

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве методических указаний для студентов Самарского университета, обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 04.03.01 Химия и специальности 04.05.01 Фундаментальная и прикладная химия

Составители:
Е.В. Воробьева,
В.А. Жукова,
В.И. Никонов

САМАРА
Издательство Самарского университета
2018

УДК 539.1(075)

ББК 22.36я7

Составители: *Е.В. Воробьева, В.А. Жукова, В.И. Никонов*

Рецензент канд. физ.-мат. наук, проф. В.В. З а й ц е в

Молекулярная физика: метод. указания к практическим занятиям / Е.В. Воробьева, В.А. Жукова, В.И. Никонов – Самара: Изд-во Самарского университета, 2018. – 76 с.: ил.

Методические указания содержат задачи с решениями по молекулярной физике. По всем темам приведены основные законы, уравнения и формулы, используемые при решении задач, а также даны задачи для самостоятельного решения. По каждой теме предлагается ряд вопросов для студентов, который требует предварительного внимательного изучения по учебной литературе.

Предназначены для студентов нефизических специальностей.

Подготовлены на кафедре оптики и спектроскопии.

УДК 539.1(075)

ББК 22.36я7

СОДЕРЖАНИЕ

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории.....	4
Скорости молекул. Распределения.....	12
Процессы переноса.....	24
Законы идеальных газов.....	34
Первое начало термодинамики.....	43
Круговые процессы. Термический КПД.....	52
Энтропия системы.....	61
Реальные газы.....	65

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Основные формулы

Число молекул в единице объема $n = \frac{N}{V}$, где N – число частиц системы, V – объем.

Относительная молекулярная масса $\mu_r = \frac{m_0}{\frac{1}{12}m_c}$, где m_0 – масса молекулы (атома) данного вещества, m_c – масса атома углерода.

Молярная масса вещества $\mu = \mu_r \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Количество вещества или количество молей вещества $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_a}$,

где $N_a = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ – число Авогадро

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \cdot V_{cp.kv}^2}{2} = nkT = \frac{1}{3} \rho \cdot V_{cp.kv}^2, \text{ где } k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

$m_0 = \frac{\mu}{N_a}$ μ – масса молекулы.
– постоянная Больцмана,

Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы, $\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} kT$.

Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на все степени свободы, $\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT$, где i – число степеней свободы.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения $\frac{3}{2} kT$.

Средняя энергия вращательного движения $\frac{i_{вр}}{2} kT$ (для линейных молекул $i_{вр} = 2$, для нелинейных молекул $i_{вр} = 3$).

Средняя квадратичная скорость молекул газа

$$V_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3pV}{m}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}},$$

где $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}} = kN_a$ – универсальная газовая постоянная,

$T = t^\circ\text{C} + 273$ – абсолютная температура, p – давление газа, V – объем, занимаемый газом.

Уравнение Менделеева-Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$

Закон Дальтона $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$, где p – давление смеси газов; p_i – парциальное давление i -го компонента; n – число компонент.

Вопросы

1. При каких условиях и допущениях газ можно рассматривать как идеальный? Приведите примеры реального газа, по свойствам близкого к идеальному.
2. Какими параметрами характеризуется термодинамическая система?
3. Что понимают под состоянием термодинамического равновесия?
4. Как принято называть соотношение, связывающее между собой значения параметров в состоянии равновесия системы?
5. Как записывается уравнение состояния идеального газа для произвольной массы газа?
6. Какие допущения делают относительно движения молекул при получении основного уравнения молекулярно-кинетической теории?
7. Что такое средняя квадратичная скорость?
8. Как связаны средняя квадратичная скорость молекул газа и плотность?
9. Какие физические параметры должны быть одинаковыми у тел, находящихся в тепловом равновесии?
10. Какое явление наиболее убедительно доказывает, что между молекулами существуют промежутки?
11. Какое явление наиболее убедительно доказывает, что между молекулами существуют силы отталкивания?

12. Какое явление объясняет распространение запаха духов в комнате?

13. Молекула азота летит со скоростью v перпендикулярно к стенке сосуда. Чему равен модуль вектора изменения импульса молекулы?

14. Воздух в комнате состоит из смеси газов: водорода, кислорода, азота, водяных паров, углекислого газа и др. Какие из физических параметров этих газов обязательно одинаковы при тепловом равновесии?

Примеры решения задач

1. В двух одинаковых по вместимости сосудах находятся разные газы: в первом – водород, во втором – кислород. Найти отношение концентраций газов, если массы газов одинаковы.

Дано:

$$V_1 = V_2 = V$$
$$\mu_1 = 0,002 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$
$$\mu_2 = 0,032 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

$$m_1 = m_2$$

$$\frac{n_1}{n_2} = ?$$

Решение:

Концентрация газов $n_1 = \frac{N_1}{V_1}$; $n_2 = \frac{N_2}{V_2}$;

тогда $\frac{n_1}{n_2} = \frac{N_1}{N_2}$.

Из определения количества вещества

$$\frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_a}, \text{ следовательно, } N = N_a \cdot \frac{m}{\mu}.$$

Получим, что $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{0,032}{0,002} = 16$.

Ответ: $\frac{n_1}{n_2} = 16$.

2. Определить количество вещества и концентрацию молекул газа, содержащегося в колбе вместимостью $V = 240 \text{ см}^3$ при температуре $T = 290 \text{ К}$ и давлении $p = 50 \text{ кПа}$.

Дано:
 $V = 240 \text{ см}^3 =$
 $= 240 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$
 $p = 50 \text{ кПа} = 5 \cdot 10^4 \text{ Па}$
 $T = 290 \text{ К}$

$v - ?$

$n - ?$

Решение:

Из основного уравнения МКТ $p = nkT$,

откуда $n = \frac{p}{kT}$.

Количество вещества $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_a} = \frac{nV}{N_a}$,

тогда $n = \frac{50 \cdot 10^3}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290} \approx 124,9 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$,

$\nu = \frac{240 \cdot 10^{-6} \cdot 124,9 \cdot 10^{23}}{6,02 \cdot 10^{23}} \approx 4,98 \cdot 10^{-3} \text{ моль}$.

Ответ: $n = 124,9 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$,
 $\nu \approx 4,98 \cdot 10^{-3} \text{ моль}$

3. Давление газа равно 1 МПа , концентрация его молекул равна $n = 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Определить: 1) температуру газа; 2) среднюю поступательную энергию молекул газа.

Дано:
 $p = 1 \text{ МПа} = 10^3 \text{ Па}$
 $n = 10^{10} \text{ см}^{-3} = 10^{16} \text{ м}^{-3}$

$T - ?$

$\langle \varepsilon \rangle - ?$

Решение:

Из основного уравнения МКТ $p = nkT$,

откуда $T = \frac{p}{nk}$, $p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle$, откуда $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} \frac{p}{n}$

$T = \frac{1 \cdot 10^3}{10^{16} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 7250 \text{ К}$

$\langle \varepsilon \rangle \approx \frac{3 \cdot 1 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{10}} \approx 1,5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

Ответ: $T \approx 7250 \text{ К}$; $\langle \varepsilon \rangle \approx 1,5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

4. Каково давление в смеси газов емкостью 2 л, если в ней находится $N_1 = 10^{15}$ молекул кислорода и $m_2 = 10^{-7}$ г азота, а температура смеси равна $t = 50^\circ \text{C}$.

Дано:

$$V = 2 \text{ л} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$N_1 = 10^{15}$$

$$m_2 = 10^{-7} \text{ г} = 10^{-10} \text{ кг}$$

$$t = 50^\circ \text{C} = 323 \text{ К}$$

$$\mu_1 = 0,032 \text{ кг/моль}$$

$$p - ?$$

Решение:

По закону Дальтона $p = p_1 + p_2 = (n_1 + n_2)kT$

По определению концентрации

$$n_1 = \frac{N_1}{V}; n_2 = \frac{N_2}{V} = \frac{N_a \frac{m_2}{\mu_2}}{V} = \frac{N_a m_2}{\mu_2 V};$$

$$p = \frac{1}{V} \left(N_1 + \frac{N_a m_2}{\mu_2} \right) \cdot kT$$

Ответ: $p = 0,72 \cdot 10^{-2} \text{ Па}$

5. Смесь азота и гелия при температуре 27°C находится под давлением $p = 130 \text{ Па}$. Масса азота составляет 70% общей массы смеси. Найти концентрацию молекул каждого газа.

Дано:

$$t = 27^\circ \text{C}$$

$$p = 130 \text{ Па}$$

$$\mu_1 = 0,004 \text{ кг/моль}$$

$$\mu_2 = 0,028 \text{ кг/моль}$$

$$m_1 = \eta m$$

$$\eta = 0,7$$

$$n_1 - ?$$

$$n_2 - ?$$

Решение:

Масса смеси равна сумме масс компонент $m_1 + m_2 = m$, откуда $m_2 = m - m_1 = (1 - \eta)m$.

Масса молекул равна произведению количества вещества на молярную массу

$$m_1 = \nu \cdot \mu_1 = \frac{\mu_1}{N_a} N_1 = \frac{\mu_1}{N_a} n_1 V = \eta m.$$

$$\text{Для гелия } m_2 = \frac{\mu_2}{N_a} N_2 = \frac{\mu_2}{N_a} n_2 V = (1 - \eta)m.$$

$$\text{Тогда отношение } \frac{n_1}{n_2} = \frac{\eta}{1 - \eta} \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

$$\text{Откуда } n_1 = n_2 \frac{\eta}{1 - \eta} \frac{\mu_2}{\mu_1}, \text{ но } n = n_1 + n_2 = n_2 \frac{\eta}{1 - \eta} \frac{\mu_2}{\mu_1} + n_2 = nkT,$$

откуда $n_2 = \frac{\mu_1(1-\eta)}{\mu_1(\eta-1) + \eta\mu_2} \frac{P}{kT}$, тогда

$$n_2 = \frac{0,028 \cdot 0,3}{0,028 \cdot (0,7-1) + 0,7 \cdot 0,004} \frac{130}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} = 2,4 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}.$$

Ответ: $n_2 = 2,4 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$

ЗАДАЧИ для самостоятельного решения

1. В сосуде объемом $V = 5 \text{ л}$ находится кислород, концентрация молекул которого $n = 9,41 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$. Определить массу газа.

2. В баллоне вместимостью $V = 5 \text{ л}$ находится азот массой $m = 17,5 \text{ г}$. Определить концентрацию молекул азота в баллоне.

3. Газ массой $m = 58,5 \text{ г}$ находится в сосуде вместимостью $V = 5 \text{ л}$. Концентрация молекул газа равна $n = 2,2 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3}$. Какой это газ?

4. В баллоне вместимостью $V = 2 \text{ л}$ находится кислород массой $m = 1,17 \text{ г}$. Концентрация молекул равна $n = 1,1 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Определить по этим данным постоянную Авогадро.

5. Определить количество вещества и концентрацию молекул газа, содержащегося в колбе вместимостью $V = 240 \text{ см}^3$ при температуре $T = 290 \text{ К}$ и давлении $p = 50 \text{ кПа}$.

6. Определить среднее значение полной кинетической энергии одной молекулы гелия при температуре $T = 400 \text{ К}$.

7. Воспользовавшись постоянной Авогадро, определить массу атома водорода, молекулы кислорода.

8. Зная значение постоянной Авогадро, определить атомную единицу массы.

9. В баллоне вместимостью $V = 6,9 \text{ л}$ находится азот массой $m = 2,3 \text{ г}$. При нагревании часть молекул диссоциировала на атомы. Коэффициент диссоциации $\alpha = 0,2$. Определить: 1) общее число и концентрацию молекул до нагревания; 2) концентрацию молекул и концентрацию атомов после нагревания.

10. В колбе вместимостью $V = 0,5 \text{ л}$ находится кислород при нормальных условиях. Определить среднюю энергию поступательного движения всех молекул, содержащихся в колбе.

11. Найти среднюю кинетическую энергию одной молекулы аммиака при температуре 27°C и среднюю энергию вращательного движения этой молекулы при той же температуре.

12. В сосуде вместимостью $V = 5$ л находится азот массой $m = 17,5$ г. Определить концентрацию молекул азота в сосуде.

13. Моль таких газов, как гелий, водород, азот, кислород, занимает при нормальных условиях $t = 0^{\circ}\text{C}$, $p = 10^5$ Па объем, равный 22,4 л. Чему равно в этом случае: а) число молекул газа в единице объема; б) среднее расстояние между этими молекулами? Сравнить это расстояние с диаметром молекулы.

14. Как, зная плотность и молярную массу, найти число молекул вещества в единице объема?

15. Определить количество вещества водорода, заполняющего сосуд вместимостью $V = 3$ л, если плотность газа $\rho = 6,65 \cdot 10^{-3}$ кг/м³?

16. В сосуде вместимостью $V = 5$ л находится однородный газ, количество вещества которого равно $\nu = 0,2$ моль. Определить, какой это газ, если его плотность $\rho = 1,12$ кг/м³.

17. Сколько молекул газа содержится в баллоне вместимостью $V = 30$ л при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 5$ МПа.

18. Определить среднее значение полной кинетической энергии одной молекулы гелия, кислорода и водяного пара при температуре $T = 400$ К.

19. Сколько молекул содержится в 1 кг водорода?

20. Чему равна масса молекулы азота?

21. Какое количество вещества (в молях) содержится в алюминиевой детали массой 5,4 кг?

22. Какой объем занимают 100 моль ртути?

23. За 5 суток полностью испарилось $5 \cdot 10^{-2}$ кг воды. Сколько в среднем вылетало молекул с поверхности воды за 1 с?

24. Где больше атомов: в стакане воды или в стакане ртути? Во сколько раз?

25. Зная число Авогадро, определите объем и диаметр атома золота.

26. При комнатной температуре и нормальном атмосферном давлении допускается вытекание метана в бытовой газовой плите не более $1,1 \cdot 10^{-8}$ м³/с. Определите количество молекул газа, появившихся в ком-

нате вследствие такого вытекания, если плита была включена в течение трех часов.

27. Расстояние между центрами соседних атомов золота равно $2,9 \cdot 10^{-10}$ м. Сколько атомов уложится на толщине листочка золота толщиной 0,1 мкм?

28. В сосуде объемом 2 л находится $6 \cdot 10^{23}$ молекул азота при нормальных условиях. Чему равна плотность газа?

29. В сосуде находится газ при температуре 273 К. Определите среднюю кинетическую энергию хаотического движения молекул.

30. Определите температуру газа, если средняя кинетическая энергия хаотического движения молекул равна $5,6 \cdot 10^{-21}$ Дж

31. Рассчитайте температуру, при которой $kT = 1$ эВ.

СКОРОСТИ МОЛЕКУЛ. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Средняя квадратичная скорость

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3p\nu}{m}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}},$$

где m_0 – масса молекулы (атома) данного вещества, μ – молярная масса, T – абсолютная температура, ρ – плотность вещества.

Наиболее вероятная скорость $v_e = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}.$

Распределение Больцмана (распределение частиц в силовом поле)

$n = n_0 \cdot e^{-\frac{U}{kT}}$, где n – концентрация частиц, U – их потенциальная энергия, n_0 – концентрация частиц в точках поля, k – постоянная Больцмана.

Барометрическая формула $n = n_0 e^{-\frac{\mu g(h-h_0)}{RT}}$ или $p = p_0 e^{-\frac{m_0 g(h-h_0)}{RT}}$, где p – давление газа на высоте h , p_0 – давление газа на высоте $h_0 = 0$, μ – молярная масса молекулы.

