МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и информатики

Самарскому государственному университету 30 лет

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Методические указания

Издательство "Самарский университет"
1999

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Самарского государственного университета.

Методические указания состоят из четырех параграфов. В первом рассматриваются задачи, приводящие к понятию определенного интеграла, и вводится само это понятие. Во втором параграфе дается общая схема применения определенного интеграла, которая в параграфе 3 демонстрируется на конкретных задачах из различных разделов физики. В параграфе 4 читателю предложены задачи для самостоятельного решения.

Предполагается, что при работе с данным материалом студент владеет основными приемами интегрирования.

Методические указания предназначены для студентов физического и химического факультетов, могут быть использованы также студентами механико-математического факультета при изучении приложений определенного интеграла.

Составители: канд.физ.-мат.наук, доц. В.М.Долгополов, канд.физ.-мат.наук, доц. И.Н.Родионова, канд.физ.-мат.наук, ст. преп. М.В.Долгополов

Отв. редактор д-р.физ.-мат.наук, проф. Л.А.Сараев

1 Задачи, которые приводят к понятию определенного интеграла

1.1 Площадь криволинейной трапеции

Рассмотрим криволинейную трапецию (рис.1), т.е. плоскую фигуру, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, непрерывной на $[a, b]$ $(f(x) > 0)$, с боков отрезками прямых $x = a, x = b$, снизу отрезком оси $OX (a \leq x \leq b)$. Для вычисления площади криволинейной трапеции поступим следующим образом: ее основание (отрезок $[a, b]$) разобьем произвольным образом на n частей. Пусть абциссами точек деления будут

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < b.$$

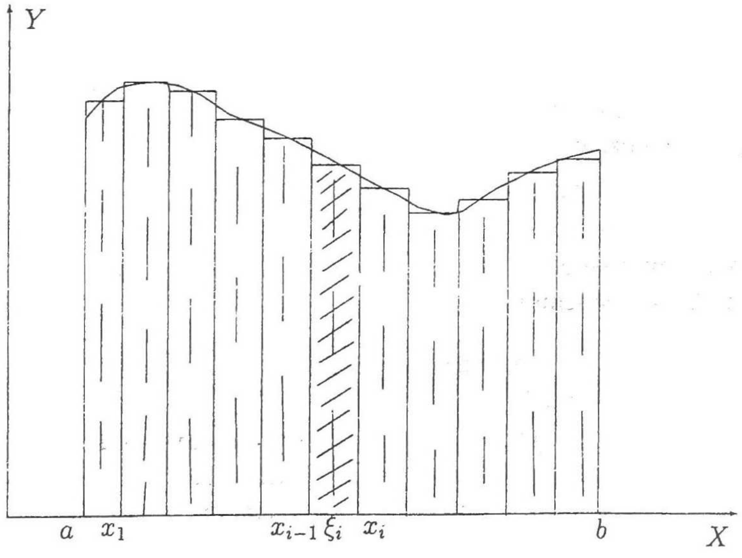


Рис. 1

Через каждую точку деления проведем прямую, параллельную оси Y Криволинейная трапеция разобьется на n частей. Каждую элементарную криволинейную трапецию заменим фигурой, близкой ей по форме и такой, чтобы площадь ее легко вычислялась. В качестве указанной фигуры возьмем прямоугольник с основанием, равным основанию соответствующей элементарной трапеции. За высоту i-го прямоугольника примем ординату точки графика функции $f(\xi_i)$, где ξ_i - произвольная точка, принадлежащая отрезку $[x_{i-1}, x_i]$. Длину этого отрезка обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Площадь i-го (заштрихованного) прямоугольника равна $f(\xi_i)\Delta x_i$. В результате указанного выше построения получим фигуру, состоящую из прямоугольников (см. рис. 1). Она называется ступенчатой фигурой. Ее площадь σ_n равна сумме площадей составляющих прямоугольников

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{1}$$

Площадь ступенчатой фигуры зависит от способа дробления отрезка $[a, b]$ и от выбора точек ξ_i.

Пользуясь интуитивным понятием о площади, можно сказать, что чем больше число точек деления, тем ближе ступенчатая фигура к криволинейной трапеции и естественно принять за площадь криволинейной трапеции предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры при условии, что число точек деления отрезка $[a, b]$ стремится к бесконечности. Последнее условие заменяют более совершенным. Обозначим через λ длину наибольшего из частичных отрезков

$$\lambda = max \Delta x_i.$$

Очевидно, если $\lambda \to 0$, то $n \to \infty$. В силу сказанного выше, площадь криволинейной трапеции

$$S = \lim_{\lambda \leftarrow 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{2}$$

В отличие от суммы (1) предел (2) не зависит ни от n, ни от выбора точек ξ_i. Для функции $y = f(x)$ сумма (1) называется интегральной суммой по отрезку $[a, b]$, а предел (2) определенным интегралом по данному отрезку. Обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{3}$$

1.2. Работа переменной силы

Пусть точка движется вдоль отрезка $[a, b]$ оси X и на нее действует сила $\vec{F}$ в направлении движения. Если сила $\vec{F}$ постоянна, то работа такой силы $A = F(b - a)$. В случае произвольного направления $\vec{F}$ работа равна скалярному произведению $\vec{F} \cdot \vec{r}$, где $\vec{r}$ - вектор перемещения.

