

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
Р С Ф С Р

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени  
авиационный институт имени академика С.П.Королева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ  
В ИНЖЕНЕРНЫХ ОБЪЕКТАХ РАДИОЭЛЕКТРОННОЙ  
АППАРАТУРЫ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ  
И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Куйбышев 1987

В указаниях даются рекомендации по выполнению лабораторной работы "Математическое моделирование процессов в инженерных объектах радиосэлектронной аппаратуры. Моделирование электрических и магнитных полей", а также необходимые теоретические сведения.

Методические указания могут быть использованы при выполнении лабораторных работ, курсовых проектов и на практических занятиях по курсу "Математическое обеспечение конструкторского и технологического проектирования с применением САПР" студентами специальности 0705.

Автор

С.А.Матюнин

Цель работы - познакомиться с методами математического моделирования электрических и магнитных полей в конструкциях радиоэлектронной аппаратуры, ознакомиться с особенностями численных методов анализа процессов в конструкциях РЭА, научиться решать конкретные задачи анализа и синтеза на микро-ЭВМ "Электроника ДЗ-28".

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Характеристики современной конструкции РЭА, представляющей собой сложную систему, определяются большим числом параметров, которое может достигать до нескольких сотен, а иногда тысяч. В процессе конструирования РЭА практически не представляется возможным учесть всю их совокупность. Поэтому результаты разработки конструкций РЭА получается неоднозначными и принимать решение об их пригодности приходится на основе испытания опытных образцов. С ростом сложности аппаратуры подобные испытания становятся слишком дорогими. Имея на вооружении современную вычислительную технику, промышленность ставит перед конструктором задачу разработки методов анализа и синтеза проектируемой конструкции на основе аналогового или цифрового моделирования протекающих в ней физических процессов. Анализ вариантов конструкций РЭА на их моделях позволит быстро, качественно и всесторонне их исследовать для более обоснованного принятия решений.

С помощью физического моделирования процессов в конструкциях РЭА можно решать только прямую задачу (задача анализа), которую можно сформулировать следующим образом.

Задана некоторая физическая система в конструкции РЭА, которая описывается известными уравнениями. На эту систему действуют определенные внутренние и внешние факторы. Требуется определить реакцию системы на эти факторы.

С помощью математического моделирования возможно решение и обратной задачи (задача синтеза) - задачи, когда известны реакции системы и требуется найти внешние и внутренние факторы, которые привели бы эту систему к известному виду реакции. Подобные задачи решаются в основном методом последовательных приближений.

Основной задачей анализа конструкций РЭА является выявление полевых связей между ее элементами. В теории поля все анализируемое пространство рассматривается как система, которая может быть проводником тепла, областью ограниченного пространства электростатических сил и т.д. Такая система является пассивной, если в ней отсутствуют источники энергии, активной - если таковые имеются. Подведение к системе энергии вызывает в ней реакцию. Во всех физических явлениях величины источников возмущений и реакции выражают через переменные, зависящие от времени и положения внутри поля. Эти переменные классифицируются как переменные **п е р в о г о** и **в т о р о г о** **р о д о в**.

К переменным **п е р в о г о** **р о д а** относят переменные, которые отличаются в различных точках пространства поля или цепи. Эти переменные задаются в виде разности значений в двух различных точках пространства или цепи. К таким переменным относятся, разность потенциалов электрической цепи, относительные перемещения в механике, разность температур, разность концентраций примесей в полупроводниках и т.д.

Переменными второго рода называют величины, которые не изменяются внутри некоторого элемента, но для определения таких переменных необходимо знать их величину и направление. К таким переменным относятся: ток в последовательной электрической цепи, магнитный или тепловой поток и т.д. Математически переменные первого рода представляют собой разность между скалярными потенциалами в двух различных точках поля или цепи, в то время как переменные второго рода являются векторными величинами.

Многие процессы в конструкциях РЭА описываются дифференциальными уравнениями в частных производных второго рода:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ A_1(x, y, z, \varphi, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_2(x, y, z, \varphi, t) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ A_3(x, y, z, \varphi, t) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] = a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + b \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \varphi + d, \quad (1)$$

где  $a = f_1(x, y, z, \varphi, t) \geq 0$ ;

$b = f_2(x, y, z, \varphi, t) \geq 0$ ;

$c = f_3(x, y, z, \varphi, t) \geq 0$ ;

$d = f_4(x, y, z, \varphi, t) \geq 0$ .

Функции  $A_1, A_2, A_3$  определяют параметры вещества пространства (для изотропной среды  $A_1 = A_2 = A_3 > 0$ ), а потенциальная функция  $\varphi$  определяется внутри некоторой области  $\Omega$ , на границе поверхности которой заданы

граничные условия

$$(\alpha \varphi + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n}) \Big|_S = F,$$

где  $\alpha, \beta, F$  - заданные функции в граничной области,

$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  - производная по нормали к граничной области  $S$ .

Если во всех точках граничной области  $\beta = 0$ , т.е. на поверхности  $S$  задано граничное условие

$$(\alpha \varphi) \Big|_S = F, \text{ то такое условие называют граничным}$$

условием первого рода (задача Дирихле).

Если во всех точках граничной области  $\alpha = 0$ , т.е. граничные условия имеют вид  $(\frac{\partial \varphi}{\partial n}) \Big|_S = F$ , то такие

граничные условия называют граничными условиями второго рода (задача Неймана).

В том случае, когда имеют место смешанные варианты, то их называют граничными условиями третьего рода.