Вероятность того, что физическая величина x , характеризующая молекулу, лежит в интервале значений от x до $x + dx$, определяется по формуле $dW(x) = f(x)dx$, где $f(x)$ – функция распределения молекул по значениям данной физической величины (плотность вероятности).

Количество молекул, для которых физическая величина x , характеризующая их, заключена в интервале значений от x до $x + dx$, $dN = NdW(x) = N \cdot f(x) \cdot dx$.

Среднее значение физической величины x в общем случае определяется формулой

$$\langle x \rangle = \frac{\int x \cdot f(x) dx}{\int f(x) dx}.$$

Например, среднее значение скорости молекул, то есть средняя

арифметическая скорость $v_{\text{с.а}} = \int_0^{\infty} v \cdot f(v) dv.$

Средняя квадратичная скорость $v_{\text{ср.кв}} = \int_0^{\infty} v^2 \cdot f(v) dv$.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения $\langle \varepsilon \rangle = \int_0^{\infty} \varepsilon \cdot f(\varepsilon) \cdot d\varepsilon$.

Функция распределение Максвелла $f = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_g^2} e^{-v^2/v_g^2}$.

Распределение молекул по скоростям – распределение Максвелла выражается формулами

$$dN(v) = N f(v) dv = 4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv$$

Вопросы

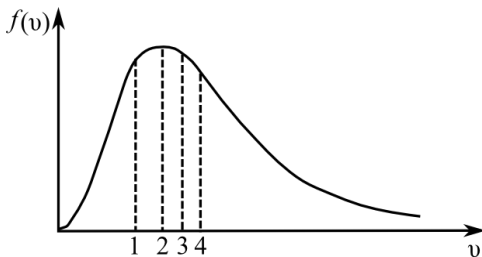
1. Какие допущения делаются относительно движения молекул газа при расчете давления идеального газа?

2. От каких величин зависит средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул идеального газа?

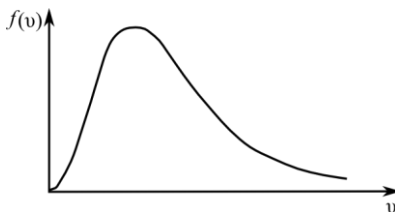
3. Какие допущения делаются при выводе барометрической формулы?

4. Начертите график функции распределения молекул по значениям компонент скорости. Как, пользуясь этим графиком, найти число молекул, у которых скорость лежит между значениями v и $v + dv$, если полное число молекул равно N ? Как изменится этот график при уменьшении температуры?

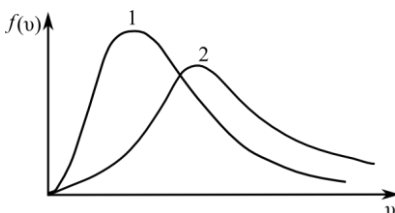
5. На графике функции распределения цифрами обозначены различные скорости молекул. Какая цифра обозначает наиболее вероятную скорость? среднюю арифметическую скорость?



6. На рисунке представлен график, соответствующий закону распределения молекул по скоростям. А) Что собой представляет абсцисса максимума функции? Б) Чему численно равна площадь, ограниченная всей кривой? Как изменится абсцисса и ордината максимума кривой, если температура возрастет в 4 раза по отношению к первоначальной? Как изменится при этом площадь, ограниченная кривой?



7. На рисунке приведены графики функции распределения Максвелла по модулям скоростей для двух разных газов при одинаковой температуре. Какой график соответствует газу с большей молярной массой?

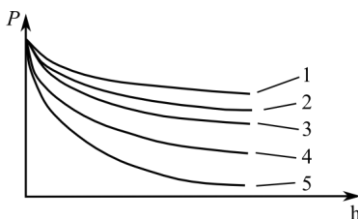


8. Определите температуру газообразного азота, при которой скоростям молекул $v_1 = 300 \text{ м/с}$ и $v_2 = 600 \text{ м/с}$ соответствует одинаковое значение функции распределения Максвелла.

9. Газ из молекул массы m находится в равновесном состоянии с температурой T . Нарисовать на одном чертеже графики функции распределения Максвелла для: а) $m_1 = 4m, T_1 = T$; б) $m_2 = m, T_1 = 4T$; в) $m_3 = 4m, T_1 = 4T$.

10. Предполагая атмосферу Земли изотермической, написать и нарисовать зависимости от высоты отношения $\alpha = p_1 / p_2$ парциальных давлений кислорода и азота. Считать для простоты, что на поверхности Земли $\alpha = 0,25$.

11. На рисунке приведены нормированные зависимости давления молекул водорода, азота, кислорода, воды и углекислого газа от высоты h над уровнем моря. Каждому из газов поставьте в соответствие кривую, описывающую зависимость давления от высоты.



12. На какой высоте плотность газа с молярной массой μ будет в три раза меньше, чем на уровне моря?

Примеры решения задач

1. Найти кинетическую энергию теплового движения молекул воздуха общей массой 1 г, находящихся при температуре $t = 15^{\circ}\text{C}$, считая воздух однородным газом с молярной массой $\mu = 0,029 \text{ кг / моль}$.

Дано: $t = 15^{\circ}\text{C}$ $\mu = 0,029 \text{ кг / моль}$ $m = 1 \text{ г}$	Решение: Средняя кинетическая энергия теплового движения одной молекулы $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT$.
$\langle \varepsilon \rangle = ?$	Средняя кинетическая энергия теплового движения N молекул $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kTN$.

Из определения количества вещества $\frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_a}$, откуда $N = N_a \frac{m}{\mu}$.

Тогда $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} N_a \frac{m}{\mu} kT = \frac{3}{2} RT \frac{m}{\mu}$,

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3 \cdot 8,31 \cdot 288 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{0,029} = 123 \text{ Дж}$$

Ответ: $\langle \varepsilon \rangle = 123 \text{ Дж}$

2. Плотность некоторого газа равна $\rho = 0,006 \text{ кг / м}^3$, средняя квадратичная скорость молекул газа равна $v_{\text{ср.кв}} = 500 \text{ м / с}$. Найти давление, которое газ оказывает на стенки сосуда.

Дано: $\rho = 0,006 \text{ кг / м}^3$ $v_{\text{ср.кв}} = 500 \text{ м / с}$	Решение: Давление идеального газа определяется концентрацией молекул и их температурой $P = n \cdot k \cdot T$. Средняя квадратичная скорость движения молекул определяется температурой
$p = ?$	$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$

откуда $T = \frac{\mu \cdot v_{\text{ср.кв}}^2}{3R}$.

Плотность— это масса, заключенная в единице объема $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu \frac{N}{N_a}}{V} =$

$$= n \frac{\mu}{N_a}, \text{ то } n = \frac{\rho \cdot N_a}{\mu}$$

$$\text{Тогда } p = \frac{\rho \cdot N_a}{\mu} \cdot k \cdot \frac{\mu \cdot v_{\text{ср.кв}}^2}{3R} = \frac{1}{3} \rho \cdot v_{\text{ср.кв}}^2$$

$$p = \frac{1}{3} \cdot 0,006 \cdot 25 \cdot 10^4 = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

Ответ: $p = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}$

3. При какой температуре средняя квадратичная скорость движения молекул кислорода больше их наиболее вероятной скорости на 100 м/с?

<p>Дано: $\Delta v = 100 \text{ м / с}$ $\mu = 0,032 \text{ кг / моль}$</p> <hr/> <p>$T - ?$</p>	<p>Решение:</p> <p>Средняя квадратичная скорость $v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, и наиболее вероятная скорость $v_g = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ определяются температурой газа.</p> <p>Разность между средней квадратичной и наиболее вероятной скоростями</p> $\Delta v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} - \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \approx 0,32 \sqrt{\frac{RT}{\mu}},$
---	--

$$\text{откуда } T = \frac{(\Delta v)^2 \cdot \mu}{R \cdot 0,1024}.$$

$$T = \frac{10^4 \cdot 0,032}{8,31 \cdot 0,1024} \approx 376 \text{ К}$$

Ответ: $T \approx 376 \text{ К}$

4. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям в виде $f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} E^{1/2} e^{-\frac{E}{kT}}$, найдите среднюю кинетическую энергию молекул газа.

Дано:	
$f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} \times$ $\times E^{1/2} e^{-\frac{E}{kT}}$	
$\langle \varepsilon \rangle = ?$	

Решение:	
По определению среднего значения	
$\langle \varepsilon \rangle = \int_0^{\infty} E \cdot f(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} \times$ $\times \int_0^{\infty} E \cdot E^{1/2} e^{-\frac{E}{kT}} dE$	

Известно, что $\int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-ax} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} a^{-5/2}$

Таким образом, $\langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{kT}\right)^{-5/2} = \frac{3}{2} kT$

Ответ: $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT$

5. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям $f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} E^{1/2} e^{-\frac{E}{kT}}$, найдите наиболее вероятное значение энергии молекул.

Дано:	
$f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} \times$ $\times E^{1/2} e^{-\frac{E}{kT}}$	
$E_{\varepsilon} = ?$	

Решение:	
Наиболее вероятное значение энергии найдем из условия, соответствующего минимуму функции распределения	

$\frac{df}{dE} = 0.$

Находя производную и приравнявая ее нулю, получим

$$\frac{d}{dE} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} E^{1/2} e^{-\frac{E}{kT}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} \left[\frac{1}{2} E^{-1/2} e^{-\frac{E}{kT}} - \frac{1}{kT} E^{1/2} e^{-\frac{E}{kT}} \right] = 0,$$

$$\text{откуда } \frac{1}{2} E^{-1/2} - \frac{E^{1/2}}{kT} = 0$$

$$\text{или } E_g = \frac{1}{2} kT$$

$$\text{Ответ: } E_g = \frac{1}{2} kT$$

б. Какая часть молекул кислорода при $t = 0^\circ\text{C}$ обладает скоростью от $v_1 = 100 \text{ м/с}$ до $v_2 = 110 \text{ м/с}$?

Дано:

$$t = 0^\circ\text{C}$$

$$v_1 = 100 \text{ м/с}$$

$$v_2 = 110 \text{ м/с}$$

$$\mu = 0,032 \text{ кг/моль}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = ?$$

Решение:

Закон распределения молекул по скоростям позволяет найти число молекул ΔN , относительные скорости которых лежат в интервале от u до $u + \Delta u$:

$$\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 \Delta u.$$

Здесь $u = \frac{v}{v_g}$, v – данная скорость, $v_g = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ – наиболее вероятная

скорость, Δu – величина интервала относительных скоростей, малая по сравнению со скоростью u .

$$\text{В нашем случае } v_g = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 273}{0,032}} \approx 376 \text{ м/с}.$$

$$\text{Тогда } u = \frac{100}{376} \approx 0,266; \quad u^2 = 0,071; \quad \Delta u = \frac{110 - 100}{376} \approx 0,0266.$$

Используя функцию распределения, получим

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-0,071} \cdot 0,071 \cdot 0,0266 \approx 0,004 = 0,4\%.$$

Тот же результат можно получить, если воспользоваться графиком, построенным по значениям таблицы 1, в которой даны значения $\frac{\Delta N}{N \cdot \Delta u}$ для различных относительных скоростей.

В нашем случае $u = 0,266$. Из графика видно, что этому значению u соответствует $\frac{\Delta N}{N \cdot \Delta u} \approx 0,16$. Так как $\Delta u = 0,0266$, то

$$\frac{\Delta N}{N} = 0,16 \cdot 0,0266 \approx 0,004 = 0,4\%$$

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 0,4\%$

Таблица 1

u	$\frac{\Delta N}{N \cdot \Delta u}$	u	$\frac{\Delta N}{N \cdot \Delta u}$	u	$\frac{\Delta N}{N \cdot \Delta u}$
0	0	0,9	0,81	1,8	0,29
0,1	0,02	1,0	0,83	1,9	0,22
0,2	0,09	1,1	0,82	2,0	0,16
0,3	0,18	1,2	0,78	2,1	0,12
0,4	0,31	1,3	0,71	2,2	0,09
0,5	0,44	1,4	0,63	2,3	0,06
0,6	0,57	1,5	0,54	2,4	0,04
0,7	0,67	1,6	0,46	2,5	0,03
0,8	0,76	1,7	0,36		

7. Какая часть молекул азота при температуре $t = 150^{\circ}C$ имеет скорости выше $v = 300 \text{ м / с}$?

Дано:

$$t = 150^{\circ}C$$

$$V = 300 \text{ м / с}$$

$$\mu = 0,028 \text{ кг / моль}$$

$$\frac{N_x}{N} - ?$$

Решение:

Чтобы определить число молекул, скорости которых превышают заданное значение, можно воспользоваться таблицей 2 или графиком, построенным по данным этой таблицы.

$$\text{Так как } v_e = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 423}{0,028}} = 500 \text{ м / с},$$

то относительная скорость $u = \frac{v}{v_d} = 0,6$

По таблице находим, что $\frac{N_x}{N} = 0,868$

Ответ: $\frac{N_x}{N} = 0,868$

u	$\frac{N_x}{N}$	u	$\frac{N_x}{N}$
0	1,000	0,8	0,734
0,2	0,994	1,0	0,572
0,4	0,957	1,25	0,374
0,5	0,918	1,5	0,213
0,6	0,868	2,0	0,046
0,7	0,806	2,5	0,0057

8. На какой высоте плотность газа составляет 50% от его плотности над уровнем моря? Температуру считать постоянной и равной $t = 0^\circ \text{C}$. Задачу решить для воздуха. Молярная масса воздуха $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$.

Дано:

$$\rho = 0,5\rho_0$$

$$t = 0^\circ \text{C}$$

$$\mu = 0,029 \text{ кг / моль}$$

$$h - ?$$

Решение:

Согласно барометрической формуле

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu g(h-h_0)}{RT}}$$

По определению плотность

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{N \cdot m_0}{V} = n \cdot m_0, \text{ тогда } \rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}} \text{ и}$$

отношение $\frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{\mu g h}{RT}}$.

Логарифмируя последнее выражение, получаем $\ln \frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{\mu g h}{RT}$, откуда

$$h = \frac{RT}{\mu g} \ln \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$h = \frac{8,31 \cdot 273}{0,029 \cdot 10} \cdot \ln 2 = 5422 \text{ м.}$$

Ответ: $h = 5422 \text{ м.}$

ЗАДАЧИ для самостоятельного решения

1. Найти среднюю квадратичную, среднюю арифметическую и наиболее вероятную скорости молекул водорода. Вычисления выполнить для температуры $T = 20 \text{ К}$.

2. При какой температуре средняя квадратичная скорость атомов гелия станет равной второй космической скорости $v_2 = 11200 \text{ м/с}$?

3. Смесь гелия и аргона находится при температуре $T = 1200 \text{ К}$. Определить среднюю квадратичную скорость и среднюю кинетическую энергию атомов гелия и аргона.

4. Колба вместимостью $V = 4 \text{ л}$ содержит некоторый газ массой $0,6 \text{ г}$ под давлением $p = 200 \text{ кПа}$. Определить среднюю квадратичную скорость молекул газа.

5. Смесь гелия и аргона находится при температуре $T = 1200 \text{ К}$. Определить среднюю квадратичную скорость и среднюю кинетическую энергию атомов гелия и аргона.

6. Во сколько раз средняя квадратичная скорость молекул азота больше средней квадратичной скорости пылинки массой 10^{-6} г , находящейся среди молекул кислорода.