Если же сила в каждой точке отрезка меняет свою величину, т.е. является функцией координаты точки отрезка $[a, b]$, $F = F(x)$, то для вычисления ее работы прибегают к определенному интегралу. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей. Рассмотрим i-й частичный отрезок (рис. 2)

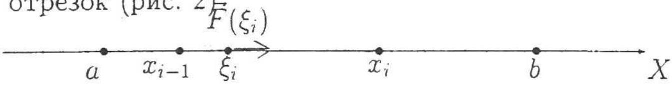


Рис. 2

и выберем в нем произвольную точку ξ_i. Будем считать, что в пределах данного отрезка величина силы $F(x)$ постоянна и равна $F(\xi_i)$ (это возможно в силу бесконечно малой длины отрезка Δx_i и непрерывности функции $F(x)$). Тогда элементарная работа на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ равна $\Delta A_i = F(\xi_i)\Delta x_i$.

Проводя подобные рассуждения для каждого частичного отрезка и суммируя значения работы по всем отрезкам, получим приближенное равенство

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i. \tag{4}$$

Очевидно, чем меньше Δx_i, тем меньше погрешность приближения (4). Естественно за истинное значение работы принять предел суммы (4) при условии $\lambda = max\Delta x_i \to 0$:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx \tag{5}$$

в силу определения определенного интеграла (формула (3)).

1.3. Статические моменты и координаты центра тяжести плоской фигуры

Как известно, статический момент K материальной точки массы m относительно некоторой оси равен произведению массы m на расстояние d точки от оси. В случае системы n материальных точек с массами $m_1, m_2, ..., m_n$, лежащих в одной плоскости с осью соответственно на расстояниях $d_1, d_2, ..., d_n$ от оси, статический момент выразится суммой

$$K = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i.$$

При этом статические моменты точек, расположенных по разные стороны от оси, берутся с противоположными знаками. Если точки заполняют собой сплошь плоскую фигуру или линию, то для отыскания статического момента вместо сумм потребуется интеграл. В качестве примера найдем статические моменты относительно координатных осей криволинейной трапеции, описанной в пункте 1.

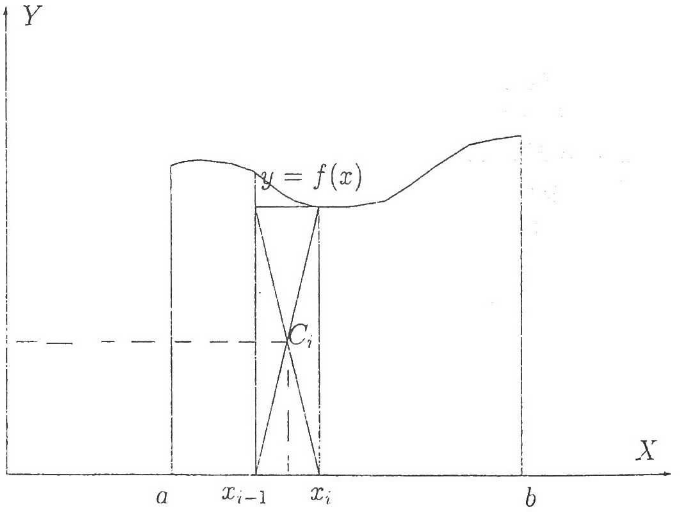


Рис. 3

Так же, как и в случае вычисления площади, делим отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей и, проводя ординаты, соответствующие точкам деления, разбиваем криволинейную трапецию на n элементарных полосок. Каждую из них заменяем прямоугольником с тем же основанием и высотой, совпадающей с правой крайней ординатой полоски. Рассмотрим произвольную i-ю полоску (рис. 3). Центр тяжести прямоугольника находится в точке C_i пересечения его диагоналей. Центр тяжести обладает тем свойством, что если в нем сосредоточить всю массу фигуры, то его статический момент относительно любой оси будет равен статическому моменту всей фигуры относительно этой оси.

Будем предполагать, что масса распределена равномерно по фигуре с постоянной поверхностной плотностью ρ (случай, когда ρ является функцией точки фигуры, т.е. $\rho = \rho(x, y)$ рассматривается в приложении двойных интегралов). Без ограничения общности положим $\rho = 1$, в противном случае результат будет умножен на ρ. Тогда масса Δm_i i-го прямоугольника численно равна его площади $\Delta m_i = f(x_{i-1})\Delta x_i = y_{i-1}\Delta x_i$. Вычислим координаты точки C_i. Очевидно (см. рис. 3), что

$$C_i\left(x_{i-1} + \frac{\Delta x_i}{2}, \frac{y_i}{2}\right).$$

Сосредоточим массу i-го прямоугольника в точке C_i и вычислим его статические моменты относительно координатных осей.

$$\Delta K_x = \frac{y_i}{2} y_i \Delta x_i = \frac{1}{2} y_i^2 \Delta x_i = \frac{1}{2} f^2(x_i)\Delta x_i. \tag{6}$$

$$\Delta K_y = (x_{i-1} + \frac{\Delta x_i}{2}) y_i \Delta x_i = x_{i-1} y_i \Delta x_i + \frac{1}{2} y_i (\Delta x_i)^2.$$

Вторым слагаемым в формуле (6) можно пренебречь, т.к. при $\Delta x_i \to 0$ это будет бесконечно малая величина более высокого (2-го) порядка по сравнению с первым слагаемым и

$$\Delta K_y = x_{i-1} y_i \Delta x_i = x_{i-1} f(x_i) \Delta x_i.$$

Просуммировав статические моменты всех прямоугольных полосок, получим

$$K_x \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(x_i)\Delta x_i, \tag{7}$$

$$K_y \approx \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} f(x_i)\Delta x_i. \tag{8}$$

Заметим, что правые части приближенных равенств (7) и (8) есть интегральные суммы соответственно функций $f^2(x)$ и $xf(x)$ на $[a,b]$. А $y = f(x)$ функция, график которой ограничивает сверху криволинейную трапецию.

