

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра общей и теоретической физики

ПРОБЛЕМА СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ
В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ.
КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД

Методические указания
для студентов 5 курса

Самара
Издательство "Самарский университет"
1994

Данные методические указания составлены на основе лекций для студентов физического факультета специализации "Теоретическая физика". Рассмотрены основы квазипотенциального метода для описания релятивистских спектров энергии двухчастичных связанных состояний в квантовой электродинамике.

Составители: ст.преп., канд.физ.-мат.наук. А.П.Мартыненко;
• профессор, д-р.физ.-мат.наук. Р.Н.Фаустов

Ответственный редактор доцент, канд.физ.-мат.наук. А.А.Бирюков

Рецензент доцент, канд.физ.-мат.наук. С.В.Талалов

С А.П.Мартыненко, Р.Н.Фаустов, 1994

Редактор - Н.А.Волынкина
Техн.редактор - И.С.Колышева
Корректор - Н.В.Голубева

ЛР № 020316 от 28.11.91.

Подписано в печать 21.02.94. Формат 60 × 84 1/16. Бумага белая писчая.
Печать оперативная. Объем 4 печ.л., 3,72 уч.-изд.л. Тираж 200 экз. Заказ
№ 1652.

Издательство "Самарский университет", 443011, г.Самара, ул.Акад. Павлова, 1.

МАО ПО "СамВен", 443099, г.Самара, ул.Венцека, 60.

Содержание

1 Введение	4
2 Уравнение Бете-Солпитера	6
3 Модель Вика-Кутковского	14
4 Уравнение Солпитера	16
5 Квазипотенциальное уравнение Логунова-Тавхелидзе	18
6 Сверхтонкая структура мюония	27
7 Ширина распада позитрония	31
8 Лэмбовский сдвиг уровней	37
9 Многообразие квазипотенциальных уравнений	47
10 Заключение	52
11 Задачи	53
Библиографический список	60

1 Введение

Описание релятивистских связанных состояний двух заряженных частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем, имеет важное значение для проверки основных положений квантовой механики и квантовой электродинамики. Последовательный подход к задаче релятивистского взаимодействия частиц, учитывающий близкое действие и возможность рождения новых частиц, должен основываться на локальной квантовой теории поля. Во всяком случае до сих пор только на этом пути удалось добиться значительных успехов: в первую очередь, вычисления тонкой структуры и лэмбовского смещения спектра водородоподобных систем [1-2].

Сама постановка задачи об определении состояния и уровней энергии двух частиц, взаимодействующих через квантованное поле, менялась по мере того, как развивалась квантовая теория поля в целом. Так, до появления и широкого использования инвариантной формулировки теории поля релятивистская проблема двух частиц исследовалась в рамках трехмерного подхода Фока-Гамма-Данкова [3]. Важной особенностью трехмерного описания было сохранение вероятностной интерпретации волновой функции и возможность в простом виде сформулировать для нее граничные условия. В то же время из-за нековариантности исходных уравнений перенормировка теории вызывала большие затруднения. В рамках четырехмерного формализма в теории поля для изучения двухчастичных систем было предложено полностью ковариантное уравнение Бете-Солпитера. В данном подходе [4] перенормировка не встречает препятствий, так как в нем используется та же инвариантная теория возмущений, что и в формализме матрицы рассеяния. Кроме того, уравнение Бете-Солпитера удобно при суммировании высокоэнергетических вкладов лестничных диаграмм. Однако это уравнение имеет один существенный недостаток: волновая функция Бете-Солпитера зависит от добавочной переменной - относительного времени и не допускает обычного вероятностного толкования в духе квантовой механики. Не следует забывать простую истину, что "протон сегодня и электрон вчера не образуют водородного атома" [5]. Квазипотенциальный подход был задуман как прямое обобщение потенциальной теории двухчастичного взаимодействия на релятивистский случай [6-9]. Этот метод, будучи трехмерным и допуская вероятностную интерпретацию волновой функции, обладает в то же время главными преимуществами (перенормируемость, аналитичность) полностью ковариантного метода.

Наиболее значительных успехов теория двухчастичных связанных состояний достигла в квантовой электродинамике [10-12]. Квантовая электродинамика (КЭД) - единственная последовательная модель квантовой теории поля, дающая надежные количественные предсказания с высокой степенью точности. В силу этого свойства КЭД служит главным объектом для изучения применимости основных принципов релятивистской квантовой теории и образцом для построения других моделей - калибровочных теорий сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий элементарных частиц. Отсюда следует особая важность проверки справедливости самой КЭД. Исторически первой проверкой КЭД было исследование уровней энергии атома водорода. Лэмб и Ризерфорд обнаружили с помощью радиотехнических методов расщепление уровней $2S_{\frac{1}{2}}$ и $2P_{\frac{1}{2}}$ приблизительно на 1000 МГц, показав тем самым необходимость в модификации уравнения Дирака для описания электрона в атоме водорода [13-14]. Используя идею перенормировок, Бете объяснил это явление (лэмбовский сдвиг) реакцией окружающего электромагнитного поля на электрон [1]. Купш и Фоли [15] измерили гиромагнитное отношение электрона и обнаружили, что оно превышает его значение, полученное из уравнения Дирака, приблизительно на 0.1%. Это расхождение экспериментальных и теоретических данных нашло объяснение в расчетах Швингера, выполненных тоже в рамках теории перенормировок [11].

В настоящее время для проверки КЭД при низких энергиях используются не только энергетический спектр атома водорода и аномальный магнитный момент электрона, но и структура энергетических уровней позитрония (связанное состояние e^+e^-), мюония (связанное состояние $e^{\pm}\mu^{\mp}$). За последние годы относительная точность измерения тонкой и сверхтонкой структуры уровней этих систем достигла значений $10^{-6} \div 10^{-8}$, что совместно с усовершенствованием теории содействовало исключительно точной проверке КЭД [13].

Существует ряд основных задач в КЭД, которые находятся в области постоянного внимания теории и эксперимента: лэмбовский сдвиг в атоме водорода, тонкая структура спектра атома водорода, сверхтонкая структура основного состояния водорода, сверхтонкая структура мюония, тонкая и сверхтонкая структура позитрония, лэмбовский сдвиг в мюонии, аномальный магнитный момент мюона, аномальный магнитный момент электрона, ширина распада паразитрония и ортопозитрония.

2 Уравнение Бете-Солпитера

Для изучения двухчастичного взаимодействия рассмотрим двухчастичную функцию Грина в координатном представлении:

$$G_{12}(x_1, x_2; y_1, y_2) = -i \langle 0 | T[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\bar{\psi}_1(y_1)\bar{\psi}_2(y_2)] | 0 \rangle, \quad (1)$$

где T -хронологическое упорядочение Вика гейзенберговских спинорных операторов $\psi_{1,2}(x)$, $|0\rangle$ - вектор вакуумного состояния. Мы можем исследовать математическую структуру этого выражения и дать ему графическую иллюстрацию, используя соотношение Гелл-Манна-Лоу:

$$\begin{aligned} G_{12}(x_1, x_2; y_1, y_2) &= -i \langle 0 | T[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\bar{\psi}_1(y_1)\bar{\psi}_2(y_2)] | 0 \rangle = \\ &= -i \frac{\langle 0 | T[\psi_1^I(x_1)\psi_2^I(x_2)\bar{\psi}_1^I(y_1)\bar{\psi}_2^I(y_2)] | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\psi^I(x)$ - оператор спинорного поля в представлении взаимодействия,

$$S = I + \sum_n \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (3)$$

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T[L_{int.}(x_1) \dots L_{int.}(x_n)], \quad L_{int.}(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\mu(x).$$

При этом у нас возникнет набор связанных диаграмм, причем все они будут иметь четыре фермионные внешние линии. В этом наборе диаграмм можно установить определенный порядок, если определить двухчастично-неприводимое ядро $K_{12}(z_1, z_2; z'_1, z'_2)$ в виде суммы двухчастично-неприводимых диаграмм. Диаграмма называется двухчастично-неприводимой, если ее нельзя разбить на две несвязанные части прямой, пересекающей один раз линии частиц, но не пересекающей линии квантов. Из определения ядра K_{12} следует, что четырехточечная функция G_{12} удовлетворяет следующему уравнению Бете-Солпитера [4]:

$$\begin{aligned} G_{12}(x_1, x_2; y_1, y_2) &= G_1(x_1 - y_1)G_2(x_2 - y_2) + \\ &+ \int d^4 z_1 \int d^4 z_2 \int d^4 z'_1 \int d^4 z'_2 G_1(x_1 - z_1)G_2(x_2 - z_2) \times \\ &\times K_{12}(z_1, z_2; z'_1, z'_2)G_{12}(z'_1, z'_2; y_1, y_2), \end{aligned} \quad (4)$$

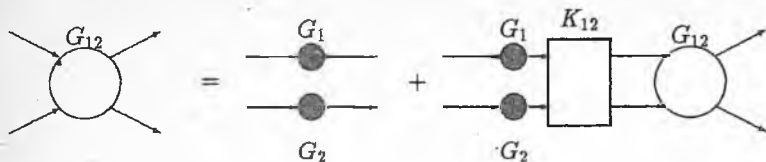


Рис. 1

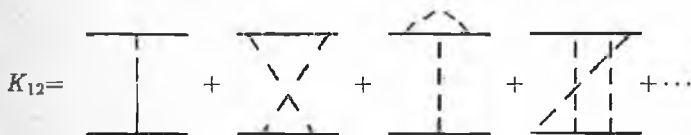


Рис. 2

где $G_{1,2}$ - точные фейнмановские пропагаторы дираковских частиц. Уравнению Бете-Солпитера для двухчастичной функции Грина удобно дать графическую иллюстрацию, представленную на рис.1.

Ядро K_{12} определяется бесконечной цепочкой диаграмм Фейнмана, некоторые из которых изображены на рис.2.

Наша задача состоит в том, чтобы построить формализм для описания двухчастичных связанных состояний в квантовой теории поля, то есть развить подход, позволяющий вычислять наблюдаемые характеристики составных систем. Возникает естественный вопрос: можно ли извлечь информацию о связанных состояниях из функции G_{12} , введенной выше? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим более простую величину - свободный одночастичный пропагатор и исследуем его математическую структуру.

$$G(x-y) = -i \langle 0 | T[\psi(x)\bar{\psi}(y)] | 0 \rangle = -i \langle 0 | \psi(x)\bar{\psi}(y) | 0 \rangle \theta(x^0 - y^0) - \quad (5)$$

$$-i \langle 0 | \bar{\psi}(y)\psi(x) | 0 \rangle \theta(y^0 - x^0) = -i \sum_n \langle 0 | \psi(x) | n \rangle \langle n | \bar{\psi}(y) \theta(x^0 - y^0) + \dots,$$

где для преобразования пропагатора $G(x)$ использован полный набор $\{|n\rangle\}$ состояний гильбертова пространства, которые являются собственными состояниями оператора энергии-импульса системы:

$$\hat{P}_n |n\rangle = p_n |n\rangle. \quad (6)$$

Символ n обозначает набор квантовых чисел, причем по дискретным переменным в формуле (5) необходимо суммирование, а по непрерывным - интегрирование. Выделим из общей суммы состояний $\{|n\rangle\}$ одночастичное состояние и исследуем поведение пропагатора $G(x)$ в окрестности этого одночастичного состояния:

$$G(x-y) = -i \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \langle 0|\psi(x)|\vec{p}, \lambda\rangle \langle \vec{p}, \lambda|\bar{\psi}(y)|0\rangle \theta(x^0 - y^0) + \dots, \quad (7)$$

где многоточие обозначает вклад второй θ -функции, а векторы одночастичного состояния нормированы следующим образом:

$$\langle \vec{p}, \lambda|\vec{q}, \nu\rangle = \delta_{\lambda\nu} \delta(\vec{p} - \vec{q}) (2\pi)^3 \frac{\epsilon(\vec{p})}{m}. \quad (8)$$

Используем теперь закон преобразования полей при пространственно-временных трансляциях [16-17]:

$$\psi(x) = e^{i\hat{P}x} \psi(0) e^{-i\hat{P}x}. \quad (9)$$

Частным случаем этого соотношения является связь представлений Гейзенберга и Шредингера, когда мы имеем дело с чисто временными сдвигами. Шредингеровские операторы мы можем разложить по операторам рождения - уничтожения, получив:

$$\psi(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \{ e^{-ikx} b_{\nu}(\vec{k}) u^{\nu}(\vec{k}) + e^{ikx} d_{\nu}^+(\vec{k}) v^{\nu}(\vec{k}) \}. \quad (10)$$

Из этого разложения нам нужно оставить для необходимого матричного элемента $\langle 0|\psi(0)|\vec{p}, \lambda\rangle$ лишь оператор уничтожения, учитывая следующие антикоммутиационные соотношения:

$$[b_{\nu}(\vec{p}), b_{\lambda}^+(\vec{q})]_{+} = (2\pi)^3 \frac{\epsilon(\vec{k})}{m} \delta_{\nu\lambda} \delta(\vec{p} - \vec{q}), \quad (11)$$

$$[d_{\nu}(\vec{p}), d_{\lambda}^+(\vec{q})]_{+} = (2\pi)^3 \frac{\epsilon(\vec{p})}{m} \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{\nu\lambda}.$$

Тогда получим:

$$\langle 0|\psi(0)|\vec{p}, \lambda\rangle = \langle 0|\psi(0) b_{\lambda}^+(\vec{p})|0\rangle = \quad (12)$$

$$= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \langle 0 | b_\nu(\vec{k}) b_\lambda^\dagger(\vec{p}) | 0 \rangle u^\nu(\vec{k}) = u^\nu(\vec{p}),$$

где биспиноры Дирака удовлетворяют следующим условиям нормировки и суммирования по спину [17]:

$$\bar{u}^\alpha(k) u^\beta(k) = \delta_{\alpha\beta}, \bar{v}^\alpha(k) v^\beta(k) = -\delta_{\alpha\beta},$$

$$\bar{u}^\alpha(k) v^\beta(k) = \bar{v}^\alpha(k) u^\beta(k) = 0, \quad (13)$$

$$\sum_{\alpha=1,2} u^\alpha(k) \bar{u}^\alpha(k) = \frac{\hat{k} + m}{2m}, \sum_{\alpha=1,2} v^\alpha(k) \bar{v}^\alpha(k) = \frac{\hat{k} - m}{2m}. \quad (14)$$

Для дальнейших преобразований $G(x)$ используем также интегральное представление для θ -функции Хевисайда:

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\tau}}{\tau - i\epsilon} d\tau = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\tau}}{\tau + i\epsilon} d\tau. \quad (15)$$

В результате искомое поведение пропагатора будет определяться выражением вида:

$$\begin{aligned} G(x-y) &= \int \frac{d\vec{p} d\omega}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y) - i\omega(x^0 - y^0)} \frac{\sum_{\lambda=1,2} u^\lambda(\vec{p}) \bar{u}^\lambda(\vec{p})}{\omega + i\epsilon} = \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\hat{p} + m}{p^0 - \epsilon(\vec{p}) + i0} \frac{1}{2\epsilon(\vec{p})} e^{-ip(x-y)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, получен хорошо известный результат, который означает, что одночастичному состоянию отвечает в пропагаторе полюс по полной энергии частицы. Аналогичную ситуацию мы имеем в нерелятивистской квантовой механике, когда исследуем проблему связанных состояний частицы в некотором потенциальном поле. В этом случае функция Грина гамильтониана частицы имеет по полной энергии полюса, соответствующие дискретным уровням:

$$G(\vec{x}, \vec{y}, E) = \sum_n \frac{\psi_n(\vec{x}) \psi_n^*(\vec{y})}{E - E_n + i0}. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь двухчастичную функцию Грина в релятивистской квантовой теории и покажем, что для нее также имеет место полюсное представление в окрестности связанного состояния [18]. Пусть взаимодействие двух частиц в системе центра масс описывается диаграммой рис.3.

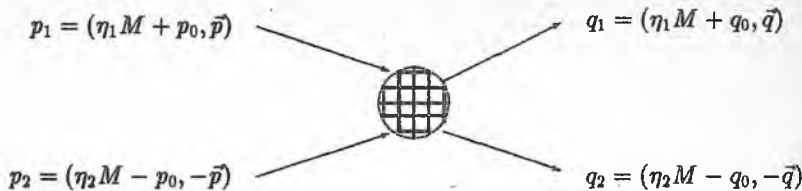


Рис. 3

Введем полный импульс системы $P = p_1 + p_2 = q_1 + q_2 = (P^0, \vec{P})$ и два относительных импульса в начальном и конечном состояниях:

$$p = \eta_2 p_1 - \eta_1 p_2, \quad q = \eta_2 q_1 - \eta_1 q_2. \quad (18)$$

$$p_1 = \eta_1 P + p, \quad p_2 = \eta_2 P - p. \quad (19)$$

Для фиксации коэффициентов η_1, η_2 заметим, что в нерелятивистском случае частиц одинаковой массы $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2}$, поэтому положим: $\eta_1 + \eta_2 = 1$. Далее рассмотрим произведение полного и относительного четырехимпульсов:

$$2(p \cdot P) = 2(\eta_2 p_1 - \eta_1 p_2)(p_1 + p_2) = p_1^2 - p_2^2 - (\eta_1 - \eta_2)P^2. \quad (20)$$

Наложим теперь на коэффициенты $\eta_{1,2}$ второе условие вида: $m_1^2 - m_2^2 = (\eta_1 - \eta_2)M^2$, которое возникает, если потребовать симметричного схода частиц с массовой поверхности $p_1^2 - p_2^2 = m_1^2 - m_2^2$ и ортогональности полного и относительного импульсов $(p \cdot P) = 0$. Решение системы уравнений для η_1, η_2 имеет вид:

$$\eta_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M^2}, \quad \eta_2 = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M^2}. \quad (21)$$

После задания кинематических соотношений в исследуемой системе рассмотрим вновь двухчастичную функцию Грина и выполним с ней ряд преобразований, которые были сделаны для одночастичного пропагатора:

$$G_{12}(x_1, x_2; y_1, y_2) = -i \langle 0 | T \{ \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \bar{\psi}_1(y_1) \bar{\psi}_2(y_2) \} | 0 \rangle = \quad (22)$$

$$= -i \sum_n \langle 0 | T \{ \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \} | n \rangle \langle n | T \{ \bar{\psi}_1(y_1) \bar{\psi}_2(y_2) \} | 0 \rangle,$$

где мы установили определенный порядок временных компонент четырехвекторов x, y : $x_{1,2}^0 > y_{1,2}^0$ (второе слагаемое с обратным временным порядком как

и ранее опущено). Выберем из полного набора $\{|n\rangle\}$ связанное состояние двух частиц, которое обозначим $|M, \vec{P}, \alpha\rangle$ (M - масса связанного состояния, \vec{P} - импульс связанного состояния, α - набор других квантовых чисел, характеризующих данное состояние) и представим функцию Грина в окрестности этого состояния:

$$G_{12}(x_1, x_2; y_1, y_2) = \int \frac{d\vec{P}}{(2\pi)^3 2E(\vec{P})} \sum_{\alpha} \langle 0|T\{\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\}|M, \vec{P}, \alpha\rangle \times \quad (23)$$

$$\times \langle M, \vec{P}, \alpha|T\{\bar{\psi}_1(y_1)\bar{\psi}_2(y_2)\}|0\rangle \theta\left(X^0 - Y^0 - \frac{1}{2}|x^0| - \frac{1}{2}|y^0| - \frac{\eta_1 - \eta_2}{2}(x^0 - y^0)\right),$$

