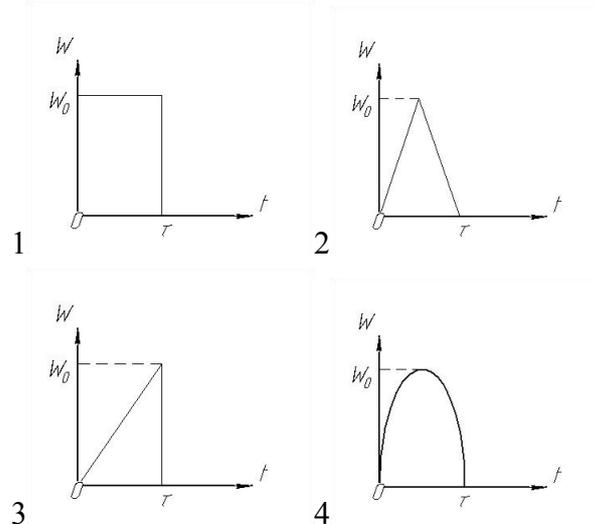


Рис. 18.1. Формы ударного импульса. 1 – прямоугольная, 2 – треугольная, 3 – пилообразная, 4 – полусинусоидальная

Уравнение движения тела при этом имеет вид

$$\ddot{x} + r(x', \dot{x}') = w(t) \quad (18.2)$$

где  $w(t) = F(t)/m$ ,  $r(x', \dot{x}') = R(x', \dot{x}')/m$ ,  $x'$  – абсолютная координата тела.

При кинематическом возмущении основание движется по закону  $u(t)$ , объектом защиты от удара является тело, которое подвергается воздействию со стороны виброизолятора, создающего силу  $R(x, \dot{x})$ , где  $x = x' - u$  – относительная координата тела. Уравнение движения тела при этом имеет вид

$$\ddot{x} + r(x, \dot{x}) = w(t) \quad (18.3)$$

где  $w(t) = -\ddot{u}(t)$ . Уравнения (18.2) и (18.3) совпадают с точностью до обозначений, поэтому расчет силового и кинематического ударного возбуждения одинаков.

Рассмотрим вначале простейшую линейную модель системы защиты от удара с виброизолятором с постоянной жесткостью  $k$  (рис.2). Поскольку длительность удара мала, предположим, что его энергия почти не успевает рассеяться в виброизоляторе, и демпфированием можно пренебречь. В таком случае уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = w(t), \quad (18.4)$$

где  $\omega_0^2 = k/m$  – собственная частота системы.

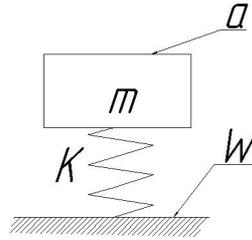


Рис. 18.2. Линейная модель системы защиты от удара.

Движение такой системы после воздействия мгновенного импульса  $S_0$  в момент  $\theta$  происходит согласно уравнению

$$x = x(\theta) \cos \omega_0(t - \theta) + \frac{\dot{x}(\theta)}{\omega_0} \sin \omega_0(t - \theta).$$

При начальных условиях  $x(\theta) = 0$ ,  $\dot{x}(\theta) = \frac{S_0}{m}$ , это уравнение принимает вид

$x = \frac{S_0}{\omega_0 m} \sin \omega_0(t - \theta)$ . Рассматривая воздействие на систему как серию импульсов

$m w(\theta) d\theta$ , приходим к интегралу

$$x = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t w(\theta) \sin \omega_0(t - \theta) d\theta \quad (18.5a)$$

при  $0 < t \leq \tau$  или

$$x = \frac{1}{\omega_0} \int_0^\tau w(\theta) \sin \omega_0(t - \theta) d\theta \quad (18.5b)$$

при  $\tau < t$  (в этом случае действие удара уже прекратилось и система совершает свободные колебания).