В зависимости от коэффициентов дифференциального уравнения (I) определяют ряд характерных случаев:

1.  $a = b = 0$ ;  $c \geq 0$ ;  $d \geq 0$  - уравнение эллиптического типа,
2.  $a = 0$ ;  $b > 0$ ;  $c \geq 0$ ;  $d \geq 0$  - уравнение параболического типа,
3.  $a > 0$ ;  $b \geq 0$ ;  $c \geq 0$ ;  $d \geq 0$  - уравнение гиперболического типа.

Наиболее важным и часто встречающимся уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

которое описывает стационарное состояние поля без внутренних источников тока, любые установившиеся процессы теплопередачи, процессы электростатики и магнитостатики. Другим часто встречающимся уравнением эллиптического типа является уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = d,$$

которое описывает стационарное состояние поля, внутри которого равномерно распределены источники энергии - например, процессы теплопередачи, когда тепловая энергия генерируется внутри температурного поля и др.

При исследовании нестационарных процессов в РГА используют уравнение параболического типа (уравнение Фурье)

$$\nabla^2 \varphi = k \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

здесь  $k$  характеризует скорость затухания переходного процесса и перехода в стационарный режим. Уравнение описывает нестационарные процессы теплопередачи и диффузии. Если в среде присутствуют распределенные источники, то как и в уравнении Пуассона в уравнении Фурье появляется свободный член

$$\nabla^2 \varphi + F(x, y, z, t) = k \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Решение уравнения Фурье в однородной области как и решение уравнения Лапласа обладает принципом максимального значения. Согласно принципа максимального значения максимальное (минимальное) значение потенциальной функции достигается в граничной области или в начальный момент времени.

При исследовании колебательных процессов в различных физических средах используются уравнения гиперболического

$$\nabla^2 \varphi = R \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

где  $R$  характеризует период распространения возмущения. Если среда обладает сопротивлением, то колебания возникают затухающие и в уравнении появляется член пропорциональной скорости

$$\nabla^2 \varphi = R \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + k \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Если в среде имеются распределенные источники энергии, то уравнение принимает вид

$$\nabla^2 \varphi = R \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + k \frac{\partial \varphi}{\partial t} + d.$$

Характерной задачей, связанной с волновыми процессами, является задача нахождения собственных чисел и собственных функций исследуемой системы (задача Штурма-Лиувилля). Собственными числами колебательной системы называют также числа  $\lambda$ , при которых существует ненулевое решение уравнения

$$\nabla^2 \varphi + \lambda \varphi = 0, \quad \varphi|_s = 0.$$

Физически собственные числа и функции описывают резонансные колебания системы.

В качестве примера использования дифференциальных уравнений в частных производных для описания процессов в РЭА рассмотрим задачу анализа позиционных характеристик переменных резисторов.

Схематично пленочный переменный резистор можно изобразить следующим образом (рис. 1).



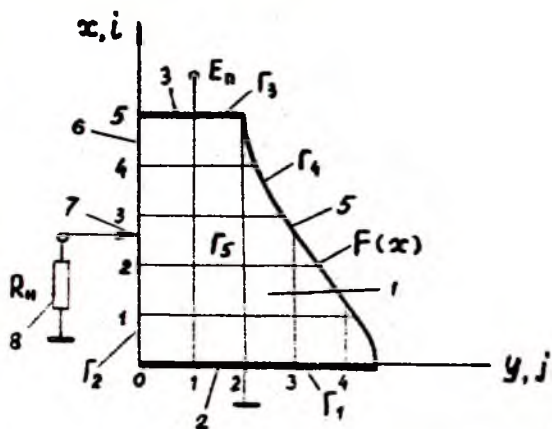


Рис. I

На диэлектрическую подложку наносится тонкий слой резистивного материала I (например, сплав МЛТ) с двумя металлическими электродами 2,3, подключенными к источнику питания 1. Одна из границ 5 резистивного материала профилирована по определенному закону  $F(x)$ , а вдоль другой границы 6 скользит подвижный контакт 7 переменного резистора, подключенный к сопротивлению нагрузки 8. Очевидно, что вид функции  $F(x)$  однозначно определяет вид позиционной характеристики такого резистора, т.е. зависимость выходного напряжения от положения подвижного контакта резистора.

Для рассмотренной конструкции резистора задача анализа сводится к определению позиционной характеристики резистора по заданным конструктивным параметрам, величине сопротивления нагрузки и величине напряжения питания резистора.

Пусть например сопротивление нагрузки достаточно велико, т.е.  $R_H \rightarrow \infty$ , а резистивная пленка достаточно тонкая (изменением потенциала в направлении  $Z$  можно пренебречь). В этом случае распределение поля в резистивной пленке описывается двумерным уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

при следующих граничных условиях: граница  $\Gamma_1$  - граничное условие 1-го рода,  $U(\Gamma_1) = 0$  (задача Дирихле); граница  $\Gamma_3$  - граничное условие 1-го рода,  $U(\Gamma_3) = E_n$ ; граница  $\Gamma_2$  - граничное условие 2-го рода,  $\frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0$  (задача Неймана); граница  $\Gamma_4$  - граничное условие 2-го рода,  $\frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{\Gamma_4} = 0$ .

Если величиной сопротивления нагрузки пренебречь нельзя, то в уравнении (2) появляется свободный член, зависящий от величины сопротивления нагрузки и уравнение преобразуется в уравнение Пуассона

$$\nabla^2 U = -Q,$$

где  $Q = \frac{U_B(x)}{R_H \sigma_n h l},$

$U_B(x)$  - зависимость выходного напряжения переменного резистора от положения подвижного контакта;

$\sigma_n$  - удельная переходная проводимость между подвижным контактом и пленкой резистора;

$h, l$  - размеры пятна контакта.

В основе численных методов решения дифференциальных уравнений лежат понятия разностных уравнений и конечных разностей.