Переходя в формулах (7), (8) к пределу при $\lambda \to 0$, получим:

$$K_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx, \qquad K_y = \int_a^b xf(x)dx. \tag{9}$$

Пусть $C(x_c, y_c)$ центр тяжести рассматриваемой плоской фигуры. Для определения координат x_c и y_c сосредоточим массу фигуры (численно равную ее площади P, т.к. $\rho = 1$) в точке C. По свойству центра тяжести его статический момент будет равен статическому моменту всей фигуры относительно соответствующей оси, т.е.

$$Px_c = K_y = \int_a^b xydx, \qquad Py_c = K_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2dx,$$

откуда

$$x_c = \frac{1}{P}\int_a^b xydx, \qquad y_c = \frac{1}{2P}\int_a^b y^2dx, \tag{10}$$

где

$$P = \int_a^b ydx \qquad (y = f(x)).$$

В том случае, когда плоская фигура ограничена сверху кривой $y = f_1(x)$, снизу $y = f_2(x)$, с боков прямыми $x = a$, $x = b$, формулы (9) принимают вид:

$$K_x = \frac{1}{2}\int_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x))dx, \qquad K_y = \int_a^b x(f_1(x) - f_2(x))dx. \tag{11}$$

Предлагаем читателю доказать это самостоятельно.

2. Применение определенного интеграла

Обобщая рассмотренные выше задачи, уясним себе тот путь, по которому в прикладных вопросах обычно приходят к определенному интегралу. С этой целью набросаем общую схему применения интеграла.

Пусть требуется определить некоторую постоянную величину Q, связанную с промежутком $[a, b]$ (например, работу переменной силы). При этом пусть каждому частичному промежутку $[x_{i-1}, x_i]$, содержащемуся в $[a, b]$, отвечает некоторая часть величины Q так, что разложение $[a, b]$ на частичные промежутки влечет за собой разложение на соответствующие части и величины Q. Задача состоит в вычислении ее значения, отвечающего всему промежутку $[a, b]$. Пусть частичному отрезку $[x_{i-1}, x_i]$ отвечает часть величины ΔQ_i. Исходя из условий вопроса стараются найти для ΔQ_i выражение вида $q(x_i)\Delta x_i$, линейное относительно Δx_i, так чтобы оно отличалось от ΔQ_i лишь на бесконечно малую более высокого порядка по сравнению с Δx_i. Иными словами, из бесконечно малого элемента ΔQ_i выделяют его главную часть (так мы поступали при вычислении ΔK_y, определяемого формулой (6), в остальных примерах в этом не было необходимости). Итак,

$$\Delta Q_i = q(x_i)\Delta x_i. \tag{12}$$

Разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, b].$$

Так как каждому промежутку $[x_{i-1}, x_i]$ отвечает элементарная часть нашей величины, определяемая формулой (12), то вся искомая величина Q приближенно выразится суммой

$$Q \approx \sum_{i=1}^{n} q(x_i)\Delta x_i. \tag{13}$$

Степень точности полученного значения будет тем выше, чем мельче частичные промежутки, поэтому, переходя к пределу в равенстве

(13) при $\lambda = max\Delta x_i \to 0$, получим:

$$Q = \int_a^b q(x)dx.$$

Таким образом, задача сводится к установлению равенства (12).

3. Применение метода определенного интеграла к решению конкретных задач из различных разделов физики

Задача 1. Найти силу давления жидкости, испытываемую полукругом радиуса R, погруженным вертикально в воду так, что его диаметр совпадает с поверхностью воды.

Решение. По определению давление численно равно силе, действующей на единицу площади, $P = \frac{dF}{dS}$.

Если бы поверхность полукруга была параллельна поверхности жидкости, то сила давления P определялась бы по закону Паскаля (давление жидкости действует во все стороны равномерно и не зависит от расположения площадки на глубине h). Поэтому сила давления $P(h)$ на частицы пластинки, находящиеся на глубине h, равна весу столба жидкости над этими частицами:

$$P(h) = \nu hS,$$

где ν - удельный вес жидкости, h - глубина погружения, S площадь погруженной поверхности. Но так как различные части полукруга находятся на различной глубине, то задача решается методом определенного интеграла.

Введем систему координат (рис. 4) и разделим полукруг на n горизонтальных полосок толщиной $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Каждую полоску в силу бесконечной малости ее высоты можно заменить прямоугольником с высотой Δy_i и шириной, равной верхнему основанию полоски. Таким образом, вместо полукруга будем рассматривать некоторую ступенчатую фигуру (Рис. 5).

Вычислим силу давления ΔP_i на произвольную полоску, находящуюся на глубине y_i (рис. 5). В силу малой толщины Δy_i можно считать, что все части полоски находятся на одной глубине и применим закон Паскаля.

