ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Самара 2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Составитель *Е.В. Симонова*

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2017

УДК 519.876.5

ББК 22.18я73

Составитель ***Е.В. Симонова***

Рецензент: канд. техн. наук, доц. Л.С. З е л е н к о

Моделирование случайных величин: [Электронный ресурс]: метод. указания / сост. *Е.В. Симонова.* – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – 26 с. : ил. Электрон. текстовые и граф. дан. (Кбайт).- 1 эл. опт. диск (CD-ROM)

Методические указания содержат достаточно подробное описание точных и приближенных методов получения значений случайных величин с наиболее распространенными законами распределения. Даны рекомендации по организации статистического контроля качества получаемых реализаций случайных величин.

Предназначены для студентов направления 09.03.01 – «Информатика и вычислительная техника» в качестве методических указаний по курсу «Моделирование информационно-вычислительных систем».

Подготовлены на кафедре информационных систем и технологий.

УДК 519.876.5
ББК 22.18я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В методических указаниях описаны точные и приближенные методы моделирования случайных величин с заданными законами распределения вероятностей. Приводятся контрольные вопросы, а также индивидуальные задания для выполнения лабораторной работы.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению 09.03.01 – Информатика и вычислительная техника.

Содержание методических указаний соответствует разделам рабочей программы по дисциплине «Моделирование информационно-вычислительных систем» федерального компонента ГОС подготовки бакалавров по направлению 09.03.01 – Информатика и вычислительная техника.

ВВЕДЕНИЕ

Цель лабораторной работы – изучение методов моделирования случайных величин, получение навыков разработки программ формирования реализаций случайных величин с заданными законами распределения вероятностей, а также практическое освоение статистических методов контроля качества полученных реализаций случайных величин.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Исходным материалом для формирования на ЭВМ случайных величин с различными законами распределения вероятностей служат равномерно распределенные в интервале [0, 1] случайные числа, которые вырабатываются на ЭВМ программным путем или же специальным физическим генератором случайных чисел.

Основные **свойства равномерного распределения**.
Непрерывная случайная величина R имеет равномерное распределение в интервале [0, 1], если функция плотности вероятности имеет вид:

$$f(R)=\begin{cases}1 & \text{При } 0<=R<=1\\ 0 & \text{Вне этого интервала}\end{cases}$$

Интегральная функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(R)=\begin{cases}0 & \text{При } R<0\\ R & \text{При } 0<=R<=1\\ 1 & R>1\end{cases}$$

Математическое ожидание *M[R]* и дисперсия *D[R]*, соответственно, равны:

$$M[R]=\frac{1}{2};\; D[R]=\frac{1}{12}$$

Особенностью подобного распределения вероятностей является то обстоятельство, что вероятность попадания случайной величины R в интервал определенной длины равна длине этого интервала.

$$\Delta = R^{(2)} - R^{(1)},\; 0 \le \Delta \le 1$$

$$P\{R \in \Delta\} = P\{r^{(2)} \le R \le R^{(2)}\} = f(R)(R^{(2)} - R^{(1)}) = \Delta$$

Эта особенность равномерного случайного распределения в интервале [0, 1] широко используется при цифровой реализации случайных величин с различными законами распределения вероятностей.

Строго говоря, получить на ЭВМ программным путем реализации «чисто» случайной величины с равномерным законом распределения вероятностей невозможно. Это объясняется, в первую очередь, конечной разрядностью любой цифровой машины. В состав математического обеспечения современных ЭВМ вводятся, как правило, стандартные программы получения «псевдослучайных» последовательностей чисел.

Принципы составления алгоритмов, по которым функционируют подобные программы, подробно описаны в работе [1]. Эти алгоритмы объединяет одно общее для всех обстоятельство: они имеют в своей основе не случайную, а детерминированную структуру. Однако генерируемые с их помощью последовательности чисел весьма «похожи» на случайные. Этим и объясняется термин «псевдослучайность». Получаемые с помощью этих алгоритмов случайные числа с равномерным распределением являются только исходным материалом, «сырьем», из которого получаются реализации случайных величин с заданным законом распределения вероятностей.

Для получения реализаций случайной величины X с заданной плотностью распределения вероятностей $f(x)$ существует немало искусственных приемов.

Весьма распространен метод нелинейного преобразования, обратного функции распределения. Метод основан на использовании соотношения

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx = r_i; i = 1,2,... \qquad (1)$$

Здесь r_i – i –я реализация случайной величины R, равномерно распределенной в интервале [0, 1]; x_i – i –я реализация случайной величины X, описываемой плотностью вероятности $f(x)$.

Рассматривая выражение (1) как уравнение относительно x_i

$$x_i = \varphi(r_i)$$

и разрешая его, получим явную функциональную связь между x_i и r_i, которая легко алгоритмизируется. Например, для экспоненциального распределения вероятностей

$$f(x) = \lambda\lambda^{-\lambda x}; x \geq 0, \lambda \geq 0$$

из выражения (1) получим:

$$\lambda\int_{0}^{x_i} \lambda^{-\lambda x}dx = 1 - \lambda^{-\lambda x} = r_i; \quad x \geq 0, \lambda \geq 0 \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - r_i)} \qquad (3)$$

Из (2) следует, что т.к. величина *(1- R)* распределена так же, как и R, т.е. равномерно в интервале [0, 1], можно переписать выражение (3) в окончательном виде (4).

