Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное образование
высшего профессионального образования
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА»

ВЕКТОРЫ

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

САМАРА 2005

Составители: Л.И. Калинкина, С.А. Стукалов

УДК 514.742

ВЕКТОРЫ. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ: Учебно-методическое пособие / Самар. гос. аэрокос. ун.т.; Сост. Л.И.Калинкина, С.А.Стукалов. Самара, 2005, 40 с.

ISBN 5 – 7883 – 0242 – 0

Учебно-методическое пособие является шестой частью методического обеспечения слушателей заочных подготовительных курсов СГАУ и предназначено для самостоятельной подготовки к экзамену по математике. В пособие включены все основные типы задач на векторы и применение производной.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета

Рецензенты: О.С.Иванова, А.Ю.Трусова

ISBN 5 – 7883 – 0242 – 0

СОДЕРЖАНИЕ

I. ВЕКТОРЫ

1. *ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ*

Многие физические величины, такие, как сила, скорость, ускорение и др., характеризуются не только числовым значением, но и направлением.

- Направленный отрезок называется вектором (рис.1).

Рис.1 Вектор

Направление вектора указывается стрелкой. Точка A называется началом, а точка B — концом вектора. Векторы обозначаются $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \ldots$, а также $\overline{AB}, \overline{CD}, \ldots$ (на первом месте ставится начало вектора).

- Если точка B совпадает с точкой A, то вектор называется нулевым и обозначается $\overline{0}$.
- Расстояние между началом и концом вектора называется длиной или модулем вектора. Длина вектора $\overline{a}$ обозначается $|\overline{a}|$. Длина нулевого вектора равна нулю.
- Векторы, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными. Обозначается $a \parallel b$.
- Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору, так как не имеет определенного направления.
- Коллинеарные векторы, имеющие одно и то же направление, называются сонаправленными (рис.2).
- Коллинеарные векторы, имеющие противоположные направления, называются противоположно направленными (рис.3).

Рис.2 Сонаправленные векторы

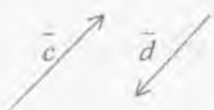

Рис.3 Противоположно направленные векторы

- Сонаправленные векторы, имеющие одинаковые длины, называются равными.

- Противоположно направленные векторы, имеющие одинаковые длины, называются <u>противоположными.</u>
- Вектор, длина которого равна единице, сонаправленный с вектором $\bar{a}$, называется <u>единичным</u> вектором.
- Единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\bar{a}$, называется <u>ортом вектора.</u>
- <u>Углом между любыми векторами</u> $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом. Угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю.
- Три и более вектора называются <u>компланарными</u>, если они параллельны одной и той же плоскости (или лежат в одной плоскости).

Сложение векторов

- Операция отыскания суммы векторов называется <u>сложением.</u>

а) правило треугольника

Чтобы сложить два вектора, нужно от конца первого вектора отложить второй вектор, <u>суммой</u> будет третий вектор, проведенный из начала первого в конец второго (рис.4)

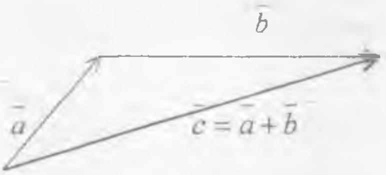

Рис.4 Правило треугольника

б) правило параллелограмма

<u>Суммой</u> двух неколлинеарных векторов, имеющих общее начало, называется третий вектор, имеющий то же начало и являющийся диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах, как на сторонах (рис.5).

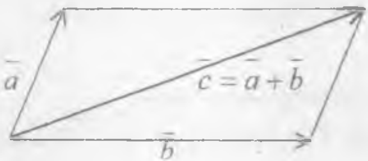

Рис.5 Правило параллелограмма

в) правило многоугольника

Чтобы сложить несколько векторов, нужно от любой точки отложить первый вектор, от его конца отложить второй вектор и т.д. Суммой будет вектор, проведенный из начала первого в конец последнего (рис.6). $\bar{b}$

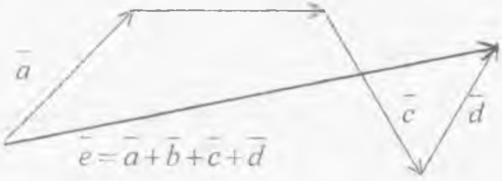

Рис.6 Правило многоугольника

г) правило параллелепипеда

- Три некомпланарных вектора откладывают от одной точки, строят на них, как на ребрах, параллелепипед, тогда диагональ параллелепипеда, исходящая из общего начала слагаемых векторов, будет их суммой (рис.7).

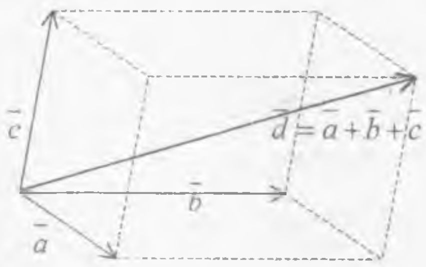

Рис.7 Правило параллелепипеда

Вычитание векторов

- Вектором, противоположным вектору $\overline{AB}$, называется вектор $\overline{BA}$, т.е. $\overline{BA}=-\overline{AB}$.

- <u>Разностью</u> векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. называется сумма вектора $\bar{a}$ и вектора $-\bar{b}$, противоположного $\bar{b}$.

Правило треугольника. Чтобы построить разность векторов $c = \bar{a} - \bar{b}$, нужно отложить векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ от одной точки и провести вектор $\bar{c}$ из конца вычитаемого вектора $\bar{b}$ в конец уменьшаемого вектора $\bar{a}$ (рис.8).

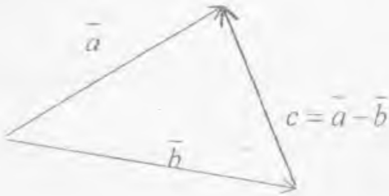

Рис.8 Вычитание векторов

<u>Законы сложения:</u> 1. Переместительный закон: $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

2. Сочетательный закон: $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$.

3. Закон поглощения нулевого вектора: $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$,

4. $\bar{a} + (-\bar{a}) = 0$.

Умножение вектора на число

<u>Произведением</u> ненулевого вектора $\bar{a}$ на действительное число $\lambda \neq 0$ называется вектор, длина которого равна $|\lambda \bar{a}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$, сонаправленный с вектором $\bar{a}$ (рис.9а), если $\lambda > 0$, и противоположно направленный с вектором $\bar{a}$ (рис.9б), если $\lambda < 0$ (при $\lambda = 0$, $\bar{a} = 0$).

Рис.9 Произведение векторов: а) если $\lambda > 0$, б) если $\lambda < 0$

Операция носит название <u>умножение вектора на число.</u>

Законы операций умножения вектора на число:

1. Переместительный закон: $\lambda\bar{a}=\bar{a}\lambda$.
2. Сочетательный закон: $\lambda_1(\lambda_2\bar{a})=(\lambda_1\lambda_2)\bar{a}$.
3. Первый распределительный закон: $(\lambda_1+\lambda_2)\bar{a}=\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{a}$.
4. Второй распределительный закон: $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$.
5. $\lambda\bar{0}=0\bar{a}=\bar{0}$.
6. $1\cdot\bar{a}=\bar{a}$.

Условие коллинеарности двух векторов

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует такое число λ, что выполняется равенство $\bar{b}=\lambda\bar{a}$.

Задача1. Диагонали параллелограмма $ABCD$ изображаются векторами $\overline{AC}=\bar{a}, \overline{BD}=\bar{b}$ (рис.10). Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AD}$. Сколько различных выражений получится?

Решение. Имеем:

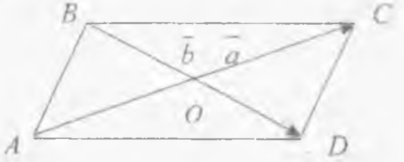

Рис. 10

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=-\frac{1}{2}\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{a};$$

$$\overline{CD}=\overline{OD}-\overline{OC}=\frac{1}{2}\bar{b}-\frac{1}{2}\bar{a};$$

$$\overline{BC}=\overline{OC}-\overline{OB}=\frac{1}{2}\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{b};$$

$$\overline{AD}=\overline{OD}-\overline{OA}=\frac{1}{2}\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{a}.$$

Мы получили три различных выражения, так как $\overline{BC}=\overline{AD}$.

Ответ: три.