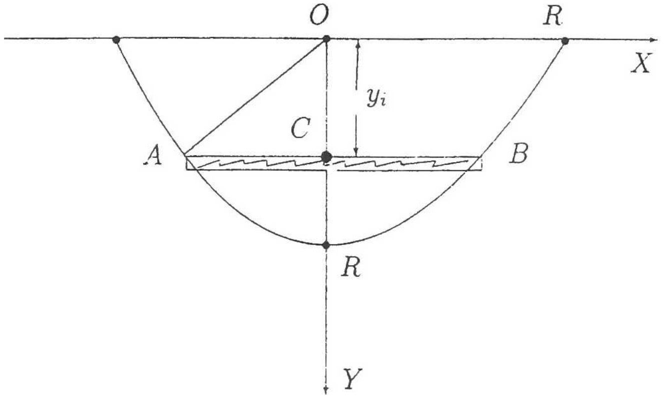


Рис. 4

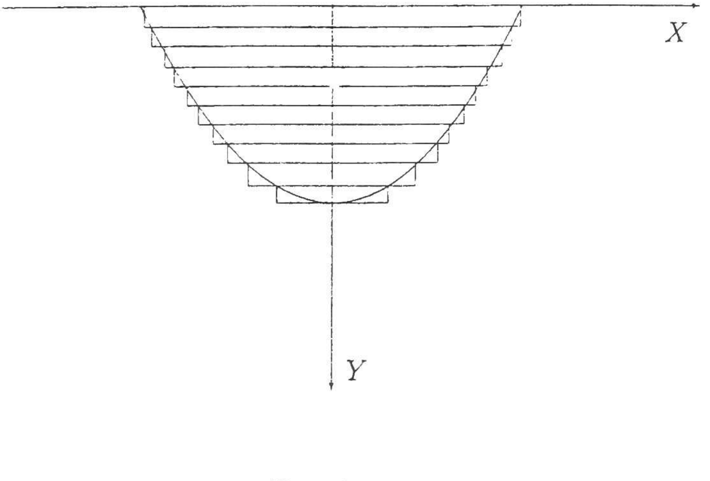


Рис. 5

Из $\triangle AOC$:

$$AC = \sqrt{R^2 - y_i^2}, \qquad AB = 2\sqrt{R^2 - y_i^2},$$

$$\Delta P_i = \nu y_i 2\sqrt{R^2 - y_i^2}\Delta y_i.$$

Получили соотношение вида (12).

Просуммировав силы давления, которые испытывают все прямоугольные полоски, получим:

$$P \approx 2\nu \sum_{i=1}^{n} y_i\sqrt{R^2 - y_i^2}\Delta y_i. \tag{14}$$

Выражение в правой части равно силе давления на фигуру, изображенную на рис. 5. Чем тоньше полоски, тем ближе фигура 5 к полукругу. Переходя в правой части равенства (14) к пределу при $\lambda = max\Delta y_i \to 0$, получим силу давления жидкости на полукруг:

$$P = \nu \int_0^R 2y\sqrt{R^2 - y^2}dy = -\nu \int_0^R \sqrt{R^2 - y^2}d(R^2 - y^2) =$$

$$= -\frac{2\nu}{R}\frac{(R^2 - y^2)^{3/2}}{3}\Big|_0^R = \frac{2\nu R^3}{3}\,(\text{ед.}).$$

Задача 2. Найти момент инерции треугольника с основанием b и высотой h относительно его основания.

Решение. Момент инерции материальной точки массы m относительно оси l равен произведению массы точки на квадрат расстояния от нее до оси l: $I_l = md^2$ В случае системы n материальных точек имеем:

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2.$$

Будем предполагать, что масса распределена по треугольнику равномерно с плотностью ρ. Как и в предыдущей задаче, разобьем треугольник на бесконечно тонкие горизонтальные полоски (рис. 6) толщиной Δy_i, играющие роль элементарных масс. Каждая такая полоска имеет форму трапеции, которую, в силу бесконечной малости ее высоты, можно заменить прямоугольником с основанием, равным нижнему основанию трапеции, и высотой Δy_i.

Найдем момент инерции произвольной i-й полоски, находящейся на расстоянии y_i от оси X. Чтобы вычислить ее длину AB, используем подобие треугольников

$$\frac{AB}{b} = \frac{h - y_i}{h}.$$

откуда

$$AB = \frac{b(h - y_i)}{h}.$$

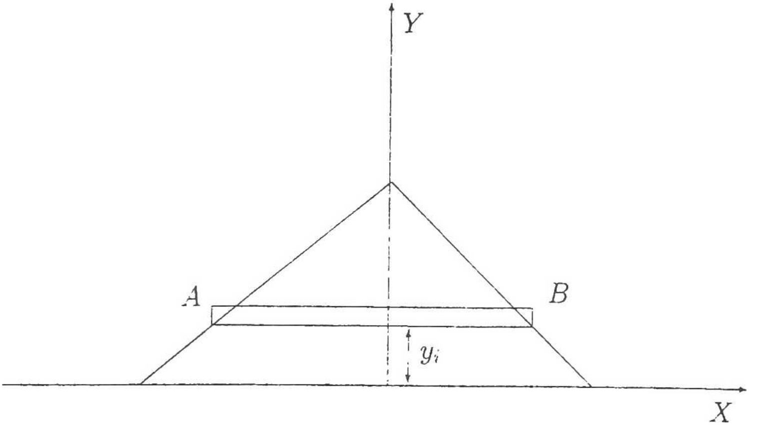


Рис. 6

Тогда масса i-й полоски

$$\Delta m_i = \rho \frac{b(h - y_i)}{h} \Delta y_i,$$

а ее момент инерции относительно оси OX

$$\Delta I_x = \frac{\rho b}{h}(h - y_i) y_i^2 \Delta y_i.$$

Суммируя моменты инерции всех элементарных полосок, получим приближенное значение момента инерции треугольника относительно основания:

$$I_{OX} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho b}{h}(h - y_i) y_i^2 \Delta y_i.$$