Для решения дифференциальное уравнение заменяется разностным. Классическое определение производной функции одной переменной записывается в виде

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}.$$

Естественно, что ЭВМ не может произвести предельного перехода. С другой стороны можно придать величине  $h$  достаточно малое значение, такое, чтобы решение получалось достаточно точным и ошибка решения не возрастала в процессе вычислений.

Пусть теперь дана функция 2-х переменных  $U(x, y)$ .

Разложим функцию в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0, y_0$

$$U(x, y_0) = U(x_0, y_0) + (x - x_0) U'_x(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} U''_{xx}(\xi, y_0),$$

где  $\xi$  лежит между  $x$  и  $x_0$ .

Если теперь положить  $x = x_0 + h$ , то получим

$$U'_x(x_0, y_0) = \frac{U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0)}{h} - \frac{h}{2} U''_{xx}(\xi, y_0) \approx \frac{U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0)}{h} \quad (3)$$

Ошибка ограничения не превышает  $-\frac{h}{2} U''_{xx}(\xi, y_0)$

Равенство (3) получено подстановкой  $x = x_0 + h$

и называется правой разностью.

Аналогично можно получить и левую разность

$$U'_x(x_0, y_0) = \frac{U(x_0, y_0) - U(x_0 - h, y_0)}{h} .$$

Напишем приближенное выражение для второй производной

$$U''_x(x_0, y_0) = \frac{U'_x(x_0 + h, y_0) - U'_x(x_0, y_0)}{h}$$

(правая разность).

Если теперь подставить выражение для первых производных (правые разности), то весь результат как бы станет смещенным вправо. Для того, чтобы компенсировать этот эффект, используем левые разности для первых производных, получим

$$U''_x(x_0, y_0) = \frac{U(x_0 + h, y_0) - 2U(x_0, y_0) + U(x_0 - h, y_0)}{h^2}$$

Ошибка округления не превышает  $-\frac{h^2}{12} U''''_x(\xi, y_0)$ .

Совершенно аналогично можно определить производные в направлении  $y$  .

Для решения уравнений с частными производными вводится подходящая сетка координат

$$\begin{cases} x_i = x_0 + i h_x , & i = 0, 1, 2 \dots n \\ y_j = y_0 + j h_y , & j = 0, 1, 2 \dots m \end{cases}$$

Тогда неизвестная функция будет представлена дискретным множеством своих значений. Аппроксимируем каждый дифференциальный оператор соответствующим разностным оператором. Тогда полученная система уравнений будет давать систему уравнений для неизвестных значений функции в узлах сетки. При этом большое

влияние на погрешность решения и скорость сходимости решения оказывает схема разностного оператора.

Известно большое разнообразие разностных схем, некоторые из них приведены в таблице.

Таблица

№ пп	Аппроксимирующий оператор
1	$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U(x+h) - U(x-h)}{2h}$
2	$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x+h) + U(x-h) - 2U(x)}{h^2}$
3	$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = \frac{2[U(x-h) - U(x+h)] + U(x+2h) - U(x-2h)}{2h^3}$
4	$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = \frac{1}{h^4} \left\{ U(x-2h) - 4U(x-h) + 6U(x) - 4U(x+h) + U(x+2h) \right\}$
5	$\nabla^2 = \frac{1}{h^2} \left\{ U(x-h, y) + U(x+h, y) + U(x, y-h) + \right. \\ \left. + U(x, y+h) - 4U(x, y) \right\}$
6	$\nabla^2 = \frac{1}{2h^2} \left\{ U(x-h, y+h) + U(x-h, y-h) + U(x+h, y+h) + \right. \\ \left. + U(x+h, y-h) - 4U(x, y) \right\}$
7	$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4h^2} \left\{ U(x-h, y+h) + U(x-h, y-h) + \right. \\ \left. + U(x+h, y+h) + U(x+h, y-h) \right\}$

Посмотрим теперь, каким образом задаются граничные условия при разностной аппроксимации дифференциальных уравнений.

Пусть граница интересующей нас области проходит через узлы сетки, например прямоугольной (рис. 2). Тогда граничные условия первого рода ( $U(x, y)|_{\Gamma} = \text{const}$ ) запишутся следующим образом

$$U(i, j+1) = U(i+1, j) = U(i+2, j-2) = \dots = \text{const}$$

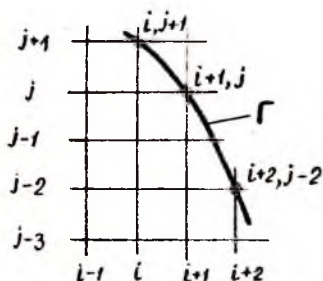


Рис. 2

Для задания граничных условий второго рода  $\frac{dU(x, y)}{dn} = 0$  распространим условно сетку за границу  $\Gamma$  (рис. 3) и аппроксимируем граничное условие соответствующим разностным уравнением. Получившееся уравнение будет включать значения функции в точках лежащих как внутри области, так и вне области. Но все значения вне области  $\Gamma$  можно исключить алгебраическими преобразованиями.

Например применяя к условию  $\frac{dU}{dn}$  оператор 1 таблицы, получим

$$\frac{dU(i+1, j)}{dn} = \frac{1}{2h} [U(i+2, j) - U(i, j)] = 0$$

откуда

$$U(i+2, j) = U(i, j).$$

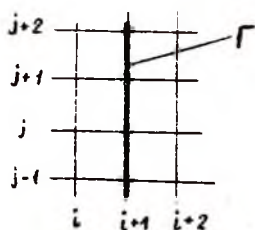


Рис. 3

Таким образом, граничные условия на границе  $i+1$ , второго рода как бы заменены граничными условиями первого рода на границе  $i+2$ . Если граничные условия смешанные (3-го рода), то разбивают границу  $\Gamma$  на ряд отрезков с граничными условиями I-го и 2-го родов.