7. Вычислить энергию вращательного движения двухатомного газа, находящегося под давлением $p = 10^5 \text{ Па}$ в сосуде объемом 1 л ? Считать, что вращательные степени свободы полностью возбуждены.

8. Определите давление, оказываемое газом на стенки сосуда, если его плотность равна $\rho = 0,01 \text{ кг/м}^3$, а средняя квадратичная скорость молекул газа составляет 480 м/с .

9. Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, получите формулу наиболее вероятной скорости.

10. Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найдите закон, выражающий распределение молекул по относительным скоростям $u = v/v_0$.

11. Пылинки, взвешенные в воздухе, имеют массу $m_0 = 10^{-18} \text{ г}$. Во сколько раз уменьшится их концентрация при увеличении высоты на $\Delta h = 10 \text{ м}$? Температура воздуха 300 К .

12. Масса каждой из пылинок, взвешенных в воздухе, равна $m_0 = 10^{-8} \text{ г}$. Отношение концентрации n_1 пылинок на высоте 1 м к кон-

центрации их на высоте $h_0 = 0$ равно 0,787. Температура воздуха 300 К. Найти по этим данным значение постоянной Авогадро.

13. Каково давление воздуха в шахте на глубине 1 км, если считать, что температура по всей высоте постоянная и равна 22°C , а ускорение свободного изменения с высотой? Давление воздуха у поверхности Земли примите равным p_0 .

14. Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление $p = 80$ кПа, благодаря чему летчик считает высоту самолета неизменной. Однако, температура воздуха изменилась на $\Delta T = 1$ К. Какую ошибку в определении высоты допустил летчик? Считать, что температура не зависит от высоты и что у поверхности Земли давление равно $p = 100$ кПа.

15. Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найдите среднюю квадратичную скорость. (Используйте табличный интеграл $\int_0^\infty x^4 \cdot e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi a^{-5/2}}$).

16. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям, найдите среднюю кинетическую энергию молекул. (Используйте табличный интеграл $\int_0^\infty x^{3/2} e^{-ax} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\pi a^{-5/2}}$).

17. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям, найдите наиболее вероятное значение энергии молекул.

18. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям, найдите для данной температуры отношение средней кинетической энергии молекул к их наиболее вероятному значению энергии.

19. Закон распределения молекул газа по скоростям в некотором молекулярном пучке имеет вид $f(v) = A \cdot v^3 e^{-m_0 v^2 / (2kT)}$. Определите: 1) наиболее вероятную скорость; 2) наиболее вероятное значение энергии молекул в этом пучке.

20. Кислород нагревают от температуры $T_1 = 240^\circ\text{K}$ до $T_2 = 480^\circ\text{K}$. Рассчитать для каждой из указанных температур значения функции Максвелла при скоростях: а) $v = v_g$; б) $v = v_g + 200$ м/с; в) $v = v_g - 200$ м/с; г) $v = 2v_g$. По полученным значениям построить графики функции $f(v, T)$ для каждой из температур. Определить, во сколько раз изменяется при увеличении температуры доля молекул,

скорость которых находится в интервале : 1) от 100 до 200 м/с; 2) 700 до 800 м/с.

21. Определить относительное число молекул идеального газа N/N_0 , скорости которых заключены в пределах от нуля до одной сотой наиболее вероятной скорости.

22. Определить, какая из средних величин $\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle$ или $\frac{1}{\langle v \rangle}$ больше, и найти их отношение.

23. Определить долю молекул, энергия которых заключена в пределах от нуля до некоторого значения $0,01kT$.

24. Какая часть молекул азота при температуре 150°C обладает скоростями от 400 м/с до 450 м/с?

25. Какая часть молекул водорода при температуре 0°C обладает скоростями от 2000 м/с до 2100 м/с?

26. Какая часть молекул азота при температуре 150°C обладает скоростями, лежащими в интервале от 300 м/с до 800 м/с?

27. В сосуде находится 8 г кислорода при температуре 1600°C . Какое число молекул кислорода имеет кинетическую энергию поступательно движения, превышающую $6,65 \cdot 10^{-20}$ Дж?

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА

$$\text{Средняя арифметическая скорость } v_{c.a.} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

Средняя длина свободного пробега $\langle \ell \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi \cdot d^2 n}$, где d – эффективный диаметр молекулы, n – число молекул в единице объёма (концентрация частиц).

$$\text{Среднее число соударений } \langle z \rangle = \frac{v_{c.a.}}{\langle \ell \rangle}, \text{ испытываемых одной молекулой}$$

$$\text{в единицу времени } \langle z \rangle = \sqrt{2}\pi \cdot d^2 \cdot N \cdot v_{c.a.}$$

Количество теплоты, перенесенное за время Δt вследствие теплопроводности (уравнение теплопроводности):

$$Q = -\kappa \frac{dT}{dx} S \cdot \Delta t,$$

(где $\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры в направлении, перпендикулярном к площадке S , за время Δt).

$$\text{Коэффициент теплопроводности: } k = \frac{1}{3} c_V \rho \langle l \rangle v_{c.a.} = \frac{1}{6} k n v_{c.a.} \langle \ell \rangle,$$

где ρ – плотность газа, $v_{c.a.}$ – средняя арифметическая скорость, молярная теплоёмкость газа при постоянном объёме: $c_V = \frac{i}{2} R$

Масса, перенесенная за время Δt при диффузии (уравнение диффузии): $m = -D \frac{dn}{dx} m_0 S \Delta t$, где $\frac{dn}{dx}$ – градиент концентрации в направлении, перпендикулярном к площадке S .

$$\text{Коэффициент диффузии: } D = \frac{1}{3} v_{c.a.} \langle l \rangle.$$

$$\text{Молярная теплоёмкость при постоянном давлении: } c_p = c_V + R$$

Внутренняя энергия газа: $U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT$, где i – число степеней свободы.

Сила внутреннего трения в газе (закон Ньютона): $F_{тр} = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S$,

где $\frac{dv}{dz}$ – градиент скорости течения газа в направлении, перпендикулярном к площадке ΔS .

Динамическая вязкость: $\eta = \frac{1}{3} v_{c.a} \langle l \rangle \rho$.

Вопросы

1. Что называется средней длиной свободного пробега? От каких параметров она зависит?
2. Что такое эффективный диаметр молекулы?
3. Как понимать термин «столкновение» молекул?
4. Что понимают под явлениями переноса в газах? Какие явления к ним относятся? Что общего во всех этих вопросах?
5. Каков механизм диффузии?
6. Каков механизм внутреннего трения?
7. Каков механизм вязкости?
8. Почему в законах явлений переноса ставят знак «минус»?
9. Каков физический смысл градиента температуры, градиента скорости, градиента плотности?
10. Каков физический смысл коэффициента диффузии, коэффициента вязкости, коэффициента теплопроводности? От каких параметров состояния зависит каждый из них?
11. Как изменится число столкновений в единицу времени молекул газа, если его объем изотермически увеличить в 2 раза?
12. Как изменится коэффициент диффузии газа, если средняя длина свободного пробега его молекул при увеличении температуры в 2,25 раза уменьшилась на 20%?

Примеры решения задач

1. При каком давлении средняя длина свободного пробега молекул водорода равна $\langle \ell \rangle = 2,5$ см, если температура газа равна $t = 67^\circ \text{C}$? Диаметр молекулы водорода принять равным $d = 0,28$ нм.

Дано:
 $\langle \ell \rangle = 2,5$ см
 $t = 67^\circ \text{C}$
 $d = 0,28$ нм
 $\mu_2 = 0,002$ кг/моль

 $p - ?$

Решение:
 Из основного уравнения МКТ следует, что давление $p = nkT$.
 Средняя длина свободного пробега зависит от концентрации и эффективного диаметра молекулы $\langle \ell \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi \cdot d^2 n}$.
 Выражая концентрацию $n = \frac{1}{\sqrt{2}\pi \cdot d^2 \langle \ell \rangle}$
 и подставляя в формулу для давления, получим

$$p = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi \cdot d^2 \langle \ell \rangle}.$$

$$p = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 340}{1,41 \cdot 3,14 \cdot (0,28)^2 10^{-18} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}} \approx 0,539 \text{ Па.}$$

Ответ: $p \approx 0,539$ Па.

2. Определите коэффициент теплопроводности азота, находящегося в некотором объеме при температуре $T = 280^\circ \text{K}$. Эффективный диаметр молекулы азота принять равным $d = 0,38$ нм.

Дано:
 $T = 280^\circ \text{K}$
 $d = 0,38$ нм
 $\mu = 0,028$ кг/моль
 $i = 5$

 $\kappa - ?$

Решение:
 Коэффициент теплопроводности
 $\kappa = \frac{1}{3} c_V \rho \langle \ell \rangle v_{c.a.}$
 Молярная теплоемкость при постоянном объеме определяется соотношением $c_V = \frac{i R}{2 \mu}$;
 плотность $\rho = \frac{m}{V} = \frac{P\mu}{RT}$; $\langle \ell \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$.

Находя концентрацию из основного уравнения МКТ $n = \frac{P}{kT}$ и ис-

пользуя выражение для средней арифметической скорости $v_{c.a.} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$,

получим

$$\kappa = \frac{i R p \cdot \mu}{2 \mu RT} \frac{kT}{\sqrt{2\pi d^2 p}} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \frac{i k}{3 \pi d^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}}$$

$$\kappa = \frac{5}{2} \frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{3,14 \cdot (0,38)^2 \cdot 10^{-18}} \cdot \sqrt{\frac{8,31 \cdot 280}{3,14 \cdot 0,028}} \approx 8,25 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/(мК)}$$

Ответ: $\kappa \approx 8,25 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/(мК)}$.

3. Определите коэффициент диффузии кислорода при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекулы кислорода равен $d = 0,36 \text{ нм}$.

Дано:
 $\mu_2 = 0,032$
 кг/моль
 $d = 0,36 \text{ нм}$
 $T = 273^\circ \text{ К}$
 $p = 10^5 \text{ Па}$
 $D - ?$

Решение:
 Коэффициент диффузии связан со средней арифметической скоростью и средней длиной свободного пробега соотношением $D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \ell \rangle$
 Средняя арифметическая скорость зависит от температуры $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ и средняя длина

свободного пробега определяется концентрацией $\langle \ell \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2\pi} \cdot d^2 P}$.

Тогда $D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{kT}{\sqrt{2\pi} d^2 P}$.

Тогда $D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 273}{3,14 \cdot 0,032}} \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{1,41 \cdot 3,14 \cdot (0,36)^2 \cdot 10^5} \approx 9,18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Ответ: $D \approx 9,18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

4. Пространство между двумя параллельными пластинами площадью $S = 150 \text{ см}^2$ каждая, находящимися на расстоянии $\Delta x = 5 \text{ мм}$ друг от друга, заполнено кислородом. Одна пластина поддерживается при температуре $t_1 = 17^\circ \text{C}$, другая – при температуре $t_2 = -27^\circ \text{C}$. Определите количество теплоты, прошедшее за 5 мин посредством теплопроводности от одной пластины к другой. Кислород находится при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекулы кислорода $d = 0,36 \text{ нм}$.

Дано:

$$S = 150 \text{ см}^2$$

$$t_1 = 17^\circ \text{C}$$

$$t_2 = -27^\circ \text{C}$$

$$\Delta x = 5 \text{ мм}$$

$$t = 5 \text{ мин}$$

$$T = 273^\circ \text{K}$$

$$P = 10^5 \text{ Па}$$

$$d = 0,36 \text{ нм}$$

$$i = 5$$

$$\mu_2 = 0,032 \text{ кг/моль}$$

$Q = ?$

Решение:

Из уравнения теплопроводности

$$Q = \kappa \left| \frac{\Delta T}{\Delta x} S \cdot t \right|$$

Разность температур найдем как $\Delta T = T_2 - T_1$ и коэффициент теплопроводности

рассчитывается по формуле: $\kappa = \frac{i}{3} \frac{k}{\pi d^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi \mu}}$.

$$\text{Тогда } Q = \frac{i}{3} \frac{k}{\pi d^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi \mu}} \frac{(t_2 - t_1)}{\Delta x}.$$

$$Q = \frac{5}{3} \cdot \frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{3,14 \cdot (0,36)^2} \sqrt{\frac{8,31 \cdot 273}{3,14 \cdot 0,032}} \frac{44}{5 \cdot 10^{-3}} \approx 76,4 \text{ Дж.}$$

Ответ: $Q \approx 76,4 \text{ Дж}$.

5. Определите массу азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку $S = 50 \text{ см}^2$ за $t = 20 \text{ с}$, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном площадке, равен $\frac{\Delta \rho}{\Delta x} = 1 \text{ кг/м}^4$. Температура азота $T = 290^\circ \text{K}$, а средняя длина свободного пробега его молекул равна $\langle \ell \rangle = 1 \text{ мкм}$.

Дано:

$$S = 50 \text{ см}^2$$

$$t = 20 \text{ с}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta x} = 1 \text{ кг/м}^4$$

$$T = 290^\circ \text{ К}$$

$$\mu = 0,028 \text{ кг/моль}$$

$$m - ?$$

Решение:

Массу азота можно найти, воспользовавшись уравнением диффузии $m = \left| D \cdot \frac{\Delta \rho}{\Delta x} S t \right|$.

Зная связь коэффициента диффузии со средней арифметической скоростью и средней длиной свободного пробега $D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \ell \rangle$ и вы-

числя среднюю арифметическую скорость по формуле $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$,

получим, что масса азота $m = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \cdot \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \cdot S t$.

$$\text{Тогда } m = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 290}{3,14 \cdot 0,028}} \cdot 1 \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \approx 15,6 \cdot 10^{-6} \text{ кг.}$$

$$\text{Ответ: } m \approx 15,6 \cdot 10^{-6} \text{ кг.}$$

6. Определите коэффициент теплопроводности азота, если коэффициент динамической вязкости для него при тех же условиях равен $\eta = 10 \text{ мкПа} \cdot \text{с}$.

Дано:

$$\mu = 0,028 \text{ кг/моль}$$

$$\eta = 10 \text{ мкПа} \cdot \text{с}$$

$$i = 5$$

$$k - ?$$

Решение:

Коэффициент теплопроводности

$k = \frac{1}{3} c_V \rho \langle \ell \rangle v_{c.a.}$ связан с коэффициентом ди-

намической вязкости соотношением

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \ell \rangle.$$

Откуда $k = c_V \eta$.

Молярная теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \frac{i R}{2 \mu}$.

$$\text{Тогда } k = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{\mu} \cdot \eta, \quad k = \frac{5}{2} \cdot \frac{8,31}{0,028} \cdot 10^{-5} \approx 7,42 \text{ мВт/(мК)}.$$

Ответ: $k \approx 7,42 \text{ мВт/(мК)}$.

7. Ниже какого давления можно говорить о вакууме между стенками сосуда Дьюара, если расстояние между стенками сосуда $\ell = 8$ мм, а температура $t = 17^\circ \text{C}$? Эффективный диаметр молекул воздуха принять равным $d = 0,27$ нм.

Дано:
 $t = 17^\circ \text{C}$
 $\ell = 8$ мм
 $d = 0,27$ нм

 $p - ?$

Решение:
 По условию размеры сосуда должны быть не больше средней длины свободного пробега $\ell \leq \langle \ell \rangle$

$$\langle \ell \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 \delta}$$

Откуда
$$p = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 \langle \ell \rangle}$$

Тогда
$$p = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290}{1,41 \cdot 3,14 \cdot (0,27)^2 \cdot 10^{-18} \cdot 8 \cdot 10^{-3}} \approx 1,54 \text{ Па.}$$

Ответ: $p \leq 1,54$ Па.