Использование последнего соотношения позволяет получить реализации x_i случайной величины X, каждая из которых будет зависеть лишь от r_i. Таким образом, если программный датчик (стандартная программа генерации R) выдает независимые реализации r_i, реализации x_i также будут независимы друг от друга.

$$x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln r_i; \qquad i = 1,2,... \qquad (4)$$

В общем случае, уравнение (1) очень часто точно не решается относительно x_i (например, для $f(x)$ – плотности нормальной случайной величины и т.д.). Поэтому возможности реализации случайных величин с заданной статистической моделью нередко связывают с использованием специальных методов моделирования. Одни методы этой группы основаны на приближенном решении уравнения (1) [1], другие – на использовании специальных теорем теории вероятностей и т.п.

Так, например, для получения на ЭВМ реализаций **нормальной случайной величины** нередко используют центральную предельную теорему теории вероятностей, из которой, в частности, следует, что сумма реализаций r_i случайной величины R, равномерно распределенной в интервале [0, 1], при достаточно большом значении n, может рассматриваться как случайная величина, описываемая нормальным законом распределения вероятностей. Это обстоятельство позволяет легко алгоритмизировать процесс формирования реализации нормальной случайной величины (5). Обычно при $n = 12$ распределение величины norm уже весьма близко к нормальному [1].

$$\left| norm(n) = \sum_{i=1}^{n} r_i \right| \qquad (5)$$

Нетрудно убедиться, что величина, формируемая с помощью приведенного алгоритма (5), в предположении независимости отдельных величин r_i , имеет дисперсию ($n/12$) и среднее, равное ($n/2$). Сформировать из этой величины любую другую, распределенную нормально, но с другими значениями параметров (среднее – m, дисперсия – σ^2) можно с помощью алгоритма (6):

$$Norm = \sigma * (norm(12)\text{-}6) + m. \qquad (6)$$

Обсуждая возможности цифровой реализации **дискретных величин**, рассмотрим случайную величину (7)

$$X = \begin{Bmatrix} x^{(0)} & x^{(1)} & x^{(2)} & \ldots & x^{(n)} \\ p_0 & p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{Bmatrix} \qquad (7)$$

такую, что

$$p\{X = x^{(k)}\} = p_k \qquad \sum_{k=0}^{n} p_k = 1$$

Верхняя строка в выражении (7) определяет спектр возможных значений величины X, нижняя – соответствующие им вероятности.

Реализация такой случайной величины на ЭВМ осуществляется весьма просто. Интервал определения равномерно распределенной случайной величины $R \in [0,1]$ делится на подинтервалы Δ_k такие, что длина Δ_k равна p_k (рис. 1):

Тогда вероятность того, что случайная величина R попадет в интервал Δ_k, оказывается равной p_k:

$$p\{R \in \Delta_k\} = p_k$$

и алгоритм моделирования случайной величины X определяется простым присваиванием:

$$X := x^k \text{ при } R \in \Delta_k$$

Схема алгоритма моделирования для этого случая может иметь вид, приведенный на рис.2 (сплошные стрелки). При этом интервалы Δ_k определяются самим заданием случайной величины (7) и вводятся в ЭВМ в качестве исходных данных.

Для **дискретных случайных величин с неограниченным спектром** значений принципы моделирования остаются в основном прежними, однако Δ_k приходится рассчитывать непосредственно в процессе моделирования.

$$X = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_k & \ldots \end{Bmatrix};$$