Если интересующая нас граница не проходит через узлы сетки, то возможны следующие варианты решения:

1. Граница  $\Gamma$  приближенно заменяется ломаной линией, проходящей через ближайшие к естественной границе узлы (рис. 4), и краевые условия каким-либо образом переносятся на эту ломаную линию, например, путем линейной или нелинейной интерполяции.

2. Можно взять точки пересечения границы с линиями сетки в качестве дополнительных узлов и задать краевые условия в этих узлах. (рис. 5)

3. В граничных узлах значение функции исправляется по формулам линейной интерполяции (рис. 6 а, б)

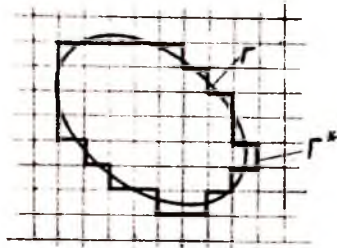


Рис. 1

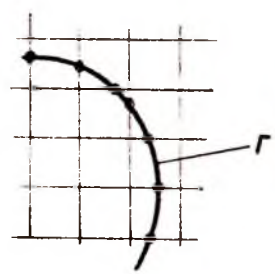


Рис. 5

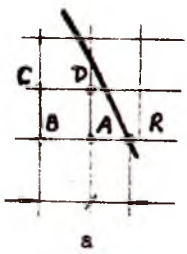
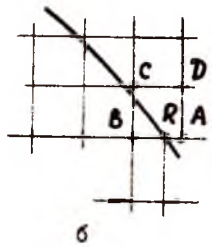


Рис. 6



Если  $\Delta = 0$  , то  $U(R) = U(A)$   
 если  $\Delta > 0$  , то  $U(A) = U(R) + \frac{U(B) - U(R)}{h + \Delta} \Delta$  ;  
 если  $\Delta < 0$  , то  $U(A) = U(R) + \frac{U(B) - U(R)}{h + \Delta} \Delta$  .

Или в общем случае получим

$$U(A) = U(R) + \frac{U(B) - U(R)}{h + \Delta} \Delta .$$

Можно построить и более точные формулы интерполяции, учитывающих влияние большего числа точек.

Таким образом, основные этапы решения дифференциальных уравнений по методу сеток следующие:

1. В интересующей области вводится подходящая сетка



координат.

2. Непрерывные частные производные аппроксимируются конечными разностями, а дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением.

Если подставить в это разностное уравнение координаты узлов сетки, то получим систему алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в узлах сетки.

3. Граничные условия также аппроксимируются соответствующими разностными операторами. Значения искомой функции в узлах сетки граничной области дополняют полученную ранее систему алгебраических уравнений.

4. Решаем систему алгебраических уравнений и определяем значения искомой функции в узлах сетки.

Казалось бы, что для уменьшения погрешности решения необходимо уменьшать шаг сетки, однако в таком случае резко возрастает число узлов сетки и непосредственное решение системы алгебраических уравнений затруднительно. Кроме того, при малой величине шага сетки  $h$  система алгебраических уравнений выражается, т.е. в такой системе уравнений коэффициенты при одноименных переменных мало отличаются друг от друга, возникают большие трудности в решении таких систем. В этих случаях применяют итерационные методы решения (например, итерационный процесс Либмана).

Основные этапы итерационного процесса Либмана следующие:

1. Вводится подходящая сетка координат, а дифференциальное уравнение и граничные условия заменяются разностными.

2. Задается начальное приближение искомой функции в узлах сетки  $U^0(i)$ . Для эллиптических уравнений для этого можно воспользоваться принципом максимума

$$\min_{x \in \Gamma} U(x) \leq U^*(i) \leq \max_{x \in \Gamma} U(x)$$

3. Строится итерационный процесс. Первое приближение искомой функции в узлах сетки  $U^1(i)$  вычисляется через начальное приближение, второе приближение искомой функции - через первое приближение и т.д.,  $k$  приближение искомой функции - через  $k-1$  приближение.

4. Процесс вычислений прекращается, когда погрешность решения дифференциального уравнения  $\epsilon$  окажется меньше допустимой величины  $\epsilon_0$ ,

$$\epsilon = \sup_{i \in I} |U^k(i) - U^{k-1}(i)| \leq \epsilon_0.$$

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В КОНСТРУКЦИЯХ РЭА. АЛГОРИТМ АНАЛИЗА ПОЗИЦИОННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕМЕННОГО РЕЗИСТОРА

Как уже отмечалось статическое распределение магнитного, электрического и теплового полей описывается одинаковыми уравнениями (уравнения Лапласа и Пуассона). Поэтому рассмотрим особенности численного моделирования электрических и магнитных полей в конструкциях РЭА на примере задачи анализа позиционной характеристики тонкопленочного переменного резистора.

С учетом отмеченных ранее допущений распределение потенциала в пленке резистора описывается двумерным уравнением Лапласа с соответствующими граничными условиями (2).