где θ - функция учитывает наложенное временное условие, $E(\vec{P}) = \sqrt{\vec{P}^2 + M^2}$, а относительная координата частиц и координата центра масс определены следующим образом:

$$X = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2, \quad x = x_1 - x_2, \quad Y = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2, \quad y = y_1 - y_2. \quad (24)$$

Функция Грина G_{12} содержит матричный элемент

$$\psi_{P\alpha}(x_1, x_2) = \langle 0|T\{\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\}|M, \vec{P}, \alpha\rangle, \quad (25)$$

в котором можно выполнить ряд преобразований, используя трансформационные свойства спинорных полевых операторов при трансляциях координат:

$$\psi_{P\alpha}(x_1, x_2) = \langle 0|T\{\psi_1(X + \eta_2 x)\psi_2(X - \eta_1 x)\}|M, \vec{P}, \alpha\rangle = \quad (26)$$

$$= \langle 0|T\{\psi_1(\eta_2 x)\psi_2(-\eta_1 x)\}|M, \vec{P}, \alpha\rangle e^{-iPX} = e^{-iPX} \psi_{P\alpha}(x),$$

$$\psi_{P\alpha}(x) = \langle 0|T\{\psi_1(\eta_2 x)\psi_2(-\eta_1 x)\}|M, \vec{P}, \alpha\rangle. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (23), получим:

$$G_{12}(x, y; X, Y) = \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{\sum_{\alpha} \psi_{P\alpha}(x) \bar{\psi}_{P\alpha}(y)}{[P^0 - E(\vec{P}) + i0] 2E(\vec{P})} \times \quad (28)$$

$$\times e^{-iP(X-Y)} \exp\left\{\frac{i}{2}(P^0 - E(\vec{P}))(|x^0| + |y^0|) + \frac{\eta_1 - \eta_2}{2}(x^0 - y^0)\right\},$$

где введена новая переменная $P^0 = \omega + E(\vec{P})$. Добавив в последнем выражении еще два преобразования Фурье по относительным координатам, получим,

что в окрестности связанного состояния в импульсном пространстве двухчастичная функция Грина имеет вид:

$$G_{12}(p, q, P) = \frac{\sum_{\alpha} \psi_{P\alpha}(p) \bar{\psi}_{P\alpha}(q)}{[P^0 - E(\vec{P}) + i0]2E(\vec{P})}. \quad (29)$$

Последняя формула означает, что связанному состоянию двух частиц отвечает полюс в функции Грина по полной энергии. Используем полюсное представление (28) в уравнении Бете-Солпитера, которое запишем в импульсном пространстве:

$$G_{12}(p, q, P) = G_{012}(p, q, P) + G_{012}(p, q, P) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K_{12}(p, k, P) G_{12}(k, q, P), \quad (30)$$

$$\frac{\sum_{\alpha} \psi_{P\alpha}(p) \bar{\psi}_{P\alpha}(q)}{P^0 - E(\vec{P}) + i0} = G_{012}(p, q, P) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K_{12}(p, q, P) \frac{\sum_{\alpha} \psi_{P\alpha}(k) \bar{\psi}_{P\alpha}(q)}{P^0 - E(\vec{P}) + i0}, \quad (31)$$

где G_{012} - свободная двухчастичная функция Грина. Интегрируя последнее выражение по P^0 и приравнявая вычеты в полюсах, получим уравнение Бете-Солпитера для двухчастичной амплитуды $\psi_{P\alpha}$ [18]:

$$[\eta_1 \hat{P} + \hat{p} - m_1 - M_1(p)][\eta_2 P - \hat{p} - m_2 - M_2(p)]\psi_{P\alpha}(p) = i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_{12}(p, q, P)\psi_{P\alpha}(q). \quad (32)$$

Отметим некоторые особенности уравнения Бете-Солпитера (32):

1. Ядро K_{12} зависит от массы связанного состояния M (в системе центра масс).

2. Ядро K_{12} может иметь мнимую часть.

3. Амплитуда $\psi_{P\alpha}(p)$ зависит от 4^x - мерной переменной p , а в самом уравнении присутствует 4^x - мерный интеграл.

Из уравнения Бете-Солпитера для двухчастичной функции Грина можно получить еще одно соотношение для амплитуды $\psi_{P\alpha}(p)$, которое называют условием нормировки. С этой целью запишем уравнение Бете-Солпитера (30) в символическом виде:

$$G_{12} = G_{012} + G_{012} K_{12} * G_{12}, \quad (33)$$

$$G_{12} * [G_{012}^{-1} - K_{12}] * G_{12} = G_{12} \quad (34)$$

и воспользуемся в формуле (34) полюсным разложением (28):

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{P\alpha} \frac{\partial}{\partial P^0} [G_{012}^{-1} - K_{12}] |_{P^0=E} \psi_{P\alpha} &= 1, \\ \int \frac{d^4 p}{i(2\pi)^4} \bar{\psi}_{P\alpha}(p) \frac{\partial}{\partial P^0} [G_1^{-1}(p_1) G_2^{-1}(p_2)] |_{P^0=E} \psi_{P\alpha} &= \\ = \int \frac{d^4 p d^4 q}{(2\pi)^8} \bar{\psi}_{P\alpha}(p) \frac{\partial}{\partial P^0} K_{12}(p, q, P) |_{P^0=E} \psi_{P\alpha}(q) &+ 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Условие нормировки (35) для волновой амплитуды Бете-Солпитера отличается от используемого в нерелятивистской квантовой механике прежде всего наличием в правой части дополнительного слагаемого, обусловленного зависимостью ядра K_{12} от P^0 . Появившаяся в уравнении (32) и нормировочном условии (35) величина $\psi_{P\alpha}$ (27), названная амплитудой или волновой функцией Бете-Солпитера, требует, конечно, специального изучения. С четырехмерной точки зрения волновая функция $\psi_{P\alpha}$ описывает амплитуду вероятности нахождения частицы 1 в положении 1 и частицы 2 в положении 2 (это точка зрения Бете, Солпитера).

Дайсон писал [19]: "Четырехмерная картина явно релятивистская, но волновая функция не дает полного описания системы в смысле элементарной квантовой механики. Физический смысл четырехмерной волновой функции совершенно неясен."

Волновая функция Бете-Солпитера зависит от относительного времени (от относительной энергии в импульсном пространстве) и поэтому не допускает обычной вероятностной интерпретации в духе квантовой механики. Определенную вероятностную интерпретацию можно придать волновой функции Бете-Солпитера лишь в специальном случае: $x^0 = x_1^0 - x_2^0 = 0$, которую дал Ф.Дайсон. Тогда все операторы в определении $\psi_{P\alpha}(x)$ можно рассматривать как предингеровские. В произведении двух спинорных операторов, стоящих в определении амплитуды Бете-Солпитера, присутствуют следующие произведения операторов рождения и уничтожения: $b_1 d_2^+$, $b_1 b_2$, $d_1^+ b_2$, $d_1^+ d_2^+$. Назовем, следуя Ф.Дайсону, "минус частицей" частицу, которая отсутствует в $|M\bar{P}\alpha\rangle$, но присутствует в $|0\rangle$. "Плюс частица" - это частица, которая присутствует в $|M\bar{P}\alpha\rangle$. Тогда $\psi_{P\alpha}$ представляет собой амплитуду вероятности нахождения в $|M\bar{P}\alpha\rangle$ частицы 1 и частицы 2, или частицы 1 и "минус частицы" 2, или частицы 2 и "минус частицы" 1, или "минус частицы" 1 и "минус частицы" 2. Эту интерпретацию можно распространить

$$K_{12} = -\frac{\lambda}{(p-q)^2} \rightarrow$$


Рис. 4



Рис. 5

и на пространственно-подобный интервал между частицами. Когда x_1 и x_2 разделены времени-подобным интервалом, то общая четырехмерная волновая функция Бете-Солпитера не имеет такой простой интерпретации.

3 Модель Вика-Кутковского

Для описания связанного состояния двух спинорных частиц было получено уравнение Бете-Солпитера (32). Случай связанного состояния двух скалярных частиц отличается заменой G_{012} в этом уравнении на произведение обратных пропагаторов скалярных частиц и имеет вид при $m_1 = m_2 = m$ [18]:

$$[m^2 - (\eta_1 P + p)^2][m^2 - (\eta_2 P - p)^2]\psi_M(p) = i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_{12}(p, q, P)\psi_M(q), \quad (36)$$

где для краткости волновая функция Бете-Солпитера обозначена $\psi_M(p)$. Рассмотрим в этом уравнении случай простейшего ядра, отвечающего одноквантовому обмену, изображенному на рис.4 .

Учет в уравнении Бете-Солпитера такого ядра означает суммирование всех диаграмм лестничного типа (см. рис.5), что следует, например, из разложения:

$$G_{12} = G_{012} + G_{012}K_{12}G_{12} = G_{012} + G_{012}K_{12}G_{012} + G_{012}K_{12}G_{012}K_{12}G_{012} + \dots \quad (37)$$

Перепишем уравнение (36) с одноквантовым ядром:

$$[m^2 - (\eta_1 P + p)^2][m^2 - (\eta_2 P - p)^2]\psi_M(p) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\lambda}{(p-q)^2} \psi_M(q). \quad (38)$$

Это уравнение Бете-Солпитера называют обычно моделью Вика-Кутковского [18]. Вик [20] и Кутковский [21] исследовали уравнение (38) и нашли его точные решения, которые являются единственными точными решениями уравнения Бете-Солпитера. Разложим знаменатель подинтегрального выражения на множители, выделив полюса по переменной q_0 :

$$(p-q)^2 + i0 = (q_0 - p_0)^2 - (\vec{q} - \vec{p})^2 + i0 = [q_0 - p_0 - \sqrt{(\vec{q} - \vec{p})^2} + i0][q_0 - p_0 + \sqrt{(\vec{q} - \vec{p})^2} - i0]. \quad (39)$$

Расположение полюсов позволяет повернуть контур интегрирования на 90° и проводить интегрирование по мнимой оси q_0 . Сделав замену переменной $q_0 = i\tilde{q}_0$, получим из (38) следующее уравнение:

$$[(p + i\xi)^2 + 1][(p - i\xi)^2 + 1]\phi_M(p) = \frac{\lambda}{\pi^2} \int d^4 q \frac{\phi_M(q)}{(p-q)^2}, \quad (40)$$

где $\xi = \frac{P}{2m}$. Сингулярности в одноквантовом ядре исчезли после выполненного поворота в комплексной плоскости переменной q_0 (поворота Вика), и Вик предложил искать решения этого уравнения в виде:

$$\phi(p) = \int_{-1}^1 \frac{g(z, M) dz}{[R(p, z)]^3}, \quad (41)$$

$$R(p, z) = p^2 + 2iz\xi p + 1 - \xi^2,$$

а функция $g(z, M)$ удовлетворяет граничным условиям: $g(z, M)|_{z=\pm 1} = 0$. Подставляя интегральное представление (41) в уравнение (40), получим в итоге дифференциальное уравнение второго порядка для функции $g(z, M)$:

$$\tilde{g}(z) + \lambda(1 - z^2)^{-1}(1 - \xi^2 + \xi^2 z^2)^{-1}g(z, M) = 0. \quad (42)$$

В случае сильной связи $\xi = \frac{M}{2m} = 1 - \frac{B}{2m} \approx 0$ уравнение (42) упрощается:

$$(1 - z^2)\tilde{g}(z, M) + \lambda g(z, M) = 0, \quad (43)$$

и после подстановки $g(z, M) = (1 - z^2)f(z)$ для функции $f(z)$ возникает дифференциальное уравнение, решениями которого являются полиномы Гегенбауэра:

$$\ddot{f}(z) - \frac{4z}{1-z^2}\dot{f}(z) + \frac{\lambda-2}{1-z^2}f(z) = 0, \quad (44)$$

$$g_n(z, M) = \text{const.} \cdot (1-z^2)C_n^{\frac{\lambda}{2}}, \quad \lambda = (n+1)(n+2), \quad M=0, \quad (45)$$

где n обозначает число нулей $g_n(z, M)$ на интервале $(-1, 1)$. Более общую форму решения уравнения (40) предложил Кутковский:

$$\psi_n^{lm}(p) = \sum_{k=0}^{n-l-1} \int_{-1}^1 \frac{g_n^k(z) dz |p|^l Y_{lm}(\theta, \phi)}{[R(p, z)]^{n+2}}. \quad (46)$$

Оно переходит в решение Вика при $n=1$, $l=m=0$. В случае слабой связи уравнение (40) также имеет решение, которое в спектре энергии приводит к боровским уровням энергии. В заключение еще раз подчеркнем, что решения Вика-Кутковского зависят от относительной энергии и поэтому не имеют вероятностной интерпретации.

4 Уравнение Солпитера

Рассмотрим взаимодействие двух спинорных частиц, подставив в соответствующее уравнение Бете-Солпитера

$$(\hat{p}_1 - m_1)(\hat{p}_2 - m_2)\psi_M(p) = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K_{12}(p, q, P)\psi_M(q) \quad (47)$$

простейшее ядро однофотонного взаимодействия:

$$K_7 = -e_1 e_2 \gamma_1^\mu \gamma_2^\nu D_{\mu\nu}(k), \quad (48)$$

где e_1, e_2 - заряды частиц 1 и 2, $k=p-q$ - переданный импульс. Выберем пропагатор фотона в кулоновской калибровке:

$$D_{00}(k) = -\frac{1}{k^2}, \quad D_{0i} = D_{i0} = 0, \quad (49)$$

$$D_{ij}(k) = \frac{1}{k^2 - k_0^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right).$$

Такая калибровка удобна тем, что кулоновская часть явно отделена от поперечных составляющих. Но даже с ядром K_7 уравнение (47) не решается точно. Сделаем в (47) дальнейшие упрощения, выбрав в качестве ядра только кулоновскую часть K_7 :

$$K_c(\vec{p}, \vec{q}) = e_1 e_2 \frac{\gamma_1^0 \gamma_2^0}{(\vec{p} - \vec{q})^2}, \quad (50)$$

$$\psi_M(p) = S_1(p_1) S_2(p_2) \int \frac{d\vec{q} dq^0}{(2\pi)^4} \frac{e_1 e_2}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \gamma_1^0 \gamma_2^0 \psi_M(q). \quad (51)$$

Мы видим, что в правой части (51) вся зависимость от q^0 сосредоточена в амплитуде ψ_M , поэтому естественно определить следующую волновую функцию:

$$\psi_M(\vec{q}) = \int \frac{dq^0}{2\pi} \psi_M(q^0, \vec{q}). \quad (52)$$

То обстоятельство, что в уравнении (51) присутствует мгновенное ядро, позволяет проинтегрировать обе части этого уравнения по p^0 . В результате получим двухчастичное уравнение, которое называется уравнением Солпитера [2,17,22]:

$$[M - H_1(\vec{p}) - H_2(\vec{p})] \psi_M(\vec{p}) = \Pi(\vec{p}) \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e_1 e_2}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \psi_M(\vec{q}), \quad (53)$$

$$\Pi(\vec{p}) = -\frac{m_1 m_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} [\Lambda_1^+(\vec{p}) \Lambda_2^+(-\vec{p}) - \Lambda_1^-(\vec{p}) \Lambda_2^-(-\vec{p})] \beta_1 \beta_2,$$

где одночастичные проекционные операторы на состояния с положительной и отрицательной энергией Λ^\pm удовлетворяют соотношениям [17]:

$$\Lambda^\pm(k) = \frac{\pm k + m}{2m}, \quad \Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm(k), \quad S p \Lambda_\pm(k) = 2, \quad (54)$$

$$\Lambda_+(k) + \Lambda_-(k) = I, \quad H(\vec{p}) \Lambda^\pm(\vec{p}) = \pm \epsilon(\vec{p}) \Lambda^\pm(\vec{p}), \quad H(\vec{p}) = \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m.$$

Трехмерное уравнение Солпитера (53) по виду напоминает нерелятивистское уравнение Шредингера в импульсном представлении:

$$\left(B - \frac{\vec{p}^2}{2\mu} \right) \psi(\vec{p}) = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} V(\vec{p}, \vec{q}) \psi(\vec{q}), \quad (55)$$

но между ними имеются и существенные различия. Прежде всего необходимо отметить, что волновая функция Солпитера представляет собой матрицу $4 \otimes 4$ и содержит 16 компонент. В нерелятивистском же случае с учетом спина мы имеем волновую функцию Паули, которая является матрицей $2 \otimes 2$ и содержит, следовательно, лишь 4 компоненты. Нас естественно интересует вопрос возможности получения уравнения Шредингера как нерелятивистского предела уравнения Солпитера. Мы знаем, что в нерелятивистском пределе в дираковских биспинорах остаются только две верхние компоненты. Чтобы уменьшить число компонент волновой функции Солпитера, умножим последнюю на произведение $u_1^{\lambda}(\vec{p})u_2^{*\sigma}(-\vec{p})$, то есть спроектируем ее на подпространство состояний с положительной энергией:

$$\psi_{M\lambda\sigma}^+(\vec{p}) = u_1^{\lambda}(\vec{p})u_2^{*\sigma}(-\vec{p})\psi_M(\vec{p}), \quad \lambda, \sigma = 1, 2. \quad (56)$$

Учитывая соотношения для проекционных операторов (54), в правой части уравнения Солпитера (53) получим:

$$u_1^{\lambda}(\vec{p})u_2^{*\sigma}(-\vec{p}) [\Lambda_1^+(\vec{p})\Lambda_2^+(-\vec{p}) - \Lambda_1^-(\vec{p})\Lambda_2^-(-\vec{p})] \beta_1\beta_2\psi_M(\vec{p}) \frac{m_1m_2}{\epsilon_1\epsilon_2} = \psi_{M\lambda\sigma}^+. \quad (57)$$

Разлагая также релятивистские энергии частиц $\epsilon_{1,2}$ с точностью $O(\frac{\vec{p}^2}{m^2})$ и вводя энергию связи в двухчастичной системе В:

$$M = m_1 + m_2 + B, \quad (58)$$

получим уравнение Шредингера с кулоновским потенциалом:

$$\left(B - \frac{\vec{p}^2}{2\mu} \right) \psi_M^+(\vec{p}) = - \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e_1e_2}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \psi_M^+(\vec{q}). \quad (59)$$

Уравнение Солпитера имеет, таким образом, нерелятивистский предел. Теория возмущений Солпитера предназначена для преодоления трудностей, возникающих вследствие параметрической зависимости ядра от M [2]. Главный недостаток уравнения Солпитера очевиден: оно получено для мгновенных ядер, но что делать при наличии других ядер неясно.