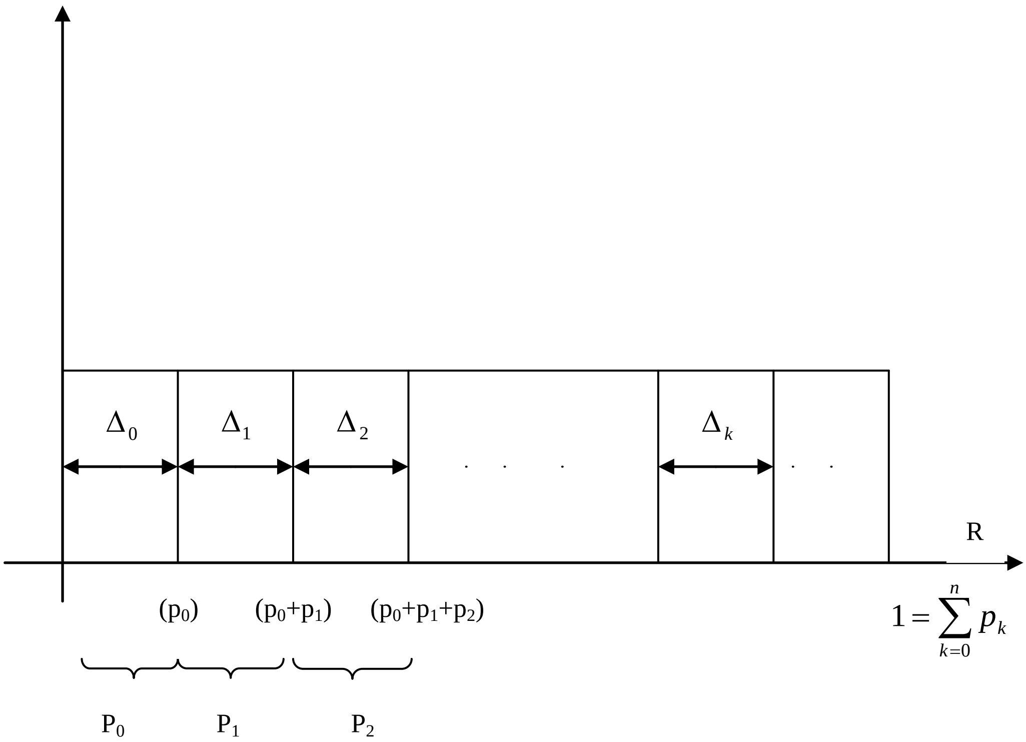

Рис. 1 Инверсная функция распределения вероятностей

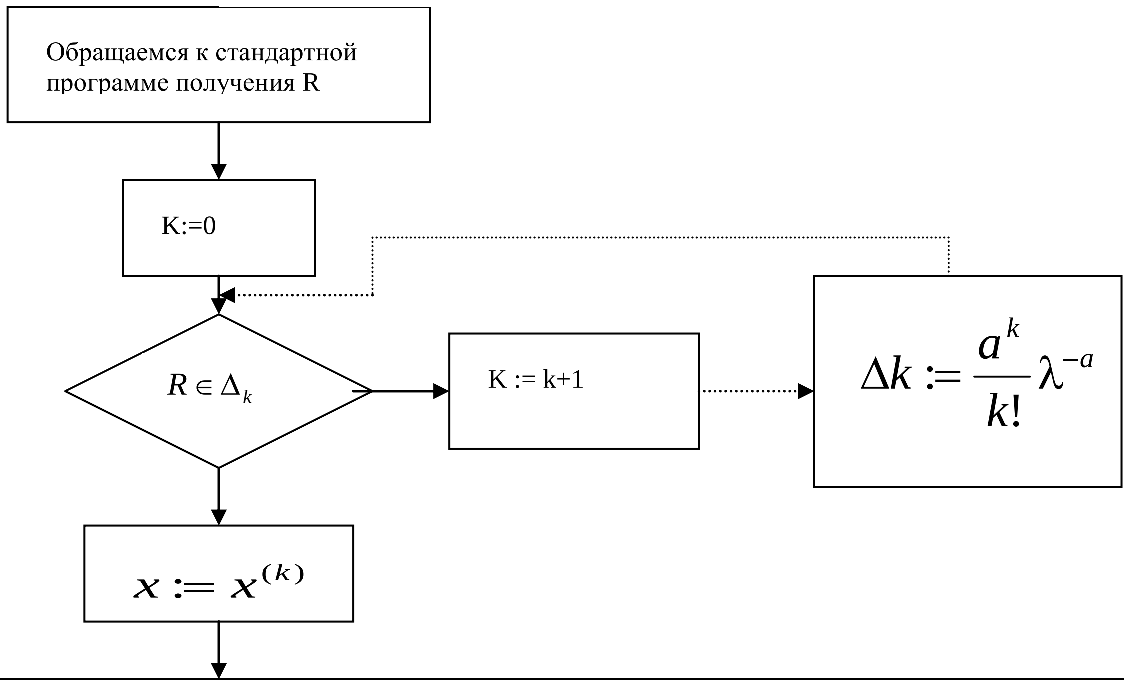

Рис. 2 Алгоритм моделирования дискретной случайной величины

Например, для случайной величины, распределенной по закону Пуассона, придется рассчитывать для каждого значения k, при этом в программу моделирования (рис. 2) следует ввести дополнительный блок (пунктирные стрелки).

Заранее же рассчитать все Δ_k невозможно вследствие их бесконечного количества. Однако нередко все же Δ_k рассчитывают для $k<=K$ (причем K выбирают из условия $\sum_{k=0}^{K} p_k \approx 1$). Тогда при $k<=K$ случайную величину X моделируют как величину с ограниченным спектром значений, а при $k>K$ – как с бесконечным (неограниченным), рассчитывая Δ_k в процессе моделирования.

Статистический контроль качества реализаций случайной величины

При моделировании на ЭВМ случайной величины X с заданным законом распределения $f(x)$ (f – плотность вероятности) качество получаемых реализаций x_i, $i=1, 2, 3, \dots, N$ оценивается путем проверки гипотезы о принадлежности этих реализаций распределению $f(x)$. Самые разнообразные погрешности моделирования (в том числе, и «псевдослучайность» исходного материала – R) могут привести к тому, что реализации x_i не будут соответствовать закону распределения $f(x)$, что будет свидетельствовать о неудовлетворительном качестве нашей цифровой модели. Подобный статистический контроль качества реализаций x_i $(i = 1, 2, \dots, N)$ проводится с использованием математического аппарата проверки статистических гипотез, в основе которого лежит понятие критерия согласия. В качестве критерия согласия условимся использовать критерий Пирсона χ^2 .

Процедуру проверки гипотезы о принадлежности реализаций x_i $(i = 1, 2, \dots, N)$ моделируемому распределению $f(x)$ проведем в несколько этапов.

<u>Этап 1.</u>

Разделим всю область определения случайной величины x на несколько непересекающихся интервалов, например, n (рис. 3).