Переходя к пределу при $\lambda = max\Delta y_i \to 0$, получаем:

$$I_{OX} = \frac{\rho b}{h}\int\limits_0^h (h-y)y^2dy = \frac{\rho b}{h}\left(h\frac{y^3}{3}\Big|_0^h - \frac{y^4}{4}\Big|_0^h\right) = \frac{\rho b h^3}{12}.$$

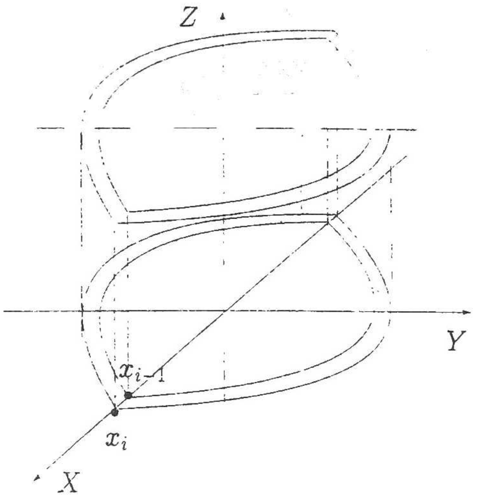
Задача 3. Найти кинетическую энергию однородного кругового цилиндра плотности δ с радиусом основания R и высотой H, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси.

Решение. Кинетическая энергия материальной точки, имеющей массу m и обладающей линейной скоростью v, вычисляется по формуле $K = \frac{mv^2}{2}$. В случае системы n материальных точек

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Так как $v = r\omega$, где r расстояние от точки до оси вращения, то естественно цилиндр разбить на части, все точки которых будут равноудалены от оси вращения. Очевидно, таковыми будут цилиндрические кольца бесконечно малой толщины. Они будут играть роль элементарных масс. Введем систему координат таким образом, чтобы ось Z совпадала с осью цилиндра, а основание цилиндра лежало в плоскости XY

Отрезок $[O, R]$ оси X (рис. 8) разобьем на n частей и проведем концентрические окружности с центром в начале координат через точки деления. На каждой окружности, как на направляющей, построим цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Z. Таким образом, данный цилиндр разобьется на n колец. Рассмотрим произвольное цилиндрическое кольцо, находящееся на расстоянии x_i от оси Z (рис. 7), и вычислим его кинетическую энергию.



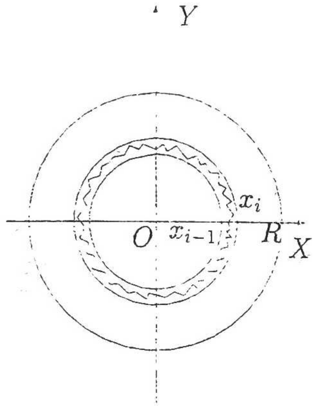


Рис. 7 Рис. 8

Чтобы найти объем кольца, из объема цилиндра с радиусом x_i вычтем объем цилиндра с радиусом x_{i-1}:

$$\Delta V_i = \pi H(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \pi H[(x_{i-1} + \Delta x_i)^2 - x_{i-1}^2] =$$

$$= \pi H(x_{i-1}^2 + 2x_{i-1}\Delta x_i + \Delta x_i^2 - x_{i-1}^2) = 2\pi H x_{i-1}\Delta x_i + \pi H \Delta x_i^2.$$

Последним слагаемым пренебрегаем, т.к. оно содержит $(\Delta x_i)^2$ и является бесконечно малой величиной более высокого порядка по сравнению с Δx_i

$$\Delta V_i = 2\pi H x_{i-1}\Delta x_i.$$

Соответственно масса кольца

$$\Delta m_i = 2\pi H\delta x_{i-1}\Delta x_i,$$

и его кинетическая энергия

$$\Delta K_i = \pi\omega^2 H\delta x_{i-1}^3\Delta x_i.$$

Суммируя кинетическую энергию всех колец

$$K \approx \pi\omega^2 H\delta \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^3\Delta x_i$$

и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получаем

$$K = \pi\omega^2 H\delta \int\limits_0^R x^3 dx = \frac{\pi\omega^2 H\delta R^4}{4} \ \ (ed.).$$

Задача 4. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость из вертикальной цилиндрической бочки, имеющей радиус основания R и высоту H.

Решение. Разместим пилиндр удобным образом в системе координат (рис.9). Отрезок $[O, H]$ оси Z разобьем на n частей и через каждую точку деления проведем плоскость, параллельную плоскости XOY. Таким образом, весь объем разобьется на n элементарных цилиндрических слоев бесконечно малой толщины Δz_i.