5 Квазипотенциальное уравнение Логунова-Тавхелидзе

В основе квазипотенциального метода в теории поля, изложенного Логуновым и Тавхелидзе [6], лежит использование двухвременной функции Грина

системы частиц. Связанные состояния такой системы при этом описываются одновременной волновой функцией, удовлетворяющей квазипотенциальному уравнению типа Шредингера с комплексным, зависящим от энергии и, вообще говоря, нелокальным потенциалом. Возникновение квазипотенциального метода Логанова-Тавхелидзе связано, пожалуй, с главной трудностью подхода Бете-Солпитера - отсутствием вероятностной интерпретации в квантовомеханическом смысле для амплитуды Бете-Солпитера. Необходимо было и в релятивистской квантовой механике получить уравнение вида (59) для описания двухчастичных связанных состояний.

Исключим с самого начала нефизическую переменную относительного времени в определении двухчастичной функции Грина:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{12}(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \vec{y}_1, \vec{y}_2, 0) &= G_{12}(x_1, x_2; y_1, y_2)|_{x_1^0=x_2^0=t, y_1^0=y_2^0=0} = \\ &= -i \langle 0|T\{\psi_1(\vec{x}_1, t)\psi_2(\vec{x}_2, t)\bar{\psi}_1(\vec{y}_1, 0)\bar{\psi}_2(\vec{y}_2, 0)\}|0 \rangle. \end{aligned} \quad (60)$$

Для этой одновременной функции Грина можно получить полюсное представление типа (29) в окрестности предполагаемого связанного состояния аналогично тому, как это было сделано в разделе 2:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{12}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t; \vec{y}_1, \vec{y}_2, 0) &= \\ &= -i\theta(t) \sum_n \langle 0|\psi_1(\vec{x}_1, t)\psi_2(\vec{x}_2, t)|n \rangle \langle n|\bar{\psi}_1(\vec{y}_1, 0)\bar{\psi}_2(\vec{y}_2, 0)|0 \rangle + \\ &+ (-i)\theta(-t) \sum_n \langle 0|\bar{\psi}_1(\vec{y}_1, 0)\bar{\psi}_2(\vec{y}_2, 0)|n \rangle \langle n|\psi_1(\vec{x}_1, t)\psi_2(\vec{x}_2, t)|0 \rangle = \\ &= -i\theta(t) \sum_n \phi_n(\vec{x})\bar{\phi}_n(\vec{y})e^{-iE_n t+i\vec{P}_n(\vec{x}-\vec{y})} - i\theta(-t) \sum_n \chi_n(\vec{x})\bar{\chi}_n(\vec{y})e^{iE_n t-i\vec{P}_n(\vec{x}-\vec{y})}, \\ \phi(\vec{x}) &= \langle 0|\psi_1(\eta_2\vec{x}, 0)\psi_2(-\eta_1\vec{x}, 0)|n \rangle, \chi_n(\vec{x}) = \langle n|\psi_1(\eta_2\vec{x}, 0)\psi_2(-\eta_1\vec{x}, 0)|0 \rangle, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\tilde{G}_{12}(\vec{p}, \vec{q}, P) = \frac{\sum_n \psi_{P\sigma}(\vec{p})\bar{\psi}_{P\alpha}(\vec{q})}{[P_0 - E(\vec{P}) + i0]2E(\vec{P})} + \dots, \quad (63)$$

$$\psi_{P\alpha}(\vec{x}) = \langle 0|\psi_1(0, \eta_2\vec{x})\psi_2(0, \eta_1\vec{x})|MP\alpha \rangle = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\vec{x}} \psi_{P\alpha}(\vec{p}) d\vec{p}. \quad (64)$$

Мы видим, что независимо от того, какой формализм мы используем (одновременной или Бете-Солпитера), положение полюса в двухчастичной функции Грина осталось неизменным. Операция " \sim " в выражениях (60)-(61)

означает приравнивание нулю относительного времени частиц. Так как мы работаем и в импульсном пространстве, то нас интересует определение квазипотенциальных величин (функций Грина, волновых функций) и в этом случае. Исходя из определения амплитуды Солпитера, имеем:

$$\begin{aligned} \psi_M(\vec{x}) &= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\vec{x}} \psi_M(\vec{p}) = \int \frac{d\vec{p}d\vec{p}^0}{(2\pi)^4} e^{i\vec{p}\vec{x}} \psi_M(\vec{p}^0, \vec{p}) = \\ &= \int \frac{d\vec{p}d\vec{p}^0}{(2\pi)^4} e^{i\vec{p}\vec{x}} \int e^{-i\vec{p}\vec{y}} e^{i\vec{p}^0 x_0} \psi_M(x_0, \vec{y}) dx_0 d\vec{y} = \psi_M(x_0 = 0, \vec{x}). \end{aligned} \quad (65)$$

Таким образом, операция " \sim " в импульсном пространстве означает интегрирование по относительной энергии. Применим преобразование " \sim " в уравнении Бете- Солпитера:

$$\tilde{G}_{12} = \tilde{G}_{012} + [G_{012} \tilde{K}_{12} G_{12}] = \tilde{G}_{012} + \tilde{G}_{012} V_{12} \tilde{G}_{12}, \quad (66)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{012}(\vec{p}, \vec{q}, M) &= \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{dq^0}{2\pi} G_{012}(p, q, P) = -\frac{m_1 m_2 [\Lambda_1^+(\vec{p}) \Lambda_2^+(-\vec{p}) - \Lambda_1^-(\vec{p}) \Lambda_2^-(-\vec{p})]}{\epsilon_1 \epsilon_2 (M - H_1(\vec{p}) - H_2(-\vec{p}))}, \\ V_{12} &= \tilde{G}_{012}^{-1} [G_{012} \tilde{K}_{12} G_{12}] \tilde{G}_{12}^{-1} = \tilde{G}_{012}^{-1} - \tilde{G}_{12}^{-1}. \end{aligned} \quad (67)$$

Формальное определение оператора V_{12} в (68) является неудовлетворительным, поскольку из определения величины \tilde{G}_{012} мы видим, что \tilde{G}_{012} , который выражается через проекционные операторы, не имеет обратного оператора. Поэтому в дальнейшем спроектируем в уравнении

$$\tilde{G}_{12} = \tilde{G}_{012} + [G_{012} \tilde{K}_{12} G_{12}]$$

все величины на положительно частотные состояния с помощью дираковских биспиноров:

$$\tilde{G}_{12}^{(+)}(\vec{p}, \vec{q}, M) = \frac{u_1^*(\vec{p}) u_2^*(-\vec{p})}{\sqrt{2\epsilon_1(\vec{p}) 2\epsilon_2(\vec{p})}} \tilde{G}_{12}(\vec{p}, \vec{q}, M) \gamma_1^0 \gamma_2^0 \frac{u_1(\vec{q}) u_2(-\vec{q})}{\sqrt{2\epsilon_1(\vec{q}) 2\epsilon_2(\vec{q})}}, \quad (69)$$

$$\psi_M^{(+)\lambda\sigma}(\vec{p}) = \frac{u_{1\alpha}^{*\lambda}(\vec{p}) u_{2\beta}^{*\sigma}(-\vec{p})}{\sqrt{2\epsilon_1(\vec{p}) 2\epsilon_2(\vec{p})}} \psi_{M\alpha\beta}(\vec{p}), \quad (70)$$

$$\bar{G}_{012}^{(+)}(\vec{p}, \vec{q}, M) \equiv G^f(\vec{p}, \vec{q}, M) = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \frac{1}{M - \epsilon_1(\vec{p}) - \epsilon_2(\vec{p})}. \quad (71)$$

В результате выражения (66), (68) примут следующий вид:

$$\bar{G}_{12}^{(+)} = G^f + G^f V_{12} \bar{G}_{12}^{(+)}, \quad (72)$$

$$V_{12} = [G^f]^{-1} - [\bar{G}_{12}^{(+)}]^{-1}, \quad V_{12} = [G^f]^{-1} [G_{012} \bar{K}_{12} G_{12}]^{(+)} [\bar{G}_{12}^{(+)}]^{-1}. \quad (73)$$

Чтобы получить уравнение для квазипотенциальной волновой функции $\psi_M^{(+)}(\vec{p})$, выполним проектирование на положительно частотные состояния в полном разложении (63), а затем используем его в уравнении (72). Приравнявая вычеты в полюсах, получим квазипотенциальное уравнение Логунова-Тавхелидзе [6,23]:

$$\left[M - \sqrt{\vec{p}^2 + m_1^2} - \sqrt{\vec{p}^2 + m_2^2} \right] \psi_M^{(+)}(\vec{p}) = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} V(\vec{p}, \vec{q}, M) \psi_M^{(+)}(\vec{q}), \quad (74)$$

где V -квазипотенциал, M -масса составной системы. Квазипотенциал V зависит от полной энергии системы и является, вообще говоря, комплексной функцией. Последние два свойства существенно отличают квазипотенциал от нерелятивистского потенциала. Так зависимость от энергии приводит к более сложному условию нормировки волновой функции связанного состояния. Преобразуя уравнение Бете-Соллпитера и вновь выполняя операции исключения нефизических переменных и проектирования на положительно частотные состояния, получим условие нормировки квазипотенциальной волновой функции:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{12}^{(+)} [\bar{G}_{12}^{(+)}]^{-1} \bar{G}_{12}^{(+)} = \bar{G}_{12}^{(+)}, \quad \bar{G}_{12}^{(+)} [G^f - V_{12}] \bar{G}_{12}^{(+)} = \bar{G}_{12}^{(+)}, \\ \psi_M^{(+)} \frac{\partial}{\partial P^0} [G_f^{-1} - V] \Big|_{P^0=E(\vec{P})} \psi_M^{(+)} = 2E(\vec{P}), \\ \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} |\psi_M^{(+)}(\vec{p})|^2 - \int \frac{d\vec{p}d\vec{q}}{(2\pi)^6} \psi_M^{(+)}(\vec{p}) \frac{\partial}{\partial M} V(\vec{p}, \vec{q}, M) \psi_M^{(+)}(\vec{q}) = 2E(\vec{P}). \end{aligned} \quad (75)$$

Квазипотенциальное уравнение достаточно решить в системе центра масс, поскольку волновая функция в произвольной системе отсчета ($\vec{P} = 0$) выражается простым образом через волновую функцию в системе центра масс:

$$\psi_{M,\vec{P}}(\vec{p}) = S_1(L_P) S_2(L_P) \psi_{M,0}(\vec{p}), \quad (76)$$

где $S_{1,2}(L_P)$ - матрицы конечномерных представлений группы Лоренца, определяемые спиновыми свойствами частиц 1 и 2 (точнее, трансформационными свойствами соответствующих операторов поля), L_P - преобразование Лоренца, связывающее указанные выше системы отсчета. Например, для частиц со спином $\frac{1}{2}$ матрица

$$S(L_P) = \sqrt{\frac{E(\vec{P}) + M}{2M}} \left(1 + \frac{\vec{\alpha}\vec{P}}{E(\vec{P}) + M} \right), \quad E(\vec{P}) = \sqrt{\vec{P}^2 + M^2}. \quad (77)$$

Мнимая часть квазипотенциала характеризует неупругие процессы в составной системе, знак ее является строго определенным и соответствует условию поглощения. Определения (73) связывают квазипотенциал V_{12} с ядром Бете-Солпитера и двухчастичной функцией Грина. На практике часто оказывается более удобным построение оператора взаимодействия частиц с помощью двухчастичной амплитуды рассеяния. Назовем двухчастичной амплитудой рассеяния величину T_{12} , которая связана с двухчастичной функцией Грина G_{12} следующим образом:

$$G_{12} = G_{0\ 12} + G_{0\ 12}T_{12}G_{0\ 12}. \quad (78)$$

Отметим также, что связь амплитуды T_{12} с матрицей рассеяния S имеет вид:

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | (S - 1) | \vec{q}_1 \vec{q}_2 \rangle = i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \bar{u}_1(p_1) \bar{u}_2(p_2) T_{12} u_1(q_1) u_2(q_2). \quad (79)$$

Используя (78) и уравнение Бете-Солпитера (33), можно получить релятивистское уравнение Липпмана-Швингера:

$$T_{12} = K_{12} + K_{12}G_{0\ 12}T_{12}. \quad (80)$$

Определим теперь в рамках квазипотенциального подхода еще одну амплитуду \tilde{T}_{12} , которая возникает при проектировании (80) на положительно частотные состояния:

$$\tilde{G}_{12}^{(+)} = G_f + G_f \tilde{T}_{12} G_f, \quad \tilde{T}_{12} = G_f^{-1} [G_{0\ 12} \tilde{T}_{12} G_{0\ 12}]^{(+)} G_f^{-1}. \quad (81)$$

Квазипотенциал $V \equiv V_{12}$ уравнения Логунова-Тавхелидзе оказывается связанным с квазипотенциальной амплитудой $\tilde{T} \equiv \tilde{T}_{12}$ релятивистским уравнением Липпмана-Швингера:

$$\tilde{G}_{12}^{(+)} = G_f + G_f V \tilde{G}_{12}^{(+)}, \quad \tilde{G}_{12}^{(+)} = G_f + G_f \tilde{T} G_f, \quad \tilde{T} = V + V G_f \tilde{T}, \quad (82)$$

$$\bar{T}(\vec{p}, \vec{q}, M) = V(\vec{p}, \vec{q}, M) + \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{V(\vec{p}, \vec{k}, M)\bar{T}(\vec{k}, \vec{q}, M)}{(M - \sqrt{\vec{k}^2 + m_1^2} - \sqrt{\vec{k}^2 + m_2^2} + i0)}. \quad (83)$$

Последнее уравнение имеет очень важное значение при построении квазипотенциала:

$$V = \bar{T}(1 + G_f \bar{T})^{-1}, \quad (84)$$

а именно: квазипотенциал уравнения Логунова-Тавхелидзе строится с помощью спроектированной на положительно частотные состояния двухчастичной амплитуды рассеяния вне массовой поверхности. Уравнение (83) обеспечивает, в частности, выполнение условия упругой (двухчастичной) унитарности для физической амплитуды рассеяния на энергетической поверхности (то есть при учете только вклада промежуточного упругого двухчастичного состояния). В квантовой электродинамике квазипотенциал строится на основе (84) по теории возмущений:

$$V = V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} + \dots, \quad \bar{T} = \bar{T}^{(1)} + \bar{T}^{(2)} + \bar{T}^{(3)} + \dots \quad (85)$$

Подставляя эти ряды в равенство (84) и приравнивая члены одинаковой степени малости, получим:

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= \bar{T}^{(1)}, \\ V^{(2)} &= \bar{T}^{(2)} - \bar{T}^{(1)} G_f \bar{T}^{(1)}, \\ V^{(3)} &= \bar{T}^{(3)} - \bar{T}^{(2)} G_f \bar{T}^{(1)} - \bar{T}^{(1)} G_f \bar{T}^{(2)} + \bar{T}^{(1)} G_f \bar{T}^{(1)} G_f \bar{T}^{(1)}, \end{aligned} \quad (86)$$

Другим методом построения квазипотенциала, отличным от сформулированного в соотношениях (73), (84), (86), является способ частичного перехода на массовую поверхность, где нужно положить $p^0 = q^0 = 0$ [23].

Рассмотрим квазипотенциал однофотонного обмена. Фейнмановская амплитуда, соответствующая первой диаграмме рис.5, имеет вид:

$$T_{1\gamma}(p, q) = -e_1 e_2 \gamma_1^\mu \gamma_2^\nu D_{\mu\nu}(p - q). \quad (87)$$

Выбирая пропагатор фотона в кулоновской калибровке (49), получим следующий квазипотенциал 1γ -взаимодействия:

$$V_{1\gamma}(\vec{p}, \vec{q}) = \bar{u}_1(\vec{p}) \bar{u}_2(-\vec{p}) \frac{e_1 e_2}{k^2} \left\{ 1 - \left[\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 - \frac{1}{k^2} (\vec{\alpha}_1 \vec{k})(\vec{\alpha}_2 \vec{k}) \right] \right\} u_1(\vec{q}) u_2(-\vec{q}). \quad (88)$$

В квадратных скобках выделено брейтовское взаимодействие, полученное впервые Брейтом [11,24] при изучении взаимодействия двух релятивистских частиц с помощью запаздывающих потенциалов. Выражение (88) можно представить в виде матрицы в пространстве двухкомпонентных спиноров, используя явный вид биспиноров Дирака:

$$u^\lambda(\vec{p}) = \sqrt{\frac{\epsilon(\vec{p}) + m}{2m_1}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{\epsilon(\vec{p})+m} \end{pmatrix} w^\lambda, \quad v^\lambda(\vec{p}) = \sqrt{\frac{\epsilon(\vec{p}) + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{\epsilon(\vec{p})+m} \\ 1 \end{pmatrix} \xi^\lambda. \quad (89)$$

В результате квазипотенциал однофотонного обмена можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} V_{17}(\vec{p}, \vec{q}) = & -\frac{4\pi Z\alpha}{k^2} \left\{ 1 + \frac{\vec{p}^2 + \vec{q}^2}{2m_1 m_2} - \frac{(\vec{p}^2 - \vec{q}^2)^2}{4m_1 m_2 k^2} - \frac{\vec{k}^2}{8\mu^2} + \right. \\ & + i\vec{\sigma}_1 \frac{[\vec{p} \times \vec{q}]}{4m_1} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2} \right) + i\vec{\sigma}_2 \frac{[\vec{p} \times \vec{q}]}{3m_2} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{2}{m_1} \right) - \\ & \left. - \frac{1}{4m_1 m_2} [(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) \vec{k}^2 - (\vec{\sigma}_1 \vec{k})(\vec{\sigma}_2 \vec{k})] \right\} = V_c(\vec{p}, \vec{q}) + \Delta V_{hf}(\vec{p}, \vec{q}) + \Delta V_{fs}(\vec{p}, \vec{q}). \quad (90) \end{aligned}$$

При вычислении спектров энергии водородоподобных систем в квантовой электродинамике мы будем использовать теорию возмущений, представив оператор взаимодействия частиц в однофотонном приближении в виде суммы кулоновского потенциала и поправок по степеням $\frac{v^2}{m^2}$. Мы также разложим релятивистские энергии частиц в левой части (74) в ряд по $\frac{v^2}{m^2}$ с необходимой точностью и выберем исходное приближение квазипотенциального уравнения Логунова-Тавхелидзе в шредингеровском виде:

$$\left(B - \frac{\vec{p}^2}{2\mu} \right) \psi_M(\vec{p}) = - \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi Z\alpha}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \psi_M(\vec{q}), \quad (91)$$

которое приводит в спектре энергии системы к боровским уровням энергии:

$$B = - \frac{(Z\alpha)^2 \mu}{2n^2}. \quad (92)$$

Квазипотенциал (90) содержит поправочные члены к кулоновскому взаимодействию трех типов:

1. Релятивистские поправки по степеням $\frac{v^2}{m^2}$.

2. Спин-орбитальное взаимодействие, которое приводит к тонкой структуре спектра.

3. Спин-спиновое взаимодействие, которое дает сверхтонкое расщепление спектральных линий.