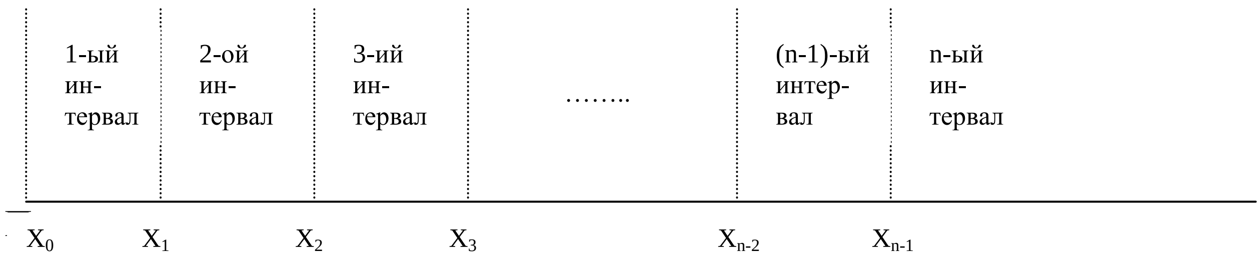

Рис 3. Разбиение области определения случайной величины

Ширина этих интервалов определяется областью существования x. Так, если x – величина нормальная, то, как известно, ее область определения $(-\infty, \infty)$ – вся числовая ось. При этом крайние интервалы оказываются полуоткрытыми: $(-\infty, X_0]$ и $[X_{n-1}, \infty)$. Если X – величина, распределенная по экспоненциальному закону, область определения – полубесконечность – $[0, \infty)$. В этом случае $x_0=0$, первый интервал разбиения $[0, x_1)$, последний же –$[x_{n-1}, \infty)$. Наконец, для равномерного распределения первый интервал - $[0, x_1)$, последний $[x_{n-1}, 1)$ – все интервалы закрыты. Граничные точки, отделяющие один интервал от другого, в дальнейшем для определенности условимся включать в предыдущий интервал $(x_{k-1}, x_k], (x_k, x_{k+1}], \ldots$ хотя принципиального значения это, конечно, не имеет.

Заметим, что целесообразно проводить разбиение на интервалы таким образом, чтобы вероятность попадания случайной величины х в любой из интервалов была бы постоянна:

$$p\{x_{k-1} < X < x_k\} = p_k = const = \frac{1}{n}.$$

Это условие можно переписать в виде

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \frac{1}{n}; k = 1,2,\ldots, n-1 \qquad (8)$$

из которого легко вывести алгоритм разбиения области определения х на интервалы.

$$x_k = \frac{1}{\lambda}\left[-\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)\right]; k = 1,2,\ldots, n-1;$$

Например, если $f(x) = \lambda\lambda^{-\lambda x}, x \geq 0$ из выражения (8) получим:

Для дискретной случайной величины интервалы желательно выбирать таким образом, чтобы в каждом из них находилось одно из возможных значений спектра. Однако, если вероятности спектральных составляющих малы $(p_k<0.05)$, интервалы должны включать в себя несколько спектральных компонент с тем, чтобы теоретическая вероятность попадания в интервал была бы не меньше 0.05.

$$p\{x = x^{(k)}\} = p_k$$

<u>Этап 2.</u>

Всю совокупность реализаций x_i $(i = 1, 2, \ldots , N)$ «сортируем» по интервалам, определяя при этом, сколько реализаций попало в первый интервал, во второй, в третий и т.д. Программным путем это удобно делать с помощью счетчиков (рис. 4), которым предварительно присваиваются нулевые значения:

$$СЧ_1{:=}0, СЧ_2{:=}0, \ldots ,СЧ_n{:=}0;$$

Ясно, что по завершении всего цикла «сортировки», когда $i=N$, $\sum\limits_{k=1}^{n} СЧ_k = N$.

<u>Этап 3</u>.

На третьем этапе вычисляется значение критерия согласия:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(СЧ_k - NP_k\right)^2}{NP_k} \qquad (9)$$

Если положить $p_k = \frac{1}{n}$ для всех k и определить границы интервалов разбиения x_k из условий (8), выражение (9) можно записать в более удобном для вычисления виде:

$$\chi^2 = \frac{n}{N}\left[\sum_{k=1}^{n} \left(СЧ_k\right)^2\right] - N \qquad (10)$$

Этап 4.