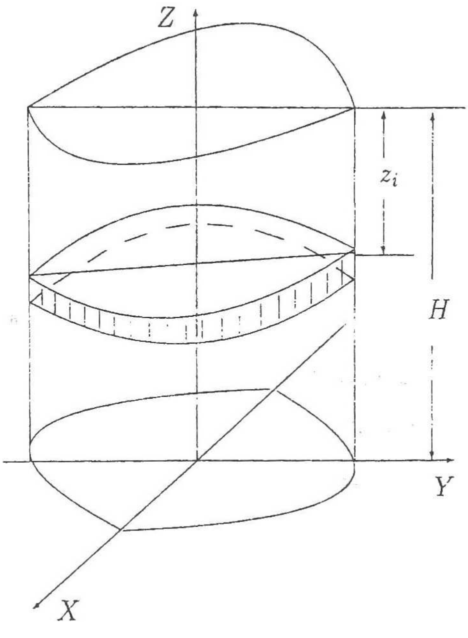


Рис. 9

Чтобы поднять произвольный слой жидкости, находящейся на глубине z_i, нужно совершить работу $\Delta A_i = \Delta F_i z_i$, где ΔF_i - сила тяжести, равная весу жидкости в частичном объеме:

$$\Delta F_i = \nu \pi R^2 \Delta z_i,$$

ν - удельный вес жидкости. Тогда

$$\Delta A_i = \nu \pi R^2 z_i \Delta z_i.$$

Суммируя элементарную работу и переходя к пределу при $\lambda = max \Delta z_i \to 0$, получим

$$A = \nu \pi R^2 \int_0^H z dz = \frac{\nu \pi R^2 H^2}{2} \quad (ед.).$$

Задача 5. Стержень AB, длина которого l, масса M, притягивает точку C массы m, которая лежит на его продолжении на расстоянии a от ближайшего конца B стержня (рис. 10). Найти силу взаимодействия точки и стержня.

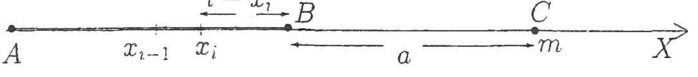


Рис. 10

Решение. Как известно, сила взаимодействия двух точечных масс m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга, равна

$$f = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Стержень AB разбиваем на n частей, каждый бесконечно малый частичный отрезок стержня длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (рис. 10) будет играть роль точечной массы. Линейная плотность стержня (масса распределена вдоль стержня равномерно) $\delta = \frac{M}{l}$, поэтому масса частичного отрезка Δx_i равна

$$\Delta m_i = \frac{M}{l} \Delta x_i.$$

Сила взаимодействия произвольного частичного отрезка, находящегося на расстоянии $l - x_i$ от конца B стержня и точки C, равна

$$\Delta F_i = k\frac{Mm\Delta x_i}{(l+a-x_i)^2}.$$

Суммируя силы взаимодействия всех элементарных частей стержня с точкой C и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$F = k\frac{Mm}{l}\int\limits_0^l \frac{dx}{(l+a-x)^2} = \frac{kMm}{l}\frac{1}{l+a-x}\bigg|_0^l = \frac{kMm}{a(a+l)} \quad (ед.).$$

Задача 6. Бесконечная прямая равномерно заряжена положительным электричеством (линейная плотность δ). С какой силой эта прямая действует на единичный положительный заряд e, находящийся в точке A на расстоянии a единиц от нее?

Решение. По закону Кулона сила взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии r друг от друга, равна

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Введем систему координат. Данную прямую совместим с осью OY, единичный заряд e поместим в точку $A(a, o)$ (рис. 11).

Разобьем прямую на равные бесконечно малые отрезки, которые будут играть роль точечных зарядов. Рассмотрим такой отрезок, находящийся на расстоянии y_i от начала координат (точка B). Его заряд $\Delta q_i = \delta\Delta y_i$, расстояние от точки A равно $r = \sqrt{a^2 + y_i^2}$, сила $\Delta\vec{F}_i$ взаимодействия с зарядом e по величине равна

$$\Delta F_i = \frac{\delta e\Delta y_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(a^2+y_i^2)}.$$

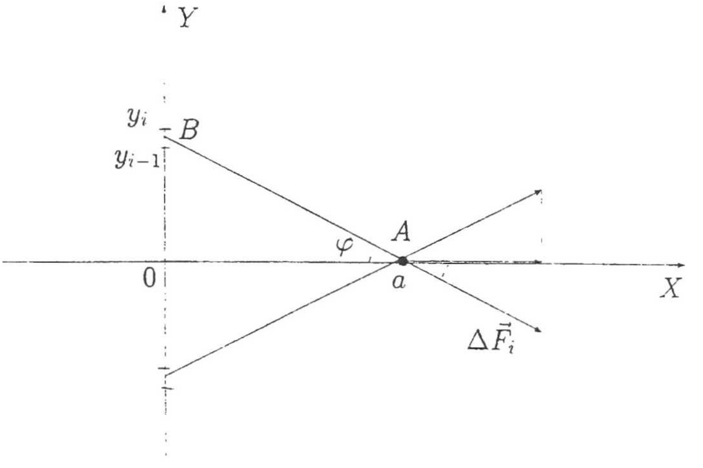


Рис. 11

Заряды, находящиеся на оси OY в симметричных относительно начала координат частичных отрезках, взаимодействуют с равными по величине силами с зарядом e, поэтому равнодействующая всех сил будет расположена на оси OX. Найдем проекцию силы $\Delta\vec{F}_i$ на ось OX:

$$np_{OX}\Delta\vec{F}_i = \Delta F_i \cos\varphi.$$

Из треугольника AOB $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+y_i^2}}$, тогда

$$np_{OX}\Delta\vec{F}_i = \Delta F_x = \frac{\delta e a \Delta y_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(a^2+y_i^2)^{3/2}}.$$