Усреднение поправочных членов ΔV по кулоновским волновым функциям лучше выполнить в координатном представлении, выбрав в качестве базиса $\psi_{nl_sj}(\vec{r})$ собственные функции операторов $\vec{L}^2, \vec{S}^2, \vec{J}^2, J_3(\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ - оператор полного спина системы, \vec{L} - оператор орбитального момента, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S})$:

$$\vec{J}^2 \psi_{nl_sj} = j(j+1) \psi_{nl_sj}, \quad \hat{J}_3 \psi_{nl_sj} = j_3 \psi_{nl_sj}, \quad (93)$$

$$\vec{L}^2 \psi_{nl_sj} = l(l+1) \psi_{nl_sj}, \quad \vec{S}^2 \psi_{nl_sj} = s(s+1) \psi_{nl_sj}.$$

Фурье-образ оператора (90) имеет вид:

$$\begin{aligned} V_{17}(\vec{r}) = & -\frac{Z\alpha}{r} - \frac{\mu(Z\alpha)^2}{2r^2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \right) - \frac{\pi Z\alpha}{m_1 m_2} \delta(\vec{r}) - \\ & - \frac{Z\alpha}{r^3} (\vec{r} \nabla) \left(\frac{1}{4m_1^2} + \frac{1}{4m_2^2} + \frac{1}{m_1 m_2} \right) + \frac{8\pi Z\alpha}{3m_1 m_2} (\vec{s}_1 \vec{s}_2) \delta(\vec{r}) + \\ & + \frac{Z\alpha}{m_1 m_2} \left(\frac{m_2}{2m_1} + 1 \right) \frac{(\vec{L} \vec{s}_1)}{r^3} + \frac{Z\alpha}{m_1 m_2} \left(\frac{m_1}{2m_2} + 1 \right) \frac{(\vec{L} \vec{s}_2)}{r^3} + \\ & + \frac{Z\alpha}{m_1 m_2 r^3} \left[(\vec{s}_1 \vec{s}_2) - \frac{3}{r^2} (\vec{s}_1 \vec{r})(\vec{s}_2 \vec{r}) \right]. \end{aligned} \quad (94)$$

При преобразовании Фурье величины (90) было учтено соотношение:

$$4\pi \int (\vec{a} \vec{k})(\vec{b} \vec{k}) \frac{1}{k^2} e^{i\vec{k} \vec{r}} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{r^3} \left[\vec{a} \vec{b} - \frac{3}{r^2} (\vec{a} \vec{r})(\vec{b} \vec{r}) \right] + \frac{4\pi}{3} \delta(\vec{r})(\vec{a} \vec{b}) \quad (95)$$

справедливое для любых векторов \vec{a}, \vec{b} . Средние значения различных степеней Γ и Δ , присутствующих в (94), вычисляются по формулам:

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{\mu Z\alpha}{n^2}, \quad \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{(\mu Z\alpha)^2}{n^3(l + \frac{1}{2})}, \quad \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{(\mu Z\alpha)^3}{n^3 l(l + \frac{1}{2})(l + 1)}, \quad (96)$$

$$\left\langle \Delta^2 \right\rangle = \frac{(\mu Z\alpha)^4}{n^3} \left(\frac{8}{2l+1} - \frac{3}{n} \right), \quad \left\langle \frac{Z\alpha}{r} \Delta \right\rangle = -\frac{\mu^3 (Z\alpha)^4}{n^3} \left(\frac{4}{2l+1} - \frac{1}{n} \right) + O(\alpha^6),$$

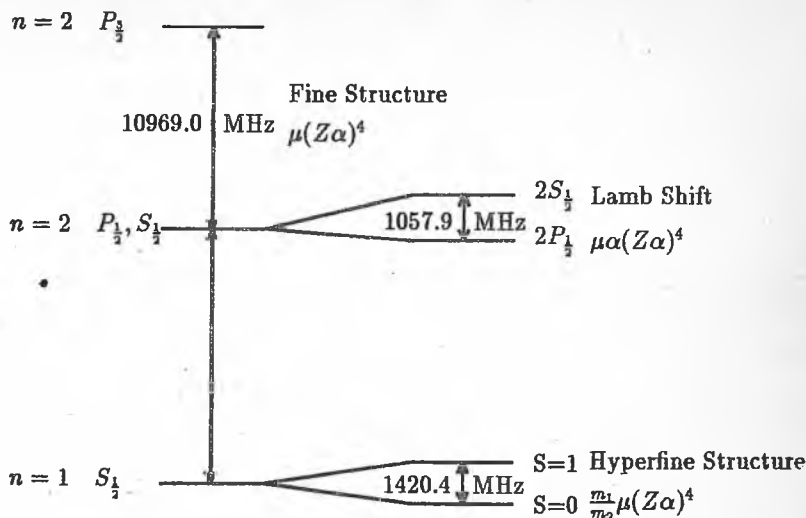


Рис. 6

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = -\frac{2\mu^3(Z\alpha)^3}{n^3} \delta_{l0}, \quad \left\langle \frac{1}{r^3} \hat{L}^2 \right\rangle = \frac{2\mu^3(Z\alpha)^3}{n^3} \frac{1 - \delta_{l0}}{2l + 1}.$$

Появление δ_{l0} в последней формуле требует пояснения. Действительно, $\hat{L}^2 \psi_{n0j} = 0$, но в S-состоянии величина $\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle$ расходится в соответствии с (96). Чтобы получить правильный ответ для оператора $\frac{1}{r^3} \hat{L}^2$, необходимо вначале выполнить угловое интегрирование, что и приводит к (96). Так, например, вклад ΔV_{fs} в спектр энергии атома водорода равен [25]:

$$\Delta B_{fs} = -\frac{\mu(Z\alpha)^4}{2n^3} \left[\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right], \quad j = l \pm \frac{1}{2}. \quad (97)$$

Роль других членов квазипотенциала в энергетической структуре водородоподобных атомов будет исследована в дальнейшем. На рис.6 показано расположение низших уровней энергии атома водорода.

6 Сверхтонкая структура мюония

Сверхтонкая структура спектральных линий в данной системе обусловлена взаимодействием магнитного момента электрона и магнитного момента мюона. Соответствующий член в квазипотенциале был уже получен ранее в одnofотонном приближении и имеет вид:

$$\Delta V^{hf,s}(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{4\pi Z\alpha}{\vec{k}^2 m_1 m_2} \left[\vec{k}^2 (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) - (\vec{\sigma}_1 \vec{k})(\vec{\sigma}_2 \vec{k}) \right]. \quad (98)$$

Основное состояние водородоподобной системы описывается следующей волновой функцией в импульсном представлении:

$$\psi^c(\vec{p}) = \frac{8\sqrt{\pi} W^{\frac{3}{2}}}{(\vec{p}^2 + W^2)^2} w_1 w_2, \quad W = Z\alpha\mu, \quad (99)$$

где $w_{1,2}$ - двухкомпонентные паулиевские спиноры.

Чтобы учесть изменение энергетических уровней за счет $\Delta V^{hf,s}$, необходимо вычислить такой интеграл:

$$\begin{aligned} \Delta E^{hf,s} &= \int \psi^{*c}(\vec{q}) \Delta V^{hf,s}(\vec{p}, \vec{q}) \psi^c(\vec{p}) \frac{d\vec{p} d\vec{q}}{(2\pi)^6} = \\ &= \frac{64\pi W^5 \cdot 4\pi Z\alpha}{m_1 m_2} w_1^* w_2^* \int \frac{d\vec{p}}{(\vec{p}^2 + W^2)^2} \left[(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) - \frac{(\vec{\sigma}_1 \vec{k})(\vec{\sigma}_2 \vec{k})}{\vec{k}^2} \right] \frac{d\vec{q}}{(\vec{q}^2 + W^2)^2} \frac{1}{(2\pi)^6} w_1 w_2. \end{aligned} \quad (100)$$

Во втором слагаемом можно выполнить интегрирование по углам:

$$\int \frac{d\vec{p}}{(\vec{p}^2 + W^2)^2} \frac{(\vec{\sigma}_1 \vec{k})(\vec{\sigma}_2 \vec{k})}{\vec{k}^2} \frac{d\vec{k}}{[(\vec{p} - \vec{k})^2 + W^2]^2} = \frac{(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)}{3} \int \frac{d\vec{p}}{(\vec{p}^2 + W^2)^2} \frac{d\vec{k}}{(\vec{k}^2 + W^2)^2}. \quad (101)$$

В результате мы получаем следующее выражение для величины сверхтонкого расщепления основного состояния мюония в главном порядке теории возмущений:

$$\Delta E^{hf,s} = \frac{2(Z\alpha)^4 \mu^3}{3m_1 m_2} \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle = E_F. \quad (102)$$

В зависимости от ориентации спинов частиц $(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)$ может принимать два значения:

$$\langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle = 2S(S+1) - 3 = \begin{cases} -3, & S=0 \\ 1, & S=1 \end{cases} \quad (103)$$

Таким образом, синглетное состояние основного уровня мюония ($S=0$) и триплетное состояние ($S=1$) имеют разную энергию, и расстояние между этими энергетическими состояниями в рассмотренном приближении определяется энергией Ферми [26]:

$$E_F = \frac{8(Z\alpha)^4 \mu^3}{3m_1 m_2} \quad (104)$$

В настоящее время сверхтонкая структура мюония измерена с высокой степенью точности [13]:

$$\Delta\nu(\text{exp.}) = 4463302,88 \text{ Кзч.} \quad (105)$$

Основной вклад в сверхтонкую структуру в виде энергии Ферми () равен:

$$\Delta\nu = \frac{E_F}{h} = 4.459.034,6 \text{ Кзч.} \quad (106)$$

Теоретические расчеты сверхтонкой структуры, которые достигли в настоящее время высокой степени точности, представлены в таблице 1.

Таблица 1

$\Delta\nu(\text{exp.})$	4.463.302,88(16)
E_F	4.459.034,6(1.7)
$a_e E_F$	5.170,9
$\frac{3}{2}\alpha^2 E_F$	356,2
$\epsilon_1 E_F$	-429,0
$-\frac{3\alpha}{\pi} \frac{m_1 m_2}{m_2^2 - m_1^2} \ln \frac{m_1}{m_2} E_F$	-800,3
$\epsilon_2 E_F$	-41,4
$\epsilon_3 E_F$	8.5(2)
$\frac{m_1 m_2 \alpha^2}{(m_1 + m_2)^2} \left[3\frac{11}{18} - 8\ln 2 - 2\ln \alpha \right] E_F$	9.0
$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{m_2}{m_1} \left[-2\ln^2 \frac{m_2}{m_1} + \frac{13}{12} \ln \frac{m_2}{m_1} + 18.18(63) \right] E_F$	-3.8(1)
	-1.8(1.7)(.16)(1.0) E_F exp. th.
$\epsilon_1 = \alpha^2 \left(\ln 2 - \frac{5}{2} \right)$ $\epsilon_2 = -\frac{8\alpha^3}{3\pi} \left(\ln \alpha - \ln 4 + \frac{281}{480} \right) \ln \alpha$ $\epsilon_3 = \left(\frac{\alpha^3}{\pi} \right) 15.38(29)$	

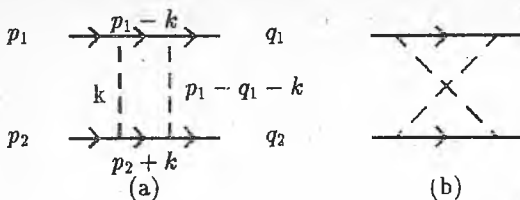


Рис. 7

В таблице 1 можно выделить несколько типов членов: радиационные поправки, поправки на отдачу и смешанные поправки. Чтобы отделить эффекты связности от радиационных поправок, используется фактор $Z\alpha$. Поправки на отдачу возникают, если учесть конечность массы второй частицы m_2 . Главная поправка на отдачу имеет вид:

$$\Delta E_{rec.} = -\frac{3\alpha}{\pi} \frac{m_1 m_2}{m_2^2 - m_1^2} \ln \frac{m_1}{m_2} E_F. \quad (107)$$

Чтобы получить этот вклад в сверхтонкой структуре мюония, необходимо рассмотреть диаграммы двухфотонного обмена (см. рис.7). Для вычисления вклада (107) в сверхтонком расщеплении основного состояния мюония выделим в операторе взаимодействия частиц члены $\sim \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2$, полагая $\vec{p} = \vec{q} = 0$ с необходимой точностью. В данном приближении выражение для биспиноров Дирака упрощается:

$$u^\lambda(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} w^\lambda. \quad (108)$$

Вклад диаграммы рис.7(a) в квазипотенциал определяется следующей формулой:

$$V_1^{hf.s}(\vec{p}, \vec{q}) = ie^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}_1(\vec{q}_1) \bar{u}_2(\vec{q}_2) \gamma_1^\mu (\hat{p}_1 - \hat{k} - m_1) \gamma_1^\nu \gamma_2^\mu (\hat{p}_2 + \hat{k} + m_2) \gamma_2^\nu u_2(\vec{p}_2) u_1(\vec{p}_1) \\ \{ (k^2 + i0)[(p_1 - k)^2 - m_1^2 + i0][(p_2 + k)^2 - m_2^2 + i0][(p_1 - q_1 - k)^2 + i0] \}. \quad (109)$$

Выполняя фейнмановскую параметризацию знаменателей и оставляя в числителе лишь старшие степени импульса интегрирования k , получим:

$$V_1^{hf.s}(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{i\alpha^2}{\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 x(1-x) dx \int \frac{k^\lambda k^\sigma d^4 k}{(k^2 + 2k\Omega + T)^4} \times \quad (110)$$

$$\times \langle \gamma_1^\mu \gamma_1^\lambda \gamma_1^\nu \rangle \langle \gamma_2^\mu \gamma_2^\sigma \gamma_2^\nu \rangle,$$

где

$$\Omega = \{x[ym_2 - (1-y)m_1], 0\}, \quad T = \{x\kappa, 0\}, \quad \kappa = p_1^2 - m_1^2 = p_2^2 - m_2^2.$$

Импульсное интегрирование можно выполнить по хорошо известным формулам [16]:

$$\bullet \quad I^{\lambda\sigma} = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{k^\lambda k^\sigma d^4 k}{(k^2 + 2k\Omega + T)^4} = \left[\Omega^\lambda \Omega^\sigma + \frac{g^{\lambda\sigma}(T - \Omega^2)}{2} \right] F, \quad (111)$$

$$F = -\frac{1}{6} \frac{1}{(T - \Omega^2)^2} = -\frac{1}{6} \frac{1}{x^2 [ym_2 - (1-y)m_1]^2 - \kappa x}.$$

В дальнейшем мы рассматриваем предел $\kappa \rightarrow 0$, так как нас не интересуют в данном случае члены, содержащие $\ln \alpha$. С самого начала задача состоит в том, чтобы в сверхтонкой структуре вычислить поправку $\sim \alpha^5$. Если учесть, что при усреднении оператора взаимодействия частиц по волновым функциям основного состояния возникает множитель α^3 , то в самом квазипотенциале достаточно удерживать члены порядка α^2 . Порядок α^2 от диаграмм (а)-(б) рис.7 набирается, даже если положить $\vec{p} = \vec{q} = 0$. Чтобы при интегрировании по $d^4 k$ в числителе не появились дополнительные степени α , необходимо удерживать только нулевые компоненты вектора k : $k^\lambda \approx k^0$. Это приводит в свою очередь к появлению следующих сверток по лоренцевским индексам:

$$\Omega^\lambda \Omega^\sigma \langle \gamma_1^\mu \gamma_1^\lambda \gamma_1^\nu \rangle \langle \gamma_2^\mu \gamma_2^\sigma \gamma_2^\nu \rangle \approx \Omega_0^2 \langle \gamma_1^i \gamma_1^0 \gamma_1^j \rangle \langle \gamma_2^i \gamma_2^0 \gamma_2^j \rangle, \quad (112)$$

$$g^{\lambda\sigma} \langle \gamma_1^\mu \gamma_1^\lambda \gamma_1^\nu \rangle \langle \gamma_2^\mu \gamma_2^\sigma \gamma_2^\nu \rangle \approx 3 \langle \gamma_1^i \gamma_1^0 \gamma_1^j \rangle \langle \gamma_2^i \gamma_2^0 \gamma_2^j \rangle. \quad (113)$$

В сумме двух членов (112)-(113) имеем:

$$I^{\lambda\sigma} \langle \gamma_1^\mu \gamma_1^\lambda \gamma_1^\nu \rangle \langle \gamma_2^\mu \gamma_2^\sigma \gamma_2^\nu \rangle \approx [\Omega_0^2 + \frac{3}{2}(T - \Omega_0^2)] F \langle \gamma_1^i \gamma_1^0 \gamma_1^j \rangle \langle \gamma_2^i \gamma_2^0 \gamma_2^j \rangle \approx (114)$$

$$\approx (\Omega_0^2 - 3T) F (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2).$$

При преобразовании последнего выражения мы использовали соотношения для $\vec{\sigma}$ - матриц Паули:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) = -2(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2). \quad (115)$$

После сделанных упрощений в числителе выражения (110) необходимо последовательно выполнить интегрирование по фейнмановским параметрам x, y, z :

$$V_1^{hf,s}(\vec{p}, \vec{q}) = \alpha^2(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) \int_0^1 dy \int_0^1 x(1-x) dx \times \quad (116)$$

$$\times \left\{ \frac{[ym_2 - (1-y)m_1]^2}{[x(ym_2 - (1-y)m_1)^2 - \kappa]^2} - \frac{3\kappa x}{x^2[x(ym_2 - (1-y)m_1)^2 - \kappa]^2} \right\} =$$

$$= \frac{\alpha^2(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)}{(m_1 + m_2)} \left(\frac{1}{m_2} \ln \frac{m_2^2}{\kappa} + \frac{1}{m_1} \ln \frac{m_1^2}{\kappa} + \frac{3}{\mu} \right).$$

Аналогично проводится вычисление вклада в квазипотенциал и второй перекрестной двухфотонной диаграммы рис.7(b):

$$V_2^{hf,s}(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\alpha^2(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)}{m_2 - m_1} \left[\frac{1}{m_2} \ln \frac{m_2^2}{\kappa} - \frac{1}{m_1} \ln \frac{m_1^2}{\kappa} + \frac{3(m_2 - m_1)}{m_1 m_2} \right]. \quad (117)$$

Сумма выражений (116)-(117) определяет искомую часть квазипотенциала сверхтонкого взаимодействия:

$$V_{12}^{hf,s}(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{4\alpha^2(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)}{m_2^2 - m_1^2} \ln \frac{m_2}{m_1}. \quad (118)$$

После усреднения (118) по кулоновским волновым функциям основного состояния мюония возникает вклад в сверхтонкую структуру (107), который был впервые вычислен Арновиттом [27]. Для такой водородоподобной системы как мюоний в спектре энергии присутствует помимо α еще один малый параметр отношения масс $\frac{m_1}{m_2} \approx \frac{1}{200}$. В заключение отметим, что в настоящее время расхождение между теорией и экспериментом по сверхтонкой структуре основного состояния мюония лежит в пределах экспериментальной ошибки (см. Таблицу 1).