<u>*Задача 2.*</u> В пирамиде $SABC$ все грани – правильные треугольники; точка M – центр треугольника ABC, а точка P делит ребро SC пополам (рис.11). Найдите разложение вектора $\overline{MP}$ по векторам $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AS}$.

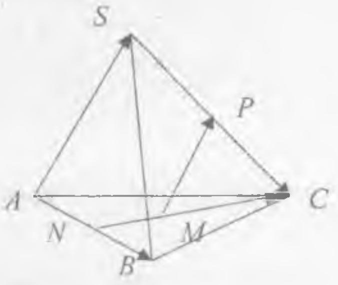

Рис. 11

Р е ш е н и е. Имеем $\overline{MP} = \overline{MC} - \overline{PC}$, где $\overline{PC} = \frac{1}{2}\overline{SC} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AS})$;

следовательно, $\overline{MP} = \overline{MC} - \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AS})$. Теперь найдем $\overline{MC}$.

В равностороннем треугольнике ABC имеем $\overline{MC} = \frac{2}{3}\overline{NC}$,

где CN – медиана треугольника, поэтому $\overline{MC} = \frac{2}{3}\overline{NC}$.

Но $\overline{NC} = \overline{AC} - \overline{AN} = \overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}$ и, значит

$$\overline{MC} = \frac{2}{3}(\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}) = \frac{2}{3}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB}$$

Таким образом, окончательно получим:

$$\overline{MP} = \frac{2}{3}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AS} = \frac{1}{6}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AS}.$$

Ответ: $\overline{MP} = \frac{1}{6}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AS}$.

2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ. БАЗИС

- Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_n}$ называются линейно зависимыми, если их

линейная комбинация $\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_n \overline{a_n} = 0$ и хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не равно нулю. В противном случае, т.е. если эта линейная комбинация равна нулю лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, векторы называются линейно независимыми.

- Линейная зависимость двух векторов равносильна их коллинеарности.

- Линейная зависимость трех векторов равносильна их компланарности.

- Линейно независимые векторы образуют базис плоскости (пространства), если все остальные векторы плоскости (пространства) можно выразить в виде линейной комбинации этих векторов.

- Базисом плоскости является любая пара неколлинеарных векторов.

- Базисом пространства является любая тройка некомпланарных векторов.

Пусть векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ являются базисом пространства. Тогда любой вектор $\overline{c}$ можно представить единственным образом в виде

$$\overline{c} = \lambda_1 \overline{e_1} + \lambda_2 \overline{e_2} + \lambda_3 \overline{e_3}.$$

- Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются координатами вектора $\overline{c}$ в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ Обозначают $\overline{c} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

- Если $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ взаимно перпендикулярные и единичные векторы, то базис называется декартовым. Его обозначают $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

В декартовом базисе координаты вектора $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ совпадают с его проекциями на оси координат: $a_x = np_{ox}\bar{a}$; $a_y = np_{oy}\bar{a}$; $a_z = np_{oz}\bar{a}$.

3. *ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИЮ, ЗАДАННЫМИ СВОИМИ КООРДИНАТАМИ*

Линейные операции над векторами переносятся на их координаты.

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $OXYZ$ (рис.12).

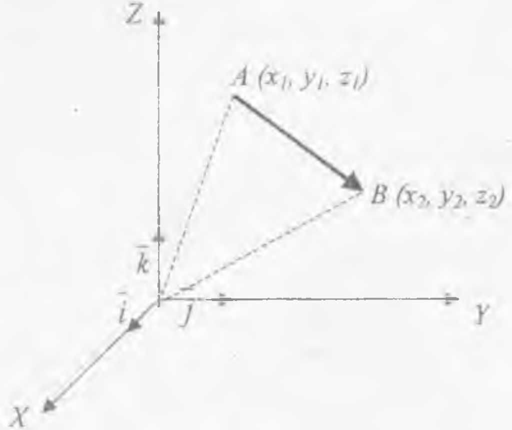

Рис. 12

Обозначим через $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ единичные векторы, отложенные от точки O в положительных направлениях на осях OX, OY, OZ, т.е. $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$.

Назовем их <u>координатными ортами</u>. Орты имеют координаты $\bar{i}(1;0;0)$; $\bar{j}(0;1;0)$; $\bar{k}(0;0;1)$.

Рассмотрим две точки пространства: $A\ (x_1, y_1, z_1)$ и $B\ (x_2, y_2, z_2)$ (рис.12), тогда $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ имеет координаты $(x_2\text{-}x_1;\ y_2\text{-}y_1,\ z_2\text{-}z_1)$.

Обозначим: $x_2\text{-}x_1 = x$; $y_2\text{-}y_1 = y$; $z_2\text{-}z_1 = z$.

- Для любого вектора $\overline{AB}(x;y;z)$ имеет место разложение $\overline{AB} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, которое называется разложением вектора $\overline{AB}$ по ортам или по осям координат.
- Длина вектора $\overline{AB}(x;y;z)$ определяется по формуле:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Рассмотрим линейные операции над векторами, заданными своими координатами.

Пусть $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = (a_x; a_y; a_z)$ и

$\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k} = (b_x; b_y; b_z)$. Тогда:

- $\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x)\bar{i} + (a_y + b_y)\bar{j} + (a_z + b_z)\bar{k} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z)$;
- $\bar{a} - \bar{b} = (a_x - b_x)\bar{i} + (a_y - b_y)\bar{j} + (a_z - b_z)\bar{k} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z)$;
- $\lambda\bar{a} = \lambda a_x\bar{i} + \lambda a_y\bar{j} + \lambda a_z\bar{k} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$.

Условие коллинеарности двух векторов, заданных своими координатами

- Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ <u>коллинеарны</u>, т.е. $\bar{a}(a_x; a_y; a_z) \,||\, \bar{b}(b_x; b_y; b_z)$ ($\bar{a} = \lambda\bar{b}$), то их координаты пропорциональны

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda .$$

Задача 3. На плоскости даны три вектора $\bar{a}(3;-2)$, $\bar{b}(-2;1)$, $\bar{c}(7;-4)$. Проверить, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис плоскости и найти координаты вектора $\bar{c}$ в этом базисе.

Р е ш е н и е. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ являются неколлинеарными, так как их координаты не пропорциональны $\frac{3}{-2} \neq \frac{-2}{1}$. Следовательно, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис. Координаты вектора $\bar{c}$ в базисе векторов $\bar{a}, \bar{b}$ есть коэффициенты линейного разложения $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$. Перепишем это равенство в координатной форме: $\begin{cases} 7 = 3\alpha - 2\beta, \\ -4 = -2\alpha + \beta. \end{cases}$ Решая систему, находим $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Итак, $\bar{c} = \bar{a} - 2\bar{b}$.

Ответ: $\bar{c} = \bar{a} - 2\bar{b}$.

Задача 4. Заданы векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ своими координатами: $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$; $\bar{b} = -3\bar{j} - 2\bar{k}$; $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$. Найдите координаты вектора $\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b} + \bar{c}$.

Р е ш е н и е. По условию задачи $\bar{a} = (2; 3; 0)$, $\bar{b} = (0; -3; -2)$, $\bar{c} = (1; 1; -1)$. Используя операции сложения ($\bar{a} + \bar{b}$), вычитания ($\bar{a} - \bar{b}$) и умножения вектора на число, имеем:

$$\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b} + \bar{c} = (2 - 0 + 1;\ 3 + \frac{3}{2} + 1;\ 0 + 1 - 1) = (3; \frac{11}{2}; 0).$$

Ответ: $\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b} + \bar{c} = (3; \frac{11}{2}; 0)$.

Задача 5. Даны векторы $\bar{a} = (3; -2; 1)$, $\bar{b} = (-2; 4; -3)$. Тогда длина вектора $\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$ равна

1) $\sqrt{110}$ 2) $\sqrt{113}$ 3) $\sqrt{115}$ 4) $\sqrt{116}$ 5) $\sqrt{117}$

Р е ш е н и е. Используя операции сложения векторов и умножения вектора на число, заданных в координатной форме, найдем координаты вектора $\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b} = (2\cdot3+3\cdot(-2);\ 2\cdot(-2)+3\cdot4;\ 2\cdot1+3\cdot(-3)) = (0; 8; -7)$. Тогда $|\bar{c}| = \sqrt{64 + 49} = \sqrt{113}$. Следовательно, выбираем ответ под номером 2.

Ответ: 2.