Из (18.4) абсолютное ускорение защищаемого объекта

$$a(t) = \omega_0^2 x(t) \quad (18.6)$$

Поскольку основная цель расчета на удар состоит в определении максимальных абсолютного ускорения и относительного перемещения защищаемого объекта, соотношения (18.5) и (18.6) удобно представить в виде:

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0} Q(t) \sin(\omega_0 t - \Psi(t)), \quad (18.7)$$

$$a(t) = \omega_0 Q(t) \sin(\omega_0 t - \Psi(t)), \quad (18.8)$$

где  $Q(t) = \sqrt{A^2(t) + B^2(t)}$  ,  $\Psi(t) = \arctg \frac{B(t)}{A(t)}$  ,

$$A(t) = \int_0^t w(\theta) \cos \omega_0 \theta d\theta \quad , \quad B(t) = \int_0^t w(\theta) \sin \omega_0 \theta d\theta .$$

При  $\tau < t$

$$A(t) = A(\tau) \quad , \quad B(t) = B(\tau) \quad , \quad Q(t) = Q(\tau) \quad , \quad \Psi(t) = \Psi(\tau) .$$

В соответствии с (18.7) и (18.8), процессы  $x(t)$  и  $a(t)$  можно рассматривать как модулированные по амплитуде колебания с частотой  $\omega_0$  , причем функции  $\frac{1}{\omega_0}Q(t)$  и  $\omega_0 Q(t)$  можно рассматривать как огибающие. Наибольшие значения перемещения и ускорения не могут быть больше их.

Зависимости ускорений основания и защищаемого объекта от времени показаны на рис. 3. Пусть в момент  $t_0$  отклонение объекта наибольшее. Если  $\tau < t_0$  , удар называется **коротким**, в противном случае – **длинным**.

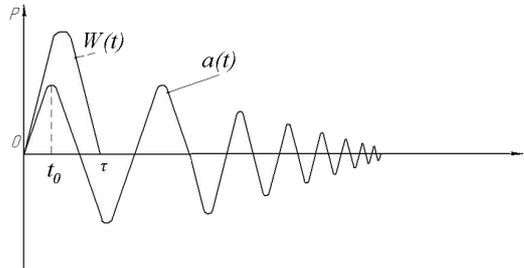


Рис. 18.3. Зависимости ускорений основания и защищаемого объекта от времени

Для простейшего случая удара с постоянным ускорением  $w_0$  (ударный импульс прямоугольной формы) получаем решение:

$$x = \frac{2w_0}{\omega_0^2} \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} \sin \omega_0 \left( t - \frac{\tau}{2} \right) . \quad (18.9)$$

Наибольшее значение перемещения объекта в этом случае

$$x_{\max} = \frac{2w_0}{\omega_0^2} \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} , \quad (18.10)$$

ускорение защищаемого объекта равно

$$a_{\max} = 2w_0 \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} . \quad (18.11)$$

Видно, что эффективность защиты от удара зависит от значения безразмерного параметра  $\omega_0 \tau$  (или  $\frac{\tau}{T}$ , где  $T$  – период собственных колебаний системы). Коэффициент передачи удара

$$\eta = \frac{a_{\max}}{w_0} = 2 \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} . \quad (18.12)$$

Защита от удара ( $\eta < 1$ ) обеспечивается при  $\omega_0 \tau < \frac{\pi}{3}$ .

Приведем решения для некоторых других простейших форм ударного импульса:  
Полусинусоидальная форма:

$$a_{\max} = 2w_0 \frac{\frac{\pi}{\omega_0 \tau} \sin \frac{\omega_0 \tau}{2}}{\frac{\pi^2}{\omega_0^2 \tau^2} - 1} \quad \text{при } \tau < t_0 ; \quad (18.13a)$$

$$a_{\max} = \frac{w_0}{1 - \frac{\pi^2}{\omega_0^2 \tau^2}} \left( \sin \frac{\pi t_0}{\tau} - \frac{\pi}{\omega_0 \tau} \sin \omega_0 t_0 \right) \quad \text{при } t_0 < \tau \quad (18.13b)$$

Треугольная форма:

$$a_{\max} = 2w_0 \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 \tau}{4}}{\frac{\omega_0 \tau}{4}} \quad \text{при } \tau < t_0 ; \quad (18.14a)$$

$$a_{\max} = 2w_0 \left( 1 - \frac{t_0}{\tau} - \frac{\sin \omega_0 t_0}{\omega_0 t_0} - \frac{2 \sin \omega_0 \left( t_0 - \frac{\tau}{2} \right)}{\omega_0 \tau} \right)$$

$$\text{при } \frac{\tau}{2} \leq t_0 \leq \tau ; \quad (18.14b)$$

$$a_{\max} = 2w_0 \left( \frac{t_0}{\tau} - \frac{\ln \omega_0 t_0}{\omega_0 \tau} \right) \quad \text{при } 0 \leq t_0 \leq \frac{\tau}{2} . \quad (18.14c)$$