7 Ширина распада позитрония

Двухчастичная связанная система e^+e^- - позитроний была открыта Дейтчем в 1951 г. [28-29]. Им было измерено сверхтонкое расщепление в позитронии и время жизни ортопозитрония. Для характеристики состояний позитрония будем использовать собственные значения операторов J^2, J_z, S^2 ,

а также P-четность (пространственная четность) и C-четность (зарядовая четность). Введем оператор комбинированной четности:

$$\Sigma = PC = CP, \quad [P, C] = 0, \quad \Sigma^2 = PC^2P = 1. \quad (119)$$

Собственное значение комбинированной четности равно ± 1 . Покажем, что пространственная четность позитрония определяется выражением:

$$P\omega = \pi\omega, \quad \pi = (-1)^{l+1}. \quad (120)$$

Для этого рассмотрим в качестве вектора состояния позитрония такое состояние, которое содержит e^+ и e^- :

$$\omega = \sum_{r,s} \int d\vec{p}d\vec{q} \phi(\vec{p}, \vec{q}; r, s) a_r^*(\vec{p}) b_s^*(\vec{q}) |0\rangle, \quad (121)$$

где $a_r^*(\vec{p})$, $b_s^*(\vec{q})$ - операторы рождения электрона и позитрона, а r, s - спиновые переменные.

$$a_r(\vec{p})\omega_0 = b_s(\vec{q})\omega_0 = 0. \quad (122)$$

В системе центра масс вектор состояния ω примет вид:

$$\omega = \sum_{r,s} \int d\vec{p} \phi(\vec{p}; r, s) a_r^*(\vec{p}) b_s^*(-\vec{p}) \omega_0. \quad (123)$$

Воспользуемся далее известными свойствами преобразования операторов a_r^* , b_s^* при C и P преобразованиях [17,29]:

$$C a_r^*(\vec{p}) C^{-1} = b_r^*(\vec{p}), \quad C b_s^*(\vec{q}) C^{-1} = a_s^*(\vec{q}). \quad (124)$$

Пусть C-преобразованное состояние позитрония описывается новой волновой функцией $\phi^c(\vec{p}; r, s)$:

$$C\omega = \sum_{r,s} \int d\vec{p} \phi^c(\vec{p}; r, s) a_r^*(\vec{p}) b_s^*(-\vec{p}) \omega_0. \quad (125)$$

С другой стороны, мы можем явным образом расписать это C-преобразование, используя соотношения (124):

$$C\omega = \sum_{r,s} \int d\vec{p} \phi(\vec{p}; r, s) C a_r^*(\vec{p}) C^{-1} C b_s^*(-\vec{p}) C^{-1} C \omega_0 = \quad (126)$$

$$= - \sum_{r,s} \int d\vec{p} \phi(-\vec{p}; r, s) a_r^*(\vec{p}) b_s^*(-\vec{p}) \omega_0.$$

Сравнивая выражения (125) и (126), получим:

$$\phi^c(\vec{p}; r, s) = -\phi(-\vec{p}; s, r). \quad (127)$$

Аналогично, используя законы преобразования операторов a_r^*, b_s^* при P- преобразовании

$$P a_r^*(\vec{p}) P^{-1} = a_{-r}^*(-\vec{p}), \quad P b_s^*(\vec{p}) P^{-1} = -b_{-s}^*(-\vec{p}), \quad (128)$$

можно показать, что:

$$\phi^p(\vec{p}; r, s) = -\phi(-\vec{p}, -r, -s), \quad (129)$$

и в итоге для преобразования комбинированной четности получим:

$$\Sigma \phi(\vec{p}; r, s) = \phi(\vec{p}; -s, -r). \quad (130)$$

Таким образом, мы видим, что CP-преобразование меняет местами спины частиц (только меняет, а не переворачивает, так как в правой части у нас изменились оси координат). Из закона преобразования волновой функции позитрония (129) следует, что четность π позитрония равна: $\pi = (-1)^{l+1}$. Перестановка спинов для триплетного состояния позитрония ($S=1$) не меняет волновой функции, а для синглетного ($S=0$) приводит к появлению множителя (-1), так как операторы a_r, b_s антикоммутируют. Следовательно, комбинированная четность равна $CP = (-1)^{S+1}$, что в свою очередь дает для зарядовой четности позитрония $C = (-1)^{S+1}$. Исходя из этих выражений, можно сделать определенные заключения о характере аннигиляционных распадов позитрония из основного ($l=0$) состояния. Так как C-четность фотона отрицательна

$$C A_\mu(\vec{k}) C^{-1} = -A_\mu(\vec{k}), \quad (131)$$

то при распаде позитрония на n фотонов должно выполняться равенство: $(-1)^S = (-1)^n$. Поэтому паразитроний ($S=0$) может распадаться на четное число фотонов (2,4,6,... фотонов), а ортопозитроний - на нечетное число фотонов (3,5,7,... фотонов).



Рис. 8

Рассмотрим распад паралоэитрония и вычислим его время жизни в рамках квазипотенциального подхода. Как уже отмечалось выше, квазипотенциал может иметь мнимую часть, которая характеризует вероятность распада связанной системы. Поэтому нам необходимо найти вклад в мнимую часть квазипотенциала двухфотонных аннигиляционных диаграмм, представленных на рис.8.

Вклад в квазипотенциал диаграммы рис.8(a) равен:

$$V^{(a)}(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{i\alpha^2}{\pi^2} \int d^4 k \bar{v}_2(p_2) \gamma^\nu (\hat{k} - m) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(q_1) \gamma^\mu (\hat{q}_1 - \hat{p}_1 + \hat{k} - m) \gamma^\nu v(q_2) \cdot \\ \cdot \{ (k^2 - m^2 + i0) [(q_1 - p_1 + k)^2 - m^2 + i0] [(p_1 - k)^2 + i0] [(p_2 + k)^2 + i0] \}^{-1}. \quad (132)$$

Нас интересует мнимая часть данного выражения. Для ее получения сделаем в пропагаторах промежуточных фотонов следующую замену [11]:

$$\frac{1}{(p_1 - k)^2 + i0} \rightarrow -2\pi i \delta[(p_1 - k)^2], \quad \frac{1}{(p_2 + k)^2 + i0} \rightarrow -2\pi i \delta[(p_2 + k)^2]. \quad (133)$$

Кроме того, мы будем использовать ряд приближений, которые диктуются точностью расчетов: мы проводим вычисление в старшем порядке теории возмущений по α . Положим $\vec{p} = \vec{q} = 0$ и преобразуем оставшиеся знаменатели и аргументы δ -функций:

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i0} \rightarrow -\frac{1}{2m^2}, \quad \frac{1}{(q_1 - p_1 + k)^2 - m^2 + i0} \rightarrow -\frac{1}{2m^2}, \quad (134) \\ \delta[(k + p_2)^2] \delta[(p_1 - k)^2] \rightarrow \frac{1}{8m^2} \delta(k^0) \delta(|\vec{k}| - m).$$

Биспиноры Дирака также можно выбрать в упрощенном виде:

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, v(\vec{q}) = C\bar{u}^T(\vec{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -i\sigma_2\xi_2^* \end{pmatrix}, \quad (135)$$

где $C = i\gamma^2\gamma^0$ - матрица зарядового сопряжения [17], ξ_1 -спиновая волновая функция электрона, ξ_2 -позитрона.

Так как в каждой биспинорной свертке присутствует один спинор v и один спинор u , у которых отличны от нуля разные компоненты, то чтобы получить ненулевой ответ, необходимо иметь в группе γ - матриц хотя бы одну векторную:

$$\begin{aligned} \bar{v}(p_2)\gamma_\mu(\hat{k} - m)\gamma_\nu u(p_1)\bar{u}(q_1)\gamma_\nu(\hat{q}_1 - \hat{p}_1 + \hat{k} - m)\gamma_\mu v(q_2) &\approx \\ &\approx -2m^2\bar{v}(p_2)\gamma_0\gamma_i u(p_1)\bar{u}(q_1)\gamma_i\gamma_0 v(q_2) + \\ &+ \frac{1}{3}m^2 [\bar{v}(p_2)\gamma_i u(p_1)\bar{u}(q_1)\gamma_i v(q_2) + \bar{v}(p_2)\gamma_i\gamma_j\gamma_k u(p_1)\bar{u}(q_1)\gamma_k\gamma_j\gamma_i v(q_2)]. \end{aligned} \quad (136)$$

Теперь удобно перейти к изучению вклада в квазипотенциал перекрестной двухфотонной диаграммы рис.8(b):

$$\begin{aligned} ImV^{(b)}(\vec{p}, \vec{q}) &= \frac{1}{2i} \frac{i\alpha^2}{\pi^2} \int d^4k (-2\pi i)^2 \delta[(k + p_2)^2] \delta[(p_1 - k)^2] \bar{v}(p_2)\gamma_\mu(\hat{k} - m)\gamma_\nu u(p_1) \times \\ &\times \bar{u}(q_1)\gamma_\mu(\hat{p}_1 - \hat{k} - \hat{q}_2 - m)\gamma_\nu v(q_2) \{ (k^2 - m^2 + i0)[(p_1 - k - q_2)^2 - m^2 + i0] \}^{-1}, \end{aligned} \quad (137)$$

при вычислении которого мы выполним те же приближения, что и в первом случае. В сумме биспинорных свертки от диаграмм (a) и (b) рис.8 ряд слагаемых сокращается:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}m^2 [\bar{v}(p_2)\gamma^i\gamma^j\gamma^k u(p_1)\bar{u}(q_1)\gamma^k\gamma^j\gamma^i v(q_2) - \bar{v}(p_2)\gamma^j\gamma^i\gamma^k u(p_1)\bar{u}(q_1)\gamma^j\gamma^i\gamma^k v(q_2)] &= \\ &= -12\xi_2^T (-i\sigma_2)\xi_1\bar{\xi}_1^+ (-i\sigma_2)\xi_2^*. \end{aligned} \quad (138)$$

Преобразуем это выражение, используя тождества Фирца для σ - матриц [17]:

$$\begin{aligned} \delta_{ab}\delta_{cd} &= \frac{1}{2}\delta_{ad}\delta_{cb} + \frac{1}{2}\vec{\sigma}_{ad}\vec{\sigma}_{cb}, \\ \vec{\sigma}_{ab}\vec{\sigma}_{cd} &= \frac{3}{2}\delta_{ad}\delta_{cb} - \frac{1}{2}\vec{\sigma}_{ad}\vec{\sigma}_{cb}, \end{aligned} \quad (139)$$

и усредним сумму $ImV^{(a)} + Im^{(b)}$ по волновым функциям основного состояния:

$$\frac{\Gamma_{2\gamma}}{2} = \int \frac{8\sqrt{\pi}W^{\frac{3}{2}}}{(\vec{p}^2 + W^2)^2 (2\pi)^3} d\vec{p} (ImV^{(a)} + ImV^{(b)}) \frac{8\sqrt{\pi}W^{\frac{3}{2}}}{(\vec{q}^2 + W^2)^2 (2\pi)^3} d\vec{q}. \quad (140)$$

Ширина двухфотонного распада парапозитрония имеет вид:

$$\Gamma_{2\gamma} = 4\pi \frac{\alpha^2}{\pi^2} |\phi_0|^2 = \frac{m\alpha^5}{2} = \Gamma_0^p, \quad |\phi_0|^2 = \frac{1}{\pi W^2} = \frac{m^3 \alpha^3}{8\pi}. \quad (141)$$

Соответственно для времени жизни парапозитрония получим:

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{\Gamma_{2\gamma}} = \frac{2\hbar}{mc^2 \alpha^5} = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ с}. \quad (142)$$

Формула для ширины $\Gamma_{2\gamma}$ была получена впервые в работах Дирака и Уилера. Впоследствии Харрисом и Брауном [30] были вычислены $O(\alpha)$ поправки к величине Γ_0^p :

$$\Gamma_{2\gamma} = \Gamma_0^p \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \left(5 - \frac{1}{4} \pi^2 \right) \right] = 0,79854 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}, \quad (143)$$

что хорошо согласуется с экспериментальной величиной [31]:

$$\Gamma(\text{exp.})(o - Ps) = (0,7994 \pm 0,011) \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}. \quad (144)$$

В настоящее время предпринимаются значительные усилия в изучении аннигиляционных свойств ортопозитрония. Последние экспериментальные измерения ширины распада ортопозитрония привели к следующим значениям:

$$\Gamma^{\text{exp.}}(o - Ps) = \left\{ \begin{array}{l} 7.0514(14) \text{ мкс}^{-1} [31] \\ 7.0482(16) \text{ мкс}^{-1} [31] \end{array} \right\}. \quad (145)$$

Различные теоретические расчеты $\Gamma^{\text{th.}}(o - Ps)$ можно представить в виде [31]:

$$\Gamma^{\text{th.}}(o - Ps) = \frac{m\alpha^6 2(\pi^2 - 9)}{9\pi}. \quad (146)$$

$$\cdot \left[1 + A \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{3} \alpha^2 \ln \alpha + B \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + \dots \right] = 7.03831(5) \text{ мкс}^{-1},$$

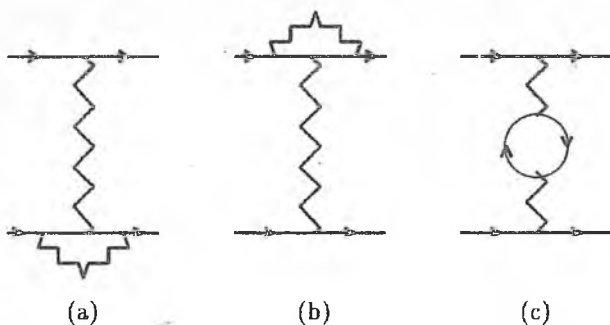


Рис. 9

где коэффициент A вычислен: $A_{[32]} = -10.266 \pm 0.011$, $A_{[33]} = -10.282 \pm 0.003$, а коэффициент B , определяющий α^2 -поправки, до сих пор остается неизвестным. Различие между выражениями (145) и (146) составляет 6-9 стандартных отклонений. Объяснение этого различия в ортопозитронии может быть связано с коэффициентом B . Аналогично, уточнение формулы Харриса-Брауна (143) требует расчета не только логарифмических [31], но также и α^2 -поправок.

8 Лэмбовский сдвиг уровней

В соответствии с формулой тонкой структуры (97) атом водорода в состояниях $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ обладает одинаковой энергией. Но спектроскопические исследования уровней энергии Лэмба и Ризерфорда показали, что эти уровни раздвинуты на величину порядка 1000 Мгц. Для решения проблемы лэмбовского смещения естественно искать вклад в спектр энергии членов квазипотенциала старших порядков. Диаграммы, которые описывают радиационные поправки к однофотонному взаимодействию и дают вклад в лэмбовский сдвиг, показаны на рис.9.

При вычислении вклада диаграмм рис.9 возникает одна проблема [34-35,11]. Она связана с тем, что, например, диаграмма рис.9 (а) содержит четырехмерный интеграл по петлевому импульсу. Диаграмма рис.10(а) содержит два таких интеграла и одну лишнюю по сравнению с предыдущей

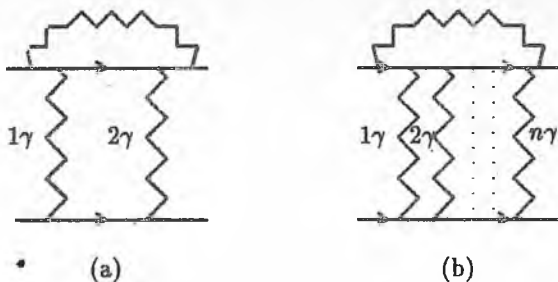


Рис. 10

степень α . При интегрировании в диаграмме рис.10(a) по высоким частотам она дает малый вклад по сравнению с диаграммой рис.9(a). Но при малых частотах диаграмму рис.10(a) необходимо учитывать наравне с однофотонной радиационной диаграммой рис.9(b), так как малая величина $Z\alpha$ компенсируется малым значением пропагатора виртуального фотона. Поэтому область интегрирования естественно разбивается на две части:

$$(Z\alpha)^2\mu \ll \lambda \ll \mu. \quad (147)$$

В низкочастотной области мы должны учесть вклад всех диаграмм типа рис.10(b), но в нерелятивистском приближении, а в высокочастотной области достаточно рассмотреть лишь одну однофотонную радиационную диаграмму рис.9(b). Квазипотенциал связан с ядром Бете-Солпитера известным образом (73), но при расчете лэмбовского сдвига нельзя использовать непосредственное определение ядра K (ниже всюду опущены индексы 1,2) как суммы двухчастично неприводимых диаграмм [36]. Дело в том, что в рассматриваемой задаче обычная теория возмущений не применима для построения ядра K . Это обстоятельство связано с наличием инфракрасных расходимостей в элементах матрицы рассеяния на массовой оболочке, которые используются для построения квазипотенциала. Необходимо поэтому произвести выборочное суммирование бесконечных последовательностей диаграмм, входящих в ядро K . Это проще всего осуществить с помощью специального уравнения. Покажем, что K подчиняется уравнению типа Дайсона. Для этого подействуем на двухчастичную функцию Грина (1) оператором $(\hat{p}_x - m_1)$, учитывая

уравнение для спинорного поля

$$(\hat{p} - m)\psi(x) = e\hat{A}(x)\psi(x) \quad (148)$$

и коммутационные соотношения для $\psi(x)$:

$$[\psi(t, \vec{x}), \bar{\psi}(t, \vec{y})]_+ = \gamma_0 \delta(\vec{x} - \vec{y}) : \quad (149)$$

$$(\hat{p}_{x_1} - m_1)G(x_1, x_2; y_1, y_2) = i\delta(x_1 - y_1)S_2(x_2 - y_2) - ie_1\gamma_{1\mu}R^\mu(x_1, x_2; y_1, y_2; x_1), \quad (150)$$

где мы определили пятиточечную функцию R^μ :

$$R^\mu(x_1, x_2; y_1, y_2; z) = \langle 0 | T \{ \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)A^\mu(z)\bar{\psi}_1(y_1)\bar{\psi}_2(y_2) \} | 0 \rangle. \quad (151)$$

Определим также вершинную функцию Γ^ν двухчастичной системы подобно тому, как это делается в одночастичном случае:

$$R^\mu = D^{\mu\nu}G * \Gamma_\nu * G. \quad (152)$$

Записанное в символическом виде соотношение (152) удобно проиллюстрировать графически (см. рис.11). Перейдем в уравнении (150) в импульсное пространство:

$$S_f^{-1}(p)G(p, q, P) = iI_1S_2(p) - ie_1\gamma_{1\mu} \int d^4k D^{\mu\nu}(k) \times \quad (153)$$

$$G(p, q, P - k)\Gamma_\nu(P - k, P)G(p, q, P).$$

Домножим уравнение (153) на S_f и изобразим его графически на рис.12. Введем согласно Дайсону одночастичный массовый оператор M :

$$S = S_f + S_fMS, \quad M = S_f^{-1} - S^{-1} \quad (154)$$

Умножим уравнение (153) на $G^{-1}S_2^{-1}$ и с помощью получившегося равенства выразим ядро K :

$$K = iM_1S_2^{-1} - e_1\gamma_{1\mu}S_2^{-1} \int d^4k D^{\mu\nu}(k)G(P - k)\Gamma_\nu(P - k, P). \quad (155)$$