Задача 6. Если векторы $\bar{a}\,(3; -2; \alpha)$ и $\bar{b}(\beta; 4; 2)$ коллинеарны, то сумма $\alpha + \beta$ равна

1) –6 2) 4 3) 6 4) –7 5) 7

Р е ш е н и е: Из условия коллинеарности векторов следует:

$$\frac{3}{\beta}=\frac{-2}{4}=\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{3}{\beta}=-\frac{1}{2}; \quad \frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \beta=-6; \quad \alpha=-1.$$

Тогда $\alpha+\beta=-1-6=-7$. Следовательно, выбираем ответ под номером 4.

Ответ: 4.

4. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

- Скалярным произведением векторов в пространстве $\bar{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\bar{b}(x_2; y_2; z_2)$ называется число $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$.
- Скалярным произведением $\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$.
- Свойства скалярного произведения: 1. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$

  2. $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$.

  3. $\lambda(\beta\bar{a})=(\lambda\beta)\bar{a}$.

  4. $(\alpha+\beta)\bar{a}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}$.

- Скалярное произведение векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними, т.е.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$$

- Скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю. И обратно: если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.

Задача 7. Даны векторы $\bar{a}(1; 4)$ и $\bar{b}(-3; 2)$. Найти такое число λ, при котором вектор $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$.

Р е ш е н и е. Векторы $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Вектор $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ имеет координаты $\bar{a}+\alpha\bar{b}=(1-3\alpha; 4+2\alpha)$, тогда скалярное произведение векторов $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ и $\bar{b}$ равно $(1-3\alpha)\cdot(-3)+(4+2\alpha)\cdot 2=5+13\alpha$, $5+13\alpha=0$, $\alpha=-\frac{5}{13}$.

Итак, при $\alpha=-\frac{5}{13}$, векторы $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны.

Ответ: $\alpha = -\dfrac{5}{13}$.

Задача 8. Даны векторы $\bar{a}(5;-2;3)$, $\bar{b}(2;-3;1)$; $\bar{c} = \bar{a} - 2\bar{b}$. Тогда угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{c}$ равен

1) $\dfrac{\pi}{4}$ 2) $\dfrac{\pi}{6}$ 3) 0 4) $\dfrac{\pi}{3}$ 5) $\dfrac{\pi}{2}$

Р е ш е н и е. Найдем координаты вектора $\bar{c}(c_1; c_2; c_3)$ используя линейные операции над векторами, заданными своими координатами.

$$c_1 = a_1 - 2b_1 = 5 - 4 = 1;$$
$$c_2 = a_2 - 2b_2 = -2 + 6 = 4;$$
$$c_3 = a_3 - 2b_3 = 3 - 2 = 1$$

и вычислим косинус угла φ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{c}$:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{c}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{c}|} = \frac{5 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1}{|\bar{a}| \cdot |\bar{c}|} = 0.$$

Следовательно, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, и выбираем ответ под номером 5.

Ответ: 5.

Задача 9. Если вектор $\bar{a}(x; 2; z)$ перпендикулярен вектору $\bar{b}(2; 3; -2)$ и оси OX, то сумма координат $x + z$ равна

1) 2 2) 4 3) –3 4) 3 5) 5.

Р е ш е н и е . Из условия перпендикулярности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ следует, что $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 6 - 2z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - z = -3$. Из условия перпендикулярности вектора $\bar{a}$ и оси OX следует $\bar{a} \cdot \bar{i} = 0$, где $\bar{i}(1; 0; 0)$ – направляющий вектор оси OX. Тогда $x \cdot 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = 3$. Следовательно, $x + z = 3$, и выбираем ответ под номером 4.

Ответ: 4.

Задача 10. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ составляют угол 30^0 и скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b} = \sqrt{3}$, то площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, равна

1) 2 2) $\sqrt{3}$ 3) $\frac{3}{2}$ 4) $\frac{1}{2}$ 5) 1

Р е ш е н и е. Как известно, площадь параллелограмма $S = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$,

где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Следовательно,

$S = |\bar{a}||\bar{b}| \cdot \sin 30^0 = \frac{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}{2}$. По условию задачи $\bar{a} \cdot \bar{b} = \sqrt{3}$ или

$|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| = 2$. Тогда $S = \frac{2}{2} = 1$, и выбираем ответ 5.

Ответ: 5.

<u>*Задача 11.*</u> В треугольнике с вершинами в точках $A\ (3;\ -2;\ 1)$, $B\ (3;\ 0,\ 2)$ и $C\ (1;\ 2;\ 5)$ угол, образованный медианой BD и основанием AC, равен

1) $\frac{\pi}{6}$ 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) $\frac{\pi}{4}$ 5) $\arccos\frac{1}{3}$

Р е ш е н и е. Находим координаты точки D как середины отрезка AC:

$$\boxed{x_D = \frac{x_A + x_C}{2} = 2;\quad y_D = \frac{y_A + y_C}{2} = 0;\quad z_D = \frac{z_A + z_C}{2} = 3.}$$

После этого вычисляем координаты векторов $\overline{BD}$ и $\overline{AC}$: $\overline{BD}$ (-1; 0; 1) и $\overline{AC}$ (-2; 4; 4). Далее находим косинус угла φ между векторами $\overline{BD}$ и $\overline{AC}$:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{|\overline{BD}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{2+4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{36}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$, и выбираем ответ под номером 4.

Ответ: 4.

<u>*Задача 12.*</u> Даны векторы $\bar{a}(1;\ \log_2 3;\ p)$, $\bar{b}(3;\ \log_3 2,\ 4)$. При каком значении параметра p векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны?

Р е ш е н и е. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда произведение $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$. Найдите скалярное произведение векторов: $\bar{a}\cdot\bar{b}=1\cdot 3+\log_2 3\cdot\log_3 2+4p$. По свойству логарифмов, имеем $\log_2 3\cdot\log_3 2=1$, откуда $\bar{a}\cdot\bar{b}=4+4p$. Поскольку $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$, то $4+4p=0$, $p=-1$.

Ответ: $p=-1$.

<u>Задача 13.</u> Дан вектор $\bar{a}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\ln 4}^{\ln 6}e^x dx;\ e^{\ln 2};\ -3^{\frac{1}{\log_4 3}}\right)$, вектор $\bar{b}$ коллинеарен вектору $\bar{a}$, $|\bar{b}|=\sqrt{84}$. Известно, что вектор $\bar{b}$ образует с осью ОУ тупой угол. Найдите длину вектора $\bar{c}=3\bar{a}+2\bar{b}$.

Р е ш е н и е. Заметим, что $\int\limits_{\ln 4}^{\ln 6}e^x dx=e^x\Big|_{\ln 4}^{\ln 6}=6-4=2$, $3^{\frac{1}{\log_4 3}}=3^{\log_3 4}=4$.

Поэтому перепишем вектор $\bar{a}$ в следующем виде: $\bar{a}(1;\ 2;\ -4)$. Учитывая, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, имеем $\bar{b}(p;\ 2p;\ -4p)$. $|\bar{b}|=\sqrt{21p^2}=|p|\sqrt{21}$.

Значит, $|p|\sqrt{21}=\sqrt{84}$, $|p|=2$. Поскольку $\bar{b}$ образует с осью ОУ тупой угол, то $2p<0$ и $p=-2$. Следовательно, имеем вектор $\bar{b}\,(-2;\ -4;\ 8)$. Тогда

$3\bar{a}+2\bar{b}=\bar{c}\,(-1;\ -2;\ 4)$;

$|3\bar{a}+2\bar{b}|=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}$.

Ответ: $\sqrt{21}$.

Задачи для самостоятельного решения

1.Даны векторы $\bar{a}=\bar{i}+m\bar{j}-\bar{k}$ и $\bar{b}=2\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

2. Даны векторы $\bar{a}\,(1;\ 2;\ 3)$, $\bar{a}-\bar{b}=(4;\ 5;\ 6)$, $\bar{c}\,(3;\ 4;\ 8)$. Найти длину вектора $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$.