ЗАДАЧИ для самостоятельного решения

1. Определите среднюю продолжительность свободного пробега молекул водорода при температуре 27°C и давлении $0,5$ кПа. Диаметр молекулы водорода примите равным $0,28$ нм.

2. Средняя длина свободного пробега молекул водорода при нормальных условиях составляет $0,1$ мкм. Определите среднюю длину свободного пробега при давлении $0,1$ мПа, если температура остается постоянной.

3. Определите плотность воздуха в сосуде и концентрацию его молекул, если сосуд откачан до давления $0,13$ Па. Диаметр молекул воздуха примите равным $0,27$ нм. Температура воздуха 300°K .

4. Определите массу азота. Прошедшего вследствие диффузии через площадку $S = 50 \text{ см}^2$ за 20 с, если градиент плотности в направлении перпендикулярном площадке, равен 1 кг/м^4 . Температура азота 290°K , а средняя длина свободного пробега его молекул равна 1 мкм.

5. Определите, во сколько раз отличаются коэффициенты динамической вязкости углекислого газа и азота, если оба газа находятся при одинаковой температуре и одном и том же давлении. Эффективные диаметры молекул этих газов равны.

6. Найти среднюю длину свободного пробега молекул воздуха при нормальных условиях. Диаметр молекулы воздуха равен 3 ангстрема.

7. Найти среднюю длину свободного пробега молекул водорода при давлении 0,1 Па и температуре 100° К.

8. Определите среднюю длину свободного пробега молекул кислорода, находящегося при температуре 273° К, если среднее число $\langle z \rangle$ столкновений, испытываемых молекулой в 1 с, равно $3,7 \cdot 10^9$.

9. Определите среднюю продолжительность $\langle \tau \rangle$ свободного пробега молекул водорода при температуре 300° К и давлении 0,5 кПа. Диаметр молекулы водорода равен 0,28 нм.

10. В сферической колбе объемом в 1 л находится азот. Найти плотность азота, при которой длина свободного пробега молекул азота больше размеров сосуда. Диаметр молекулы азота равен $3 \cdot 10^{-10}$ м.

11. При температуре 273° К и некотором давлении средняя длина свободного пробега молекул кислорода равна $9,5 \cdot 10^{-8}$ м. Чему будет равно число столкновений в 1 сек молекул кислорода, если сосуд откачать до 0,01 первоначального давления? Температура остается прежней.

12. Найти число столкновений в 1 сек молекул углекислого газа при температуре 100°С, если средняя длина свободного пробега при этих условиях равна $8,7 \cdot 10^{-2}$ см.

13. Найти среднюю длину свободного пробега атомов гелия в условиях, когда плотность гелия $\rho = 2,1 \cdot 10^{-2}$ кг/м³. Диаметр атомов гелия принять равным $2 \cdot 10^{-8}$ см.

14. Найти коэффициент диффузии водорода при нормальных условиях, если средняя длина свободного пробега молекул при этих условиях равна $1,6 \cdot 10^{-7}$ м.

15. Средняя длина свободного пробега атомов гелия при нормальных условиях равна 180 нм. Определить коэффициент диффузии гелия.

16. Найти количество азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку $S = 100 \text{ см}^2$ за 10 сек, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном к площадке, равен $1,26 \text{ кг/м}^4$. Температура азота 300° К , средняя длина свободного пробега равна 10^{-5} см .

17. Найти коэффициент диффузии и коэффициент внутреннего трения воздуха при давлении 760 мм.рт.ст и температуре 283° К . Диаметр молекулы воздуха принять равным $3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

18. Построить график зависимости коэффициента диффузии водорода от температуры в интервале $100^\circ \text{ К} \leq T \leq 600^\circ \text{ К}$ через 100 К при постоянном давлении $P = \text{const} = 1 \text{ атм}$. Диаметр молекулы водорода принять равным $2,3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.

19. Определить, во сколько раз отличается коэффициент диффузии газообразного водорода от коэффициента диффузии газообразного кислорода, если оба газа находятся при одинаковых условиях.

20. Найти коэффициент теплопроводности воздуха при температуре 10° С и давлении 10^5 Па , если диаметр молекул равен $3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.

21. В сосуде объемом $V = 2 \text{ л}$ находится $N = 4 \cdot 10^{22}$ молекул двухатомного газа. Коэффициент теплопроводности газа равен $\kappa = 0,014 \text{ Вт/(мК)}$. Найти коэффициент диффузии газа при этих условиях.

22. Найти коэффициент теплопроводности водорода, если известно, что коэффициент внутреннего трения для него при этих условиях равен $8,6 \cdot 10^{-6} \text{ Н·с/м}^2$.

23. Углекислый газ и азот находятся при одинаковых температуре и давлении. Найти для этих газов отношение: 1) коэффициентов диффузии; 2) коэффициентов внутреннего трения; 3) коэффициентов теплопроводности. Диаметры молекул газов считать одинаковыми.

24. Найти диаметр молекулы кислорода, если известно, что для кислорода коэффициент внутреннего трения при 0° С равен $18,8 \cdot 10^{-6} \text{ Н·с/м}^2$.

25. Какой наибольшей скорости может достичь дождевая капля диаметром $0,3 \text{ мм}$, если коэффициент внутреннего трения воздуха равен $1,2 \cdot 10^{-4} \text{ г/(см·с)}$? Считать, что для дождевой капли имеет место закон Стокса.

26. Найти коэффициент внутреннего трения азота при нормальных условиях, если коэффициент диффузии для него в этих условиях равен $0,142 \text{ см}^2/\text{с}$.

27. Найти среднюю длину свободного пробега молекул азота, если его динамическая вязкость равна $\eta = 17 \text{ мкПа}\cdot\text{с}$.

28. Найти динамическую вязкость гелия при нормальных условиях, если коэффициент диффузии при тех же условиях равен $D = 1,06 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$.

29. Вычислить теплопроводность гелия при нормальных условиях.

30. При нормальных условиях динамическая вязкость воздуха равна $\eta = 17,2 \text{ мкПа}\cdot\text{с}$. Найти при тех же условиях коэффициент теплопроводности.

ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

Уравнение состояния идеальных газов (уравнение Менделеева-Клапейрона) $pV = \frac{m}{\mu}RT$ или $pV = \nu RT$, где m – масса газа; μ – его молярная масса, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура, ν – количество вещества.

Для данной массы газа уравнение Клапейрона записать в виде:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

где величины с индексом «1» относятся к первому состоянию газа, а с индексом «2» – ко второму.

Газовые законы

Закон Бойля-Мариотта:

$T = \text{const}$ (изотермический процесс)

$$pV = \text{const} \quad \text{или} \quad p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

Закон Гей-Люссака:

$p = \text{const}$ (изобарический процесс)

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Закон Шарля:

$V = \text{const}$ (изохорический процесс)

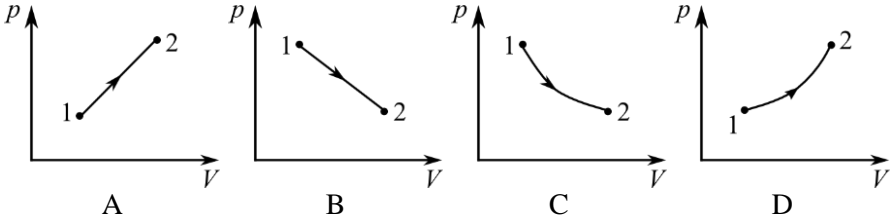
$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

Вопросы

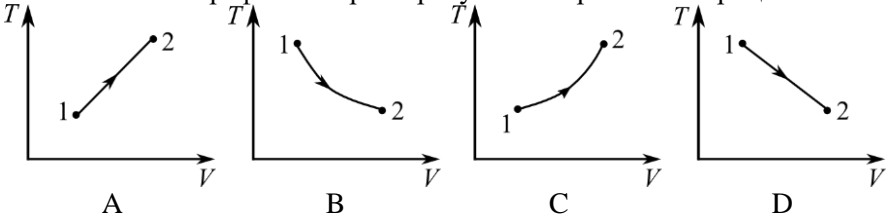
1. При каких условиях и допущениях газ можно рассматривать как идеальный?
2. Запишите уравнение состояния для произвольной массы газа.
3. Что называется изопроцессом? Какие изопроцессы вы знаете? Изобразите графически известные вам изопроцессы.
4. В координатных осях p , V изобразите изотермическое сжатие массы газа m при температуре той же массы газа. Как изменится вид графика, если изотермическое сжатие той же массы газа будет происхо-

дуть при более высокой температуре? Как изменится вид графика, если при той же температуре в процессе будет участвовать большая масса газа?

5. На каком графике правильно изображена зависимость давления от объема при изотермическом процессе?



6. Какой из графиков характеризует изобарический процесс?



Примеры решения задач

1. Газ при давлении 980 ГПа при температуре 20⁰С имеет объем 164 м³. Каков объем той же массы газа при нормальных условиях?

Дано:

$$p_1 = 980 \text{ ГПа} = 980 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

$$V_1 = 164$$

$$T_1 = 293 \text{ К}$$

$$p_2 = 10^5 \text{ Па}$$

$$T_2 = 273^\circ \text{ К}$$

$$V_2 = ?$$

Решение:

По условию задачи количество молей газа остается неизменным.

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для двух состояний газа:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1$$

$$p_2 V_2 = \nu R T_2$$

Исключая $\frac{m}{\mu} R$, имеем $\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{T_1}{T_2}$,

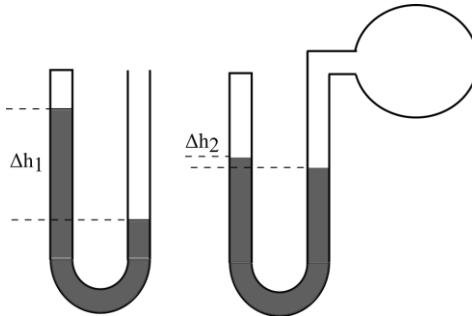
$$\text{Откуда } V_2 = \frac{p_1 V_1 T_2}{p_2 T_1} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

$$\text{Ответ: } V_2 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

2. Манометр в виде стеклянной U – образной трубки с внутренним диаметром 5 мм, наполнен ртутью так, что оставшийся в закрытом колене трубки воздух занимает при нормальном атмосферном давлении объем 10 мм³. При этом разность уровней ртути в обоих коленах трубки равна 10 см. При соединении открытого конца трубки с большим сосудом разность уровней ртути уменьшилась до 1 см. Определить давление в сосуде.

Дано:
 $d = 5 \text{ мм}$
 $V = 10 \text{ мм}^3$
 $\Delta h_1 = 10 \text{ см}$
 $\Delta h_2 = 1 \text{ см}$
 $p = ?$

Решение:



В начальном состоянии

$$p_1 = p_0 - \rho g \Delta h_1.$$

В конечном состоянии $p_2 = p$.

Так как $T = const$, то уравнение процесса имеет вид:

$$(p_0 - \rho g \Delta h_1)V = p(V + (\Delta h_2 - \Delta h_1)S)$$

Откуда
$$p = \frac{p_0 - \rho g \Delta h_1}{V + \frac{\pi d^2}{4} \cdot (\Delta h_2 - \Delta h_1)} V.$$

$$p = 2,32 \text{ кПа.}$$

Ответ: $p = 2,32 \text{ кПа.}$

3. Посередине откачанного и запаянного с обоих концов горизонтального капилляра находится столбик ртути длиной 20 см. Если капилляр поставить вертикально, то столбик ртути переместится на 10 см. До какого давления был откачан капилляр? Длина капилляра 1 м.

Дано:

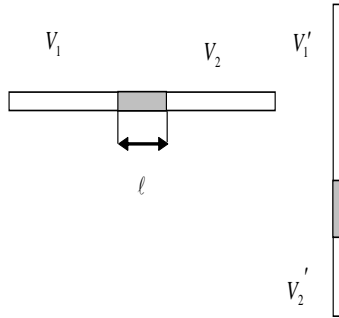
$$\ell = 20 \text{ см}$$

$$\tilde{\sigma} = 10 \text{ см}$$

$$L = 1 \text{ м}$$

$$p_1 = ?$$

Решение:



В начальный момент времени $V_1 = V_2$, так как столбик ртути находится посередине.

Если капилляр поставить вертикально, то объемы будут соответственно равны

$$V_1' = S \cdot x + V_1$$

$$V_2' = V_1 - S \cdot x$$

Поскольку процесс протекает при постоянной температуре, то $p_1' V_1' = pV$ и $p_2' V_2' = pV$, следовательно,

$$p_1' V_1' = p_2' V_2' \quad (1)$$

$p_1' = p - \rho g x$; $p_2' = p + \rho g x$, поэтому соотношение (1) примет вид

$$(p - \rho g x) \cdot (V_1 + Sx) = (p + \rho g x) \cdot (V_1 - Sx)$$

$$\text{Но } V_1 = \frac{L \cdot S - \ell \cdot S}{2} = \frac{L - \ell}{2} \cdot S,$$

$$\text{тогда } p_0 = \frac{\rho g x \left(\frac{L - \ell}{2} + x \right)}{\frac{L - \ell}{2}} = 1700 \text{ Па.}$$

Ответ: $p_0 = 1700 \text{ Па}$

4. Газовый термометр состоит из шара с припаянной к нему горизонтальной стеклянной трубкой. Капелька ртути, помещенная в трубку, отделяет объем шара от внешнего пространства. Площадь поперечного сечения трубки равна $0,1 \text{ см}^2$. При температуре 273 К капля находилась на расстоянии 30 см от поверхности шара, при температуре 278 К – на расстоянии 50 см . Найти вместимость шара.

Дано:

$$S = 0,1 \text{ см}^2$$

$$T_1 = 273^\circ \text{ К}$$

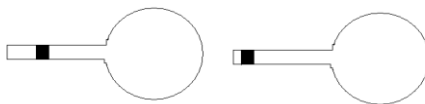
$$h_1 = 30 \text{ см}$$

$$T_2 = 278^\circ$$

$$h_2 = 50 \text{ см}$$

$V = ?$

Решение:



Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для двух состояний газа

$$p_1 \cdot (V + S \cdot h_1) = \nu R T_1$$

$$p_2 \cdot (V + S \cdot h_2) = \nu R T_2$$

Поделив почленно первое уравнение на V второе, получим

$$\frac{p_1 \cdot (V + S h_1)}{p_2 \cdot (V + S h_2)} = \frac{T_1}{T_2}$$

Так как трубка соединяется со внешним пространством, то $p = const$ и, следовательно,

$$(V + S \cdot h_1) \cdot T_2 = (V + S \cdot h_2) \cdot T_1.$$

$$\text{Откуда } V = S \frac{h_2 T_1 - h_1 T_2}{T_2 - T_1}$$

$$\text{Вычисляя, получим } V = 1 \cdot 10^5 \frac{0,5 \cdot 273 - 0,3 \cdot 278}{278 - 273} \approx 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$\text{Ответ: } V \approx 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

5. В баллоне вместимостью 25 л находится водород при температуре 290 К. После того, как часть водорода израсходовали, давление в баллоне понизилось на $\Delta p = 0,4$ МПа. Определить массу израсходованного водорода.