Графическая иллюстрация (155) дана на рис.13. При расчете квазипотенциала нам понадобится величина

$$\Delta G = G - G_0 \approx G_0[K_\gamma + K_G]G_0, \quad (156)$$

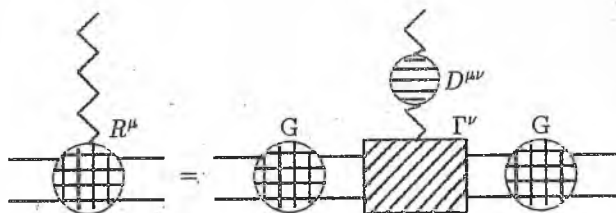


Рис. 11

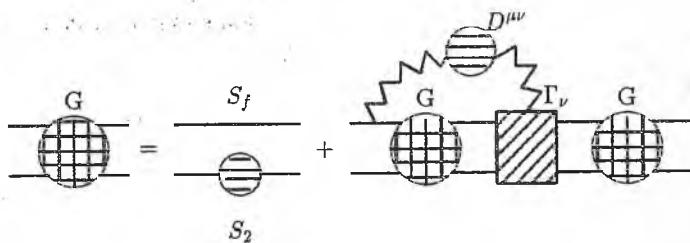


Рис. 12

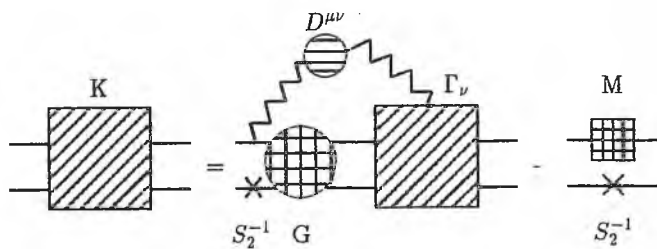


Рис. 13

где ядра K_γ и $G_0 K_G G_0$ имеют следующий вид:

$$K_\gamma = e_1 e_2 \gamma_1^\mu D_{\mu\nu}(p-q) \gamma_2^\nu, \quad D^{\mu\nu}(k) = \frac{d(k^2)}{k^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{\vec{k}^\mu \vec{k}^\nu}{k^2} \right), \quad (157)$$

$$S_2(p_2) K_G(p, q, P) S_2(q_2) = \frac{ie_1^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2} \gamma_1^\mu \times \quad (158)$$

$$\times [G(p - \eta_2 k, q - \eta_2 k, P - k) - S_1(p_1 - k)]_{p_1^2 = m_1^2} S_2(p_2) (2\pi)^4 \delta(p - q) \gamma_1^\mu.$$

Соответствующие члены квазипотенциала определим по формуле (73):

$$V_{\gamma, G} = [\bar{G}_0^{(+)}]^{-1} [G_0 \bar{K}_{\gamma, G} G_0]^{(+)} [\bar{G}_0^{(+)}]^{-1}, \quad (159)$$

$$V_\gamma(\vec{p}, \vec{q}) = \bar{u}_1(\vec{p}) \bar{u}_2(-\vec{p}) K_\gamma(p, q)|_{p_0=q_0=0} u_1(\vec{q}) u_2(-\vec{q}) = \quad (160)$$

$$= e_1 e_2 \bar{u}_1(\vec{p}) \gamma_1 \mu u_1(\vec{q}) D^{\mu\nu}(\vec{k}) \bar{u}_2(-\vec{p}) \gamma_2 \nu u_2(-\vec{q}).$$

При построении V_G разобьем область интегрирования на две части:

$$\int d^3 k dk^0 = \left[\int_{|\vec{k}| < \lambda} d^3 k + \int_{|\vec{k}| > \lambda} d^3 k \right] dk^0. \quad (161)$$

Как уже отмечалось, в низкоэнергетической области мы должны учитывать все фотоны, но в нерелятивистском приближении, поэтому нас интересует функция Грина G из уравнения (33) в нерелятивистской области: $|\vec{k}| < \lambda$. В этой области главную роль играет кулоновское взаимодействие:

$$K_c(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{e_1 e_2 \gamma_1^0 \gamma_2^0}{(\vec{p} - \vec{q})^2}. \quad (162)$$

Соответствующая этому ядру функция Грина называется кулоновской:

$$G_c = G_0 + G_0 K_c G_0 + \dot{G}_0 K_c G_c K_c G_0. \quad (163)$$

В области малых частот в качестве функции Грина в формуле (163) мы можем использовать положительно частотную часть кулоновской функции Грина, так как в нерелятивистской области мы с хорошей точностью обходимся спроектированными на положительные частоты величинами. Из (158) получим:

$$S_2(p_2) K_G(p, q, P) S_2(q_2) = \frac{ie_1^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2} \gamma_1 \mu \Lambda_1^+(\vec{p}_1 - \vec{k}) \Lambda_2^+(\vec{p}_2) \times \quad (164)$$

$$\times [G_c(p - \eta_2 k, q - \eta_2 k, P - k) - S_1(p_1 - k)]_{|p_1^2 = m_1^2} S_2(p_2) (2\pi)^4 \delta(p - q) \times \\ \times \gamma_1^0 \gamma_1^0 \Lambda_1^+(\vec{q}_1 - \vec{k}) \Lambda_2(\vec{q}_2) \gamma_1^0 \gamma_1^0 \gamma_1^\mu.$$

В результате мы приходим к искомому выражению для ядра K_G в области малых импульсов фотона:

$$S_2(p_2) K_G^<(p, q, P) S_2(q_2) = \frac{i e_1^2}{(2\pi)^4} \int_{|\vec{k}| < \lambda} \frac{d^4 k}{k^2} \gamma_1^\mu u_1(\vec{p}_1 - \vec{k}) u_2(\vec{p}_2) \times \quad (165) \\ \times [G_c^{(+)}(p - \eta_2 k, q - \eta_2 k, P - k) - S_1^{(+)}(p_1 - k)]_{|p_1^2 = m_1^2} S_2^{(+)}(p_2) (2\pi)^4 \delta(p - q) \\ \times \bar{u}_1(\vec{q}_1 - \vec{k}) \bar{u}_2(\vec{q}_2) \gamma_1^\mu,$$

где операция проектирования определена по формуле (69). Из (165) следует, что вклад в квазипотенциал имеет вид:

$$\bar{G}_0^{(+)} V_G^< \bar{G}_0^{(+)} = \frac{e_1^2}{i(2\pi)^6} \int dp_0 dq_0 S_1^{(+)}(p_1) \int_{|\vec{k}| < \lambda} \frac{d^4 k}{k^2} \bar{u}_1(\vec{p}_1) \gamma_1^\mu u_1(\vec{p}_1 - \vec{k}) \times \quad (166) \\ \times [G_c^{(+)}(p - \eta_2 k, q - \eta_2 k, P - k) - S_1^{(+)}(p_1 - k)]_{|p_1^2 = m_1^2} S_2^{(+)}(p_2) (2\pi)^4 \delta(p - q) \times \\ \times \bar{u}_1(\vec{q}_1 - \vec{k}) \gamma_1^\mu u_1(\vec{q}_1) S_1^{(+)}(q_1).$$

Используем теперь в этом выражении формулу

$$G_c^{(+)} - G_0^{(+)} = G_0^{(+)} [\bar{G}_0^{(+)}]^{-1} [G_0^{NR} - \bar{G}_0^{(+)}] [\bar{G}_0^{(+)}]^{-1} G_0^{(+)}, \quad (167)$$

где кулоновская функция Грина равна:

$$G_c^{NR}(\vec{p} - \eta_2 \vec{k}, \vec{q} - \eta_2 \vec{k}, P - k) = \sum_n \frac{\psi_n^c(\vec{p} - \eta_2 \vec{k}) \psi_n^{*c}(\vec{q} - \eta_2 \vec{k})}{B - B_n - k^0 + i0}. \quad (168)$$

Так как G_c^{NR} не зависит от относительных координат p_0, q_0 , то три интегрирования в (166) можно выполнить с помощью теории вычетов:

$$V_G^<(\vec{p}, \vec{q}, M) = -\frac{e_1^2}{(2\pi)^3} \int_{|\vec{k}| < \lambda} \frac{d\vec{k}}{2k} \bar{u}_1(\vec{p}) \gamma_1^\mu u_1(\vec{p} - \vec{k}) \times \quad (169) \\ \times \left[\frac{\psi_n^c(\vec{p} - \eta_2 \vec{k}) \psi_n^{*c}(\vec{q} - \eta_2 \vec{k})}{B - B_n - k + i0} - \frac{(2\pi)^4 \delta(\vec{p} - \vec{q})}{\epsilon_1(\vec{p}) - \epsilon_1(\vec{p} - \vec{k}) - k + i0} \right] \bar{u}_1(\vec{q} - \vec{k}) \gamma_1^\mu u_1(\vec{q}).$$

Для определения высокочастотной части квазипотенциала мы можем использовать обычную теорию возмущений. Вклад старшего порядка описывается диаграммой рис.9(b) и имеет вид:

$$V_G^>(\vec{p}, \vec{q}, M) = -e_1 e_2 \bar{u}_1(\vec{p}) \Gamma_{1\mu}^{(2)}(p-q) u_1(\vec{q}) D^{\mu\nu}(p-q) \bar{u}_2(-\vec{p}) \gamma_2 \nu u_2(-\vec{q}). \quad (170)$$

Уместно объединить $V_\gamma, V_G^>$:

$$V_\gamma(\vec{p}, \vec{q}, M) + V_G^>(\vec{p}, \vec{q}, M) = -e_1 e_2 \bar{u}_1(\vec{p}) \Gamma_{1\mu}(\vec{p}-\vec{q}) u_1(\vec{q}) D^{\mu\nu}(\vec{p}-\vec{q}) \bar{u}_2(-\vec{p}) \gamma_2 \nu u_2(-\vec{q}), \quad (171)$$

где $\Gamma_{1\mu}(k) = \gamma_{1\mu} + \Gamma_{1\mu}^{(2)}(k)$. В силу малости энергии связи и $\langle \vec{p}^2 \rangle_c = -2\mu B_c$ частицы, составляющие систему, лежат недалеко от массовой поверхности, и при вычислении высокочастотной части мы можем пренебречь эффектами связанности и воспользоваться приближением рассеяния, в котором вершинный оператор можно выразить через два формфактора:

$$\Gamma_{1\mu}(k) = \gamma_{1\mu} \rho_1(k^2) + \frac{i}{2m_1} \sigma_{1\mu\nu} k^\nu f_1(k^2). \quad (172)$$

Тогда из формулы (170) следует, что высокочастотная часть квазипотенциала представима в виде:

$$\Delta V^>(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{e_1 e_2}{\vec{k}^2} \left\{ \left[\rho_1(k^2) - \frac{\vec{k}^2}{4m_1^2} f_1(k^2) \right] d(k^2) - 1 + i \frac{[\vec{p} \times \vec{q}]}{2m_1^2} \vec{\sigma}_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_1} \right) f_1(k^2) \right\} \quad (173)$$

Воспользуемся для формфакторов и d-функции известными выражениями [11]:

$$\rho_1(k^2) = 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{m_1}{2\lambda} + \frac{11}{24} \right) \frac{k^2}{m_1^2}, \quad (174)$$

$$f_1(k^2) = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad d(k^2) = 1 - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{k^2}{m^2},$$

где λ - инфракрасное обрезание по трехмерному импульсу фотона. После построения квазипотенциала перейдем к вычислению лэмбовского сдвига.

Низкочастотный вклад

$$\Delta E_n^< = -\frac{e_1^2}{(2\pi)^9} \int d\vec{p} d\vec{q} \psi_n^*(\vec{p}) \int_{k<\lambda} \frac{d\vec{k}}{2k} \bar{u}_1(\vec{p}) \gamma_1^\mu u_1(\vec{p}-\vec{k}) \times \quad (175)$$

$$\times \left\{ \sum_n \frac{\psi_n^c(\vec{p} - \eta_2 \vec{k}) \psi_n^{*c}(\vec{q} - \eta_2 \vec{k})}{W_n^c - W_{n'}^c - k + i0} - \frac{(2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q})}{\epsilon_1(\vec{p}) - \epsilon_1(\vec{p} - \vec{k}) - k + i0} \right\} \times \\ \times \bar{u}_1(\vec{q} - \vec{k}) \gamma_1^\mu u_1(\vec{q}) \psi_n^c(\vec{q}).$$

Известно, что $\langle n | \vec{p}^2 | n \rangle = -2\mu W_n = \frac{Z\alpha\mu^2}{n^2}$, а так как $\lambda \sim Z\alpha\mu$, то $k < \sqrt{\langle \vec{p}^2 \rangle}$, и поэтому в этой области мы с достаточной точностью получим:

$$\bar{u}_1(\vec{p}) \gamma_1^\mu u_1(\vec{p} - \vec{k}) \bar{u}_1(\vec{q} - \vec{k}) \gamma_1^\mu u_1(\vec{q}) \approx 1 - \frac{\vec{p}^2 \vec{q}^2}{m_1^2}. \quad (176)$$

Разложим знаменатели в фигурных скобках (175) следующим образом:

$$\frac{1}{W_n - W_{n'} - k} = -\frac{1}{k} + \frac{(W_n - W_{n'})^2}{k^2(W_n - W - n' - k)} - \frac{W_n - W_{n'}}{k^2},$$

$$\frac{1}{\epsilon_1(\vec{p}) - \epsilon_1(\vec{p} - \vec{k}) - k} = -\frac{1}{k} + \frac{[\epsilon_1(\vec{p}) - \epsilon_1(\vec{p} - \vec{k})]^2}{k^2[\epsilon_1(\vec{p}) - \epsilon_1(\vec{p} - \vec{k}) - k]} - \frac{\epsilon_1(\vec{p}) - \epsilon_1(\vec{p} - \vec{k})}{k^2}.$$

Воспользуемся далее условием полноты

$$\sum_n \psi_n^c(\vec{p}) \psi_n^{*c}(\vec{q}) = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \quad (177)$$

и соотношением

$$(W_n - W_{n'}) \int d\vec{p} \psi_n^*(\vec{p}) \psi_{n'}(\vec{p} - \eta_2 \vec{k}) = \int d\vec{p} \psi_n^*(\vec{p}) \frac{\vec{p}\vec{k}}{m_1} \psi_{n'}(\vec{p} - \eta_2 \vec{k}), \quad (178)$$

которое следует из квазипотенциального уравнения (74). Последние равенства позволяют несколько преобразовать (175):

$$\Delta E_n^< = \frac{e_1^2}{(2\pi)^9} \int d\vec{p} d\vec{q} \psi_n^{*c}(\vec{p}) \int_{k < \lambda} \frac{d\vec{k}}{2k} \frac{1}{m_1^2} \left[(\vec{p}\vec{q}) - \frac{(\vec{p}\vec{k})(\vec{q}\vec{k})}{k^2} \right] \times \quad (179)$$

$$\times \sum_{n'} \psi_{n'}^c(\vec{p} - \eta_2 \vec{k}) \psi_{n'}^{*c}(\vec{q} - \eta_2 \vec{k}) \left[\frac{1}{W_n - W_{n'} - k} - \frac{1}{\epsilon_1(\vec{p}) - \epsilon_1(\vec{p} - \vec{k}) - k} \right] \psi_n^c(\vec{q}).$$

Далее пренебрежем зависимостью от \vec{k} в волновых функциях и проведем усреднение по углам:

$$\int d\vec{k} \left[\vec{p}\vec{q} - \frac{(\vec{p}\vec{k})(\vec{q}\vec{k})}{k^2} \right] = 4\pi \frac{2}{3} (\vec{p}\vec{q}) \int k^2 dk. \quad (180)$$

После этого интеграл по переменной k в (179) легко вычисляется:

$$\Delta E_n^< = \frac{2\alpha}{3\pi m_1^2} \sum_{n'} | \langle n' | \bar{p} | n \rangle |^2 (W_{n'} - W_n) \ln \frac{\lambda}{|W_n - W_{n'}|}. \quad (181)$$

Последнее выражение имеет мнимую часть

$$Im \Delta E_n^< = \frac{2\alpha}{3\pi m_1^2} \sum_{W_{n'} < W_n} | \langle n' | \bar{p} | n \rangle |^2 (W_n - W_{n'}), \quad (182)$$

которая определяет вероятность распада системы, как это было рассмотрено в предыдущем разделе, и вещественную часть:

$$Re \Delta E_n^< = \frac{2\alpha}{3\pi m_1^2} \sum_{n'} | \langle n' | \bar{p} | n \rangle |^2 (W_{n'} - W_n) \ln \frac{\lambda}{|W_n - W_{n'}|}. \quad (183)$$

Преобразуем сумму в (183), рассматривая лишь состояния электрона с $l=0$:

$$\begin{aligned} & \sum_{n'} | \langle n' | \bar{p} | n \rangle |^2 (W_{n'} - W_n) \ln \frac{2\lambda}{2|W_n - W_{n'}|} = \\ & = \left\{ \ln \frac{2\lambda}{(Z\alpha)^2 \mu} \delta_{l0} + \ln \frac{(Z\alpha)^2 \mu}{2\Delta W_{n' av}} \right\} \sum_{n'} | \langle n' | \bar{p} | n, l=0 \rangle |^2 (W_{n'} - W_n), \end{aligned} \quad (184)$$

где по определению положено:

$$\begin{aligned} & \sum_{n'} | \langle n' | \bar{p} | n, l=0 \rangle |^2 (W_{n'} - W_n) \ln \frac{(Z\alpha)^2 \mu}{2|W_n - W_{n'}|} \equiv \\ & \equiv \ln \frac{(Z\alpha)^2 \mu}{2\Delta W_{n' av}} \sum_{n'} | \langle n' | \bar{p} | n, l=0 \rangle |^2 (W_{n'} - W_n). \end{aligned} \quad (185)$$

Вычисляя оставшуюся сумму, получим окончательно:

$$Re \Delta E_n^< = \frac{4\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3}{3\pi n^3 m_1^2} \left\{ \ln \frac{\mu(Z\alpha)^2}{2\Delta W_{n' av}} + \delta_{l0} \ln \frac{2\lambda}{\mu(Z\alpha)^2} \right\}. \quad (186)$$

Высокочастотный вклад

Аналогично, усредняя (173) по кулоновским волновым функциям, получим:

$$\Delta E_n^> = \frac{4\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3}{3\pi n^3 m_1^2} \left\{ \left[\ln \frac{m_1}{2\lambda} + \frac{11}{24} - \frac{m_1^2}{5m_2^2} - \frac{3m_1}{8m_2} \right] \delta_{l0} + \frac{3}{8} \left[\frac{1}{l + \frac{1}{2}} - \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right] \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \right\}. \quad (187)$$