3. Длина вектора $\bar{a}\,(m+3;\ m;\ 2)$ не превышает 3 для всех значений m, принадлежащих множеству

1) $[-2; -1]$ 2) $[-3; 0]$ 3) $[-1; 2]$ 4) $[0; 2]$ 5) $[1; 3]$

4. Даны векторы $\bar{a}\,(3; -1; 4)$, $\bar{b}\,(2; 1; 3)$ и $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$. Тогда косинус угла между векторами $\bar{c}$ и $\bar{b}$ равен

1) $\frac{1}{\sqrt{84}}$ 2) $-\frac{1}{\sqrt{84}}$ 3) $\frac{5}{\sqrt{84}}$ 4) $-\frac{5}{\sqrt{84}}$ 5) $\frac{3}{\sqrt{84}}$

5. Даны векторы $\bar{a}\,(\alpha+3\beta;\ 2;\ \ 2)$ и $\bar{b}\,(-3; -1; \alpha+\beta)$ коллениарны, то произведение $\alpha\cdot\beta$ равно

1) $\frac{63}{4}$ 2) $\frac{65}{4}$ 3) $-\frac{63}{4}$ 4) $-\frac{65}{4}$ 5) $\frac{61}{4}$

6. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ составляют угол 60^0 и скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{b} = 2$, то площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, равна

1) $2\sqrt{2}$ 2) 4 3) $2\sqrt{3}$ 4) $3\sqrt{3}$ 5) $\sqrt{3}$

7. Если в параллелограмме $ABCD$ заданы А (-5; 2; 8), $\overline{AB}\,(-3; 4; 1)$ и $\overline{BD}\,(-2; 4; 1)$, то сумма координат вершины C равна

1) 9 2) 10 3) 11 4) 12 5) 13

8. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол в 120^0 и $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$, то длина вектора $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ равна

1) $\sqrt{17}$ 2) $\sqrt{11}$ 3) $\sqrt{14}$ 4) $\sqrt{15}$ 5) $\sqrt{19}$

Ответы: 1. 1; 2. $\sqrt{74}$; 3. $\left(\frac{3}{5}\ \frac{4}{5}\right)$.

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

1. *ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ*

- Производную $y' = f'(x)$ при данном значении аргумента x следует рассматривать как скорость изменения функции $y = f(x)$. Если производная положительная, то функция возрастает, причём чем больше значение производной, тем быстрее растёт функция, тем круче расположен её график . Если производная отрицательная, то функция убывает.

На рис.1 самое большое значение производной в точке x_1, т.к. здесь график расположен круче по отношению к оси ox, чем в других точках. В точке x_2 график функции $y = f(x)$ более пологий, поэтому значение производной меньше: $f'(x_2) < f'(x_1)$. При этом производные в точках x_1, x_2 положительные, т.к. функция возрастает. Производная в точке x_4 отрицательная, т.к. функция убывает. В точке x_3 производная $f'(x_3) = 0$.

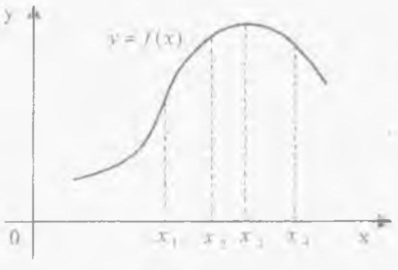

Рис.1

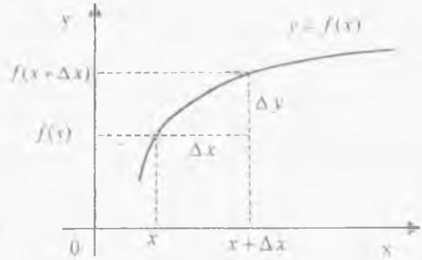

Рис. 2

Среднее значение производной находят аналогично среднему значению скорости точки, движущейся по прямой: $v_{ср} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$, где ΔS-путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Дадим аргументу x приращение Δx (см. рис. 2). Пусть при этом функция получит приращение Δy. Тогда среднее значение производной $y'_{ср} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Точное значение производной в данной точке x получим, если будем уменьшать Δx так, чтобы наклон графика функции не успел бы измениться на отрезке Δx. Таким образом получим определение производной:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

➢ ***Производная равна пределу отношения приращения функции к приращению аргумента.***

Поскольку $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ (см. рис. 2), то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

В качестве примера, пользуясь определением, найдём значение производной от функции $y = x^2$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Аналогично находят производные от других функций. Таким образом получили таблицу производных.

$(x^n)' = n x^{n-1}$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
$(\sin x)' = \cos x$	$(e^x)' = e^x$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(C)' = 0$

Если $u = u(x)$, $v = v(x)$, то производные от суммы этих функций, произведения и частного находят по формулам:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(u \cdot v \cdot z)' = u' \cdot v \cdot z + u \cdot v' \cdot z + u \cdot v \cdot z'$$

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

ПРИМЕР 1. Найти производную от функции

$$y = x^3 + \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x + 3.$$

Решение. Используем формулу $\left(x^n\right)' = n x^{n-1}$:

$$\left(x^3\right)' = 3x^2;\ \left(\frac{1}{x^3}\right)' = \left(x^{-3}\right)' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4};$$

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{и т. д.}$$

Окончательно получим $\quad y' = 3x^2 - \frac{3}{x^4} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} + 1.$

ПРИМЕР 2. Найти производную от функции

$$y = 2^x + 3^x + e^x + e^2 + \log_2 x + \log_3 x + \ln x + \ln 2.$$

Решение. Пользуясь таблицей производных, получим:

$$y' = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + e^x + \frac{1}{x\ln 2} + \frac{1}{x\ln 3} + \frac{1}{x}.$$

Обратим внимание, что производные от e^2, $\ln 2$ равны нулю как производные от констант.

Задачи для самостоятельного решения

Найти производные от заданных функций:

1) $y = x^4 + \frac{1}{x^4} + \sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + x + 4;$

2) $y = 4^x + 5^x + e^x + \log_4 x + \log_5 x + \ln x;$

3) $y = \sin x + tgx + \cos x + ctgx;$

4) $y = \sin 2 + \ln 3;$

Ответы: 1) $4x^3 - \frac{4}{x^5} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}} + 1;$

2) $4^x \ln 4 + 5^x \ln 5 + e^x + \frac{1}{x\ln 4} + \frac{1}{x\ln 5} + \frac{1}{x};$ 3) $\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x - \frac{1}{\sin^2 x};$

4) 0 .

2. ПРОИЗВОДНАЯ ОТ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

➢ Функция называется <u>сложной</u>, если содержит действие « взятие функции от функции ».

Например, рассмотрим функцию $y = \sin\left(x^3\right)$. Её значение вычисляется так: берётся некоторое число x, возводится в куб. Таким образом получили значение промежуточной функции x^3, которое, в свою очередь, является аргументом для следующей функции – синуса. Это и есть то, что называется взятием функции от функции.

В качестве противоположного примера рассмотрим функцию

$$y = \frac{x \cdot \sin x + tgx}{\left(x^2 - 3x + 1\right) \cdot \cos x}$$

Эта функция не является сложной, т.к. здесь есть действия сложения, вычитания, умножения, деления, но нет действия взятия функции от функции.

В общем виде сложная функция может быть записана

$$y = F\left(u(x)\right)$$

или $\quad y = F\left(u\right)$, $\quad$ где $\quad u = u(x)$.

Здесь x - независимая переменная (аргумент);

u - промежуточный аргумент;

F -функция от промежуточного аргумента;

y - функция.

Производную от сложной функции находят по формуле

$$y' = F'_u \cdot u'_x .$$

где F'_u - производная по промежуточному аргументу u;

u'_x - производная по независимой переменной x.

<u>ПРИМЕР 1.</u> Найти производную от функции $y = \sin\left(x^3\right)$.

Решение. Представим эту функцию в виде $y = \sin\left(u\right)$, где $u = x^3$.

Тогда $y' = F'_u \cdot u'_x = (\sin u)'_u \cdot (x^3)'_x = \cos u \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos\left(x^3\right)$.

Обычно решение записывают короче: $y' = \cos\left(x^3\right) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos\left(x^3\right)$.

<u>ПРИМЕР 2.</u> Найти производную от функции $y = \sin^3 x$.

Решение. Эта функция отличается от функции в предыдущем примере последовательностью действий: есть значение независимой переменной x, от него находят синус, затем полученный результат возводят в куб. Таким образом, функцию можно представить в виде $y = u^3$, где $u = \sin x$. Тогда

$y' = F'_u \cdot u'_x = \left(u^3\right)'_u \cdot (\sin x)'_x = 3u^2 \cdot \cos x = 3\sin^2 x \cdot \cos x$.

Обычно решение записывают короче: $y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$.

ПРИМЕР 3. Найти производную от функции $y=\sqrt{\ln\left(x^2+5x+6\right)}$.