Уменьшение параметра  $\omega_0 \tau$  необходимо и в этих случаях. В частности, из (18.13a) можно получить, что для защиты от короткого удара полусинусоидальной формы требуется

$$\omega_0 \tau < \frac{2\pi}{1 + \sqrt{7}} \approx 1.73 .$$

Наибольшее возможное значение коэффициента передачи удара  $\eta_{\max} = 2$  для линейной системы при ударе прямоугольной формы можно получить из (18.11). Поскольку прямоугольная форма удара имеет наибольшее значение импульса  $S$ , для всех других форм удара наибольшее возможное значение коэффициента передачи удара  $\eta$  меньше. Так, для пилообразной формы  $\eta \leq 1.25$ , для полусинусоидальной формы  $\eta \leq 1.78$ .

Рассеивание энергии несколько уменьшает значение  $a_{\max}$ . Коэффициент передачи удара с учетом демпфирования можно оценить:

$$\eta' \approx \eta \left( 1 - \frac{\psi}{8} \right) , \quad (18.15)$$

где  $\psi$  – коэффициент рассеивания энергии.

**Ударным спектром** системы называют зависимость коэффициента передачи удара от отношения длительности удара к периоду собственных колебаний системы (или, что то же самое, от произведения длительности удара на собственную частоту системы).

На рис. 18.4 приведен ударный спектр линейной демпфированной системы при ударе полусинусоидальной формы. Он получен при помощи уравнений (18.13) с учетом (18.15).

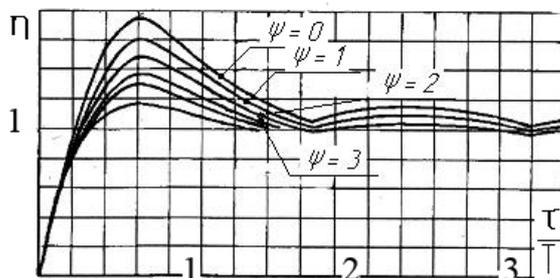


Рис. 18.4. Ударный спектр линейной демпфированной системы защиты от удара при ударе полусинусоидальной формы

Нагрузочные характеристики  $P(x)$  (где  $P$  – сила,  $x$  – перемещение) виброизоляторов, применяемых в системах защиты от удара (в частности, из материала МР), часто существенно нелинейны. Различают **жесткую** нелинейную характеристику, в которой сила увеличивается больше, чем в линейной, и **мягкую** нелинейную характеристику, в которой сила увеличивается меньше, чем в линейной (рис.18.5).

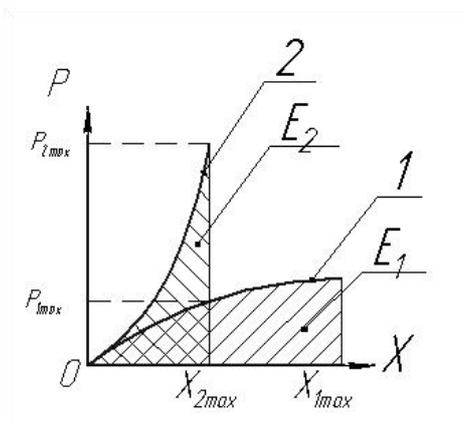


Рис. 18.5. Мягкая (1) и жесткая (2) нелинейные характеристики виброизолятора

Допуская, что время удара мало, и пренебрегая демпфированием, получаем, что скорость объекта после удара равна

$$V = \int_0^{\tau} w(t) dt \quad (18.16)$$

Кинетическая энергия, вносимая ударом в систему

$$K = \frac{mV^2}{2} \quad (18.17)$$

Эта энергия равна потенциальной энергии деформирования виброизолятора

$E = \int_0^{x_{\max}} P(x) dx$ . Если максимальные деформации виброизоляторов с мягкой и жесткой

характеристикой равны  $x_{1\max}$  и  $x_{2\max}$ , а максимальные их реакции, соответственно,  $P_{1\max}$  и  $P_{2\max}$  (см. рис.18.5), то площади  $E_1$  и  $E_2$  должны быть одинаковы и равны  $K$ .