Введем систему прямоугольных координат (рис. 1) и прямоугольную сетку с равномерными шагами по осям  $h_x = h_y = h$

$$\begin{cases} x = x_0 + ih, & i = 0, 1, 2 \dots M \\ y = y_0 + jh, & j = 0, 1, 2 \dots N \end{cases}$$

Аппроксимируем члены дифференциального уравнения (2) разностными операторами по 5 схеме таблицы

$$\nabla^2 = \frac{1}{h^2} [U(i-1, j) + U(i+1, j) + U(i, j-1) + U(i, j+1) - 4U(i, j)] = 0. \quad (4)$$

Выражая из (4)  $U(i, j)$  можно получить явную схему решения системы уравнений

$$U(i, j) = \frac{1}{4} [U(i+1, j) + U(i-1, j) + U(i, j+1) + U(i, j-1)]. \quad (5)$$

Зададим начальное приближение потенциальной функции в узлах сетки

$$U(i, j) \Big|_{i, j \in \Gamma_5} = 0.$$

Для решения системы уравнений (5) используем процесс Либмана - принимаем правую часть уравнения (5) за приближение потенциальной функции на  $k-1$  шаге, левую часть - за приближение на шаге  $k$

$$U^k(i, j) = \frac{1}{4} [U^{k-1}(i+1, j) + U^{k-1}(i-1, j) + U^{k-1}(i, j+1) + U^{k-1}(i, j-1)]. \quad (6)$$

Очевидно, что (6) применимо лишь к области  $\Gamma_5$  (рис. 1). Для границы  $\Gamma_1$  (граничное условие первого рода) дифференциальное уравнение (6) заменяется уравнением

$$U^R(i, j) \Big|_{i, j \in \Gamma_1} = E_n,$$

для границы  $\Gamma_3 - U^R(i, j) \Big|_{i, j \in \Gamma_3} = 0$ .

Для границы  $\Gamma_2$  (граничное условие второго рода) применим первую схему разностного оператора таблицы и заменим граничное условие разностным уравнением

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial n} \Big|_{x, y \in \Gamma_2} = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{h} [U^R(i, j-1) - U^R(i, j+1)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U^R(i, j-1) = U^R(i, j+1). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим разностное уравнение

$$U^R(i, j) = \frac{1}{4} [U^{R-1}(i+1, j) + U^{R-1}(i-1, j) + 2U^{R-1}(i, j+1)].$$

Случай, когда направление границы резистивного слоя не совпадает с направлением координатных осей (граница  $\Gamma_4$ ) изображен на рис. 7

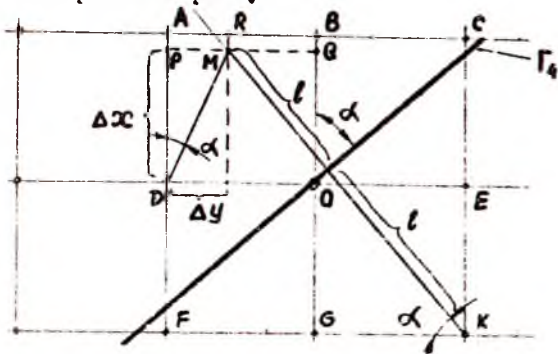


Рис. 7

Для границы  $\Gamma_4$  (граничное условие второго рода) имеем

$$\left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial n} \right|_{x, y \in \Gamma_4} = 0.$$

Для определения значения потенциальной функции на очередном шаге итерации  $k$  в точке  $O$  (рис. 7) необходимо

знать значение потенциальной функции в точках  $E, G$  на шаге  $k-1$ . Для определения значения потенциальной функции

в точке  $E$  опустим из нее нормаль на границу  $\Gamma_4$  и найдем зеркальное отображение точки  $E$  - точку  $M$ .

Очевидно, что из условия  $\frac{\partial U(O)}{\partial n} = 0$  следует

$$U^{k-1}(M) = U^{k-1}(E). \text{ При движении точки } M \text{ по прямой } PQ$$

потенциал в точке  $M$  изменяется от  $U(P)$  до  $U(Q)$

по линейному закону

$$U^{k-1}(M) = U^{k-1}(P) \left(1 - \frac{\Delta y}{h}\right) + U^{k-1}(Q) \frac{\Delta y}{h}. \quad (8)$$

При движении точки  $P$  (точки  $Q$ ) по прямой

$AD$  (по прямой  $BO$ ) потенциал в точке изменяется от

$U(A)$  (от  $U(B)$ ) до  $U(D)$  (до  $U(O)$ ), т.е.

$$U^{k-1}(P) = U^{k-1}(D) \left(1 - \frac{\Delta x}{h}\right) + U^{k-1}(A) \frac{\Delta x}{h} \quad (9)$$

$$U^{k-1}(Q) = U^{k-1}(O) \left(1 - \frac{\Delta x}{h}\right) + U^{k-1}(B) \frac{\Delta x}{h}$$

Из треугольника  $DME$  имеем

$$DM = 2h \sin \alpha$$

$$\Delta x = DM \cos \alpha = h \sin 2\alpha \quad (10)$$

$$\Delta y = DM \sin \alpha = 2h \sin^2 \alpha.$$

Подставляя (9), (10) в (8), получим выражение для определения

значения потенциальной функции в точке  $E$

$$U^{R-1}(E) = U^{R-1}(D)[1-2\sin^2\alpha][1-\sin 2\alpha] + U^{R-1}(A)[1-2\sin^2\alpha]\sin 2\alpha + U^{R-1}(0)[1-2\sin 2\alpha]2\sin^2\alpha + U^{R-1}(B)2\sin^2\alpha\sin 2\alpha. \quad (11)$$

Совершенно аналогично можно получить

$$U^{R-1}(G) = \left\{ \frac{1}{2}\sin 4\alpha U^{R-1}(F) + 2\sin^2\alpha [U^{R-1}(0)(1-\sin 2\alpha) + U^{R-1}(D)\sin 2\alpha] \right\} / [1-\cos 2\alpha(1-\sin 2\alpha)].$$

Подставляя полученные выражения (11), (12) в (6), получим выражение для определения значения потенциальной функции на границе  $\Gamma_4$  на очередном  $k$  шаге.

$$U^k(0) = \frac{1}{4} [U^{R-1}(D) + U^{R-1}(B) + U^{R-1}(E) + U^{R-1}(G)],$$

где  $U(E), U(G)$  определяются выражениями (11), (12).