Решение. Схематично определим последовательность действий при вычислении этой функции: x; x^2+5x+6; $\ln$; $\sqrt{\ }$. Здесь уже два промежуточных аргумента. Производную находим как бы в обратном порядке: сначала от квадратного корня, затем от логарифма, затем от квадратного трёхчлена. Кратко решение можно записать так:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+5x+6}}\cdot\frac{1}{x^2+5x+6}\cdot(2x+5)=\frac{2x+5}{2\sqrt{\left(x^2+5x+6\right)^3}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти производные:

1) $y=\cos^4 x$

2) $y=(5x+3)^{20}$

3) $y=e^{x^2+5x+6}$

4) $y=\ln(3x+2)$

5) $y=\sqrt{tgx}$

6) $y=tg\sqrt{x}$

7) $y=\sqrt{\sin\left(x^2+5x+6\right)}$

8) $y=\sin\sqrt{x^2+2x+6}$

9) $y=x^2\cdot\cos\dfrac{1}{x}$

10) $y=x\cdot ctg\dfrac{1}{x^2}$

11) $y=\dfrac{\ln\left(1-x^2\right)}{x}$

12) $y=\dfrac{x}{\cos(\ln x)}$

Ответы:

1) $4\cos^3 x\cdot\sin x$

2) $100\cdot(5x+3)^{19}$

3) $(2x+5)\cdot e^{x^2+5x+6}$

4) $\dfrac{3}{3x+2}$

5) $\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{tgx}\cdot\cos^2 x}$

6) $\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$

7) $\dfrac{(2x+5)\cdot\cos\left(x^2+5x+6\right)}{2\cdot\sqrt{\sin\left(x^2+5x+6\right)}}$

8) $\dfrac{(x+1)\cdot\cos\sqrt{x^2+2x+6}}{\sqrt{x^2+2x+6}}$

9) $2x\cdot\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}$

10) $ctg\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^2\cdot\sin^2\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}$

11) $-\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}$

12) $\dfrac{\cos(\ln x)+\sin(\ln x)}{\cos^2(\ln x)}$

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Мы уже говорили о том, что чем больше производная, тем круче по отношению к оси ox располагается график функции . Значит производная связана с углом наклона касательной.

- Производная в данной точке x равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой в соответствующей точке графика (см. рис 3):

$$y' = tg\alpha .$$

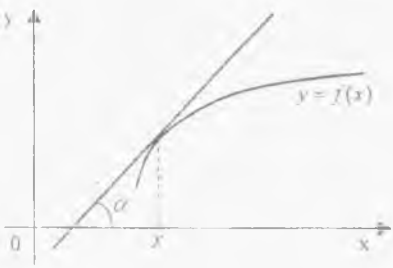

Рис. 3

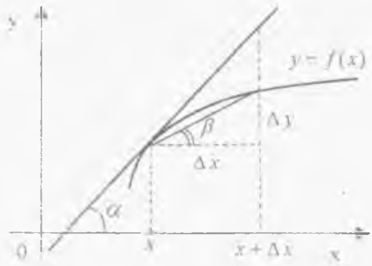

Рис. 4

Это легко показать с помощью определения производной (см. рис.4) : $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\,\beta = tg\,\alpha$. Здесь угол наклона секущей β стремится к углу наклона касательной α при $\Delta x \to 0$.

Замечание. Чтобы равенство $y' = tg\alpha$ было верным, необходимо и достаточно, чтобы масштаб по осям ox и oy был одинаков (равные единичные отрезки) .

ПРИМЕР 1 . Под какими углами график функции $y = \sin x$ пересекает ось ox в точках $x = 0$ и $x = \pi$?

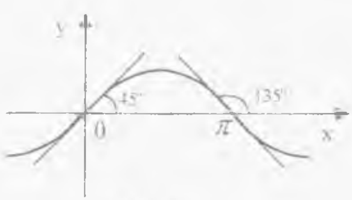

Рис. 5

Решение . Используем геометрический смысл производной $f'(x) = tg\alpha$:

$f(x) = \sin x$; $f'(x) = \cos x$;

$f'(0) = \cos 0 = 1$; $tg\alpha = 1$; $\alpha = 45^o$.

$f'(\pi) = \cos \pi = -1$; $tg\alpha = -1$; $\alpha = 135^o$.

Таким образом, график $y = \sin x$ пересекает ось ox под углами 45^o и 135^o (см. рис. 5) .

ПРИМЕР 2. Найти на графике функции $y = x^2$ координаты точки касания для касательной, расположенной под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси ox.

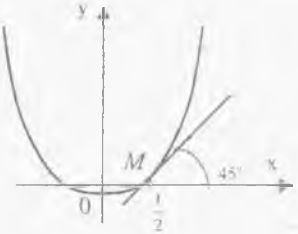

Рис. 6

Решение. Используем геометрический смысл производной: $f'(x) = tg\,\alpha$;

$f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x$;

$tg\,\alpha = tg\,45^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x = 1; \quad x = \frac{1}{2}; \; y = \frac{1}{4}$.

Ответ: точка касания $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ (см. рис. 6).

ПРИМЕР 3. Найти точку x, в которой касательные к графикам функций $y = x^2 + 2x + 3$; $y = x^3 - 6x$ параллельны.

Решение. Схематично сделаем рисунок (см. рис. 7). Поскольку углы наклона двух касательных равны, то равны и производные двух функций в точке x: $\quad 2x + 2 = 3x^2 - 6$.

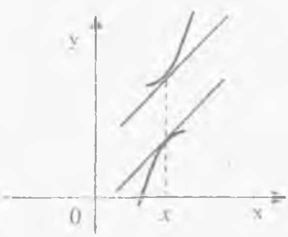

Рис. 7

Отсюда $3x^2 - 2x - 8 = 0$; $x_1 = -\frac{4}{3}$; $x_2 = 2$.

Таким образом, есть два значения x, для каждого из которых касательные к графикам обеих функций параллельны.

Ответ: $x = -\frac{4}{3}$; $x = 2$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Под каким углом график функции $y = tg\left(\sqrt{3}\,x\right)$ пересекает ось $0x$?
2. Определить точки на графике функции $y = -x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, в которых касательные параллельны прямой $y = 4 - 2x$. В ответе указать координаты этих точек.
3. При каких значениях параметра m касательная к графику функции $y = \ln(mx + 3)$ в точке $x = 1$ параллельна к прямой $y = mx + 6$?

Ответы:

1) $\dfrac{\pi}{3}$;   2) $(2;5)$, $\left(-\dfrac{1}{3};\ \dfrac{16}{27}\right)$;   3) 0; 2

4. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

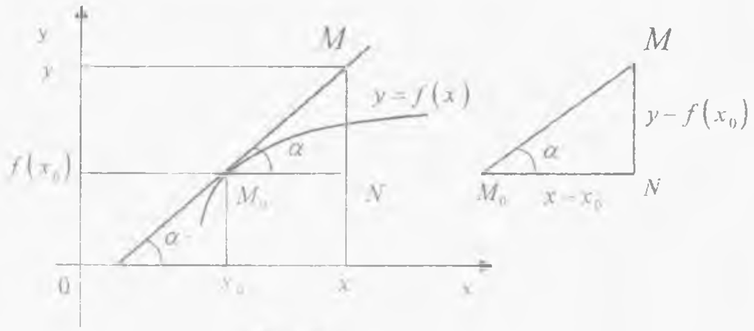

Рис. 8

Пусть задана функция $y = f(x)$ и точка x_0 на оси ox (см. рис.8). Нужно записать уравнение касательной к графику функции для заданного значения аргумента. Точка касания $M_0(x_0; f(x_0))$. Возьмём произвольную точку на прямой (касательной) $M(x; y)$. Из прямоугольного треугольника M_0MN найдём $tg\,\alpha = \dfrac{y - f(x_0)}{x - x_0}$. Учитывая геометрический смысл производной $tg\,\alpha = f'(x_0)$, получим $f'(x_0) = \dfrac{y - f(x_0)}{x - x_0}$.

Отсюда <u>уравнение касательной</u> $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

<u>ПРИМЕР 1.</u> Оси координат и касательная к графику функции $y = x^2 - 4x + 5$, проведённая в точке $x_0 = 1$, образуют треугольник. Найти его площадь.