Дано:

$$V = 25 \text{ л}$$

$$T = 290 \text{ К}$$

$$\mu = 0,002 \text{ кг / моль}$$

$$\Delta p = 0,4 \text{ МПа}$$

$$\Delta m - ?$$

Решение:

Запишем уравнения состояния идеального газа для начального и конечного состояний

$$p V = \frac{m}{\mu} R T$$

$$(p - \Delta p) = \frac{m - \Delta m}{\mu} R T$$

Тогда

$$\frac{p}{p - \Delta p} = \frac{m}{m - \Delta m}$$

После преобразований получим

$$p = \frac{m}{\Delta m} \cdot \Delta p$$

Подставляя в первое уравнение, получим

$$\Delta m = \frac{\Delta p \cdot V \cdot \mu}{R T}$$

Вычислим искомую величину

$$\Delta m = \frac{0,4 \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 290} \approx 0,0083 \text{ кг}$$

Ответ: $\Delta m \approx 0,0083 \text{ кг}$

ЗАДАЧИ для самостоятельного решения

1. Какой объем занимает смесь азота массой 1 кг и гелия массой 1 кг при нормальных условиях?
2. 12 г газа занимают объем $0,004 \text{ м}^3$ при температуре 7°C . После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равна $0,0006 \text{ г/см}^3$. До какой температуры нагрели газ?
3. В баллоне содержится газ при температуре 100°C . До какой температуры нужно нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в два раза?
4. В баллоне объемом V находится газ массой m_1 при температуре T_1 . Некоторое количество газа выпустили из баллона, после чего оставшаяся масса оказалась равной m_2 , а температура равной T_2 . Какую массу газа выпустили из баллона.
5. Определить давление воздуха после его сжатия в цилиндре внутреннего сгорания, если температура сжатого воздуха становится равной 800°C , а объем уменьшается в 300 раз? Начальная температура воздуха 300 K , а начальное давление 10^5 Па .
6. Как изменится количество молекул в комнате объемом V , если при постоянном давлении абсолютная температура воздуха возрастет на 20%?
7. Горизонтально расположенный закрытый цилиндрический сосуд длины $1,2 \text{ м}$ с гладкими стенками, разделенный на две части легким теплонепроницаемым поршнем, заполнен идеальным газом. В начальный момент времени объем левой части сосуда вдвое больше объема правой, а температура в обеих частях одинакова. Если температуру в левой части сосуда нагреть до 27°C , а большую охладить до -123°C , то в каком отношении поршень будет делить сосуд?
8. Смесь азота и гелия при температуре 300 K находится под давлением $p = 1,3 \cdot 10^2 \text{ Па}$. Масса азота составляет 70% от общей массы смеси. Найти концентрацию молекул каждого из газов.
9. При нагревании идеального газа на $\Delta T = 1 \text{ K}$ при постоянном давлении объем его увеличился на $1/350$ первоначального объема. Найти начальную температуру газа.
10. Баллон вместимостью $V = 12 \text{ л}$ содержит углекислый газ. Давление газа равно $p = 1 \text{ МПа}$, температура $T = 300 \text{ K}$. Определить массу газа в баллоне.
11. На сколько уменьшится масса воздуха в открытом сосуде, если его нагреть от 273 K до 373 K ? Начальная масса воздуха 373 г .

12. До какой температуры следует изобарически нагреть газ, чтобы его плотность уменьшилась по сравнению с плотностью при 273 К вдвое?

13. Как изменится температура идеального газа, если уменьшить его объем в два раза при осуществлении процесса, в котором давление и объем газа связаны соотношением $PV^2 = const$.

14. Когда из сосуда выпустили некоторое количество газа, давление в нем упало на 80%, а абсолютная температура – на 60%. Какая часть газа осталась в сосуде?

15. Как изменится объем данной массы газа, если при увеличении абсолютной температуры идеального газа в 2 раза его давление увеличилось на 25%?

16. Когда из сосуда выпустили некоторое количество газа, давление в нем упало на 40%, а абсолютная температура – на 20%. Какая часть газа осталась в сосуде?

17. Определить давление воздуха после его сжатия в цилиндре внутреннего сгорания, если температура сжатого воздуха становится равной 800°C, а объем уменьшается в 300 раз? Начальная температура воздуха 300 К, а начальное давление 10⁵Па.

18. Сосуды с газами под давлением 100 и 600 кПа имеют объем 2 л и 3 л соответственно. Сосуды соединяют небольшой трубкой. Каково установившееся давление в сосудах при неизменной температуре?

19. Закрытый цилиндрический сосуд высотой h разделен на две части невесомым поршнем. При закрепленном поршне обе половинки заполнены газом, причем в одной из них давление в n раз больше, чем в другой. На сколько переместится поршень, если его освободить? Температуру газа считать постоянной.

20. Теплоизолированный сосуд объемом $V = 1 \text{ м}^3$ разделен перегородкой на две равные части. В одной из частей находится гелий массой $m_1 = 0,3 \text{ кг}$, в другой – $m_2 = 0,6 \text{ кг}$ аргона. Средняя квадратичная скорость молекул обоих газов составляет $v_1 = 300 \text{ м/с}$ $v_2 = 400 \text{ м/с}$. Рассчитайте парциальное давление аргона в сосуде после удаления перегородки.

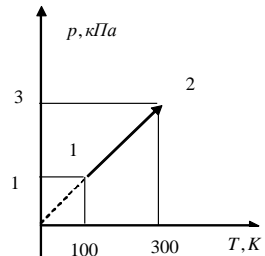
21. В сосуде, разделенном теплопроводной перегородкой на две части, находятся гелий и аргон. Средняя квадратичная скорость атомов аргона составляет 500 м/с . Давление гелия в два раза превышает давление аргона. Чему равна средняя квадратичная скорость атомов гелия, если газы находятся в состоянии теплового равновесия?

22. В вертикально расположенном закрытом цилиндрическом сосуде, разделенном поршнем массы $m = 0,5 \text{ кг}$ на два отсека, находится идеальный газ. Количество вещества в верхнем отсеке в $n = 4$ раза меньше, чем в нижнем. Площадь основания цилиндра $S = 20 \text{ см}^2$. В положении равновесия поршень находится посередине цилиндра, а температура в обоих отсеках одинакова. Определите давление газа в нижнем отсеке.

23. Из баллона израсходовали некоторую массу кислорода, в результате чего давление в баллоне уменьшилось от $p_1 = 8 \text{ МПа}$ до $p_2 = 6,8 \text{ МПа}$. Какая масса кислорода была израсходована, если первоначальная масса кислорода в баллоне $3,6 \text{ кг}$?

24. Как изменится температура идеального газа, если увеличить его объем в два раза при осуществлении процесса, описываемого формулой $pV^4 = \text{const}$?

25. Азот совершает переход из состояния 1 в состояние 2 согласно приведенному графику. Чему равна плотность газа в состоянии 2?



26. Небольшой воздушный шарик удерживается в воде на некоторой глубине при температуре 17°C . Шарик отпускают, и он всплывает. На поверхности воды при температуре воздуха 27°C объем шарика увеличился на 20% . Это означает, что первоначальная глубина нахождения шарика составляла:

27. Стекланную трубку длиной 10 см на $1/3$ погружают в ртуть. Затем ее закрывают пальцем и вынимают. Какой длины столбик ртути останется в трубке, если атмосферное давление составляет 750 мм ртутного столба?

28. В баллоне содержится газ при температуре 270 К . Какую часть газа следует удалить из баллона, чтобы при нагревании до 300 К давление осталось прежним?

29. При изотермическом сжатии газа его объем уменьшился на 1 л , а давление возросло на 20% . Чему равен начальный объем?

30. Два сосуда, содержащих одну и ту же массу одинакового газа, соединены трубкой с краном. В первом сосуде давление 10^5 Па , во втором – $3 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Какое установится давление после открытия крана, если температура оставалась постоянной?

ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Связь между молярной c_μ и удельной c теплоемкостями $c_\mu = \mu c$.

Молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны $c_V = \frac{i}{2} R$; $c_P = \frac{i+2}{2} R$.

Удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении равны $c_V = \frac{i R}{2 \mu}$; $c_P = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu}$.

Уравнение Майера $C_P - C_V = R$.

Показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}$.

Внутренняя энергия идеального газа $U = \frac{m}{\mu} C_V T$.

Элементарная работа $dA = p \cdot dV$.

Работа, связанная с изменением объема, в общем случае вычисляется по формуле $A = \int_{V_1}^{V_2} P dV$, где V_1 – начальный объем газа, V_2 – конечный объем газа.

Работа газа при:

А) изобарном процессе $A = P(V_2 - V_1)$;

Б) при изотермическом процессе $A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$;

В) при адиабатном процессе $A = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2)$ или

$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]$, где T_1 – начальная температура газа, T_2 – конечная температура газа.

Уравнение Пуассона (уравнение состояния при адиабатном процессе) $PV^\gamma = \text{const}$.

Связь между начальным и конечным значениями параметров состояний газа при адиабатном процессе

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Первое начало термодинамики в общем случае записывается в виде $Q = \Delta U + A$, где Q – количество теплоты, сообщенное газу, ΔU – изменение его внутренней энергии, A – работа, совершаемая против внешних сил. Применение первого начала термодинамики для изопроцессов:

изопро- цесс	Изменение внутренней энергии	работа	Первый закон термодинами- ки
$T = \text{const}$	$dU = 0$	$A = \nu \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$	$dQ = dA$
$V = \text{const}$	$dU = \frac{i}{2} \nu \cdot R \cdot dT =$ $= c_V \cdot \nu \cdot dT$	$A = 0$	$dQ = dU$
$P = \text{const}$	$dU = \frac{i}{2} \nu \cdot R \cdot dT =$ $= c_V \cdot \nu \cdot dT$ $\Delta U = \frac{i}{2} p \cdot (V_2 - V_1) =$ $= \frac{i}{2} \nu \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$	$A = p \cdot (V_2 - V_1) =$ $= \nu \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$	$dQ = dU + dA$
Адиабатический	$dU = \frac{i}{2} \nu \cdot R \cdot dT =$ $= c_V \cdot \nu \cdot dT$	$dA = -dU =$ $= \frac{i}{2} \nu \cdot R \cdot dT =$ $= c_V \cdot \nu \cdot dT$ $A = \frac{i}{2} \nu \cdot R \cdot (T_2 - T_1) =$ $= \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \cdot \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]$	$dU = -dA$

Примеры решения задач

1. Кислород массой 1 кг находится при температуре 320 К. Определить энергию молекул кислорода и среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул кислорода. Газ считать идеальным.

Дано:

$$m = 1 \text{ кг}$$

$$\mu = 0,032 \text{ кг/моль}$$

$$T = 320^\circ \text{ К}$$

$$i = 5$$

$$i_{\text{вр}} = 2$$

$$U = ?$$

$$\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = ?$$

Решение:

Внутренняя энергия молекулы определяется формулой $U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT$, а вращательная

энергия — $\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = i_{\text{вр}} \frac{kT}{2} N$, где N — число молекул.

Число молекул найдем из соотношения

$$\frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_a}, \text{ откуда } N = N_a \frac{m}{\mu}.$$

$$\text{Тогда } \langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = i_{\text{вр}} \frac{kT}{2} \cdot N_a \frac{m}{\mu} = i_{\text{вр}} \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{2}.$$

$$U = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{0,032} \cdot 8,31 \cdot 320 = 208 \text{ кДж}.$$

$$\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = \frac{2 \cdot 1 \cdot 8,31 \cdot 320}{0,032 \cdot 2} = 83,1 \text{ кДж}.$$

Ответ: $U = 208 \text{ кДж}$; $\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = 83,1 \text{ кДж}$.

2. Дана смесь газов, состоящая из неона массой 4 кг и водорода массой 1 кг. Газы считать идеальными. Определить удельные теплоемкости смеси газов в изобарическом и изохорическом процессах.

Дано:

$$i_1 = 3$$

$$i_2 = 5$$

$$\mu_1 = 0,04 \text{ кг/моль}$$

$$\mu_2 = 0,002 \text{ кг/моль}$$

$$m_1 = 4 \text{ кг}$$

$$m_2 = 1 \text{ кг}$$

$$c_p = ? \quad c_v = ?$$

Решение:

Количество теплоты, затраченное на нагревание смеси газов $Q = Q_1 + Q_2$,

$$\text{где } Q_1 = c_1 \cdot m_1 \cdot \Delta T$$

$$Q_2 = c_2 \cdot m_2 \cdot \Delta T$$

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

$$\text{тогда } c \cdot (m_1 + m_2) \cdot \Delta T = (c_1 m_1 + c_2 m_2) \Delta T$$

$$\text{откуда } c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Теплоемкости при изохорном и изобарном процессах, соответственно, равны $c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}$; $c_P = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{\mu}$.

Тогда $c_V = \frac{i_1 \frac{m_1}{\mu_1} + i_2 \frac{m_2}{\mu_2}}{2(m_1 + m_2)} \cdot R = 2326,8 \text{ Дж} / \text{кг} \cdot \text{К}$

$$c_P = \frac{(i_1 + 2) \cdot \frac{m_1}{\mu_1} + (i_2 + 2) \cdot \frac{m_2}{\mu_2}}{2(m_1 + m_2)} \cdot R = 4155 \text{ Дж} / \text{кг} \cdot \text{К} .$$

Ответ: $c_V = 2326,8 \text{ Дж} / \text{кг} \cdot \text{К}$; $c_P = 4155 \text{ Дж} / \text{кг} \cdot \text{К}$.

3. Определите количество теплоты, сообщенное газу, если в процессе изохорного нагревания кислорода объемом 20 л его давление изменилось на 100 кПа.

Дано:

$$V = 20 \text{ л}$$

$$\Delta p = 100 \text{ кПа}$$

$Q = ?$

Решение:

При изохорическом процессе $V = \text{const}$ и $\Delta A = p \cdot \Delta V = 0$. Из первого закона термодинамики следует, что $Q = \Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \cdot \Delta T$.

Из уравнения Менделеева-Клапейрона $\frac{m}{\mu} R \cdot \Delta T = V \cdot \Delta p$.

Следовательно, $Q = V \cdot \Delta p = 5000 \text{ Дж}$.

Ответ: $Q = 5000 \text{ Дж}$.

4. Азот массой 280 г расширяется в результате изобарного процесса при давлении 1 МПа. Определить работу расширения газа и конечный объем, если на расширение затрачена теплота 5 кДж, а начальная температура азота 290 К.

Дано:

$$m = 280 \text{ г}$$

$$\mu = 0,028 \text{ кг/моль}$$

$$p = 1 \text{ МПа}$$

$$Q = 5 \text{ кДж}$$

$$T_1 = 290^\circ \text{ К}$$

$A = ?$ $V_2 = ?$

Решение:

Процесс протекает при постоянном давлении, следовательно, работа $A = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$ и изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot \Delta T = \frac{3}{2} A$$

По первому закону термодинамики $Q = A + \Delta U = \frac{5}{2} A$, откуда

$$A = \frac{2}{5} Q = 2000 \text{ Дж}.$$

Из уравнения изобарного процесса $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ следует, что $V_2 = V_1 \cdot \frac{T_1}{T_2}$.

Выражая объем V_1 из уравнения Менделеева-Клапейрона, и подставляя полученное выражение в предыдущую формулу, получим

$$V_2 = \frac{m \cdot R \cdot T_1^2}{\mu \cdot R \cdot T_2}$$

Из формулы для первого закона термодинамики

$$T_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{\mu}{m} \cdot \frac{Q}{R} + T_1 = 314^\circ \text{ К}.$$

$$\text{Тогда } V_2 = \frac{0,28 \cdot 8,31 \cdot 290}{0,028 \cdot 10^6 \cdot 314} = 0,00274 \text{ м}^3$$

Ответ: $V_2 = 2,74 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$, $A = 2000 \text{ Дж}$.