Аналогично можно получить разностные уравнения для случаев, когда граница  $\Gamma_4$  не проходит через узловую точку, когда  $\alpha = 0, \alpha < 0$ .

По полученным выражениям строим итерационный процесс Либмана, причем для ускорения решения можно использовать ускоренный процесс Либмана. Согласно ускоренного процесса Либмана приближение значения потенциальной функции на шаге

$k$  определяется

$$U^k(i, j) = \frac{R}{4} [U^{k-1}(i+1, j) + U^{k-1}(i-1, j) + U^{k-1}(i, j+1) + U^{k-1}(i, j-1)] + (1-R)U^{k-1}(i, j),$$

где  $R$  — ускоряющий множитель Либмана;

( $R = 1$  — обычный процесс Либмана,  $R > 1$  — ускоренный процесс Либмана).

На рис. 8 изображен график зависимости количества

итераций  $K_{ит}$ , необходимых для решения системы (6) с погрешностью до 1,0% в функции величины ускоряющего множи-

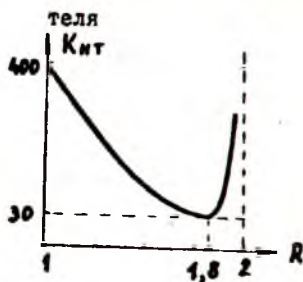


Рис. 8.

Рассмотренный алгоритм анализа распределения электрического потенциала в пленке резистивного слоя переменного резистора поясняет следующий численный пример. Задан резистивный слой прямоугольной формы, к электродам которого подключен источник питания с ЭДС  $E_n = 100$  В. Введем сетку координат. Зададимся начальным приближением значений потенциальной функции в узлах сетки  $U(i,j) = 0$  и вычислим значения потенциальной функции на первых шагах итерации.

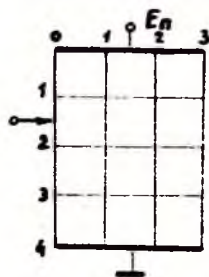


Рис. 9.

$i \backslash j$	0	1	2	3
0	100	100	100	100
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

Начальное приближение

$i \backslash j$	0	1	2	3
0	100	100	100	100
1	25	25	25	25
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

Первая итерация

$I \setminus J$	0	1	2	3
0	100	100	100	100
1	75	75	75	75
2	12,5	12,5	12,5	12,5
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

Вторая итерация

$I \setminus J$	0	1	2	3
0	100	100	100	100
1	65,6	65,6	65,6	65,6
2	25	25	25	25
3	3,1	3,1	3,1	3,1
4	0	0	0	0

Третья итерация

$I \setminus J$	0	1	2	3
0	100	100	100	100
1	64	64	64	64
2	29,7	29,7	29,7	29,7
3	7,8	7,8	7,8	7,8
4	0	0	0	0

Четвертая итерация

Алгоритм программы анализа позиционной характеристики переменного резистора изображен на рис. 10.

#### УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ ПРОГРАММЫ АНАЛИЗА ПОЗИЦИОННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕМЕННОГО РЕЗИСТОРА

- $M$  - количество точек по оси  $X$ ;
- $X_1$  - длина резистивного слоя;
- $N$  - количество точек по оси  $Y$ ;
- $P$  - допустимая погрешность решения;
- $P_1$  - текущая (вычисленная) погрешность решения;
- $E$  - напряжение питания резистора;
- $Y_1$  - расстояние от границы  $\Gamma_2$  до линии съема потенциала;
- $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  - коэффициенты разложения функции профиля резистора в степенной ряд;
- $U_i(M, N+1)$  - массив значений потенциальной функции на очередном шаге  $k$ ;
- $U(M, N+1)$  - массив значений потенциальной функции на шаге  $k-1$ ;
- $S_1(M)$  - массив значений  $\sin \alpha$  в условных точках границ  $\Gamma_4$ ;
- $S_2(M)$  - массив значений  $\sin 4\alpha$  в условных точках границ  $\Gamma_4$ ;