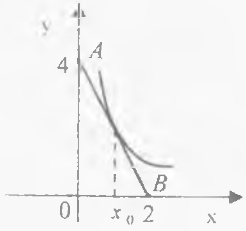

Рис. 9

Решение. В этой задаче в начале решения полезно сделать схематичный рисунок (см. рис. 9). Уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Здесь $x_0 = 1$; $f(x_0) = f(1) = 1^2 - 4\cdot 1 + 5 = 2$;

$f'(x) = 2x - 4$; $f'(x_0) = f'(1) = -2$.

Уравнение касательной

$y = 2 - 2\cdot(x - 1)$ или $y = -2x + 4$.

Пересечения касательной к осям координат : точка A: $x = 0$; $y = 4$, точка B: $y = 0$; $x = 2$. Площадь треугольника AOB $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$.

Ответ: 4 .

<u>ПРИМЕР 2 .</u> Записать уравнение касательной к графику функции $y = \frac{x^3 - 1}{x}$ в точке пересечения графика с осью абсцисс.

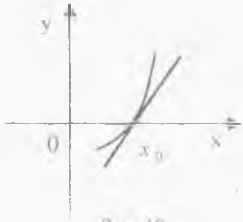

Рис. 10

Решение . Схематично касательная и график показаны на рис. 10 . Уравнение касательной в общем виде $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Чтобы найти x_0; примем $f(x_0) = 0$. Отсюда

$$\frac{x_0^3 - 1}{x_0} = 0; \quad x_0 = 1. \text{ Производная } f'(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2};$$

$f'(x_0) = f'(1) = 3$. Уравнение касательной $y = 3(x - 1)$ или $y = 3x - 3$.

Ответ: $y = 3x - 3$.

<u>ПРИМЕР 3 .</u> Записать уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + 4x + 5$, если касательная имеет положительный угловой коэффициент и проходит через точку $B(-3; -2)$.

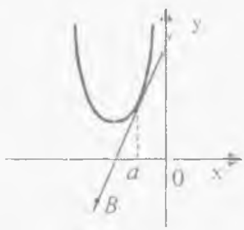

Рис. 11

Решение . Схематично касательная и график показаны на рис. 11. Точка B не лежит на графике. В этом можно убедиться, подставив координаты точки в уравнение. Уравнение касательной в общем виде $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Значение x_0 пока неизвестно, примем $x_0 = a$. Тогда

$f(x_0) = f(a) = a^2 + 4a + 5$; $f'(x) = 2x + 4$;
$f'(x_0) = f'(a) = 2a + 4$.

Уравнение касательной имеет вид $y = a^2 + 4a + 5 + (2a + 4) \cdot (x - a)$.
Координаты точки $B(-3; -2)$ должны удовлетворять этому уравнению:
$-2 = a^2 + 4a + 5 + (2a + 4) \cdot (-3 - a)$. Отсюда получили квадратное уравнение $a^2 + 6a + 5 = 0$, с корнями $a_1 = -1$; $a_1 = -5$. Подставив эти значения в последнее уравнение касательной, получим $y = 2x + 4$; $y = -6x - 20$.
Условию задачи соответствует уравнение с положительным угловым коэффициентом $y = 2x + 4$.

Ответ: $y = 2x + 4$.

ПРИМЕР 4. Касательная к параболе $y = x^2 + mx + 16$ проходит через начало координат. Найдите значение параметра m , при котором абсцисса точки касания положительна , а ордината равна 8 .

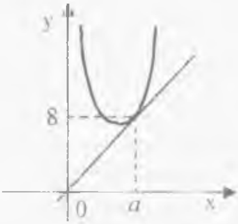

Рис. 12

Решение. Схематично касательная и график показаны на рис. 12. Уравнение касательной в общем виде $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$. Значение x_0 неизвестно, примем $x_0 = a$. Тогда $f(x_0) = f(a) = a^2 + ma + 16$; $f'(x) = 2x + m$; $f'(x_0) = f'(a) = 2a + m$.

Уравнение касательной имеет вид $y = a^2 + ma + 16 + (2a + m)\cdot(x - a)$. Касательная проходит через начало координат , поэтому координаты точки $O(0;0)$ должны удовлетворять этому уравнению:

$0 = a^2 + ma + 16 + (2a + m)\cdot(0 - a)$. Отсюда $a^2 = 16$, $a_{1,2} = \pm 4$. В соответствии с условиями задачи примем $x_0 = a = 4$. Таким образом точка касания имеет координаты $(4; 8)$. Подставив эти значения в уравнение параболы, получим $8 = 4^2 + 4m + 16$, откуда $m = -6$.

Ответ: $m = -6$.

ПРИМЕР 5*. Найдите уравнения общих касательных к графикам функций $y = x^2 - 2x + 3$, $y = -x^2 + 4x - 2$.

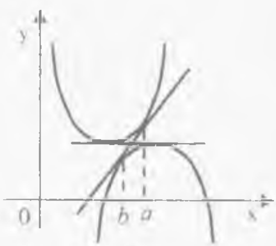

Рис. 13

Решение. Пусть одна из касательных (см. рис. 13) имеет точки касания с графиками с абсциссами a и b . Тогда уравнение касательной можно записать для первого графика $y = a^2 - 2a + 3 + (2a - 2)\cdot(x - a)$, для второго графика $y = -b^2 + 4b - 2 + (-2b + 4)\cdot(x - b)$.

После преобразований получим :

$y = (2a - 2)\cdot x - a^2 + 3$;

$y = (-2b + 4)\cdot x + b^2 - 2$.

Поскольку два уравнения соответствуют одной прямой, то угловые коэффициенты и свободные члены соответственно равны: $\begin{cases} 2a-2=-2b+4 \\ -a^2+3=b^2-2 \end{cases}$. Система имеет два решения: $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$.

Подставим значения $a=1$, $a=2$ в уравнение касательной. Получим $y=2$ или $y=2x-1$.

Ответ: $y=2$ или $y=2x-1$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Записать уравнение касательной к графику функции $y=\dfrac{x^3-8}{x^2}$ ***в точке пересечения с осью абсцисс. Найти площадь треугольника,*** образованного касательной и осями координат.
2. Записать уравнение касательной к графику функции $y=x^2+4x+5$, если касательная имеет отрицательный угловой коэффициент и проходит через точку $B(4;-5)$.
3. Касательная к параболе $y=x^2+mx+4$ проходит через начало координат. Найдите значение параметра m, при котором абсцисса точки касания отрицательна, а ордината равна 4.
4. Найдите уравнения общих касательных к графикам функций $y=x^2+x+13$, $y=-x^2+5x+3$.

Ответы:

1) $y=3x-6;\ S=6$; 2) $y=-2x+5$; 3) 2;
4) $y=7x+4$; $y=-x+12$.

5. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть материальная точка движется по координатной оси oS (рис. 14) и задан закон движения в зависимости от времени t: $S=S(t)$.

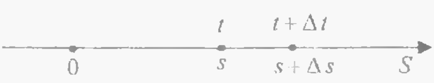

Рис. 14.

Пусть в момент времени t точка занимала положение s, а через промежуток времени Δt занимает положение $s+\Delta s$. Тогда среднюю скорость за промежуток времени Δt можно определить: $v_{ср}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$,

где Δs -путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt. Точное значение скорости в данный момент времени t получим при $\Delta t \to 0$:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}= S'(t).$$

Аналогично определяют ускорение точки :

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}= v'(t)=S''(t).$$

- **Таким образом, скорость точки равна производной от координаты по времени, а ускорение – производной от скорости по времени или второй производной от координаты:**

$$v=S'(t);\quad a=v'(t)=S''(t).$$

ПРИМЕР 1. При движении точки по прямой расстояние S (в метрах) от начальной точки движения изменяется по закону $S(t)=\frac{t^3}{3}-2t^2+7t+1$ (t - время движения в секундах). Найдите скорость и ускорение точки через 5 секунд после начала движения. Найдите наименьшую скорость точки. В какой момент времени она достигается ?

Решение. Скорость $v=S'(t)=t^2-4t+7$; $v(5)=12$.
Ускорение $a=v'(t)=2t-4$; $a(5)=6$.

Найдём наименьшую скорость: $v=t^2-4t+7=t^2-4t+4+3=(t-2)^2+3$.
Первое слагаемое неотрицательно, поэтому $v_{наим}=v(2)=3$.

Ответ: $v(5)=12$, $a(5)=6$, $v_{наим}=v(2)=3$.

ПРИМЕР 2. Точка движется по прямой по закону
$S(t)=\frac{m^2(t-7)^2}{2}-5mt+6t+1$. Найти значения параметра m, для которых при $t=8$ скорость точки будет равняться нулю.