Окончательное выражение для лэмбовского сдвига в атоме водорода определится суммой двух слагаемых (186)-(187):

$$\Delta E_n^L = \frac{4\alpha(Z\alpha)^4\mu^3}{3\pi n^3 m_1^2} \left\{ \ln(Z\alpha)^{-2} + \frac{11}{24} - \frac{m_1^2}{5m_2^2} + \ln\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) - \frac{3m_1}{8m_2} \right\} \delta_{l0} + \quad (188)$$

$$+ \ln\left(\frac{(Z\alpha)^2\mu}{2\Delta W_n^{av}}\right) + \frac{3}{4} \left[\frac{1}{2l+1} - \frac{1}{2j+1} \right] \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$

Как мы видим, из суммы двух выражений (186)-(187) выпала константа обрезания λ . Величина $\ln\left(\frac{(Z\alpha)^2\mu}{2\Delta W_n^{av}}\right)$ называется логарифмом Бете [1]. Значение $\Delta W_n^{av} = (W_n - W_{n'})_{cp}$ может быть вычислено для конкретного n . Так для состояния $2S$ имеем:

$$\ln\left(\frac{(Z\alpha)^2\mu}{2\Delta W_n^{av}}\right) \approx -3\delta_{l0}, \quad (189)$$

что приводит к лэмбовскому сдвигу S -уровня, то есть расщеплению $2S_{\frac{1}{2}}, 2P_{\frac{1}{2}}$:

$$E_{th}^L = E(2S_{\frac{1}{2}}) - E(2P_{\frac{1}{2}}) = 1050 M \text{ эв}. \quad (190)$$

Теоретические расчеты лэмбовского сдвига и сравнение их с экспериментом представлены в таблице 2 [13].

experiment	1.057,845(9)
$L \left[\ln(Z\alpha)^{-2} - 2.207909 \left(\frac{m_R}{m_e}\right)^3 + \frac{1}{8} \left(\frac{m_R}{m_e}\right)^2 \right]$	1.050,560
$\pi Z\alpha L \left(\frac{427}{128} - \frac{3}{2} \ln 2 \right) \left(\frac{m_R}{m_e}\right)^3$	7,129
$(Z\alpha)^2 L \left[-\frac{3}{4} \ln^2(Z\alpha)^{-2} + \ln(Z\alpha)^{-2} \left[4 \ln 2 + \frac{551}{48} \right] \right] \left(\frac{m_R}{m_e}\right)^3$	-0,246
$(Z\alpha)^2 L [24, 0 \pm 1.2] \left(\frac{m_R}{m_e}\right)^3$	-0,173(9)
$0,323 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) L \left(\frac{m_R}{m_e}\right)^3$	0,101
$Z \left(\frac{m_e}{m_p}\right) L (a + b \ln(Z\alpha)^{-2})$	0,359
$\frac{\pi}{2\alpha} m_e^2 < r^2 >$	0,127(3)
$L \equiv \frac{m\alpha(Z\alpha)^4}{6\pi} = 135,643\ 891(44)$	

Таблица 2

9 Многообразие квазипотенциальных уравнений

Квазипотенциальный метод Логунова-Тавхелидзе, построенный на основных принципах квантовой теории поля, сводит изучение релятивистской двухчастичной системы к исследованию трехмерных уравнений шредингеровского вида с обобщенным комплексным потенциалом - квазипотенциалом. Главная проблема, которая рассматривается в этом подходе, состоит в построении квазипотенциала, описывающего взаимодействие частиц, и нахождении решений получающихся уравнений. Точные решения релятивистских квазипотенциальных уравнений с квазипотенциалами конкретного вида представляют такой же интерес, как и соответствующие решения уравнения Шредингера. К сожалению, уравнение (74) в случае частиц неравных масс не имеет точного решения даже для кулоновского потенциала. Поэтому взаимодействие частиц неравных масс удобно исследовать с помощью уравнения Логунова-Тавхелидзе, преобразовав его левую часть к локальному виду [37]:

$$\left(\frac{b^2(M)}{2\mu_R} - \frac{\vec{p}^2}{2\mu_R} \right) \psi_M(\vec{p}) = I(M, \vec{p}) \int V(\vec{p}, \vec{q}, M) \psi_M(\vec{q}) \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}, \quad (191)$$

$$I(M, \vec{p}) = \frac{(M + \epsilon_1 + \epsilon_2)[M^2 - (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2]}{8E_1 E_2 M},$$

где введена релятивистская приведенная масса [37]

$$\mu_R = \frac{E_1 E_2}{M} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} = \frac{M^4 - (m_1^2 - m_2^2)^2}{4M^3}, \quad (192)$$

а $b^2(M)$ - квадрат относительного импульса частиц на энергетической поверхности

$$M = \epsilon_1(\vec{p}) + \epsilon_2(\vec{p}), \quad \vec{p}^2 = b^2(M) = \frac{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}{4M^2}. \quad (193)$$

Определение релятивистской приведенной массы (192) согласовано с релятивистским выражением для координаты центра масс системы двух частиц и в нерелятивистском пределе $E_{1,2} \rightarrow m_{1,2}$ переходит в обычную нерелятивистскую приведенную массу $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. На энергетической поверхности (193)

множитель $I(M, \vec{p})=1$. Поэтому его удобно включить в квазипотенциал, так как квазипотенциал должен правильно воспроизводить амплитуду рассеяния на массовой поверхности, а ее продолжение на значения импульсов вне массовой поверхности является неоднозначной операцией. В случае локального квазипотенциала $V(\vec{p}, \vec{q}, M) = V(\vec{p} - \vec{q}, M)$ возникает уравнение

$$\left(\frac{b^2(M)}{2\mu_R} - \frac{\vec{p}^2}{2\mu_R} \right) \psi_M(\vec{p}) = \int V(\vec{p}, \vec{q}, M) \psi_M(\vec{q}) \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}, \quad (194)$$

которое эквивалентно локальному уравнению Шредингера и может быть решено точно для кулоновского взаимодействия.

Использованное выше определение релятивистской приведенной массы (192) не является единственно возможным. Известно следующее выражение для величины относительной скорости [38]:

$$V_{отн.}^2 = 1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(p_1 p_2)^2} = \frac{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)^2}. \quad (195)$$

Связь между $V_{отн.}$ и относительным импульсом \vec{p} может иметь различный характер. Если придать относительному движению релятивистский вид, то есть положить:

$$\vec{p}^0 = \frac{\mu_R^2 V_{отн.}^2}{1 - V_{отн.}^2}, \quad (196)$$

то учитывая (195), получим определение Тодорова для релятивистской приведенной массы [8]:

$$\mu'_R = \frac{m_1 m_2}{E_1 + E_2} = \frac{m_1 m_2}{M}. \quad (197)$$

Рационализированное уравнение (191) дает возможность ввести релятивистскую приведенную массу еще одним способом. Перепишем (193) в виде:

$$\frac{M^2 - (m_1 + m_2)^2}{2M} = \frac{2Mb^2}{M^2 - (m_1 - m_2)^2}$$

и назовем левую часть этого равенства энергией связи

$$\tilde{E} \equiv \frac{M^2 - (m_1 + m_2)^2}{2M},$$

а правую часть представим следующим образом:

$$\frac{2Mb^2}{M^2 - (m_1 - m_2)^2} \equiv \frac{b^2(M)}{2\bar{\mu}_R},$$

где приведенная масса Лепажа [39]

$$\bar{\mu}_R = \frac{M^2 - (m_1 - m_2)^2}{4M} \quad (198)$$

В этом случае зависимость между \bar{p}^2 и $V_{отн.}^2$ определяется формулой:

$$\frac{\bar{p}^2}{2\bar{\mu}_R} = (\gamma - 1) \frac{m_1 m_2}{M}, \quad \gamma = \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_1 m_2}.$$

Таким образом, в квазипотенциальном уравнении (194) можно использовать различные выражения для релятивистской приведенной массы (192), (197), (198), но им будут отвечать разные прединтегральные множители (191). В зависимости от характера задачи возможны и другие варианты функциональной связи относительного импульса и относительной скорости. Если задать зависимость между энергией относительного движения и относительной скоростью в виде:

$$\frac{\bar{k}^2}{2\mu} = (\gamma - 1)\mu = \frac{\mu}{\sqrt{1 - V_{отн.}^2}} - \mu,$$

то квадрат относительного импульса \bar{k}^2 на массовой поверхности будет определяться по аналогии с нерелятивистской теорией формулой [40]:

$$\bar{k}^2 = - \left(\frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{m_1 m_2 [M^2 - (m_1 + m_2)^2]}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (199)$$

Выразив полную энергию связанной системы M из равенства (199), получим:

$$M = \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{m_1 m_2}} \sqrt{\bar{k}^2 + m_1 m_2} = \sqrt{\bar{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\bar{p}^2 + m_2^2}. \quad (200)$$

Последнее соотношение позволяет ввести [40] понятие эффективной частицы с массой $m' = \sqrt{m_1 m_2}$.

Соответствующее формуле (24) определение релятивистской приведенной массы (192) приводит к уравнению шредингеровского типа (191), которое

имеет универсальный характер. Оно применимо для описания связанных состояний двух частиц с произвольными спинами и справедливо для любых типов взаимодействий. В последнее время локальное квазипотенциальное уравнение (194) широко используется для расчета спектра масс адронов и изучения ширин различных распадов мезонов и барнионов [41-42].

Многообразие трехмерных квазипотенциальных уравнений обусловлено [7-8, 37, 39-40, 43-44]:

1. Различными выборами переменной, по которой можно выйти за массовую или энергетическую оболочку.

2. Неоднозначностью экстраполяции амплитуды рассеяния вне (энергетической или массовой) оболочки.

Некоторые варианты трехмерного подхода связываются с системой бесконечного импульса [44-45]. В работе [46] было показано, что возникающее при этом квазипотенциальное уравнение можно получить другим способом, развивая последовательно квазипотенциальный подход в переменных светового фронта:

$$x_{\pm} = \frac{1}{2}(x_0 \pm x_3), \quad x = (x_-, x_+, x_1, x_2). \quad (201)$$

Выведем двухчастичное квазипотенциальное уравнение в переменных светового фронта для двух скалярных частиц. Для этого перейдем в амплитуде Бете-Солпитера к импульсному представлению:

$$\psi(x) = \psi(x_+, x_-, \vec{x}_{\perp}) = -\frac{1}{2} \int d\vec{p}_{\perp} dp_{-} dp_{+} e^{-i(p_{+}x_{-} + p_{-}x_{+} - \vec{p}_{\perp} \vec{x}_{\perp})} \psi(p_{-}, p_{+}, \vec{p}_{\perp}). \quad (202)$$

Определим квазипотенциальную волновую функцию:

$$\psi(p_{+}, \vec{p}_{\perp}) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_{-} \psi(p_{-}, p_{+}, \vec{p}_{\perp}). \quad (203)$$

Очевидно, что в координатном представлении этому интегрированию по p_{-} отвечает следующая операция:

$$\psi(x_-, \vec{x}_{\perp}) = \psi(x_-, x_+, \vec{x}_{\perp})|_{x_{+}=x_{0}+x_{3}=0}. \quad (204)$$

Рассмотрим двухчастичную функцию Грина и определим Фурье-образ двухвременной функции Грина:

$$\tilde{G}(P, p_{+}, \vec{p}_{\perp}; q_{+}, \vec{q}_{\perp}) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_{-} dq_{-} G(P, p, q). \quad (205)$$

Нас прежде всего интересует интегрирование свободного двухчастичного пропагатора

$$G_0(P, p, q) = \frac{\delta(p - q)}{\left[\left(\frac{P}{2} + p \right)^2 - m_1^2 + i0 \right] \left[\left(\frac{P}{2} - p \right)^2 - m_2^2 + i0 \right]} \quad (206)$$

по переменным p_-, q_- , которое можно провести с помощью теории вычетов:

$$\tilde{G}(P, p_+, \vec{p}_\perp) = \frac{4\pi i \delta(p_+ - q_+) \delta(\vec{p}_\perp - \vec{q}_\perp) \theta(x) \theta(1-x)}{P_+ x(1-x) \left[P^2 + \vec{p}_\perp^2 - \frac{\left(\frac{P}{2} + \vec{p} \right)^2 + m_1^2}{x} - \frac{\left(\frac{P}{2} + \vec{p} \right)^2 + m_2^2}{(1-x)} \right]}, \quad (207)$$

где $x = \frac{1}{2} + \frac{p_+}{P_+}$, $0 \leq x \leq 1$. Определим квазипотенциал обычным образом с помощью обратных функций Грина (73) и получим квазипотенциальное уравнение для связанных состояний скалярных частиц:

$$\left[P^2 - \frac{\vec{p}_\perp^2 + m_1^2}{x} - \frac{\vec{p}_\perp^2 + m_2^2}{1-x} \right] \psi(x, \vec{p}_\perp) = \frac{1}{x(1-x)} \int_0^1 dy \int d\vec{q}_\perp \quad (208)$$

$$\times V(P, x, \vec{p}_\perp; y, \vec{q}_\perp) \psi(y, \vec{q}_\perp).$$

Для построения квазипотенциала одноквантового обмена в данном подходе воспользуемся соотношением (73), представив ядро K в виде:

$$K = \frac{g^2}{(p_+ - q_+)(p_- - q_-) - (\vec{p}_\perp - \vec{q}_\perp)^2 + i0}, \quad (209)$$

$$V = -g^2 \left\{ \frac{\theta(x-y)}{x-y} \left[P^2 - \frac{\vec{p}_\perp^2 + m_2^2}{1-x} - \frac{\vec{q}_\perp^2 + m_1^2}{y} - \frac{(\vec{p}_\perp - \vec{q}_\perp)^2}{x-y} \right]^{-1} + \right. \quad (210)$$

$$\left. + \frac{\theta(y-x)}{y-x} \left[P^2 - \frac{\vec{p}_\perp^2 + m_2^2}{1-y} - \frac{\vec{q}_\perp^2 + m_1^2}{x} - \frac{(\vec{p}_\perp - \vec{q}_\perp)^2}{y-x} \right]^{-1} \right\}.$$

Квазипотенциальное уравнение (208), которое также называют уравнением Вайнберга, имеет нерелятивистский предел и широко используется в пертурбативной квантовой хромодинамике для описания составных систем кварков [45].

10 Заключение

Как было показано, в рамках квазипотенциального метода Логунова-Тавхелидзе успешно решаются многочисленные задачи вычисления релятивистских спектров энергии двухчастичных связанных состояний в квантовой электродинамике. Теоретические расчеты спектров энергии водородоподобных систем постоянно усложняются в старших порядках теории возмущений и, конечно, не сводятся к перечисленным в пособии фактам. Результаты решения других задач, относящихся к атому водорода, мюонию и позитронию, можно найти в современных обзорных статьях [47].

Несмотря на уже довольно долгую историю [47], данный круг задач не утрачивает своей актуальности, что во многом обусловлено увеличением экспериментальной точности измерения уровней энергии. В ближайшее время можно ожидать появления теоретических расчетов новых вкладов в спектрах энергии прежде всего в задачах о ширинах распада ортопозитрония и парапозитрония, а также сверхтонкого расщепления в позитронии и мюонии [48]. Вместе с тем оказалось, что лептонная система e^-e^+ обнаруживает такие свойства, которые ранее теоретически не исследовались. Так было установлено, что в образовании e^-e^+ пар наблюдаются узкие резонансы с массами 1,5-1,8 Мэв [49]. Эти новые экспериментальные данные получили свое обоснование в рамках квазипотенциального метода Логунова-Тавхелидзе [49]. В теоретическом плане объяснение новых резонансов оказалось возможным в результате последовательного построения квазипотенциала одноквантового обмена во всей области положительных и отрицательных энергий связи в квантовой электродинамике.

Квазипотенциальный метод находит многочисленные применения и для описания связанных состояний кварков и глюонов [41-42]. На основе локального квазипотенциального уравнения (194) удалось успешно решить задачи вычисления спектра масс легких и тяжелых адронов, описания процессов радиационных и полулептонных распадов мезонов, но многие проблемы физики сильных взаимодействий, которые не обсуждались в данном пособии, еще ждут своего решения.

11 Задачи

1. Уравнением Брейта для частиц со спином 0 называется уравнение вида

$$[\epsilon_1(\vec{p}) + \epsilon_2(\vec{p}) - M] \phi(\vec{p}) + \int U(\vec{p}, \vec{q}) \phi(\vec{q}) \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} = 0, \quad (211)$$

в котором потенциал берется в виде:

$$U(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{e^2 (p_1 + q_1)^\mu (p_2 + q_2)^\nu D_{\mu\nu}(p_1 - q_1)}{4i \sqrt{\epsilon_1(\vec{p})\epsilon_1(\vec{q})\epsilon_2(\vec{p})\epsilon_2(\vec{q})}}, \quad (212)$$

а фотонный пропагатор взят в кулоновской калибровке (49). Энергии $\epsilon_i(\vec{p})$ разлагаются по степеням \vec{p}^2 с точностью до членов 4 порядка:

$$\epsilon_i(\vec{p}) = m_i + \frac{\vec{k}^2}{2m_i} - \frac{\vec{k}^4}{8m_i^3}. \quad (213)$$

Привести уравнение (211) к виду:

$$\begin{aligned} & \left[m_1 + m_2 + \frac{1}{2\mu} \vec{p}^2 - \frac{1}{8\mu^3} \left(1 - \frac{3\mu}{m_1 + m_2} \right) \vec{p}^4 - M \right] \phi(\vec{p}) = \\ & = e^2 \int \left\{ \frac{1}{(\vec{p} - \vec{q})^2} - \frac{1}{4m_1 m_2} \left[1 - 2 \frac{\vec{p}^2 + \vec{q}^2}{(\vec{p} + \vec{q})^2} + \frac{(\vec{p}^2 - \vec{q}^2)}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \right] \right\} \phi(\vec{q}) \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (214)$$

Перейти в (214) к координатному пространству и получить для собственных значений энергии с точностью α^4 :

$$M_{nl} = m_1 + m_2 - \frac{\mu\alpha^2}{2n^2} + \frac{3\mu\alpha^4}{8n^4} - \frac{\mu\alpha^4}{n^3(2l+1)} - \frac{\mu^2\alpha^4}{8(m_1 + m_2)n^4} + \frac{\mu^2\alpha^4}{(m_1 + m_2)n^3} \delta_{l0}. \quad (215)$$

2. Доказать, что для эрмитова квазипотенциала решение уравнения Липпманна-Швингера (83) удовлетворяет условию упругой унитарности:

$$\begin{aligned} T(\vec{p}, \vec{q}, M) - T^*(\vec{p}, \vec{q}, M) &= \int T^*(\vec{p}, \vec{k}, M) T(\vec{k}, \vec{q}, M) \times \\ & \times \delta[M - \epsilon_1(\vec{k}) - \epsilon_2(\vec{k})] \frac{id\vec{k}}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (216)$$

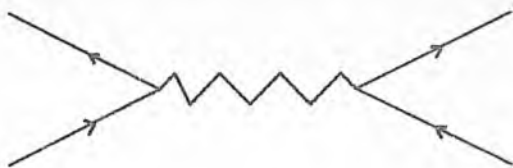


Рис. 14

3. Доказать следующие формулы преобразования Фурье, необходимые при построении квазипотенциала в координатном представлении:

$$\int e^{i\vec{q}\vec{r}} \frac{4\pi}{\vec{q}^2} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{r}, \quad \int e^{i\vec{q}\vec{r}} \frac{4\pi\vec{q}}{\vec{q}^2} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} = \frac{i\vec{r}}{r^3}, \quad (217)$$

$$\int \frac{4\pi(\vec{a}\vec{q})(\vec{b}\vec{q})}{\vec{q}^4} e^{i\vec{q}\vec{r}} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2r} \left[\vec{a}\vec{b} - \frac{(\vec{a}\vec{r})(\vec{b}\vec{r})}{r^2} \right],$$

$$\int \frac{4\pi(\vec{a}\vec{q})(\vec{b}\vec{q})}{\vec{q}^2} e^{i\vec{q}\vec{r}} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{r^3} \left[\vec{a}\vec{b} - 3 \frac{(\vec{a}\vec{r})(\vec{b}\vec{r})}{r^2} \right] + \frac{4\pi}{3} (\vec{a}\vec{b})\delta(\vec{r}).$$

4. Показать, что временной порядок $x_{1,2}^0 > y_{1,2}^0$ определяется θ -функцией в формуле (23).