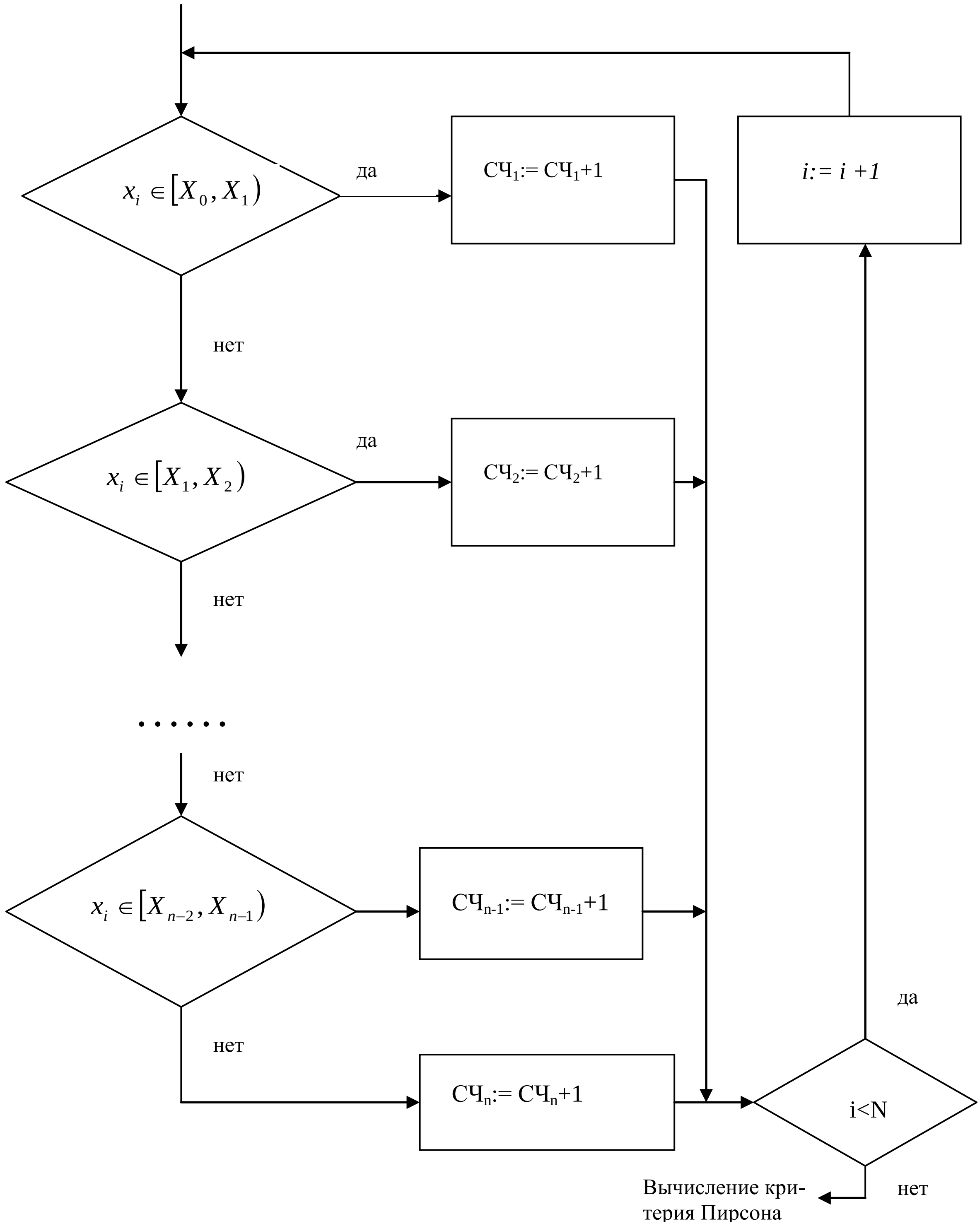

Рис. 4. Проверка гипотезы о принадлежности случайной величины заданному распределению вероятностей

Этот этап является завершающим, на котором по полученному значению необходимо определить, можно ли принять гипотезу о принадлежности моделируемой случайной величины *x* распределению *f(x)* или нет.

Для того чтобы дать ответ на этот вопрос, χ^2 сравнивают с порогом y_0:

если $\chi^2 > y_0$, проверяемая гипотеза отвергается; если $\chi^2 < y_0$, проверяемая гипотеза не может быть отвергнута. В первом случае делается вывод о неудовлетворительности построенной модели. Во втором считается, что реализации x_i $(i = 1, 2, \dots, N)$ случайной величины X, получаемые с помощью цифровой модели, хорошо согласуются с законом распределения $f(x)$.

При этом вероятность того, что мы ошибочно признали построенную цифровую модель неудовлетворительной (ошибка первого рода) не превосходит заданной величины α – уровня значимости критерия согласия. Уровень значимости – α, порог y_0 и число интервалов разбиения n связаны специальной табулированной зависимостью (табл. 1).

Таблица 1. Уровень значимости критерия согласия

a / $(n\text{-}1)$	0.05	0.025	0.01	0.005
10	18.3	20.5	23.2	25.2
11	19.7	21.9	24.7	26.8
12	21	23.3	26.2	28.3
13	22.4	24.7	27.7	29.8
14	23.7	26.1	29.1	31.3

2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Процесс выполнения лабораторной работы можно условно разделить на четыре следующих этапа:

1. Ознакомительный
2. Расчетный
3. Лабораторный
4. Этап оформления отчета.

На первом этапе, студенту, выполняющему работу, необходимо ознакомиться с теоретическими вопросами реализации случайных величин на ЭВМ.

Второй этап начинается с получения задания на моделирование. Для полученного задания разрабатывается алгоритм моделирования и обработки результатов моделирования с использованием критерия согласия χ^2.

На лабораторном (третьем) этапе выполняется программа моделирования.

Четвертый этап заключается в оформлении отчета.

3 ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

Отчет начинается с названия лабораторно-расчетной работы и содержит следующие разделы:

1. Задание на моделирование.
2. Общая программа моделирования (представляется в виде листинга).
3. Результаты моделирования (в этом разделе должна быть представлена гистограмма распределения *f(x)*) (рис. 5).