5. Некоторый газ массой 1 кг находится при температуре 300 К и под давлением 0,5 МПа. В результате изотермического сжатия давление увеличилось в 2 раза. Работа, затраченная на сжатие, равна – 432 кДж. Определите какой это газ.

Дано:

$$m = 1 \text{ кг}$$

$$T_1 = 300^\circ \text{ К}$$

$$p_1 = 0,5 \text{ МПа}$$

$$p_2 = 2p_1$$

$$A = -432 \text{ кДж}$$

$$\mu = ?$$

Решение:

Из закона Бойля-Мариотта $p_1 V_1 = p_2 V_2$ сле-

дует, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$.

Так как процесс протекает при постоянной температуре, то работу можно вычислить по

формуле $A = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$,

$$\text{откуда } \mu = \frac{m \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}}{A} = 0,004 \text{ кг/моль}.$$

Ответ: $\mu = 0,004 \text{ кг/моль}$; газ – гелий.

ЗАДАЧИ для самостоятельного решения

1. Вычислить удельные теплоемкости неона и водорода при постоянном объеме и при постоянном давлении, принимая эти газы за идеальные.

2. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении смеси неона и водорода. Массовые доли газов равны, соответственно, 0,8 и 0,2. Значения удельных теплоемкостей взять из первой задачи.

3. Разность удельных теплоемкостей $c_p - c_v$ некоторого двухатомного газа равна $260 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$. Найти молярную массу газа и его удельные теплоемкости c_p и c_v .

4. В баллоне находятся аргон и азот. Определить удельную теплоемкость c_v смеси этих газов, если массовые доли аргона w_1 и w_2 одинаковы и равны $w = 0,5$. Массовой долей компонента в смеси называется безразмерная величина, равная отношению массы компонента к массе смеси.

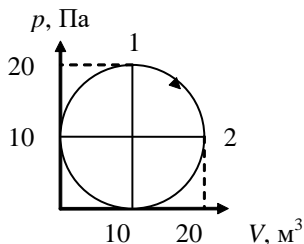
5. Найти показатель адиабаты смеси газов, содержащей гелий массой 10 г и водород массой 4 г.

6. Водород при нормальных условиях имел объем 100 м^3 . Найти изменение внутренней энергии газа при его адиабатном расширении до объема 150 м^3 .

7. Водород массой 4 г был нагрет на 10 К при постоянном давлении. Определить работу расширения газа.

8. Определите изменение внутренней энергии 2 молей идеального одноатомного газа в процессе $1 \rightarrow 2$.

9. Какая работа совершается при изотермическом расширении водорода массой 5 г, взятого при температуре 290 К, если объем газа увеличивается в три раза.



10. Кислород, занимавший объем $V_1 = 1$ л под давлением $p_1 = 1,2$ МПа, адиабатно расширился до объема $V_2 = 10$ л. Определить работу расширения газа.

11. Воздух, занимавший объем 10 л при давлении 100 кПа, был адиабатно сжат до объема 1 л. Под каким давлением находится воздух после сжатия?

12. Водород массой 4 г был нагрет на 150° К при постоянном объеме. Найти количество теплоты, сообщенное газу, изменение внутренней энергии и совершенную газом работу.

13. Азот массой 200 г расширяется изотермически при температуре 280 К, причем объем газа увеличивается в два раза. Найти изменение внутренней энергии газа, совершенную при расширении газа работу, количество теплоты, полученное газом.

14. При изохорном нагревании кислорода объемом 50 л давление газа изменилось на 0,5 МПа. Найти количество теплоты, сообщенное газу.

15. Азот массой 200 г расширяется изотермически при температуре 280° К, причем объем газа увеличивается в два раза. Найти изменение внутренней энергии газа, совершенную при расширении газа работу, количество теплоты, полученное газом.

16. Водород при нормальных условиях имел объем 100 м^3 . Найти изменение внутренней энергии газа при его адиабатном расширении до объема 150 м^3 .

17. Воздух, занимавший объем 10 л при давлении 100 кПа, был адиабатно сжат до объема 1 л. Под каким давлением находится воздух после сжатия?

18. При изотермическом расширении водорода массой 1 г, имевшего температуру 280 К, объем газа увеличился в три раза. Определить работу расширения газа и полученное газом количество теплоты.

19. Гелий объемом 1 м^3 при 0°C находится в цилиндрическом сосуде, закрытом сверху скользящим поршнем массой 1 т и площадью сечения $0,5 \text{ м}^2$. Атмосферное давление 973 гПа. Какое количество теплоты потребуется для нагревания гелия до температуры 300°C ? Каково изменение его внутренней энергии?

20. Для нагревания некоторого количества воздуха при постоянном давлении от температуры 15°C до температуры 65°C требуется количество теплоты 5 кДж . Для его нагревания при постоянном объеме при тех же начальной и конечной температурах требуется количество теплоты $3,5 \text{ кДж}$. Каков объем воздуха при температуре 15°C и давлении $2 \cdot 10^5 \text{ Па}$?

21. Молярная теплоемкость идеального газа при некотором процессе изменяется по закону $C = \frac{a}{T}$, где a – постоянная величина. Найти уравнение, связывающее параметры p и V в этом процессе.

22. Даны изохорический, изобарический, адиабатический и изотермический процесс, представленные графически в системе координат pV . Нарисовать примерные графики в системах координат pT и UT , где U – внутренняя энергия идеального газа. Все процессы проходят через одну точку.

23. Один моль гелия изобарически обратимо расширяется от объема 5 л до объема 10 л при давлении $p = 2026 \text{ гПа}$. Газ считать идеальным. Определить изменение внутренней энергии газа в этом процессе.

24. Кислород массой 32 г находится в закрытом сосуде при давлении $0,1 \text{ МПа}$ при температуре 290 К . После нагревания давление в сосуде повысилось в четыре раза. Определить: 1) объем сосуда, 2) температуру, до которой газ нагрели, 3) количество теплоты, сообщенное газу.

25. Двухатомный газ нагревают при постоянном объеме до температуры 289 К . Определить количество теплоты, которое необходимо сообщить газу, чтобы увеличить его давление в три раза. Количество вещества $\nu = 2 \text{ моль}$.

26. При изобарном нагревании некоторого идеального газа ($\nu = 2 \text{ моль}$) на $\Delta T = 90^{\circ}\text{К}$ ему было сообщено количество теплоты $2,1 \text{ кДж}$. Определить: 1) работу, совершенную газом; 2) изменение внутренней энергии газа; 3) показатель адиабаты.

27. Азот массой 14 г сжимают изотермически при температуре 300°К от давления 100 кПа до давления 500 кПа . Определить работу при расширении газа, изменение внутренней энергии.

28. Некоторый газ массой 1 кг находится при температуре 300°K и под давлением 0,5 МПа. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в два раза. Работа, затраченная на сжатие $A = -432$ кДж. Определить какой это газ.

29. При адиабатическом расширении кислорода $\nu = 2$ моль, находящегося при нормальных условиях, его объем увеличился в три раза. Определить изменение внутренней энергии газа и работу расширения газа.

30. Азот, находившийся при температуре 400 К, подвергли адиабатическому расширению, в результате которого его объем увеличился в пять раз, а внутренняя энергия уменьшилась на 4 кДж. Определить массу азота.

КРУГОВЫЕ ПРОЦЕССЫ. ТЕРМИЧЕСКИЙ КПД

Термический коэффициент полезного действия цикла в общем случае $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$, где Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя, Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим телом холодильнику.

КПД цикла Карно $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, где T_1 – температура нагревателя, T_2 – температура холодильника.

Вопросы

1. Что называют циклом? В чем различие прямого и обратного циклов?
2. Как найти графически работу цикла? Каков физический смысл площади, ограниченной кривой цикла в координатах p, V ?
3. Что называют коэффициентом полезного действия теплового двигателя?
4. Что такое обратимый и необратимый процесс?
5. Какой цикл называют обратимым циклом Карно? Из каких процессов он состоит?
6. Приведите несколько формулировок второго начала термодинамики.
7. Что такое вечный двигатель второго рода? В чем различие между «вечным двигателем» первого и второго рода?
8. Что называют приведенным количеством теплоты?

Примеры решения задач

1. Двухатомный идеальный газ занимает объем $V_1 = 1$ л и находится под давлением $P_1 = 0,1$ МПа. После адиабатного сжатия газ характеризуется объемом V_2 и давлением P_2 . В результате последующего изохорного процесса газ охлаждается до первоначальной температуры, а его давление становится равным $P_1 = 0,2$ МПа. Определите объем V_2 и давление P_2 .

Дано:
$V_1 = 1 \text{ л}$
$i = 5$
$p_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}$
$p_3 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$
$T_1 = T_3$
$V_2 - ?$
$p_2 - ?$

Решение:
По условию начальное и конечное состояния газа характеризуются одним и тем же значением температуры, поэтому

$$p_1 V_1 = p_3 V_2,$$

откуда $V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_3} = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3.$

Переход из состояния 1 в состояние 2 происходит по адиабате, поэтому

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma, \text{ откуда } p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma.$$

Показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i} = 1,4.$

Тогда $p_2 = 1 \cdot 10^5 \left(\frac{1}{0,5} \right)^{1,4} = 264 \cdot 10^3 \text{ Па}.$

Ответ: $V_2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$; $p_2 \approx 264 \cdot 10^3 \text{ Па}.$

2. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 70% количества теплоты, полученной от нагревателя, отдает холодильнику. Количество теплоты, получаемое от нагревателя, равно 5 кДж. Определите термический КПД цикла и работу, совершенную при полном цикле.

Дано:
$Q_2 = 0,7 Q_1$
$Q_1 = 5 \text{ кДж}$
$A - ? \quad \eta - ?$

Решение:
По определению коэффициент полезного действия

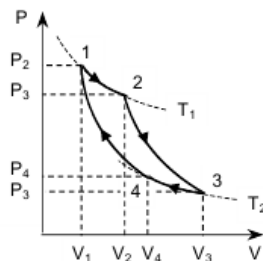
$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 0,3 = 30\%$$

С другой стороны $\eta = \frac{A}{Q_1},$

откуда $A = \eta \cdot Q_1 = 1,5 \text{ кДж}.$

Ответ: $\eta = 30\%$; $A = 1,5 \text{ кДж}$

3. 1 кг воздуха совершает цикл Карно в диапазоне температур $t_1 = 327^\circ \text{C}$ и $t_3 = 27^\circ \text{C}$, причем максимальное давление в цикле $p_1 = 26 \cdot 10^5 \text{ Па}$, а минимальное $p_2 = 10^5 \text{ Па}$. Определить объемы газа для характерных точек цикла и недостающие значения давления.



Дано:
$t_1 = 327^\circ \text{C}$
$t_3 = 27^\circ \text{C}$
$p_1 = 26 \cdot 10^5 \text{ Па}$
$p_2 = 10^5 \text{ Па}$
$m = 1 \text{ кг}$
$\mu = 0,029 \text{ кг/моль}$
$i = 5$
$p_3, p_4, V_1, V_2, V_3, V_4 - ?$

Решение:

Из уравнения состояния идеального газа

$$p_1 \cdot V_1 = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T_1 \text{ найдем}$$

$$V_1 = \frac{m \cdot R \cdot T_1}{\mu \cdot p_1} = \frac{1 \cdot 8,31 \cdot 600}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 26 \cdot 10^5} = 0,066 \text{ м}^3$$

Аналогично

$$V_3 = \frac{m \cdot R \cdot T_3}{\mu \cdot p_3} = \frac{1 \cdot 8,31 \cdot 300}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5} = 0,86 \text{ м}^3$$

Для точки 2 температура $T_2 = T_1 = 600 \text{ К}$

Показатель адиабаты для воздуха $\gamma = \frac{i+2}{i} = 1,4$.

Используем уравнение адиабаты $\frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$, откуда

$$p_3 = p_2 \cdot \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 10^5 \cdot \left(\frac{600}{300}\right)^{1,4} = 11,31 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Для изотермического процесса 1-2

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2, \text{ откуда } V_2 = V_1 \cdot \frac{p_1}{p_2} = 0,066 \cdot \frac{26 \cdot 10^5}{11,31 \cdot 10^5} = 0,152 \text{ м}^3.$$

Для точки 4 из уравнения адиабаты 4-1 давление

$$p_4 = p_1 \cdot \left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 26 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{300}{600}\right)^{1,4} = 2,3 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

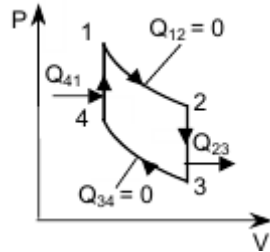
Из уравнения изотермы 3-4 найдем объем в точке 4

$$V_4 = V_3 \cdot \frac{p_3}{p_4} = 0,86 \cdot \frac{10^5}{2,3 \cdot 10^5} = 0,37 \text{ м}^3.$$

Ответ: $V_1 = 0,066 \text{ м}^3$; $V_2 = 0,152 \text{ м}^3$; $V_3 = 0,86 \text{ м}^3$; $V_4 = 0,37 \text{ м}^3$;

$p_3 = 11,31 \cdot 10^5 \text{ Па}$; $p_4 = 2,3 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

4. Найти КПД цикла, состоящего из двух изохор и двух адиабат, если в пределах цикла объем идеального газа изменяется в 10 раз. Рабочим веществом является азот.



Дано: $n = 10$
 $\eta = ?$

Решение:

КПД любого цикла $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$.

В данном цикле тепло подводится в изохорическом процессе 4-1, а отдается в изохорическом процессе 2-3.

Учитывая, что работа в этих процессах не совершается, имеем

$$Q_1 = Q_{41} = \Delta U_{41} = \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot (T_1 - T_4)$$

$$Q_{21} = Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot (T_2 - T_3)$$

Процессы 1-2 и 3-4 – адиабатические, поэтому КПД цикла

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4}$$

Воспользуемся уравнениями адиабат для получения соотношений между температурами цикла с учетом того, что

$$T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} = T_1 \cdot V_1^{\gamma-1}$$

$$T_3 \cdot V_3^{\gamma-1} = T_4 \cdot V_4^{\gamma-1}$$

Вычитая два последних уравнения, получаем

$$(T_2 - T_3) \cdot V_2^{\gamma-1} = (T_1 - T_4) \cdot V_1^{\gamma-1}.$$

Откуда $\frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_4} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma-1} = n^{1-\gamma}$.

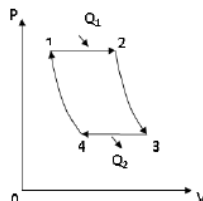
Для азота показатель адиабаты $\gamma = \frac{i+2}{i} = 1,4$, а $n=10$ по условию

задачи.

Следовательно, $\eta = 1 - 10^{1-1,4} = 0,6$.

Ответ: $\eta = 0,6$.

5. Определите КПД цикла прямого воздушного-реактивного двигателя, состоящего из изобар 1-2 и 3-4 и двух адиабат 4-1 и 2-3, если известно, что при адиабатном сжатии давление газа увеличилось в $n = p_1 / p_4$.