Решение. Скорость $v=S'(t)=m^2(t-7)-5m+6$; $v(8)=m^2-5m+6$;
$m^2-5m+6=0$, отсюда $m=2$; $m=3$.

Ответ: 2 ; 3 .

Задачи для самостоятельного решения

1. При движении точки по прямой её координата S (в метрах) изменяется по закону $S(t)=\frac{t^3}{3}-3t^2+11t+2$ (t - время движения в секундах) . Найдите скорость и ускорение точки через 7 секунд после начала движения. Найдите наименьшую скорость точки. В какой момент времени она достигается ?

2. Точка движется по прямой по закону $S(t)=m^2t^2-8mt+2t+3$. Найти значения параметра m , для которых при $t=3$ скорость точки будет равняться нулю.

О т в е т ы :

1) $v(7)=18$, $a(7)=8$, $v_{min}=v(3)=2$; 2) 1 ; $\frac{1}{3}$.

6. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на интервале $x\in(a;b)$ и в каждой его точке имеет непрерывную производную $f'(x)$. Как правило, именно такие функции исследуются на возрастание , убывание и существование экстремумов в школьной программе. Предположим, что производная $f'(x)$ равна нулю в точках x_1, x_2, x_3, а знаки производной такие, как показано на рис. 15.

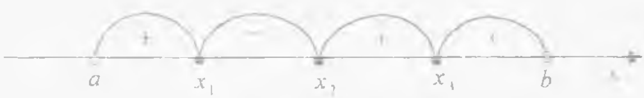

Рис. 15

Тогда график функции может быть таким, как показано на рис.16.

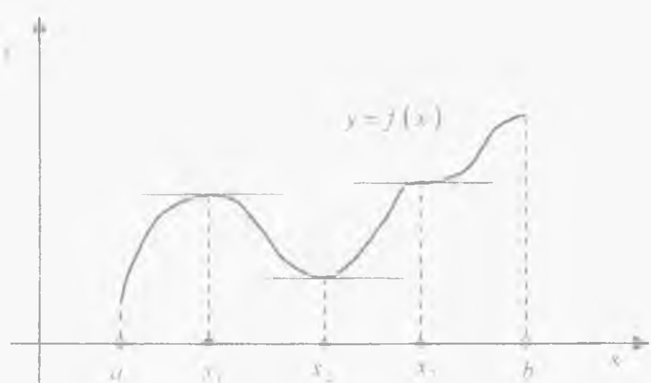

Рис. 16

- ***Если производная на некотором интервале положительна, за исключением, может быть, отдельных точек, где производная равна нулю, то функция на этом интервале возрастает.***
- ***Если производная на некотором интервале отрицательна, за исключением, может быть, отдельных точек, где производная равна нулю, то функция на этом интервале убывает.***

В нашем случае (см. рис. 15, 16) интервалах $x \in (a; x_1)$, $x \in (x_2; b)$ производная положительна, за исключением точки x_3, где производная равна нулю. Поэтому на указанных интервалах функция возрастает. На интервале $x \in (x_1; x_2)$, производная отрицательна, поэтому функция убывает.

- ***Если производная в некоторой точке равна нулю, то эта точка называется критической.***
- ***Если при переходе через критическую точку (слева направо) производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум, если знак меняется с минуса на плюс, то минимум. Если знак производной не меняется, то экстремума в данной критической точке нет.***

В нашем случае критическими являются точки x_1, x_2, x_3. В этих точках производная равна нулю. Касательные параллельны оси абсцисс. При переходе через точку x_1 производная меняет знак с плюса на минус (см. рис. 15), поэтому в точке x_1 функция имеет максимум. При переходе через точку x_2 производная меняет знак с минуса на плюс , поэтому в точке x_2 функция имеет минимум . При переходе через точку x_3 производная не меняет знак, поэтому в точке x_3 экстремума нет .

<u>ПРИМЕР 1.</u> Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = 4x^5 - 5x^4 - \dfrac{40}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}$ и её экстремумы. Схематично построить график функции.

Р е ш е н и е . Область определения функции $D(y)$: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Производная $y' = 20x^4 - 20x^3 - 40x^2 = 20x^2(x^2 - x - 2) = 20x^2(x+1)(x-2)$.

Приравняв производную к нулю, найдём критические точки :

$20x^2(x+1)(x-2) = 0$;

критические точки : $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$.

На рис. 17 показаны знаки производной:

Рис. 17

$$y_{\max}(-1)=4(-1)^5-5(-1)^4-\frac{40}{3}(-1)^3+\frac{2}{3}=5$$

$$y_{\min}(2)=4\,(2)^5-5\,(2)^4-\frac{40}{3}\,(2)^3+\frac{2}{3}=-58$$

В точке $x=0$ экстремума нет .

Схематично построим график функции (рис. 18)

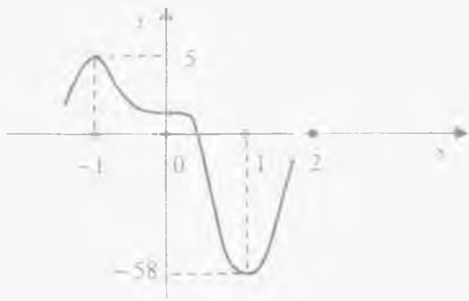

Рис. 18

Ответ: функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1)$; $(1;+\infty)$;
функция убывает на интервале $(-1;1)$;
$y_{\max}(-1)=5$; $y_{\min}(2)=-58$.

ПРИМЕР 2. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=\frac{x^2}{2}+x-3\ln(1-x)+3\ln 3+5$ и её экстремумы.

Решение. Область определения функции $D(y)$: $x\in(-\infty;1)$.

Производная $y'=x+1+\frac{3}{1-x}=\frac{x^2-4}{x-1}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-1}$.

Приравняв производную к нулю, найдём критические точки :

$\frac{(x-2)(x+2)}{x-1}=0$: $x=2\notin D(y)$; $x=-2$; критическая точка: $x=-2$.

На рис. 19 показаны знаки производной:

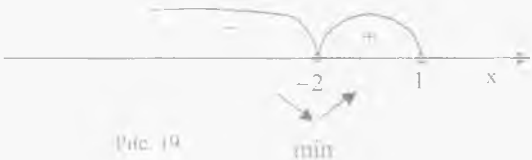

Рис. 19

$y_{\min}(-2)=2-2-3\ln 3+3\ln 3+5=5$.

Ответ: функция убывает на интервале $(-\infty;-2)$;
возрастает на интервале $(-2;1)$; $y_{\min}(-2)=5$.

__*ПРИМЕР 3.*__ Исследовать на экстремумы функцию
$y=\frac{x^3}{3}-2x^2+6x+\sin x+5$. Найти интервалы её возрастания и убывания.

Решение. Область определения функции $D(y)$: $x\in R$.
Производная $y'=x^2-4x+6+\cos x$.
Чтобы найти критические точки, приравняем производную к нулю:
$x^2-4x+6+\cos x=0$. Покажем, что уравнение не имеет решений. Для этого выделим полный квадрат: $(x-2)^2+2+\cos x=0$. Здесь $(x-2)^2\geq 0$, $2+\cos x>0$, т.к. $|\cos x|<1$. Таким образом, критических точек нет. Следовательно, нет экстремумов. Производная $y'=(x-2)^2+2+\cos x>0$ при $x\in R$. Функция возрастает на всей области определения.

Ответ: экстремумов нет, функция возрастает на всей области
определения $x\in(-\infty;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти интервалы возрастания и убывания функции
$y=\frac{x^5}{5}-x^4+x^3+\frac{9}{5}$ и её экстремумы. Схематично построить график функции.

2. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$y = x^2 + x - \frac{35}{2}\ln(1-2x) + \frac{35}{2}\ln 7$ и её экстремумы.

3. Исследовать на экстремумы функцию $y = 8 - \cos x - \frac{x^3}{3} + x^2 - 7x$.

Найти интервалы её возрастания и убывания.

Ответы:

1) функция возрастает на интервалах $(-\infty; 1)$; $(3; +\infty)$ функция убывает на интервале $(1; 3)$; $y_{\max}(1) = 2$; $y_{\min}(3) = -\frac{18}{5}$; 2) функция убывает на интервале $(-\infty; -3)$; функция возрастает на интервале $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$; $y_{\min}(-3) = 6$; 3) экстремумов нет, функция убывает на всей области определения $x \in (-\infty; +\infty)$.