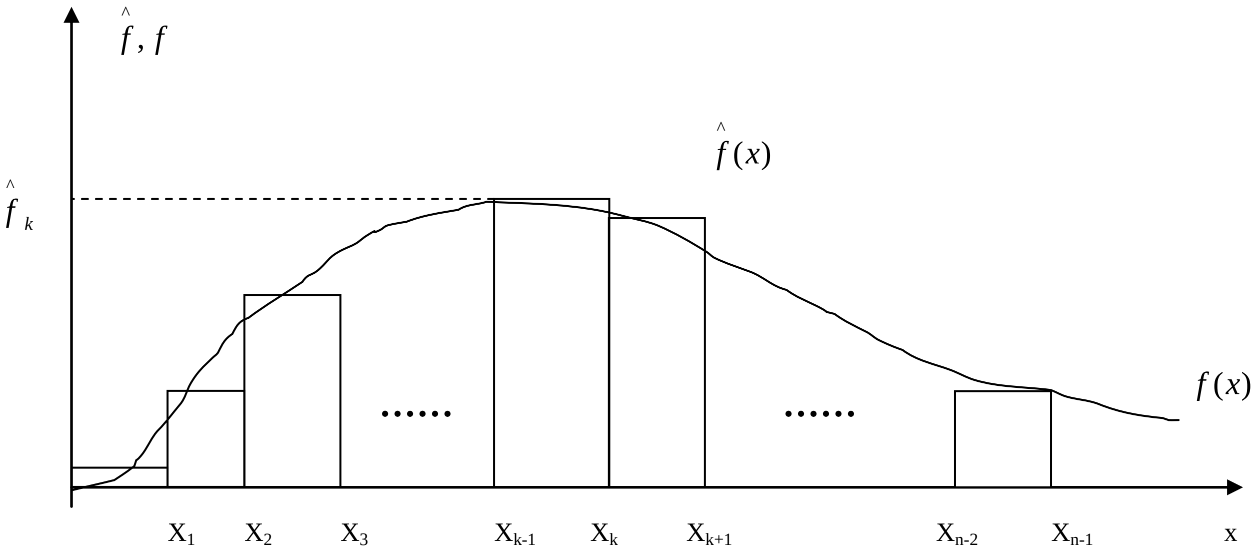

Рис. 5 Гистограмма распределения моделируемой случайной величины

Подобная гистограмма $\hat{f}(x)$ для непрерывных случайных величин является ступенчатой функцией аргумента. Причем, величина каждой такой «ступеньки» определяется как

$$\hat{f}_k = \frac{СЧ_k}{N(x_k - x_{k-1})}. \qquad (11)$$

Здесь $СЧ_k$ – содержимое *k*-ого счетчика;

N – количество реализаций случайной величины;

x_k, x_{k-1} – границы интервалов разбиения.

Для дискретной случайной величины

$$\hat{f} = \frac{СЧ_k}{N}.$$

Должна быть представлена также теоретическая кривая *f(x)* плотности вероятности моделируемого закона распределения. Кроме того, в этом разделе приводится найденное путем моделирования значение χ^2.

4. Вывод о качестве модели. Вывод делается на основании сравнения χ^2 с порогом y_0.

4 ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1

Получить на ЭВМ последовательность из N=200 реализаций случайной величины *x*, распределенной экспоненциально. Контроль качества проводить с использованием 11-ти интервалов разбиения области $[0, \infty)$. (Уровень значимости $\alpha=0.01$).
Значение *a* определяется по таблице вариантов

$$f(x) = ae^{-ax}, \quad \begin{cases} x \ge 0 \\ a > 0 \end{cases} \quad F(x) = 1 - e^{-ax};$$

Номер варианта	1	2	3	4	5
Значение *a*	0.5	1	2	3	4

Задание 2

Получить на ЭВМ последовательность из N=150 реализаций случайной величины *x*, распределенной по закону Релея.
При статистическом контроле использовать 12 интервалов разбиения. (Уровень значимости $\alpha=0.01$). Значение *a* определяется по таблице вариантов.

$$f(x) = \frac{x}{a}\exp\left\{-\frac{x^2}{2a}\right\}; \quad \begin{cases} x \ge 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{2a}\right\}$$

Номер варианта	1	2	3	4	5
Значение *a*	0.5	1	2	3	4

Задание 3

Получить на ЭВМ последовательность из N=200 реализаций случайной величины *X*, распределенной по нормальному закону со средним *m* и дисперсией σ^2. При контроле качества моделирования принять *n* =15.(Уровень значимости $\alpha=0.005$). Параметры *m* и σ^2 выбираются из таблицы вариантов.

Номер варианта	1	2	3	4	5
Значение m	2	3	4	5	6
σ^2	0.25	4	0.25	1	4

Задание 4

Получить на ЭВМ последовательность из N=250 реализаций случайной величины *x*, распределенной по закону Коши:

$$f(x) = \frac{1}{b\pi}\frac{1}{1+(x-a)^2/b^2} \qquad \begin{cases} x \ge 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\,\frac{x-a}{b};$$

Контроль качества моделирования провести для *n=13*. (Уровень значимости *α=0.05*). Значение *a* и *b* определяется по таблице вариантов.

Номер варианта	1	2	3	4	5
Значение *a*	0	0	1	2	3
Значение *b*	1	2	1	2	1

Задание 5

Выполнить задание 4. Моделирование провести специальным методом, учитывая то обстоятельство, что отношение

$$x = \frac{norm1}{norm2}$$

σ_1^2 распределено по закону Коши с параметрами *a=0* и $b = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, если (*norm1*) и (*norm2*) – нормальные случайные величины с нулевыми средними и дисперсиями указанными в таблице вариантов.

Номер варианта	1	2	3	4	5
σ_1^2	1	2	3	1	1
σ_2^2	2	1	1	3	4

Задание 6

Получить на ЭВМ последовательность из N=200 реализаций случайной величины x, распределенной по закону Эрланга:

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x}; \begin{matrix} x \geq 0 \\ \lambda > 0 \end{matrix} \quad m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Моделирование провести специальным методом, используя то обстоятельство, что случайная величина

$$X = \sum_{k=1}^{m+1} y_k$$

распределена по закону Эрланга, если величины y_k независимы и распределены экспоненциально:

$$f(y) = \lambda e^{-\lambda y}, y > 0, \lambda > 0.$$

Исходные данные задаются таблице вариантов. Контроль качества провести для $n=12$. (Уровень значимости $\alpha=0.025$).