5. Доказать, что двухчастичная функция Грина в уравнении Солпитера определяется выражением:

$$\tilde{G}_{012}(\vec{p}, \vec{q}, M) = \int \frac{d^0 p}{2\pi} \frac{d^0 q}{2\pi} G_{012}(p, q, P) = -\frac{m_1 m_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{[\Lambda_1^+(\vec{p})\Lambda_2^+(-\vec{p}) - \Lambda_1^-(\vec{p})\Lambda_2^-(-\vec{p})]}{M - H_1(\vec{p}) - H_2(-\vec{p})}. \quad (218)$$

6. Показать, что в случае спинорной системы частица-античастица одnofотонная аннигиляционная диаграмма (рис.14) дает в потенциале вклад вида:

$$V = \frac{e^2}{4m^2} \hat{S}^2. \quad (219)$$

7. Доказать, что матричный элемент тока $\langle \vec{p}, \lambda | J_\mu(0) | \vec{q}, \nu \rangle$, который называют формфактором частицы, можно выразить через две функции переменной k^2 :

$$\langle \vec{p}, \lambda | J_\mu(0) | \vec{q}, \nu \rangle = \bar{u}(\vec{p}) \Gamma_\nu(p, q) u(\vec{q}) k^2 D^{\nu\mu}(k) = \quad (220)$$

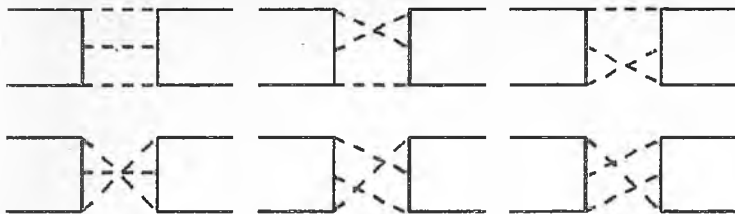


Рис. 15

$$= \bar{u}(\vec{p}) \left[F_1(k^2) \gamma_\nu - \frac{1}{2m} F_2(k^2) \sigma_{\nu\lambda} k^\lambda \right] u(\vec{q}) k^2 D^{\nu\mu}(k),$$

где F_1 - дираковский формфактор, F_2 - паулиевский формфактор.

8. Доказать формулу (187) для высокочастотной части лэмбовского сдвига.

9. В низшем порядке теории возмущений вклад в ширину распада ортопозитрония определяется шестью диаграммами рис.15. Получить формулу Ора- Пауэлла для ширины распада ортопозитрония:

$$\Gamma(o - Ps) = \Gamma_0 = \frac{m\alpha^6 2(\pi^2 - 9)}{9\pi}. \quad (221)$$

10. Используя выражения (85)-(86), построить квазипотенциал однофотонного взаимодействия в кулоновской калибровке (49) (формула (90)), диагональной (фейнмановской) калибровке

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i0}, \quad (222)$$

калибровке Фрида-Иенни

$$D_{FY}^{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2} \left(g^{\mu\nu} + 2 \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \quad (223)$$

11. Одночастичный массовый оператор M удовлетворяет уравнению Дайсона

$$M(p) = -ie\gamma_\mu \int dk D^{\mu\nu}(k) S(p-k) \Gamma_{0\nu}(p-k, p), \quad (224)$$

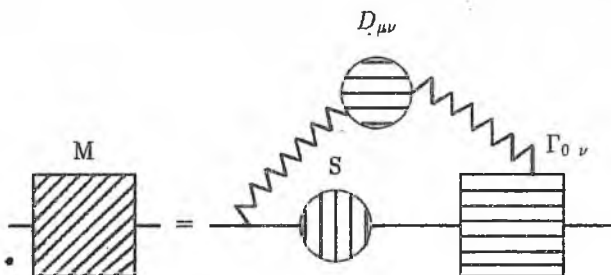


Рис. 16

графическая иллюстрация которого показана на рис.16. Γ_0 - одночастичный вершинный оператор [11].

Решая уравнения (155), (224) итерациями по теории возмущений, доказать, что в качестве исходного приближения для ядра К мы получим диаграмму однофотонного обмена рис.9(с), а в следующем порядке теории возмущений ядро К (155) представляется суммой диаграмм рис.17.

12. Вычислить электромагнитные формфакторы электрона и доказать формулы (174). Найти величину аномального магнитного момента электрона в старшем порядке теории возмущений (поправка Швингера).

13. Получить формулу (207) для $\tilde{G}(P, p_+, \vec{p}_\perp)$ и построить квазипотенциал одноквантового обмена, используя (206)-(207), (209).

14. Используя для построения квазипотенциала формулу (73) и проводя в ней интегрирование по относительным энергиям, доказать, что система двух разноименно заряженных частиц с массой m в приближении обмена одним безмассовым нейтральным скалярным фотоном описывается квазипотенциальным уравнением вида:

$$2\epsilon(\vec{p})[M - 2\epsilon(\vec{p})]\phi(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{q}}{2\epsilon(\vec{q})} V(\vec{p}, \vec{q}, M)\phi(\vec{q}), \quad (225)$$

где M - масса связанного состояния, а квазипотенциал имеет вид:

$$V(\vec{p}, \vec{q}, M) = \frac{(2me)^2}{|\vec{p} - \vec{q}|[M - \epsilon(\vec{p}) - \epsilon(\vec{q}) - |\vec{p} - \vec{q}| + i0]}. \quad (226)$$

$$K^{(2)} =$$

The diagram shows the expansion of $K^{(2)}$ as a sum of terms. On the left, four terms are shown, each consisting of a circle with a wavy line inside, connected to two horizontal lines. The wavy line is positioned at the top, bottom, left, and right of the circle in the four terms respectively. On the right, four terms are shown, each consisting of two horizontal lines with a wavy line connecting them. The wavy line is positioned at the top, middle, middle, and bottom of the space between the lines in the four terms respectively. The terms are separated by plus and minus signs, indicating a series expansion.

Рис. 17

Показать, что в координатном представлении, если $|\vec{p}|, |\vec{q}| \ll m$, оператор взаимодействия частиц равен:

$$V(r) = -\frac{2\alpha 1}{\pi r} \{ \cos(Br) [si(Br) + \pi] - \sin(Br) ci(Br) + i\pi \sin(Br) \}, \quad (227)$$

где $si(x)$, $ci(x)$ - интегральные синус и косинус соответственно, $B=M-2m$ - энергия связи.

15. Во втором порядке теории возмущений вклад в сверхтонкую структуру основного состояния мюония определяется выражением:

$$\Delta B = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\langle \psi^c | \Delta V | \psi_n^c \rangle \langle \psi_n^c | \Delta V | \psi^c \rangle}{B_1^c - B_n^c}, \quad (228)$$

где $\psi^c(\vec{p})$ -кулоновская волновая функция основного состояния (99).

Переходя к непосредственному использованию формулы (228), преобразуем сумму по кулоновским состояниям с помощью швингеровского представления для кулоновской функции Грина [39]:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\psi_n^{c*} \psi_n^c}{B_1^c - B_n^c} &= -\frac{64\pi}{\alpha W^4} [R(\vec{p}, \vec{q}) + \frac{\pi^2 W^5 \delta(\vec{p} - \vec{q})}{4(\vec{p}^2 + W^2)} + \\ &+ \frac{W^6}{4(\vec{p}^2 + W^2)(\vec{p} - \vec{q})^2(\vec{q}^2 + W^2)}]. \end{aligned} \quad (229)$$

Величина $R(\vec{p}, \vec{q})$, которая описывает взаимодействие частиц за счет обмена двумя, тремя и т.д. кулоновскими фотонами, равна

$$\begin{aligned} R(\vec{p}, \vec{q}) &= \frac{W^8}{(\vec{p}^2 + W^2)^2(\vec{q}^2 + W^2)^2} \left[\frac{5}{2} - \frac{4W^2}{(\vec{p}^2 + W^2)} - \frac{4W^2}{(\vec{q}^2 + W^2)} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \ln A + \frac{2A-1}{\sqrt{4A-1}} \arctg \sqrt{4A-1} \right], \quad A = \frac{(\vec{p}^2 + W^2)(\vec{q}^2 + W^2)}{4W^2(\vec{p} - \vec{q})^2}. \end{aligned} \quad (230)$$

Вычисление возникающих в (228) интегралов, связанных с $R(\vec{p}, \vec{q})$, можно провести, используя тождество Касвела-Лепажжа [39]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^4} \int \frac{d\vec{p} d\vec{q}}{W^6} R(\vec{p}, \vec{q}) f(p) &= -\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{W p^2 dp}{(p^2 + W^2)^7} f(p) \cdot \\ &\cdot \left[\ln 2 - \frac{5}{2} + \frac{W}{p} \arctg \frac{p}{W} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{p^2}{W^2} \right) + \frac{4W^2}{p^2 + W^2} \right]. \end{aligned} \quad (231)$$

Результаты вычисления основных интегралов с помощью (231), которые определяются величиной $R(\vec{p}, \vec{q})$ и вносят вклад в сверхтонкую структуру мюония, собраны в таблице.

$f(p)$	1	$\frac{W^2}{W^2+p^2}$	$\frac{W}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{W}$
$\frac{1}{\pi^4} \int \frac{d\vec{p} d\vec{q}}{W^6} R(\vec{p}, \vec{q}) f(p)$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$1 - \frac{\pi^2}{12}$

Вычислить вклады $(Z\alpha)^2 E_F$, $(Z\alpha)^2 \frac{\mu^2}{m_1 m_2} E_F$ в сверхтонком расщеплении основного состояния мюония с помощью выражений (228), (230)-(231).

Библиографический список

1. Bethe H.A. The electromagnetic shift of energy levels //Physical Review. 1947. V.72. N4. P.339-342.
2. Salpeter E.E. Mass corrections to the fine structure of hydrogen-like atoms //Physical Review. 1952. V.87. N2. P.328-343.
Fulton T., Karplus R. Bound state corrections in two-body systems //Physical Review. 1954. V.93. N5. P.1109-1116.
3. Метод Тамма-Данкова //Проблемы современной физики. N10. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
4. Salpeter E.E., Bethe H.A. A relativistic equation for bound state problems Physical Review. 1951. V.84. N6. P.1232-1249.
5. Eddington A. Relativity theory of Photons and Electrons, Cambridge, University Press, 1936.
6. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Quasi-optical approach in quantum field theory //Nuovo Cimento. 1963. V.29. N2. P.380-399.
7. Фаустов Р.Н. Уровни энергии и электромагнитные свойства водородоподобных атомов //ФЭЧАЯ. 1972. Т.3. Вып.1. С.238-268.
Groch H., Yennie D.R. Effective potential model for calculating nuclear corrections to the energy levels of hydrogen //Reviews of Modern Physics. 1969. V.41. N2. P.350-374.
8. Ризов В.А., Тодоров И.Т. Квазипотенциальный подход к задаче о связанных состояниях в скалярной электродинамике //ФЭЧАЯ. 1975. Т.6. Вып.3. С.669-742.
9. Кадышевский В.Г., Тавхелидзе А.Н. Квазипотенциальный метод в релятивистской задаче двух тел //Проблемы теоретической физики. М.: Наука, 1969. С.261-277.
10. Бродский С., Дрелл С. Современный статус квантовой электродинамики //УФН. 1972. Т.107. Вып.1. С.57-98.

11. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.
12. Lautrup B.E., Petermann A., E. de Rafael Recent developments in the comparison between theory and experiments in QED //Physics Reports. 1972. V.3. N4. P.193-260.
13. Kinoshita T., Sapirstein J. New development in QED. In Atomic Physics 9, World Scientific Publishing Company, Singapore, 1984. P.38-52.
14. Лэмб В., Ризерфорд Р. Тонкая структура атома водорода согласно микроволновому методу //Сдвиг уровней атомных электронов.М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
15. Kush P., Foley H.M. The magnetic moment of the electron //Physical Review. 1948. V.74. N3. P.250-274.
16. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
17. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. М.: Мир, 1984. Т.1-2.
18. Nakanishi N. A General Survey of the Theory of the Bethe-Salpeter Equation //Supplement of the Progress of Theoretical Physics. 1969. V.43. P.1-81.
19. Daison F.J. Wave function of relativistic system //Physical Review. 1953. V.91. P.1543-1550.
20. Wick G.C. Properties of Bethe-Salpeter wave functions //Physical Review. 1954. V.96, N4. P.1124-1134.
21. Cutkosky R.E. Solutions of a Bethe-Salpeter equation //Physical Review. 1954. V.96. N4. P.1135-1141.
22. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами.М.: Физматгиз, 1960.
23. Фаустов Р.Н. Квазипотенциальный метод в задаче о связанных состояниях //ТМФ. 1970. Т.3. N2. С.240-254.
Faustov R.N. Relativistic wave function and Form Factors of the Bound

- System //Annals of Physics. 1973. V.78. P.176-189.
 Nguen Van Hieu, Faustov R.N. Quasi-optical potential in Quantum Field Theory //Nuclear Physics. 1964. V.53. P.337-344.
24. Иваненко Д.Д., Соколов А.А. Классическая теория поля. М.: Гос. изд. тех.- теор. лит., 1951.
 Иваненко Д.Д., Соколов А.А. Квантовая теория поля. Гос. изд. тех.- теор. лит., 1952.
25. Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. Релятивистский спектр энергии связанной системы двух частиц и локальное квазипотенциальное уравнение //ТМФ. 1986. Т.66. N3. С.399-408.
 Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. Релятивистский спектр двухмезонного связанного состояния в скалярной электродинамике //Вестник МГУ. Сер.3. Физика. Астрономия. 1986. Т.27. N3. С.3-8.
26. Bodwin G.T., Yennie D.R., Gregorio M.A. Recoil effects in the hyperfine structure of QED bound states //Reviews of Modern Physics. 1985. V.57. N3. Pt.1. P.723-782.
 Bodwin G.T., Yennie D.R. Hyperfine splitting in positronium and muonium //Physics Reports. 1978. V.43. P.267-303.
 Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. Вычисление релятивистских поправок к сверхтонкой структуре мюония //ЯФ. 1987. Т.45. Вып.3. С.770-776.
27. Arnowitt R. The hyperfine structure of hydrogen //Physical Review. 1953. V.92. N4. P.1002-1009.
28. Strosio M.A. Positronium: a review of the theory //Physics Reports. 1975. V.22. N5. P.217-277.
29. Jauch J.M., Rohrlich F. The theory of photons and electrons, Springer - Verlag, Berlin/New York, 1980.
30. Tomozawa Y. Radiative corrections to Parapositronium Decay //Annals of Physics. 1980. V.128. P.463-490.
31. Dvoeglazov V.V., Faustov R.N., Tyukhtyaev Y.N. Decay rate of a Positronium Review of Theory and Experiment. Preprint IFUNAM FT-93-017, 1993.

32. Caswell W.E., Lepage G.P. $O(\alpha^2 \ln(\alpha^{-1}))$ corrections in positronium: Hyperfine splitting and decay rate //Physical Review. V.A20. N1. P.36-43.
Cung V.K., et al. Order α^2 corrections to the positronium hyperfine interval arising from three-photon virtual annihilation //Nuovo Cimento. 1978. V.A43. N1. P.643-657.
33. Adkins G.S. Radiative corrections to Positronium Decay //Annals of Physics. 1983. V.146. P.78-128.
34. Erickson G.W., Yennie D.R. Radiative Level Shifts I. Formulation and lowest order Lamb Shift //Annals of Physics. 1965. V.35: P.271-313.
35. Erickson G.W., Yennie D.R. Radiative Level Shifts II. Higher order contributions to the Lamb Shift //Annals of Physics. 1965. V.35. P.447-510.
36. Фаустов Р.Н. Лэмбовский сдвиг уровней: Лекции для молодых ученых. Дубна, 1973.
37. Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. Релятивистская приведенная масса и квазипотенциальное уравнение //ТМФ. 1985. Т.64. N2. С.179-185.
38. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973.
39. Lepage G.P. Analytic bound-state solutions in a relativistic two-body formalism with applications in muonium and positronium //Physical Review. 1977. V.A16. N3. P.863-876.
Caswell W.E., Lepage G.P. Reduction of the Bethe-Salpeter equation to an equivalent Schrodinger equation, with applications //Physical Review. 1978. V.A18. N3. P.810-819.
40. Кадышевский В.Г. и др. Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел //ФЭЧАЯ. 1972. Т.2. Вып.3. С.637-690.
41. Галкин В.О., Фаустов Р.Н. Мезоны в релятивистской кварковой модели. // Тр. V Школы молодых ученых "Квантовая теория поля и физика высоких энергий", 1990. С.19-60.
42. Галкин В.О., Мишуров А.Ю., Фаустов Р.Н. Массы мезонов в релятивистской кварковой модели //ЯФ. 1992. Т.55. Вып.8. С.2175-2185.

43. Gross F. Three dimensional Covariant Integral Equations for Low-Energy Systems //Physical Review. 1963. V.186. N5. P.1448-1462.
44. Weinberg S. Dynamics at Infinite Momentum //Physical Review. 1966. V.150. N4. P.1313-1318.
45. Lepage G.P., Brodsky S.J. Exclusive processes in perturbative quantum chromodynamics //Physical Review. 1980. V.D22. N9. P.2157-2198.
46. Гарсеванишвили В.Р. и др. Релятивистские формфакторы составных частиц //ТМФ. 1975. Т.23. N3. С.310-321.
47. Quantum Electrodynamics, ed. by T.Kinoshita. World Scientific, Singapore, 1990.
48. Каршенбойм С.Г. Новые логарифмические вклады в мюонии и позитронии //ЖЭТФ. 1993. Т.103. Вып.4. С.1105-1116.
Поправки порядка α^2 к сверхтонкому расщеплению в позитронии //ЯФ. 1993. Т.56. Вып.12. С.155-171.
49. Арбузов Б.А. и др. Релятивистский кулоновский квазипотенциал и новые узкие резонансы в системах заряженных частиц //ТМФ. 1990. Т.83. N2. С.175-185.