7. НАИМЕНЬШЕЕ И НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a; b]$. Наименьшее и наибольшее значения могут достигаться в точках экстремума или на концах отрезка. На рис. 20 показаны различные случаи, при этом наименьшее и

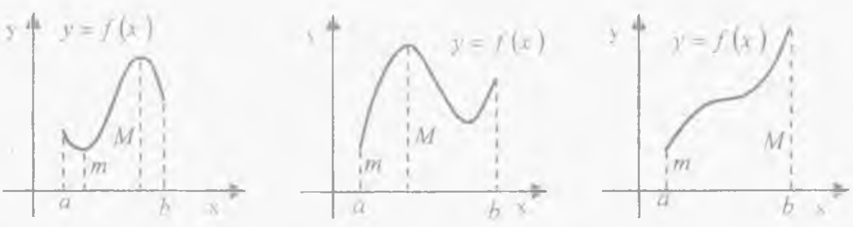

Рис. 20

наибольшее значения обозначены, соответственно, m; M.

Поскольку экстремумы могут быть только в критических точках, то проще вычислить значения функции во всех критических точках, принадлежащих промежутку и сравнить эти значения, чем доказывать существование экстремумов в этих точках. В связи с этим можно предложить следующую схему нахождения наименьшего и наибольшего значений функции $y = f(x)$:

1. Проверить, что функция $f(x)$ непрерывна на заданном отрезке.
2. Найти производную $f'(x)$.
3. Приравняв производную к нулю, найти критические точки.
4. Вычислить значения функции в критических точках, принадлежащих

отрезку, и значения функции на концах отрезка.

5. Выбрать из них наименьшее и наибольшее значения.

Наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $x \in [a; b]$ принято обозначать: $\min\limits_{[a;b]} y = f(c) = d$; $\max\limits_{[a;b]} y = f(p) = q$.

Может оказаться, например, что наибольшее значение $y = q$ достигается в двух точках: $x = p$; $x = r$. Тогда можно записать $\max\limits_{[a;b]} y = f(p) = f(r) = q$

<u>***ПРИМЕР 1.***</u> Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \frac{4}{3}x^3 - 4x$ на отрезке $x \in [0; 2]$.

Решение. Функция непрерывна на заданном отрезке.

Найдём производную $y' = 4x^2 - 4 = 4(x+1)(x-1)$.

Приравняв производную к нулю, найдём критические точки:

$$4(x+1)(x-1) = 0 ; \quad x = -1 \notin [0 ; 2] ; \quad x = 1 \in [0 ; 2] .$$

Вычислим значения функции в критической точке, принадлежащей отрезку, и значения функции на концах отрезка:

$$y(0) = 0 , \quad y(1) = -\frac{8}{3} , \quad y(2) = \frac{8}{3} .$$

Выберем наименьшее и наибольшее значения.

Ответ: $\min\limits_{[0;2]} y = y(1) = -\frac{8}{3}$; $\max\limits_{[0;2]} y = y(2) = \frac{8}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = x^4 - \frac{16x^3}{3} + 6x^2 + \frac{8}{3} \quad \text{на отрезке } x \in [-1; 2] .$$

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \sin 3x + \arccos 0{,}5 \quad \text{на отрезке } x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3} \right] .$$

Ответы: 1) $\min\limits_{[-1;2]} y = y(2) = 0$; $\max\limits_{[-1;2]} y = y(-1) = 15$;

2) $\min\limits_{[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{3}]} y = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\min\limits_{[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{3}]} y = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{\pi}{3}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

1. В параллелограмме $ABCD$ $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$, где M – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

2. Дана треугольная пирамида $DABC$. E – середина стороны BC, M – середина отрезка DE, $\overline{AD} = \overline{a}$, $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{AC} = \overline{c}$. Разложить вектор $\overline{AM}$ по векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

3. Даны векторы $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{j} - 3\overline{k}$. Найти длину вектора $2\overline{a} - 3\overline{b}$.

4. Даны векторы $\overline{m} = (4;\ -1;\ z)$ и $\overline{n} = (2;\ y;\ 5)$. При каких y и z векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$ будут коллинеарны?

5. Дан параллелограмм $ABCD$, где $\overline{AB} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{AD} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$. Найти длины диагоналей.

6. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. Точка K – середина ребра DD_1. Точки M и H лежат на ребрах A_1B_1 и AB соответственно, причем $A_1M:MB_1=1:3$, $AH:HB=3:1$. Найдите градусную меру угла между прямыми MH и KC_1.

7. Даны векторы $\overline{a}(2;\ \log_4 5;\ p)$ и $\overline{b}(\frac{1}{2};\ \log_{25} 16;\ -2)$. При каком значении параметра p $\overline{a} \cdot \overline{b} = 1$.

8. Найти все значения x, при которых $\overline{a} \cdot \overline{b} = -6$, где $\overline{a}\left(\int\limits_{\ln 5}^{\ln 7} e^x dx;\ \sin^2 2\alpha;\ 2^{x^2-2x+1}\right)$, $\overline{b}\left(-\frac{3}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \cos 3x dx;\ \frac{1}{\sin^2 2\alpha};\ -1\right)$.

9. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}$, $\overline{b} = \overline{m} - 2\overline{n}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ - единичные векторы, угол между которыми равен 60^0.

10. Найти производные от функций :

а) $y = tg^3(5x)$; б) $y = x^5 \cdot \log_7(2x)$;

в) $y = \sqrt{\sin(3 + \ln x)} + ctg\sqrt{x}$; г) $y = 7^{x^2+9x+1}$.

11. Под каким углом график функции $y = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$ пересекает ось $0x$ в

начале координат ?

12. На графике функции $y = x^2 - 4x + 5$ найдите точку, касательная в которой параллельна прямой $y = 2x + 1$. Постройте график функции, прямую и касательную. В ответе укажите координаты точки касания.

13. При каких значениях параметра m касательная к графику функции $y = \ln(mx - 1)$ в точке $x = 2$ параллельна к прямой $y = mx - 3$?

14. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = \frac{x - 8}{1 - 2x}$ в точке пересечения с осью абсцисс. Найдите площадь треугольника, образованного касательной и осями координат.

15. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + 4$, если касательная имеет положительный угловой коэффициент и проходит через точку $B(1;\,2)$. Постройте график функции и касательную.

16. Касательная к параболе $y = x^2 + mx + 16$ проходит через начало координат. Найдите значение параметра m, при котором абсцисса точки касания отрицательна, а ордината равна 12.

17. Найдите уравнения общих касательных к графикам функций

$$y = x^2 - 2x + 3, \quad y = -x^2 + 4x - 2.$$

18. При движении точки по прямой её координата S (в метрах) изменяется по закону $S(t) = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + 18t + 9$ (t - время движения в секундах) .

Найдите скорость и ускорение точки через 9 секунд после начала движения. Найдите наименьшую скорость точки. В какой момент времени она достигается ?

19. Точка движется по прямой по закону $S(t) = 2m(2t-1)^2 - 7m^2t - 21t + 5$. Найти значения параметра m, для которых при $t = 4$ скорость точки будет равняться нулю.

20. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$y = \frac{x^6}{6} - \frac{4}{5}x^5 + x^4 + 5$$

и её экстремумы. Схематично построить график функции.

21. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$y = 3x^2 + 2x - \frac{16}{3} \ln(1-3x) + \frac{16}{3} \ln 4$ и её экстремумы.

22. Исследовать на экстремумы функцию $y = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 20x + 12\cos\frac{x}{4}$.

Найти интервалы её возрастания и убывания.

23. Найти наименьшее и наибольшее значения функции
$y = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 3$ на отрезке $x \in [-2; 1]$.

24. Найти наименьшее и наибольшее значения функции
$y = \cos 2x + arctg\,\sqrt{3}$ на отрезке $x \in \left[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Учебное издание
Векторы
Производная и ее применение
Учбно-методическое пособие
Составители: Калинкина Людмила Ивановна
Стукалов Сергей Алексеевич

Подписано в печать 11.05.2005 г. Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл.печ.л.2,3 Усл. Кр.-отт. 2,4. Уч.-изд.л. 2,5
Тираж 150 экз. Заказ 15.

Самарский государственный аэрокосмический университет:
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

РИО Самарского государственного аэрокосмического университета:
443086, Самара, Московское шоссе, 34.