Метод расчета воздействия удара на систему с нелинейными виброизоляторами ясен из рис.18.5. По уравнениям (18.16) и (18.17) рассчитывается значение энергии удара. Далее с последовательным увеличением  $x$  численно интегрируется площадь под нагрузочной характеристикой виброизолятора. Равенство интеграла значению  $K$  означает, что получены значения  $x_{\max}$  и  $P_{\max}$ . Наибольшее ускорение защищаемого объекта

$$a_{\max} = \frac{P_{\max}}{m}.$$

Характеристика виброизолятора может быть несимметричной (как, например, у виброизоляторов из МР типов ДК, ДКУ, АК, АМГ) (см. рис.17.5, 17.6). В таком случае необходимо интегрировать как участок сжатия, так и участок растяжения виброизолятора. Возможно, что значения  $x_{\max}$  и  $P_{\max}$  будут достигнуты порознь при деформации виброизолятора в разных направлениях.

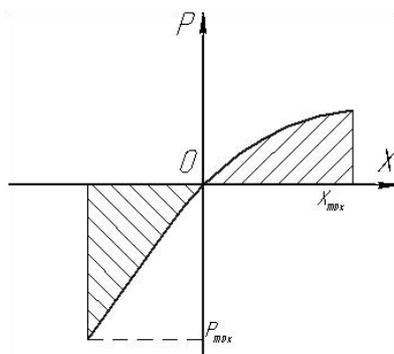


Рис. 18.6. Несимметричная характеристика системы защиты от удара

Упругие опоры объекта, как правило, используются для защиты не только от удара, но и от вибрации. Поскольку перемещения при вибрации значительно меньше, чем при ударе, жесткость системы в диапазоне малых деформаций  $\pm \Delta$  может быть выбрана оптимальной для защиты от вибрации и равной  $k_v$ , а в диапазоне больших деформаций — оптимальной для защиты от удара (рис.18.7).

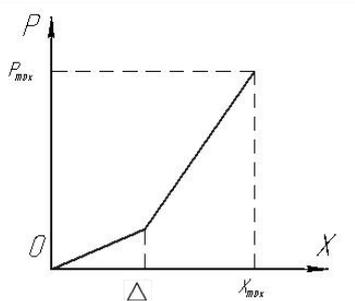


Рис. 18.7. Билинейная характеристика системы защиты от удара

Уравнение для такой билинейной системы может быть получено для прямоугольного удара из условия равенства энергии удара  $K$  площади под нагрузочной характеристикой системы.

$$a_{\max} = \frac{V^2 - \omega_0^2 \Delta^2}{x_{\max} - \Delta} - \omega_0^2 \Delta .$$

После расчета необходимо оценить период собственных колебаний системы  $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{x_{\max} m}{P_{\max}}}$ . Поскольку момент достижения максимальных ускорения и перемещения

$t_0 = \frac{T}{4}$ , если  $\frac{T}{4} < \tau$ , удар является длинным, допущение о малости времени его действия не выполняется и вышеизложенный расчет некорректен.

Если удар является длинным, рассматривать его как мгновенный импульс, вносящий энергию в систему, нельзя. Более корректным будет замена  $w(t)$  импульсом прямоугольной формы той же площади, той же длительности  $\tau$  и интенсивности  $w_s$ .

$$w_s = \frac{\int_0^{\tau} w(t) dt}{\tau}$$

Под действием квазипостоянного ускорения  $w_s$  система получает квазистатическое перемещение  $x_s$ , рассчитываемое при помощи нагрузочной характеристики:

$$mw_s = P(x_s)$$

Относительно нового положения равновесия  $(x_s; mw_s)$  система совершает свободные колебания (рис. 18.8, а, б). Их энергия равна

$$E = \int_0^{x_s} (mw_s - P(x)) dx$$

Пренебрегая рассеиванием энергии, получаем, что такова же энергия системы при колебании в противоположную сторону

$$E = \int_{x_s}^{x_{\max}} (P(x) - mw_s) dx$$

Это уравнение решается численным интегрированием для определения  $x_{\max}$  и  $P_{\max}$ .