Суммируя проекции на ось OX сил взаимодействия всех частичных зарядов, заполняющих собой ось OY, с единичным и переходя к пределу при $\Delta y_i \to 0$, приходим к несобственному сходящемуся интегралу

$$F = \frac{\delta e a}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(a^2+y_i^2)^{3/2}} = \frac{\delta e a}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dy}{(a^2+y_i^2)^{3/2}}.$$

Замена $y = a\tan t$ приводит к интегралу

$$F = \frac{\delta e}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt = \frac{\delta e}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a} \quad (ed.).$$

Задача 7. Какую работу нужно затратить, чтобы поднять с поверхности Земли, радиус которой R, тело массой m на высоту h? Чему равна эта работа, если тело должно быть удалено на бесконечность?

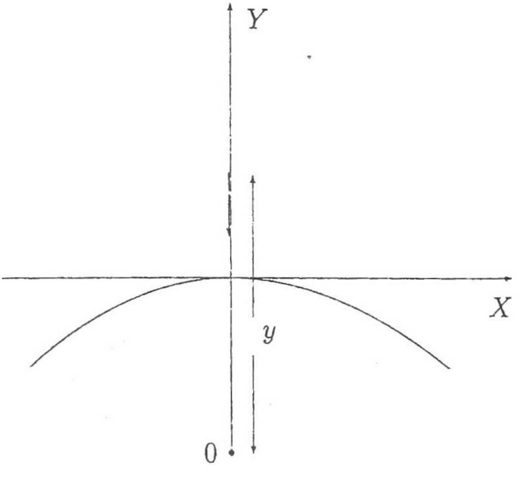


Рис. 12

Решение. Сила, действующая на тело массой m, находящееся на расстоянии y от центра Земли. равна

$$F = kmMy^2,$$

где M - масса Земли, k - коэффициент, который определим из условия: $y = R$ (тело лежит на поверхности Земли), то $F = mg$. В этом случае имеем $mg = k\frac{mM}{R^2}$, откуда $k = \frac{gR^2}{M}$ и переменная сила, действующая на тело, равна $F = \frac{gR^2m}{y^2}$ $(R \leq y \leq R+h)$. Далее применяем выведенную в §1 формулу (5) для работы переменной силы.

$$A = \int\limits_R^{R+h}\frac{gR^2m}{y^2}dy = -\left.\frac{gR^2m}{y}\right|_R^{R+h} =$$

$$= gRm - \frac{gR^2m}{R+h} = \frac{gRmh}{R+h}(e\partial.).$$

Если $h \to \infty$, то, переходя к пределу, получим

$$A_\infty = gRm(e\partial.).$$

Задача 8. В вертикальной стенке призматического сосуда, наполненного водой, проделана прямоугольная вертикальная щель, высота которой равна h, ширина b. Верхний край щели, параллельный поверхности воды, расположен на расстоянии H от поверхности воды. Какое количество воды Q вытечет из сосуда за 1 с, если считать, что уровень поддерживается все время на одной высоте?

Решение. Согласно закону Торичелли, скорость истечения жидкости из бесконечно узкого отверстия $v = \sqrt{2gh}$, где h высота столба жидкости над отверстием, g ускорение силы тяжести. Расход воды в единицу времени через бесконечно узкую щель равен $\Delta Q_i = v_i \Delta S_i$, где ΔS_i - площадь щели.

Для решения задачи разобьем данное отверстие на n горизонтальных бесконечно узких щелей шириной Δx_i и вычислим расход воды в единицу времени через произвольное отверстие, находящееся на расстоянии x_i от верхнего края щели (рис. 13). Скорость истечения воды из такого отверстия $v_i = \sqrt{2g(H + x_i)}$, площадь отверстия $\Delta S_i = b\Delta x_i$, количество воды, вытекающее в единицу времени $\Delta Q_i = \sqrt{2g(H + x_i)}b\Delta x_i$.

Суммируя расход воды через все частичные отверстия и переходя к пределу при $\lambda = max \Delta x_i \to 0$, получим

$$Q = \int_0^h b\sqrt{2g(H+x)}dx = \frac{2}{3}b\sqrt{2g}[(H+h)^{\frac{3}{2}} - H^{\frac{3}{2}}(e\partial.).$$

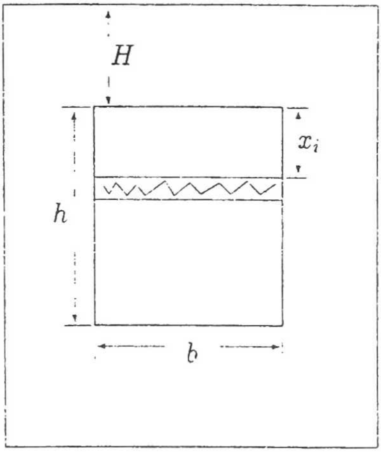


Рис. 13

Задача 9. Найти координаты центра тяжести плоской фигуры, заключенной между осями координат и дугой астроиды в первом квадранте.

Решение. Параметрические уравнения астроиды

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t.$$

Параметр t в случае первого квадранта изменяется в пределах $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Пусть $C(\xi;\eta)$ центр тяжести фигуры. Из условия симметрии (рис. 14) получаем $\xi = \eta$.