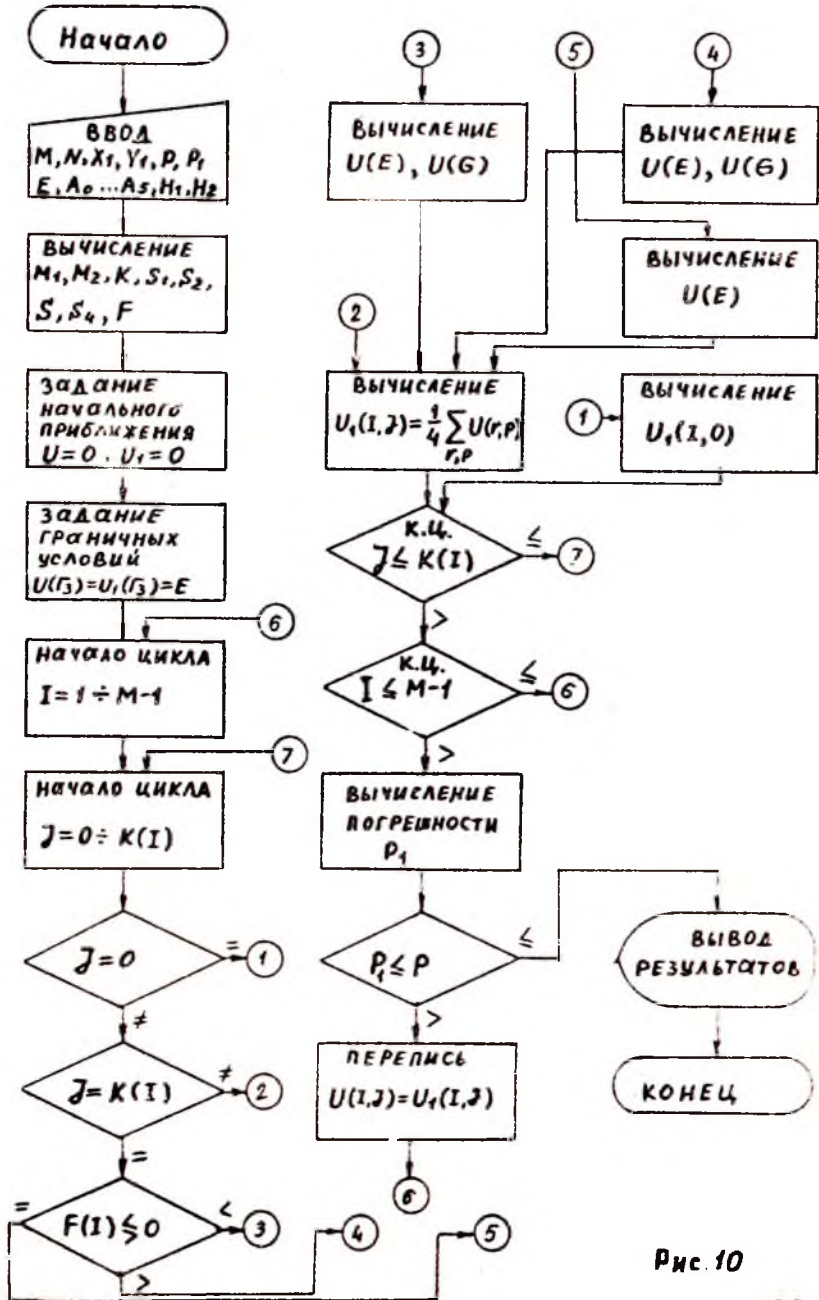


Рис. 10

$S_2(M)$  - массив значений  $\sin^2 \alpha$  в узловых точках границы  $\Gamma_4$ ;  
 $S_1(M)$  - массив значений  $\sin 2\alpha$  в узловых точках границы  $\Gamma_4$ ;  
 $K(M)$  - количество точек сетки по оси  $Y$  для соответствующей точки по оси  $X$ ;

$H_1$  - шаг сетки по оси  $X$ ;

$H_2$  - шаг сетки по оси  $Y$ ;

$F(M)$  - массив значений узлов  $\alpha$  в узловых точках границы  $\Gamma_4$ ;

$M_2 = \sup F(x)$  - наибольшее значение функции профиля;

$M_1 = \inf F(x)$  - наименьшее значение функции профиля.

#### АЛГОРИТМ СИНТЕЗА ПЕРЕМЕННОГО ТОНКОПЛЕНОЧНОГО РЕЗИСТОРА С ЗАДАННОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Используя рассмотренной выше алгоритм анализа позиционной характеристики резистора с заданным профилем резистивной пленки и изученные ранее методы одномерной и многомерной оптимизации (метод золотого сечения, метод парабол, метод Гаусса-Зейделя и др.) можно составить простой алгоритм синтеза переменного резистора с заданной позиционной характеристикой.

Введем следующие условные обозначения:

$P(x), P_1(x)$  - заданная и расчетная позиционные характеристики переменного резистора;

$H_0, L_0$  - диапазон допустимого изменения коэффициента  $A_0$ ;

$H_1, L_1$  - диапазон допустимого изменения коэффициента  $A_1$ ;

$H_5, L_5$  - диапазон допустимого изменения коэффициента  $A_5$ ;

$G, G_1$  - заданная и текущая погрешности синтеза.

(Диапазон допустимого изменения коэффициентов  $A_0, A_1, \dots, A_5$  выбирается из конструкторских соображений так, чтобы правдиво

резистивной пленки не выходила за разумные пределы).

Алгоритм синтеза переменного резистора, основанный на методе Гаусса Зейделя, можно реализовать следующим образом. Зададим начальным приближением переменных  $A_0, A_1, \dots, A_5$  -  $A_0^0, A_1^0, \dots, A_5^0$ . Для данного приближения определим позиционную характеристику полученного переменного резистора и вычислим погрешность  $G_1$ , характеризующую отклонение реальной позиционной характеристики от заданной. Если  $G_1 \leq G$ , то процесс конструирования можно закончить. В противном случае зафиксируем переменные  $A_1^0, A_2^0, \dots, A_5^0$  и, используя методы одномерной оптимизации, определим такое оптимальное значение переменной  $A_0 - A_0^1$ , которое доставляет наименьшее значение погрешности  $G_1$ . Если и в этом случае окажется текущая погрешность  $G_1$  больше заданной, то зафиксируем переменные  $A_0^1, A_2^0, A_3^0, \dots, A_5^0$  и определим оптимальное значение переменной  $A_1^1$  и т.д. пока не будут определены оптимальные значения всех пяти переменных  $A_0^1, A_1^1, \dots, A_5^1$  (если конечно  $G_1 > G$ ). На этом первый шаг спуска в многомерном пространстве переменных  $A_0, A_1, \dots, A_5$  в локальный экстремум окончен. Если окажется, что после первого шага текущая погрешность  $G_1$  больше заданной, то перейдем ко второму шагу - используем полученное приближение переменных  $A_0^1, A_1^1, \dots, A_5^1$  в качестве начального приближения и осуществим второй шаг спуска в многомерном пространстве и т.д. Процесс оканчивается при достижении заданной погрешности отклонения позиционной характеристики от заданной или при совершении заданного количества шагов.

Алгоритм программы синтеза переменного резистора с заданной позиционной характеристикой приведен на рис.11.