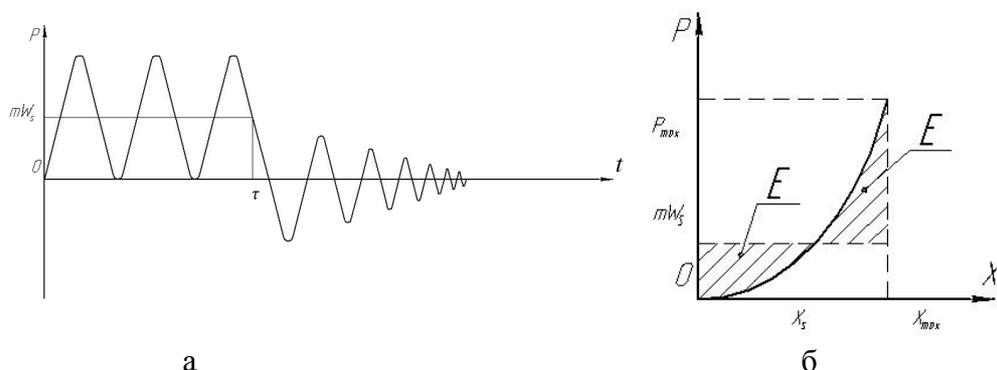


Рис. 18.8. Воздействие длинного удара на нелинейную систему:  
а – в координатах  $(t; P)$ , б – в координатах  $(x; P)$

## 19. РАСЧЕТ НЕПРОБИВАЕМОСТИ КОРПУСОВ

При разрушении элементов ротора последствия вторичных разрушений могут быть более опасными для самолета, чем первичное разрушение. Защита фюзеляжа от фрагментов разрушения ротора осуществляется постановкой бронезащиты.

Толщина бронезащиты определяется из условия равенства кинетической энергии фрагментов разрушения и работы, необходимой для разрушения защиты:

$$W_k = L_n . \quad (19.1)$$

Кинетическая энергия оборвавшегося фрагмента разрушения определяется по формуле:

$$E_k = \frac{mR^2\omega^2}{2}, \quad (19.2)$$

где  $m$  - масса фрагмента разрушения ротора;

$\omega$  - частота вращения ротора;

$R$  - радиус центра масс.

Работа, необходимая для разрушения изотропной металлической преграды может быть определена по формуле:

$$L = l h^2 \tau_{cp} \left( \frac{1}{2} k + n \right), \quad (19.3)$$

где  $l$  - периметр фрагмента разрушения, соприкасающийся с преградой;

$h$  - толщина преграды (бронезащиты);

$\tau_{cp} = \xi 0.65 \sigma_s$  - динамический предел сопротивления срезу;

$\xi$  - коэффициент увеличения прочности материала при ударе (для скоростей вращения роторов ГТД  $\xi = 1.3$ );

$\sigma_s$  - предел прочности материала бронезащиты;

$k \cong 2,5$  - эмпирический коэффициент, учитывающий работу, затраченную на изгиб оболочки защиты;

$n = 2/3$  - эмпирический коэффициент, учитывающий работу, затраченную на срез оболочки;

Из (19.2) и (19.3) следует, что толщина изотропной металлической бронезащиты может быть определена по формуле:

$$h = \sqrt{\frac{E_k}{l \tau_{cp} \left( \frac{1}{2} k + n \right)}}$$

Из проведенных экспериментов следует, что фрагменты разрушения могут разлетаться под углом  $\pm 15^\circ$  от плоскости вращения. Поэтому ширину бронезащиты

определяют как:  $S = 2D \times \text{tg}15^\circ$ , где  $D$  - расстояние от центра масс фрагмента разрушения до бронезащиты.

Для лопаток с бандажной полкой при попадании посторонних предметов в двигатель наиболее вероятно разрушение надполочной части лопаток. Поэтому в таких случаях часто толщину бронезащиты устанавливают только из условия удержания надполочной части лопатки.

Пример расчета толщины кольцевой бронезащиты из титанового сплава ВТ-20 от обрыва части лопастей вентилятора над бандажной полкой приведен в табл. 19.1.

Таблица 19.1.