Вычислим $\eta = \frac{1}{2P}\int\limits_a^b y^2 dx$ (формула (10)), $P = \int\limits_a^b y dx$ - площадь данной фигуры.

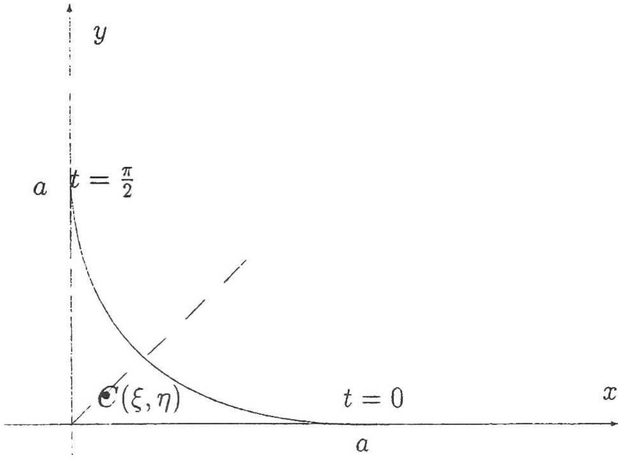


Рис. 14

Подставим в данный интеграл вместо y и dx их значения из уравнений астроиды, учитывая пределы изменения переменной интегрирования t, получим

$$P = -3a^2 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 t \cos^2 t dt = 3a^2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t (1 - \sin^2 t) dt =$$

$$= 3a^2 [\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt - \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt].$$

При вычислении интегралов воспользуемся формулой

$$I_{2n} = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2},$$

$$P = 3a^2 \left(\frac{3!!}{4!!} - \frac{5!!}{6!!} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{3a^2\pi}{32} (e\partial.^2).$$

Вычислим статический момент

$$K_x = \frac{1}{2} \int\limits_{a}^{b} y^2 dx = -\frac{3a^3}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^7 t \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{3a^3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t(1 - \sin^2 t)dt.$$

Воспользуемся формулой

$$I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

$$K_x = \frac{3a^3}{2}\left(\frac{6!!}{7!!} - \frac{8!!}{9!!}\right) = \frac{8a^3}{105}.$$

Ответ: $\xi = \eta = \frac{8a^3}{105} : \frac{3a^2\pi}{32} = \frac{256a}{315\pi}$.

4. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной координатными осями и дугой элипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в первом квадранте.

Отв. $\xi = \frac{4a}{3\pi}, \eta = \frac{4b}{3\pi}$.

2. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)(0 \leq t \leq 2\pi)$ и осью OX.

Отв. $\xi = \pi a, \eta = \frac{5}{6}a$.

3. Найти статический момент относительно оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Отв. $\frac{3}{20}$.

4. Найти момент инерции полукруга с радиусом R относительно его диаметра.

Отв. $\frac{\pi R^4}{8}$.

5. Найти момент инерции конуса, радиус основания которого R, высота H, относительно его оси.

Отв. $\frac{\pi R^4 H}{10}$.

6. С какой силой полукольцо с радиусом r и массой M действует на материальную точку массы m, находящуюся в его центре?

Отв. $\frac{2kmM}{\pi r^2}$

7. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой $a = 6.4м$, нижнее $b = 4,2м$, а высота $H = 3м$.

Отв. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

8. Квадратная пластинка погружена в воду так, что одна из вершин квадрата лежит на поверхности воды, а одна из диагоналей параллельна поверхности. Сторона квадрата равна a. С какой силой вода давит на каждую сторону пластинки?

Отв. 22,2 т.

9. Стержень AB вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси OO' с угловой скоростью $\omega = 10\pi c^{-1}$. Поперечное сечение стержня $S = 4см^2$, длина его $l = 20см$, плотность материала, из которого он изготовлен, $\rho = 7,8г/см^3$. Найти кинетическую энергию стержня (рис. 15).

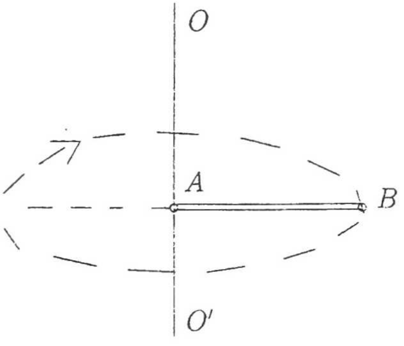


Рис. 15

Отв. $\frac{Sl^3\omega^2\rho}{6} \approx 0,418кГм$.

10. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость удельного веса d из резервуара, имеющего форму обращенного вершиной вниз конуса, высота которого равна H, а радиус основания R.

Отв. $\frac{\pi d R^2 H^2}{12}$.

11. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду, наполняющую полусферический резервуар с радиусом $R = 0,6м$.

Отв. 0,18 кГм.

12. Два электрических заряда e_1 и e_2 находятся на оси OX соответственно в точках $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$. Какая работа будет произведена, если второй заряд переместится в точку $x_2 = 10$?

Отв. $\frac{9}{10} e_1 e_2 (ed.)$.

13. В дне сосуда, имеющего форму цилиндра, площадь основания которого 100 $см^2$, а высота 30 $см$, имеется отверстие. Вычислить площадь этого отверстия, если известно, что вода, наполняющая сосуд, вытекает из него в течение 2-х минут.

Отв. 0,206 $см^2$.

Содержание