Номер варианта	1	2	3	4	5
Значение λ	1	0.5	28	1	0.5
Значение m	1	2	1	2	1

Задание 7

Получить на ЭВМ последовательность из N=150 реализаций равномерно распределенной случайной величины $A \leq x \leq B$.

Контроль качества провести для $n=15$, (Уровень значимости $\alpha=0.05$).

Исходные данные задаются в таблице вариантов.

Номер варианта	1	2	3	4	5
A	1	2	0.5	1	1
B	3	5	1.5	7	10

Задание 8

Получить на ЭВМ последовательность из N=200 реализаций дискретной случайной величины

$$x = \begin{Bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & \ldots & x^{(k)} & \ldots & x^{(\lambda)} \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_k & \ldots & p_\lambda \end{Bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_k &= x_1 + (k-1)\Delta; \\ p_k &= p_1 - (k-1)p; \\ k &= \overline{1,\lambda}. \end{aligned}$$

Контроль качества провести для *n=l*, (Уровень значимости *α=0.025*). Исходные данные выбираются из таблицы вариантов.

Номер варианта	1	2	3	4	5
x_1	1	1	2	2	0.7
p_1	0.18	0.17	0.1	0.1	0.1
Δ	0.3	0.4	0.1	0.4	0.2
l	11	12	13	14	15

Примечание: параметр *p* определяется из условия нормировки:

$$\sum_{k=1}^{\lambda} p_k = 1$$

Задание 9

Получить на ЭВМ последовательность из N=200 реализаций дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона:

$$p\{x = x_i\} = \frac{a_i}{i!} e^{-a}; i = 1,2,\ldots$$

Статистический контроль провести с использованием *n=11* интервалов разбиения. (Уровень значимости *α=0.025*). Параметр *a* выбирается из таблицы вариантов.

Номер варианта	1	2	3	4	5
a	0.5	1	2	3	4

Задание 10

Выполнить задание **N9**, используя для моделирования случайной величины, распределенной по закону Пуассона, соотношение между экспоненциальным распределением и распределением Пуассона.

Задание 11

Выполнить задание **N3**, используя для моделирования нормированной нормальной величины следующий алгоритм (метод Марсальи-Брея):

1) сгенерировать две реализации r1 и r2 случайной величины, равномерно распределенной на интервале [0, 1);
2) полагая v1 = 2r1 – 1 и v2 = 2r2 – 1, вычислить $s = v_1^2 + v_2^2$;
3) при s >= 1 начать цикл снова,
   при s < 1 вычислить

$$x_1 = v_1\sqrt{\frac{-2\ln s}{s}} \quad \text{и} \quad x_2 = v_2\sqrt{\frac{-2\ln s}{s}}.$$

Затем получить реализации случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами (m,σ^2).

Задание 12

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей треугольное распределение

$$f(x) = \frac{2}{a(a+b)}(a+x), \quad -a <= x <= 0$$

$$f(x) = \frac{2}{b(a+b)}(b-x), \quad 0 <= x <= b$$

$$F(x) = \frac{(a+x)^2}{a(a+b)}, \quad -a \le x \le 0$$

$$F(x) = 1 - \frac{(b-x)^2}{b(a+b)}, \quad 0 \le x \le b$$

Параметры a и b выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 13

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, распределенной по биномиальному закону $p_n(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,2...,n;\ 0 < p < 1.$

Параметры распределения n и p выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 14

Выполнить задание **N3**, используя для моделирования нормированной нормальной величины следующий алгоритм:

1) вычислить $R = \dfrac{\sum_{i=1}^{12} r_i - 6}{4}$, r_i – реализации случайной величины, равномерно распределенной на интервале [0, 1);
2) вычислить $X = \left\{ \left\langle \left[\left(c_1 R^2 + c_2 \right) R^2 + c_3 \right] R^2 + c_4 \right\rangle R^2 + c_5 \right\} R$, где

   $c_1 = 0.029899776$ $c_4 = 0.252408784$

   $c_2 = 0.008355968$ $c_5 = 3.949846138$

   $c_3 = 0.076542912$

Затем получить реализации случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами (m, σ^2).

Задание 15

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей равномерное прямоугольное распределение

$$f(x) = \frac{1}{2a}, \qquad |x - b| < a$$

$$f(x) = 0, \qquad |x - b| > a$$

$$F(x) = 0, \qquad x \le b - a$$

$$F(x) = \frac{1}{2a}(x - b + a) \qquad b - a \le x \le b + a$$

$$F(x) = 1 \qquad x \ge b + a$$

Параметры a и b выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 16

Выполнить задание **N3**, используя для моделирования нормированной нормальной величины следующий алгоритм (метод Бокса-Маллера):

1) сгенерировать две реализации r1 и r2 случайной величины, равномерно распределенной на интервале [0, 1);
2) сгенерировать две реализации x1 и x2 нормированной нормальной случайной величины

$$x1 = -2\,\ln r1 \cos(2\pi r2); \qquad x2 = -2\,\ln r1 \sin(2\pi r2);$$

Затем получить реализации случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами (m, σ^2).

Задание 17

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей распределение Лапласа

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x-b|}{\beta}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{|x-b|}{\beta}}, \quad x \le b$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{|x-b|}{\beta}}, \quad x > b.$$

Параметры b и β выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 11 интервалов разбиения, $\alpha = 0.025$.