Ступень вентилятора	1	2	3
Максимально возможная частота вращения ротора в эксплуатации, $n$ , об/мин	5430	5430	5430
Максимально возможная частота вращения ротора в эксплуатации, $\omega = (\pi n / 30)$ , $\text{с}^{-1}$	568,6	568,6	568,6
Масса надполочной части лопатки, $m$ , кг	0,411	0,153	0,118
Радиус центра масс надполочной части лопаток, $R_{\text{ц.м.}}$ , м	0,643	0,617	0,589
Кинетическая энергия надполочной части лопатки, $E_k$ , Дж	77459	35860	23076
Центробежная сила надполочной части лопатки, $C$ , Н	85112	30411	22406
Центробежная сила всей лопатки, $C$ , Н	318442	139312	92940
Толщина бронезащиты для удержания надполочной части лопатки, $h$ , мм	8,9	4,8	4,8

## 20. ОСНОВЫ ВИБРОДИАГНОСТИКИ

Вибродиагностика – это определение состояния двигателя по его вибрации. Преимущества вибродиагностики – своевременное обнаружение дефекта (до того, как он приведет к отказу двигателя), возможность узнавать о состоянии двигателя непосредственно при его эксплуатации, а не при разборке на заводе. Применение вибродиагностики позволило перейти от эксплуатации двигателей по ресурсу к эксплуатации по техническому состоянию. При эксплуатации по ресурсу двигатель после истечения назначенного ресурса необходимо было снять с самолета, отправить на завод, разобрать, осмотреть – и в большинстве случаев убедиться в том, что двигатель работоспособен, и все эти операции являются излишними. При эксплуатации по техническому состоянию известно состояние данного конкретного двигателя на самолете – может ли он далее безопасно эксплуатироваться или нуждается в ремонте.

Вибрационный сигнал от двигателя можно подвергнуть гармоническому анализу (разложению по частотам  $A = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\omega_0 - \psi_m)$ ) и получить спектр вибрации двигателя (рис. 20.1).

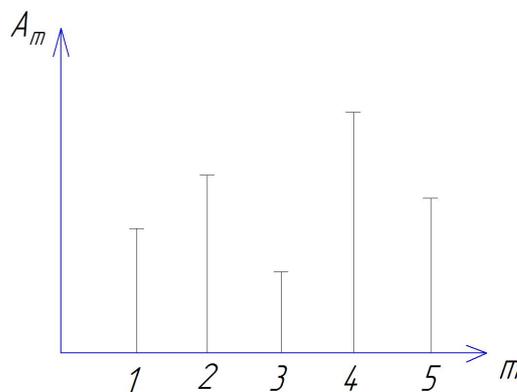


Рис. 20.1. Спектр вибрации двигателя

Эталонный спектр вибрации – это спектр исправного двигателя. С ним сравнивается спектр вибрации данного конкретного двигателя. Некоторые дефекты (например, развитие трещин) могут повести к уменьшению вибрации, поэтому внезапное уменьшение уровня вибрации также является опасным. На первых этапах вибродиагностики в качестве критерия уровня вибрации использовалось среднеквадратичное значение амплитуд вибрации. Если эта величина изменялась на 20 %

за один полет или на 40 % за три полета (неважно – в сторону увеличения или уменьшения), считалось, что двигатель следует вывести из эксплуатации.

Современное компьютерное оборудование позволяет сравнивать непосредственно спектры вибраций и определять, какое отклонение от эталонного является допустимым, а какое недопустимо. Если в базе данных есть спектры вибрации двигателей с известными дефектами, по спектру вибрации данного конкретного двигателя можно предположить, какой именно дефект развивается в этом двигателе.

По вибрации обнаруживаются отказы в самых важных узлах двигателя – турбокомпрессоре, трансмиссиях, форсажной камере.