<p>Дано:</p> <p>$n = p_1 / p_4$</p> <hr style="border: 0.5px solid black;"/> <p>$\eta = ?$</p>	<p>Решение:</p> <p>На участке 1-2 газ получает количество теплоты $Q_1 = c_p \cdot (T_2 - T_1)$</p> <p>И изобарно расширяется до состояния с параметрами p_1, T_2, V_2.</p>
--	---

На участке 2-3 газ расширяется адиабатно до состояния p_3, T_3, V_3 .

На участке 3-4 газ изобарно сжимают до состояния $p_4 = p_3, T_4, V_4$.

При этом он отдает количество теплоты $Q_2 = c_p \cdot (T_3 - T_4)$.

На участке 4-1 газ адиабатно сжимается до первоначального состояния p_1, T_1, V_1 .

$$\text{КПД цикла равен } \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1}.$$

Из уравнения адиабаты найдем температуры T_1, T_2 :

$$T_2 \cdot p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3 \cdot p_4^{\frac{1-\gamma}{\gamma}},$$

$$\text{Отсюда } T_2 = T_3 \cdot \left(\frac{p_4}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3 \cdot n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

$$\text{Аналогично } T_4 \cdot p_4^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1 \cdot p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \text{ и } T_1 = T_4 \cdot \left(\frac{p_4}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_4 \cdot n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Из уравнения изобарного процесса на участке 3-4 $\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_4}{T_4}$ получим

$$T_4 = T_3 \cdot \frac{V_4}{V_3}.$$

Подставим значения температур в выражение для КПД

$$\eta = \frac{c_p \cdot \left(T_3 - T_3 \cdot \frac{V_4}{V_3} \right)}{c_p \cdot \left(T_3 \cdot n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - T_4 \cdot n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)} = 1 - \frac{1}{n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}.$$

Ответ: $\eta = 1 - \frac{1}{n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}.$

ЗАДАЧИ для самостоятельно решения

1. Вычислить удельные теплоемкости неона и водорода при постоянном объеме и при постоянном давлении, принимая эти газы за идеальные.

2. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении смеси неона и водорода. Массовые доли газов равны, соответственно, 0,8 и 0,2. Значения удельных теплоемкостей взять из первой задачи.

3. Азот массой 200 г расширяется изотермически при температуре 280 К, причем объем газа увеличивается в два раза. Найти изменение внутренней энергии газа, совершенную при расширении газа работу, количество теплоты, полученное газом.

4. Воздух, занимавший объем 10 л при давлении 100 кПа, был адиабатно сжат до объема 1 л. Под каким давлением находится воздух после сжатия?

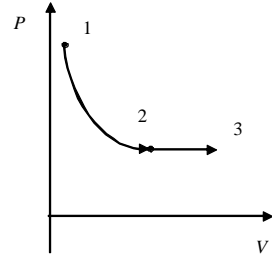
5. Газ расширяется адиабатически так, что его давление падает от 2 атм до 1 атм. Затем он нагревается при постоянном объеме до первоначальной температуры, причем давление возрастает до 1,22 атм. Определите отношение c_p/c_v для этого газа и начертите график процесса.

6. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу, равную $7,35 \cdot 10^4$ Дж. Температура нагревате-

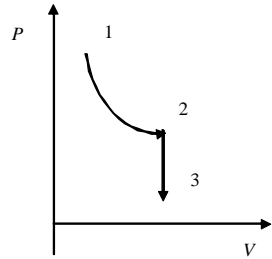
для $t_1 = 100^\circ \text{C}$, температура холодильника $t_2 = 0^\circ \text{C}$. Найти КПД машины, количество теплоты, полученное машиной за один цикл от нагревателя, количество теплоты, отдаваемое за один цикл холодильнику.

7. 10 г кислорода нагреваются от $t_2 = 50^\circ \text{C}$ до $t_2 = 150^\circ \text{C}$. Найти изменение энтропии, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.

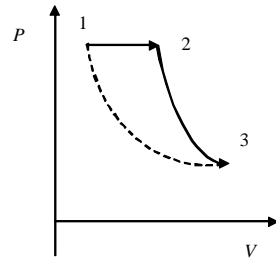
8. 2 моля идеального одноатомного газа охладили, уменьшив давление в 4 раза. Затем газ нагрели до первоначальной температуры 400 К (см. рисунок). Какое количество теплоты сообщено газу на участке 2-3?



9. Идеальный одноатомный газ в количестве 1 моль сначала изотермически расширился ($T_1 = 300 \text{ K}$). Затем его изобарно нагрели, повысив температуру в 1,5 раза (см. рисунок). Какое количество теплоты получил газ на участке 2-3?



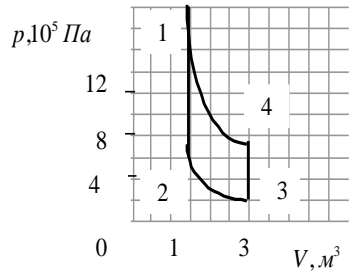
10. Один моль идеального газа изотермически расширили ($T_1 = 300 \text{ K}$). Затем газ охладили, понизив давление в три раза (см. рисунок). Какое количество теплоты отдал газ на участке 2-3?



11. В цилиндре под поршнем находится идеальный одноатомный газ. Какое количество теплоты получил газ, если при давлении $1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ он изобарно расширился от объема $0,12 \text{ м}^3$ до объема $0,14 \text{ м}^3$?

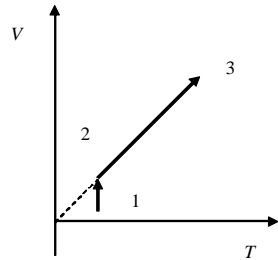
12. Идеальный одноатомный газ расширялся сначала изобарно, а затем адиабатно. Конечная температура газа равна начальной (см. рисунок). За весь процесс 1-2-3 газ совершил работу, равную 5 кДж. Какую работу совершил газ при изобарном расширении?

13. Один киломоль идеального газа совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. При этом объем газа изменяется от $V_1 = 25 \text{ м}^3$ до $V_2 = 50 \text{ м}^3$ и давление изменяется от $P_1 = 1 \text{ атм}$ до $P_2 = 2 \text{ атм}$. Во сколько раз работа, совершаемая в этом цикле, меньше работы, совершаемой в цикле Карно, изотермы которого соответствуют наибольшей и наименьшей температурам рассматриваемого цикла?



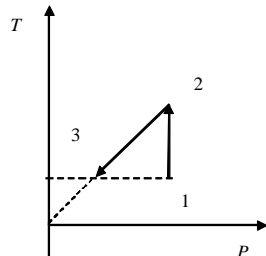
14. Идеальный одноатомный газ используется в качестве рабочего тела в тепловом двигателе. В ходе работы двигателя состояние газа изменяется в соответствии с циклом, состоящим из двух изохор и двух адиабат (см. рисунок). Вычислите КПД такого двигателя.

15. Идеальный одноатомный газ в количестве 1 моль сначала изотермически расширился ($T_1 = 300^\circ \text{ К}$). Затем газ изобарно нагрели, повысив температуру в 3 раза (см. рисунок). Какое количество теплоты газ получил на участке 2-3?



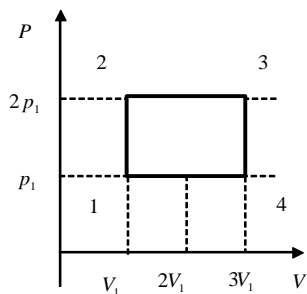
16. Через какое время прекратится утечка воздуха из проколотой шины автомобиля, если через отверстие в секунду в среднем выходит 10^{-3} кг воздуха. Начальное давление $5 \cdot 10^5 \text{ Па}$, объем шины $8,31 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$, температура воздуха 290° К , молярная масса воздуха $0,029 \text{ кг/моль}$. Атмосферное давление 10^5 Па .

17. Один моль идеального одноатомного газа нагрели, а затем охладили до первоначальной температуры 300° К , уменьшив давление в три раза (см. рисунок). Какое количество теплоты сообщено газу на участке 1-2?



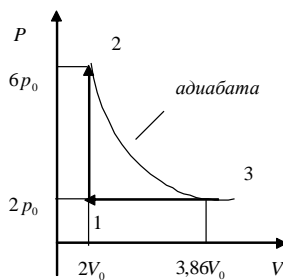
18. Как изменится температура идеального газа, если увеличить его объем в два раза при осуществлении процесса, описываемого формулой $pV^4 = \text{const}$?

19. При работе теплового двигателя рабочее тело, которое можно считать идеальным одноатомным газом, последовательно совершает процесс 1-2, 2-3, 3-4, 4-1 (см. рисунок). Вычислите КПД такого двигателя.



20. Нагреваемый при постоянном давлении идеальный одноатомный газ совершил работу 400 Дж. Какое количество теплоты было передано газу? Ответ дайте в Дж.

21. Найти КПД тепловой машины, работающей по циклу 1-2-3-1 (см. рисунок). Рабочее тело – идеальный одноатомный газ.



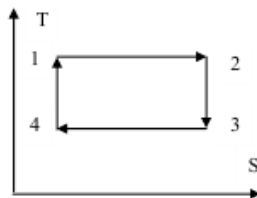
ЭНТРОПИЯ СИСТЕМЫ

$$\text{Изменение энтропии } \Delta S = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$$

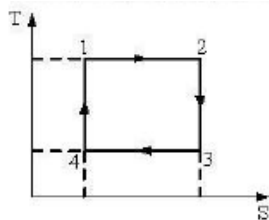
$$\text{Формула Больцмана } S = k \ln w$$

Вопросы

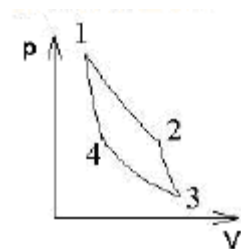
1. На каком участке в изотермическом процессе наблюдается сжатие газа? T – термодинамическая температура, S – энтропия.



2. Тепловая машина работает по циклу: две изобары 1-2 и 3-4 и две изохоры 2-3 и 4-1. Как изменяется за цикл энтропия системы?



3. На рисунке изображен цикл Карно. На каком участке подводится тепло? T – термодинамическая температура, S – энтропия.



4. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно (две изотермы 1-2 и 3-4) и две адиабаты (2-3 и 4-1). Как изменяется энтропия на участке 1-2? За цикл?

Примеры решения задач

1. Найти изменение энтропии при нагревании воды массой 100 г от температуры $t_1 = 0^\circ \text{C}$ до температуры $t_2 = 100^\circ \text{C}$ и последующем превращении воды в пар той же температуры.

Дано:
$t_1 = 0^\circ \text{C}$
$t_2 = 100^\circ \text{C}$
$\lambda = 2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$
$m = 0,1 \text{ кг}$
$c = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}$
$\Delta S - ?$

Решение:
 Полное изменение энтропии складывается из изменения энтропии при нагревании воды $\Delta S'$ и изменения энтропии при превращении воды в пар $\Delta S''$

$$\Delta S = \Delta S' + \Delta S''.$$

Как известно $\Delta S = S_2 - S_1 = \int \frac{\delta Q}{T}$

При нагревании воды $\delta Q = c m dT$.

Тогда $\Delta S' = \int_{T_1}^{T_2} c m \frac{dT}{T} = c m \ln \frac{T_2}{T_1}$

Во время превращения воды в пар температура не изменяется, поэтому

$$\Delta S'' = \frac{1}{T_2} \int \delta Q = \frac{Q}{T_2} = \frac{\lambda m}{T_2}.$$

Таким образом, $\Delta S = c m \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda m}{T_2}$

$$\Delta S = 4200 \cdot 0,1 \cdot \ln \frac{373}{273} + \frac{2300 \cdot 10^3 \cdot 0,1}{373} \approx 736 \text{ Дж/кг.}$$

Ответ: $\Delta S \approx 736 \text{ Дж/кг.}$

2. Определите изменение энтропии при изотермическом расширении кислорода массой 10 г от объема $V_1 = 25 \text{ л}$ до объема $V_2 = 100 \text{ л}$.

Дано:
$m = 0,01 \text{ кг}$
$V_2 = 0,1 \text{ м}^3$
$V_1 = 0,025 \text{ м}^3$
$\mu = 0,032 \text{ кг/моль}$
$\Delta S - ?$

Решение:
 Так как процесс изотермический, то

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int \delta Q = \frac{Q}{T}$$

По первому закону термодинамики $Q = \Delta U + A$.

Так как $T = const$, то внутренняя энергия не изменяется $\Delta U = 0$, а работа

$$A = \frac{m}{\mu} RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

$$\text{Тогда } \Delta S = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}}{T} = \frac{m}{\mu} R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

$$\text{Вычисляя, получим } \Delta S = \frac{0,01}{0,032} \cdot 8,31 \cdot \ln \frac{0,1}{0,025} \approx 3,6 \text{ Дж/К}$$

Ответ: $\Delta S \approx 3,6 \text{ Дж/К}$

ЗАДАЧИ для самостоятельного решения

1. В результате изохорного нагревания водорода массой $m = 1 \text{ г}$ давление увеличилось в два раза. Определить изменение энтропии газа.

2. Кислород массой $m = 2 \text{ кг}$ увеличил свой объем в пять раз один раз изотермически, другой – адиабатно. Найти изменения энтропии в каждом из указанных процессов.

3. Водород массой $m = 100 \text{ г}$ был изобарно нагрет так, что объем его увеличился в 3 раза, затем водород был изохорно охлажден так, что давление его уменьшилось в три раза. Найти изменение энтропии в ходе указанных процессов.

4. Кислород массой $m = 0,4 \text{ кг}$ нагревают при постоянном давлении от температуры $t_1 = 17^\circ \text{C}$ до температуры $t_2 = 97^\circ \text{C}$. Найти изменение энтропии газа.

5. Во сколько раз следует изотермически увеличить объем идеального газа в количестве 5 моль, чтобы приращение энтропии составило $\Delta S = 45,65 \text{ Дж/К}$?

6. Кусок меди массой $m_1 = 300 \text{ г}$ при температуре $t_1 = 97^\circ \text{C}$ поместили в калориметр, где находится вода массой $m_2 = 100 \text{ г}$ при температуре $t_2 = 7^\circ \text{C}$. Найти приращение энтропии системы к моменту выравнивания температур. Теплоемкость калориметра пренебрежимо мала. Удельные теплоемкости меди $c_1 = 385 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}$, воды $c_2 = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}$.

7. Найти приращение энтропии алюминиевого бруска массой $m = 3 \text{ кг}$ при его нагревании от $T_1 = 300^\circ \text{K}$ до $T_2 = 600^\circ \text{K}$, если в этом интервале температур удельная теплоемкость алюминия изменяется по закону $c_{y\delta} = a + bT$, где $a = 770 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}$, $b = 0,46 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K}^2)$.

8. Объем $V_1 = 1 \text{ м}^3$ воздуха, находившегося при температуре $t_1 = 0^\circ \text{ С}$ и давлении $p_1 = 98 \text{ кПа}$, изотермически расширяется до объема $V_2 = 2 \text{ м}^3$. Найти изменение энтропии в этом процессе.

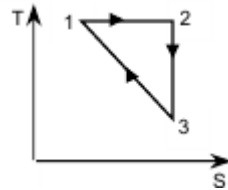
9. Найти изменение энтропии при изотермическом расширении массы 6 г водорода от давления $p_1 = 100 \text{ кПа}$ до давления $p_2 = 50 \text{ кПа}$.

10. Гелий массой $m = 1,7 \text{ г}$ адиабатически расширился в $n = 3$ раза, а затем был изобарически сжат до первоначального объема. Найти приращение энтропии в этом процессе.