Задание 18

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей геометрическое распределение

$$p(x) = q(1-q)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots; \quad 0 < q < 1.$$

Параметр q выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.005$.

Задание 19

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей распределение Паскаля

$$p(x) = C_{m+x-1}^{x} q^m (1-q)^x, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots; \quad m = 1, 2, 3, \ldots; \quad 0 < q < 1.$$

Параметры m и q выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 20

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей гипергеометрическое распределение

$$p(x) = \frac{C_{N1}^{x} C_{N-N1}^{n-x}}{C_{N}^{n}},$$

$$x = 0,1,2,\dots,n; \quad N \ge n \ge 0; \quad N \ge N1; \quad N1 = qN; \quad 0 \le q \le 1.$$

Параметры n,q,N выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.025$.

Задание 21

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей Г- распределение $\Gamma(\alpha,\beta)$, если ее плотность распределения равна

$$f(x) = \beta^{\alpha} x^{(\alpha-1)} e^{-\beta x} / \Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad x \ge 0.$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad \text{– гамма – функция.}$$

Моделирование выполнить специальным методом с учетом того, что распределению $\Gamma(\alpha,\beta)$ подчинено распределение случайной величины $y = \frac{\bar{y}}{\beta}$. Случайная величина $\bar{y}$ имеет распределение $\Gamma(\alpha,1)$. Плотность распределения $\bar{y}$ при x > 0 равна $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x}$. Для целых α =n $\bar{y} = -\ln\left(\prod_{k=1}^{n} r_i\right)$, где r_i – независимые реализации случайной величины, равномерно распределенной на [0,1).

Параметры α и β выбрать самостоятельно.

Задание 22

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей распределение Хи-квадрат с n степенями свободы. Моделирование выполнить специальным методом с учетом того, что распределению Хи-квадрат с n степенями свободы подчиняется распределение случайной величины $y = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, где x_k – взаимно независимые реализации случайной величины, имеющей нормированное нормальное распределение с параметрами (0,1). Параметр n выбрать самостоятельно.

Задание 23

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, распределенной по усеченно-нормальному закону с параметрами (m,σ^2) и принимающей значения > 0.

Параметры m и σ выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.005$.

Задание 24

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей t-распределение Стьюдента с m степенями свободы. Моделирование выполнить специальным методом с учетом того, что t-распределению Стьюдента с m степенями свободы подчиняется распределение случайной величины

$$Y = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{1}{m}\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2\right)}}, \quad \text{где}$$

$x_0, x_1, \ldots, x_m$ – взаимно независимые реализации случайной величины, имеющей нормальное распределение с параметрами $(0,\sigma^2)$.

Параметры m и σ выбрать самостоятельно.

Задание 25

Получить N = 1000 реализаций случайной величины X, о которой собрана следующая статистическая информация: 20% значений находятся в диапазоне [0,50], 30% значений находятся в диапазоне]50,80], 10% значений находятся в диапазоне]80,100], 40% значений находятся в диапазоне]100,200].

Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 26

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей распределение

$$f(x) = \frac{a^2 x}{\left(1 + a^2 x^2\right)^{3/2}}, \quad x >= 0 \qquad\qquad F(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 x^2}}.$$

Параметр a выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 11 интервалов разбиения, $\alpha = 0.05$.

Задание 27

Получить N = 1000 реализаций случайной величины, имеющей распределение

$$f(x)=\frac{x}{a\sqrt{a^2-x^2}},\quad x\in[0,a) \qquad F(x)=1-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$
$$f(x)=0,\quad x\notin[0,a)$$

Параметр а выбрать самостоятельно. Статистический контроль провести с использованием 15 интервалов разбиения, $\alpha = 0.005$.

5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каковы особенности равномерного в интервале [0,1] распределения вероятностей? Как они используются при моделировании?
2. Опишите основные свойства и особенности закона распределения вероятностей, используемого в Вашем задании.
3. Каким методом Вы пользовались при моделировании случайной величины? Каковы особенности этого метода?
4. Поясните принцип моделирования, пользуясь блок-схемой программы модели.
5. Поясните структуру программы моделирования. Выделите в ней основные части, процедуры, блоки.
6. В чем заключается статистический контроль качества моделирования? Каковы особенности критерия согласия χ^2?
7. Приведите обоснование справедливости алгоритма (5).
8. Охарактеризуйте закон распределения вероятностей содержимого счетчика $СЧ_k$.
9. Докажите, что случайная величина x_i, определяемая из соотношения (1), действительно описывается законом распределения с плотностью $f(x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания «Моделирование случайных величин» посвящены рассмотрению методов и алгоритмов моделирования случайных величин с заданными законами распределения вероятностей.

Методические указания содержат рекомендации по организации статистического контроля качества получаемых реализаций случайных величин.

Логическим завершением методических указаний являются контрольные вопросы и индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов.

Вопросы, имеющие практическое значение для студентов при выполнении лабораторной работы, освещены с необходимой для использования полнотой.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Советов, Б. Я. Моделирование систем : учебник для академического бакалавриата / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. — 7-е изд. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 343 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс).
2. Советов, Б. Я. Моделирование систем. Практикум : учебное пособие для бакалавров / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 295 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс).

Методические материалы

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Методические указания

Составитель ***Симонова Елена Витальевна***

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Изд-во Самарского университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.