Система эксплуатации двигателя по техническому состоянию, кроме вибродиагностики, должна включать систему осмотра внутренних частей двигателя (в первую очередь лопаток, дисков и жаровых труб) при помощи авиаскопов, системы контроля давления и температуры в различных сечениях газового потока (причем должно контролироваться не только значение величины, но и его равномерность в различных точках сечения), системы контроля температуры масла и стружки в масле, системы контроля температуры подшипников и так далее.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После изучения курса «Расчет прочности авиационных двигателей» студент должен знать:

- современные методы анализа конструкционной статической и динамической прочности;
- механику разрушения;
- влияние ползучести на напряжения в конструкции;
- основы математических моделей для расчета напряжения в пластинах и закрученных стержнях (дисках и лопатках газотурбинного двигателя);
- формирование напряженного состояния, его основные свойства и основы расчета статических напряжений в лопатках и дисках;
- основы математических моделей для расчета вибрации пластин и закрученных стержней (дисков и лопаток газотурбинного двигателя);
- основы теории колебаний простейшего ротора, расчет критических частот вращения, влияние на них различных факторов;
- методы защиты ротора от опасных изгибных колебаний;
- классификацию собственных частот и форм колебаний лопаток и дисков, формирование спектра собственных частот колебаний рабочего колеса газотурбинного двигателя;
- методы расчета резонансных частот, методы защиты лопаток и дисков от опасной вибрации;
- методы защиты оборудования двигателя от удара и вибрации, методы расчета систем защиты от вибрации и удара.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Конструкция и проектирование авиационных газотурбинных двигателей ; под ред. Д. В. Хроина. – М. : Машиностроение, 1989. – 568 с.
2. Расчет на прочность авиационных ГТД ; под ред. И. А. Биргера. — М. : Машиностроение, 1984. — 208 с.
3. *Скубачевский Г. С.* Авиационные газотурбинные двигатели. Конструкция и расчет деталей / Г. С. Скубачевский. — М. : Машиностроение, 1981. – 550 с.
4. Проектирование авиационных газотурбинных двигателей / [В. П. Данильченко и др.] ; под ред. Самар. науч. центр РАН. – Самара : Изд-во СНЦ РАН, 2008. – 619 с.
5. *Иванов В. П.* Колебания рабочих колес турбомашин / В. П. Иванов. – М. : Машиностроение, 1983. – 224 с.
6. Вибрация в технике: справочник, в 6-ти т. ; под ред. Ф. М. Диментберга и К. С. Колесникова. – М. : Машиностроение, 1980. Т. 3. – 544 с.
7. *Хронин Д. В.* Колебания в двигателях летательных аппаратов : учебник для студентов авиационных специальностей высших учебных заведений, 2-е изд. перераб. и доп. / Д. В. Хронин. – М. : Машиностроение, 1988. – 296 с.: ил.
8. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний : учебное пособие, 2-е изд. / Я. Г. Пановко. – М. : Наука, 1980. – 272 с.
9. *Чегодаев Д. Е.* Демпфирование / Д. Е. Чегодаев, Ю. К. Пономарев. – Самара : Изд-во СГАУ, 1997. – 334 с.
10. *Ермаков А. И.* Вибрация и прочность АД и ЭУ : учеб. пособие / А. И. Ермаков, А. М. Уланов. – Самара : Изд-во СГАУ, 2006. Ч. 1 . – 91 с.
11. *Ермаков А. И.* Лабораторный практикум по динамике и прочности авиационных ГТД с использованием пакета ANSYS : метод указ. / А. И. Ермаков, А. М. Уланов. – Самара, РИО СГАУ. Часть 1 – 2006. – 132 с. Часть 2 – 2007. – 80 с.
12. *Ермаков А. И.* Решение сопряженных задач и моделированию деформирования элементов двигателей в программном комплексе ANSYS : электрон. учеб. пособие / А. И. Ермаков, А. О. Шкловец. – Самара: СГАУ, 2012. – Электр. текстовые и граф. данные (1,779 Мбайт) – 1 эл. опт. диск. (CD-ROM).
13. *Ермаков А. И.* Численное исследование вынужденных колебаний ротора ГТД : электрон. учеб. пособие / А. И. Ермаков, Д. П. Давыдов, А. О. Шкловец. – Самара : СГАУ, 2012. – Электр. текстовые и граф. данные (10,663 Мбайт) – 1 эл. опт. диск. (CD-ROM).

14. *Пономарев Ю. К.* Проведение динамических испытаний средств виброзащиты АД и ЭУ : метод. указания / Ю. К.Пономарев, А. М.Уланов, А. С.Котов. – Самара: Самарс. гос. аэрокосмический ун-т, 2007. – 80 с.