11. Найти изменение энтропии при переходе водорода массой от объема 20 л под давлением 150 кПа к объему 60 л под давлением 100 кПа .

12. Найти приращение энтропии 2 молей идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1,3$, если в результате некоторого процесса объем газа увеличился в два раза, а давление уменьшилось в три раза.

13. Идеальный газ совершает цикл 1-2-3-1, в пределах которого абсолютная температура изменяется в n раз. Цикл имеет вид, показанный на рисунке, где T – температура, а S – энтропия. Найти КПД этого цикла.



РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

Уравнение состояния реальных газов (уравнение Ван-дер-Ваальса):

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V_m^2} \right) \cdot (V_m - \nu b) = \nu RT,$$

a, b – постоянные Ван-дер-Ваальса, рассчитанные для одного моля газа, V_m – молярный объём, p – давление.

Связь критических параметров объёма, давления и температуры газа с постоянными Ван-дер-Ваальса:

$$V_{m_{кр}} = 3b, \quad p_{кр} = \frac{a}{27 \cdot b^2}, \quad T_{кр} = \frac{8a}{27 \cdot Rb}, \quad a = \frac{27 \cdot T_{кр}^2 R^2}{64 \cdot p_{кр}}, \quad b = \frac{T_{кр} R}{8 \cdot p_{кр}}.$$

Если ввести приведенные величины: $\tau = \frac{T}{T_{кр}}, \quad \pi = \frac{p}{p_{кр}}, \quad \omega = \frac{V}{V_{кр}},$

то уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля примет вид:

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2} \right) \cdot (3\omega - 1) = 8\tau.$$

Внутренняя энергия реального газа: $U = \frac{m}{\mu} \left(C_V T - \frac{a}{V_m} \right).$

Вопросы

1. Как записывается уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольной массы газа?
2. Какая температура называется критической?
3. Каков физический смысл поправок в уравнении Ван-дер-Ваальса? Как они вычисляются: а) из молекулярно-кинетической теории; б) через параметры критического состояния?
4. Что называется насыщенным паром?
5. Почему давление насыщенного пара зависит от температуры? Объяснить на основе молекулярно-кинетической теории.
6. Что называется фазой системы? Фазовым переходом? Нарисуйте и объясните фазовую диаграмму воды.
7. Критическая температура углекислого газа 304 К. При каких температурах происходит постоянный переход из жидкой фазы в газовую и наоборот?

8. Получить для Ван-дер-Ваальсовского газа уравнение адиабаты в переменных V, T . Сравнить полученное выражение с аналогичным для идеального газа.

9. Получите выражение для критических параметров через константы уравнения состояния, предложенного Бертелло для описания поведения

реальных газов:
$$\left[P + \frac{a}{T \cdot V^2} \right] (V - b) = RT .$$

10. Найти изменение внутренней энергии одного моля реального газа в процессах: изобарическом, изохорическом, изотермическом, адиабатическом?

11. Выразить разность температур в опыте Джоуля-Томсона через V_1, T_1 .

12. Какие участки на изотерме Ван-дер-Ваальса соответствуют метастабильным состояниям? Укажите на чертеже.

13. Что называется скрытой теплотой?

14. Получите формулу для плотности газа в критическом состоянии.

Примеры решения задач

1. Кислород ($\nu = 1$ моль) (реальный газ), занимающий при температуре $T_1 = 400^\circ K$ объем $V_1 = 1$ л, расширяется изотермически до $V_2 = 2V_1$. Определить : 1) работу при расширении газа, 2) изменение внутренней энергии газа. ($a = 0,136 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$; $b = 3,17 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$).

Дано:

$$\nu = 1 \text{ моль}$$

$$T_1 = 400^\circ K$$

$$V_1 = 1 \text{ л}$$

$$V_2 = 2V_1$$

$$a = 0,136 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$$

$$b = 3,17 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$$

$$A - ? \quad \Delta U - ?$$

Решение:

Из уравнения Ван-дер-Ваальса

$$\left(P + \frac{\nu^2 a}{V_m^2} \right) \cdot (V_m - \nu b) = \nu RT ,$$

откуда
$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2} .$$

Работа при расширении газа

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V - \nu b} - \nu^2 a \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} = \\
 &= \nu RT \cdot \ln \frac{V_2 - \nu b}{V_1 - \nu b} - \nu^2 a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)
 \end{aligned}$$

Внутренняя энергия реального газа

$$U_1 = \nu \cdot \left(c_V T - \frac{a\nu}{V_1} \right),$$

$$U_2 = \nu \cdot \left(c_V T - \frac{a\nu}{V_2} \right).$$

Тогда изменение внутренней энергии

$$\Delta U = U_2 - U_1 = a \cdot \nu^2 \cdot \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

После вычисления получим

$$\Delta U = 0,136 \cdot \left(\frac{1}{0,001} - \frac{1}{0,002} \right) = 68000 \text{ Дж} = 68 \text{ кДж}$$

$$\begin{aligned}
 A &= 1,8,31 \cdot \ln \frac{0,002 - 1,3,17 \cdot 10^{-5}}{0,001 - 1,3,17 \cdot 10^{-5}} - 1 \cdot 0,136 \cdot \left(\frac{1}{0,001} - \frac{1}{0,002} \right) \approx \\
 &\approx 2,29 \cdot 10^3 \text{ Дж}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\Delta U = 68 \text{ кДж}$; $A = 2,29 \text{ кДж}$

2. В баллоне вместимостью $V = 8 \text{ л}$ находится кислород массой $m = 0,3 \text{ кг}$ при температуре $T = 300^\circ \text{ К}$. Найти какую часть вместимости сосуда составляет собственный объем молекул газа. Определить отношение внутреннего давления к давлению газа на стенки сосуда.

Дано:

$$\begin{aligned}V &= 8 \text{ л} \\ m &= 0,3 \text{ кг} \\ \mu &= 0,032 \text{ кг/моль} \\ T &= 300^\circ \text{ К}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k &= \frac{V'}{V} - ? \\ \frac{p'}{p} &= ?\end{aligned}$$

Решение:

$$\text{Так как } V' = \frac{vb}{4} = \frac{mb}{4\mu}, \text{ то } k = \frac{mb}{4\mu V}.$$

$$k = \frac{0,3 \cdot 3,17 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 0,032 \cdot 0,008} \approx 0,91\%$$

$$p' = \frac{v^2 a}{V^2} = \frac{m^2 a}{\mu^2 V^2} = 0,179 \text{ кПа}.$$

$$p = \frac{vRT}{V - vb} = 2,84 \text{ МПа}.$$

$$\text{Тогда } \frac{p'}{p} = 6,3\%.$$

$$\text{Ответ: } k \approx 0,91\%; \frac{p'}{p} = 6,3\%$$

3. В цилиндре под поршнем находится хлор массой $m = 20 \text{ г}$. Определить изменение внутренней энергии хлора при изотермическом расширении его от $V_1 = 200 \text{ см}^3$ до $V_2 = 500 \text{ см}^3$.

Дано:

$$\begin{aligned}m &= 20 \text{ г} \\ \mu &= 0,071 \text{ кг/моль} \\ V_1 &= 200 \text{ см}^3 \\ V_2 &= 500 \text{ см}^3 \\ T &= \text{const}\end{aligned}$$

$$\Delta U - ?$$

Решение:

$$U_1 = \nu \cdot \left(c_V T - \frac{av}{V_1} \right),$$

$$U_2 = \nu \cdot \left(c_V T - \frac{av}{V_2} \right).$$

Тогда изменение внутренней энергии.

$$\Delta U = av^2 \cdot \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = 154 \text{ Дж}.$$

$$\text{Ответ: } \Delta U = 154 \text{ Дж}$$

5. Кислород массой 100 г расширяется от объема 5 л до объема 10 л. Определить работу межмолекулярных сил притяжения при этом расширении. Поправку a примите равной $a = 0,136 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$.

Дано:

$$m = 100 \text{ г}$$

$$V_1 = 5 \text{ л}$$

$$V_2 = 10 \text{ л}$$

$$a = 0,136 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$$

$$A = ?$$

Решение:

По определению $A = \int_{V_1}^{V_2} p' \cdot dV$.

Так как $p' = \frac{v^2 a}{V^2}$, то

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{v^2 a}{V^2} dV = v^2 a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) =$$

$$= \left(\frac{0,1}{0,032} \right)^2 \cdot 0,136 \cdot \left(\frac{1}{0,005} - \frac{1}{0,01} \right) = 133 \text{ Дж}$$

Ответ: $A = 133 \text{ Дж}$

ЗАДАЧИ для самостоятельного решения

1. В сосуде вместимостью $V = 10 \text{ л}$ находится азот массой $m = 250 \text{ г}$. Определить внутренне давление газа и собственный объем.

2. В сосуде вместимостью $V = 0,3 \text{ л}$ находится углекислый газ, содержащий $\nu = 1 \text{ моль}$ вещества при температуре 300° К . Определить давление газа по уравнению Менделеева-Клапейрона и по уравнению Ван-дер-Ваальса.

3. Вычислить постоянные Ван-дер-Ваальса для азота, если известны критическая температура $T_{кр} = 126^\circ \text{ К}$ и давление $P_{кр} = 3,39 \text{ МПа}$.

4. Определить плотность водяных паров в критическом состоянии.

5. Определить изменение внутренней энергии неона, содержащего количество вещества $\nu = 1 \text{ моль}$, при изотермическом расширении его объема от $V_1 = 1 \text{ л}$ до $V_2 = 2 \text{ л}$.

6. Азот ($\nu = 3 \text{ моль}$) расширяется в вакуум, в результате чего объем газа увеличивается от $V_1 = 1 \text{ л}$ до $V_2 = 5 \text{ л}$. Какое количество теплоты Q необходимо сообщить газу, чтобы его температура осталась неизменной?

7. Кислород ($\nu = 2$ моль) занимает объем $V_1 = 1$ л. Определить изменение температуры кислорода, если он адиабатно расширяется в вакуум до объема $V_2 = 10$ л.

8. Азот ($\nu = 2$ моль) адиабатно расширяется в вакуум. Температура газа при этом уменьшается на 1°K . Определите работу, совершаемую газом против межмолекулярных сил притяжения.

9. Азот ($\nu = 1$ кмоль) находится при температуре $t = 27^\circ\text{C}$ и давлении $p = 5$ МПа. Найти объем газа, считая, что азот при данных условиях ведет себя как реальный газ.

10. Найти эффективный диаметр молекулы кислорода, считая известными для кислорода критические значения T_k и p_k .

11. Найти давление, обусловленное силами взаимодействия молекул, заключенных в количестве $\nu = 1$ кмоль газа при нормальных условиях. Критическая температура и критическое давление этого газа равны $T_k = 417^\circ\text{K}$ и $p_k = 7,7$ МПа.

12. Для водорода силы взаимодействия между молекулами незначительны; преимущественную роль играют собственные размеры молекул. Написать уравнение состояния такого полуидеального газа. Какую ошибку мы допустим при нахождении количества водорода, находящегося в некотором объеме при температуре $t = 0^\circ\text{C}$ и давлении $p = 280$ МПа, не учитывая собственного объема молекул?

13. В сосуде объемом $V = 10$ л находится азот массой $m = 0,25$ кг при температуре $t = 27^\circ$. Какую часть давления газа составляет давление, обусловленное силами взаимодействия молекул? Какую часть объема сосуда составляет собственный объем молекул?

14. Количество $\nu = 0,5$ кмоль некоторого трехатомного газа адиабатически расширяется в вакуум от объема $V_1 = 0,5$ м³ до объема $V_2 = 3$ м³. Температура газа при этом получает приращение $\Delta T = -12,2^\circ\text{K}$. Найти постоянную a , входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

15. Найти плотность гелия в критическом состоянии, считая известными для гелия критические значения T_k и p_k .

16. Во сколько раз давление газа больше его критического давления, если известно, что его объем и температура вдвое больше критических значений этих величин?

17. Моль азота охлажден до температуры $t = -100^\circ \text{C}$. Определить давление, оказываемое газом на стенки сосуда, если объем, занимаемый газом, равен : а) $V = 1 \text{ л}$; б) $V = 0,1 \text{ л}$. Сравнить это давление с давлением, которое имел бы азот, если бы сохранил при рассматриваемых условиях свойства идеального газа.

18. Получить для ван-дер-ваальсовского газа уравнение адиабаты в переменных V, T , а также в переменных V, p . Сравнить полученные уравнения с аналогичными уравнениями для идеального газа.

19. Определить для ван-дер-ваальсовского газа разность молярных теплоемкостей $C_p - C_V$.

20. Вычислить по формуле, полученной в предыдущей задаче, разность $C_p - C_V$ для кислорода при давлении $p = 50 \text{ МПа}$ и температуре $T = 273^\circ \text{K}$. При этих условиях моль кислорода занимает объем $V = 0,564 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$.

21. Вычислить приращение температуры азота вследствие эффекта Джоуля-Томсона, получающееся в случае, если $p_1 = 10^6 \text{ Па}$ и $T_1 = 273^\circ \text{K}$. Значения V_1 можно определять по уравнению состояния идеального газа.

22. Найти выражение для энтропии моля ван-дер-ваальсовского газа (в зависимости от V, T). Сравнить полученное выражение с аналогичной формулой для идеального газа.

Константы

газовая постоянная	$R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
постоянная Больцмана	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}/\text{К}$
постоянная Авогадро	$N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$

Соотношение между различными единицами

температура	$0 \text{ К} = -273,15^\circ\text{С}$
-------------	---------------------------------------

Нормальные условия

давление 10^5 Па , температура 0°С

Молярная масса

водяных паров	$18 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$	серебра	$108 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$
воздуха	$29 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$	углекислого газа	$44 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$

Критические значения T_k и p_k

Вещество	$T_k, \text{ К}$	$p_k, \text{ МПа}$
Водяной пар	647	22,0
Углекислый газ	304	7,38
Кислород	154	5,07
Аргон	151	4,87
Азот	126	3,4
Водород	33	1,3
Гелий	5,2	0,23

Постоянные Ван-дер-Ваальса для различных газов

Газ	$a,$ л ² ·бар·моль ⁻²	$b,$ см ³ ·моль ⁻¹	Газ	$a,$ л ² ·бар·моль ⁻²	$b,$ см ³ ·моль ⁻¹
He	0,03457	23,70	NO	1,358	27,89
Ne	0,2135	17,09	NO ₂	5,354	44,24
Ar	1,363	32,19	H ₂ O	5,536	30,49
Kr	2,349	39,78	H ₂ S	4,490	42,87
Xe	4,250	51,05	NH ₃	4,225	37,07
H ₂	0,2476	26,61	SO ₂	6,803	56,36
N ₂	1,408	39,13	CH ₄	2,283	42,78
O ₂	1,378	31,83	C ₂ H ₄	4,530	5,714
Cl ₂	6,579	56,22	C ₂ H ₆	5,562	63,80
CO	1,505	39,85	C ₃ H ₈	8,779	84,45
CO ₂	3,640	42,67	C ₆ H ₆	18,24	115,4

Методические материалы

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Методические указания к практическим занятиям

Составители:

***Воробьева Елена Владимировна,
Жукова Валентина Александровна,
Никонов Владимир Иванович***

Редактор Т.К. Крестина
Компьютерная вёрстка И.И. Спиридоновой

Подписано в печать 13.11.2018. Формат 60 × 84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 4,75.

Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 24(Р4М)/2018.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Изд-во Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