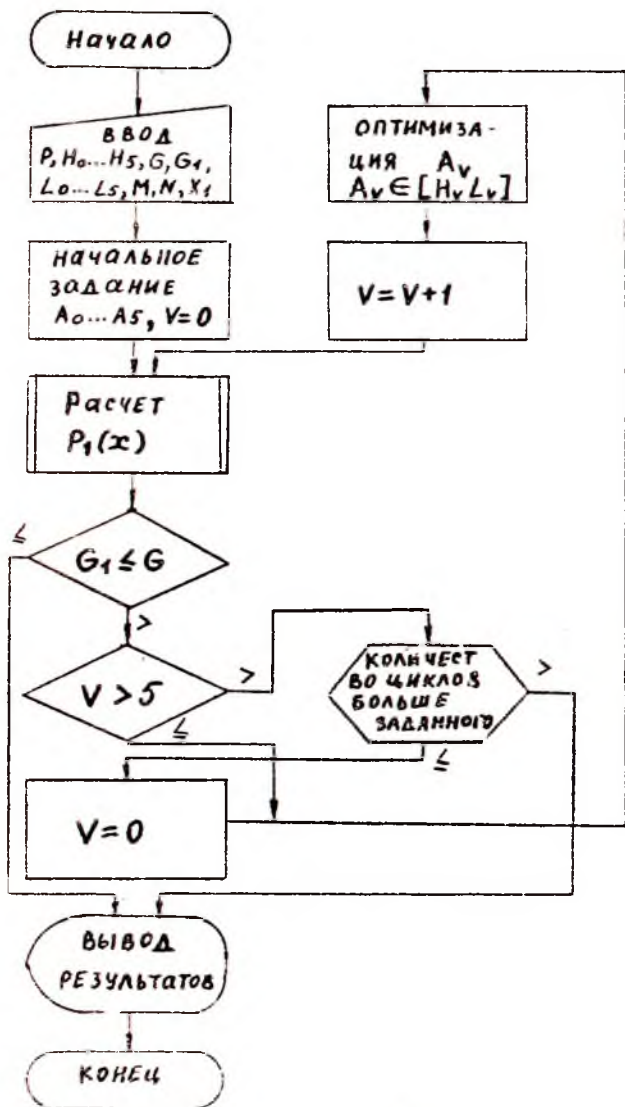


Рис. 11

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте классификацию дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Какие процессы в РЭА описываются этими уравнениями?
2. Чем отличаются граничные условия первого рода от граничных условий второго и третьего рода? Какой физический смысл имеют граничные условия?
3. Дайте понятия разностных операторов и разностных уравнений. Нарисуйте схемы основных разностных операторов.
4. Сравните между собой обычный и ускоренный методы Либмана. Нарисуйте схему алгоритмов, реализующих эти методы.
5. Как задаются граничные условия численными методами?
6. Нарисуйте схему алгоритма анализа позиционной характеристики переменного резистора. Дайте необходимые пояснения.
7. Как выбирается число узлов сетки в задаче анализа? Как задаются граничные условия? Дайте пояснения задания граничных условий на численном примере.
8. Нарисуйте схему алгоритма синтеза резистора с заданной позиционной характеристикой. Дайте необходимые пояснения.
9. В чем заключается сущность метода Гаусса-Зейделя? Какие методы многомерной оптимизации вы знаете?
10. Поясните назначение основных идентификаторов программы.
11. Получите разностные уравнения для случаев, когда граница резистивного слоя  $\Gamma_4$  (задача анализа) не проходит через узловую точку и для случаев  $\alpha = 0$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\alpha > 0$ .

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Для выполнения лабораторной работы необходимо:

1. Ознакомиться с теоретической частью работы.
2. Получить у преподавателя задание: конструктивные характеристики резистора (для задачи анализа) и вид позиционной характеристики (для задачи синтеза), величину напряжения питания и погрешности решения.
3. Выбрать величины и диапазон изменения остальных переменных программы.
4. Написать программу анализа и программу синтеза на соответствующем алгоритмическом языке.
5. Ввести программу и исходные данные в ЭВМ.
6. Отладить программу и записать ее на машинную ленту.
7. Составить отчет о лабораторной работе, в который должны войти:

- титульный лист, оформленный в соответствии с требованиями ЕСКД к текстовым документам;
- задание к лабораторной работе;
- необходимые теоретические сведения;
- схема программы и ее описание;
- распечатка программы;
- результаты работы программы;
- выводы по работе;
- список использованной литературы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дендобренко В.Н., Малика А.С. Автоматизация конструирования. РЭА. : Уч. М., Высшая школа, 1980. -364 с., ил.
2. Петренко А.И. Основы автоматизации проектирования. -К.: Техника, 1982. -295с., ил.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. -М.: Физ.мат.литер., 1978, -512с., ил.
4. Зеленский А.В., Матюнин С.А. Составление БЭИСИМ программ для конструкторского и технологического проектирования РЭА для микро-ЭВМ ДЭ 28. Метод.указания к лаб.раб. -Куйбышев: КуАИ, 1985. -34с.
5. Матюнин С.А. Методы оптимизации технических решений в автоматизированных системах конструкторского и технологического проектирования РЭА.Метод золотого сечения. - Куйбышев: КуАИ, 1985. -16с.
6. Д.Мак-Кракен, У. Дорн Численные методы и программирование на Фортране. -М.: Мир, 1977. -584 с., ил.
7. ГОСТ 19.002-80
8. ГОСТ 19.003-80

Подписано в печать 24.08.87. Формат 60x84/1/16.  
Бумага оберточная белая. Оперативная печать. Усл.п.л. 186.  
Уч.изд.л. 18 т. 100. X Заказ # 339. Бесплатно.  
Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени национальный  
институт имени академика С.П.Королева.

---

Участок оперативной полиграфии, КуАИ, г.Куйбышев,  
ул.Ульяновская, 18.