Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Утверждено редакционно-
издательским советом
института в качестве
методических указаний
по курсу "Общая физика"

Куйбышев 1983

УДК 530.10

Методические указания предназначены для изучения студентами первых двух курсов КуАИ всех специальностей методики обработки результатов измерений.

Они состоят из теоретического материала по расчету погрешностей при измерениях, примеров практического применения этой теории и приложения, содержащего справочный материал.

Составители: В.А.Б а р в и н о к, В.И.Б о г д а н о в и ч, А.И.К о с е н к о

Рецензенты: Н.В.В о л к о в, Л.И.Л а г у т с к а я

Ц е л ь р а б о т ы : не выходя за рамки математического аппарата, используемого на первых двух курсах вуза, кратко изложить основные методы теории измерений, обработки их результатов и расчета погрешностей этих измерений.

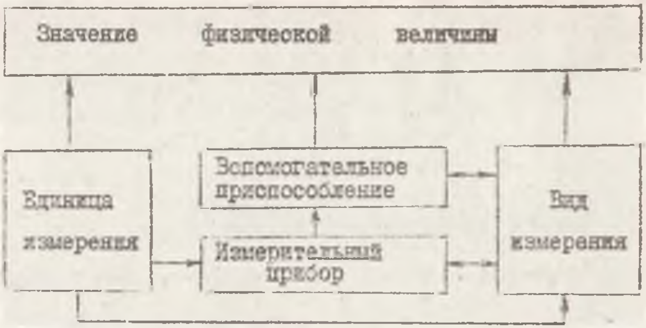
I. Элементарные сведения об измерениях

Физика относится к классу так называемых точных наук и её основной задачей является установление количественных взаимосвязей между физическими величинами. Ф и з и ч е с к а я в е л и ч и н а характеризует некоторое свойство, общее многим физическим объектам в качественном отношении, но индивидуальное для каждого объекта в количественном отношении [I]. При этом в качестве объекта могут выступать физические системы, а также происходящие в них процессы. Примеры физических величин: масса тела, скорость, время и т.д.

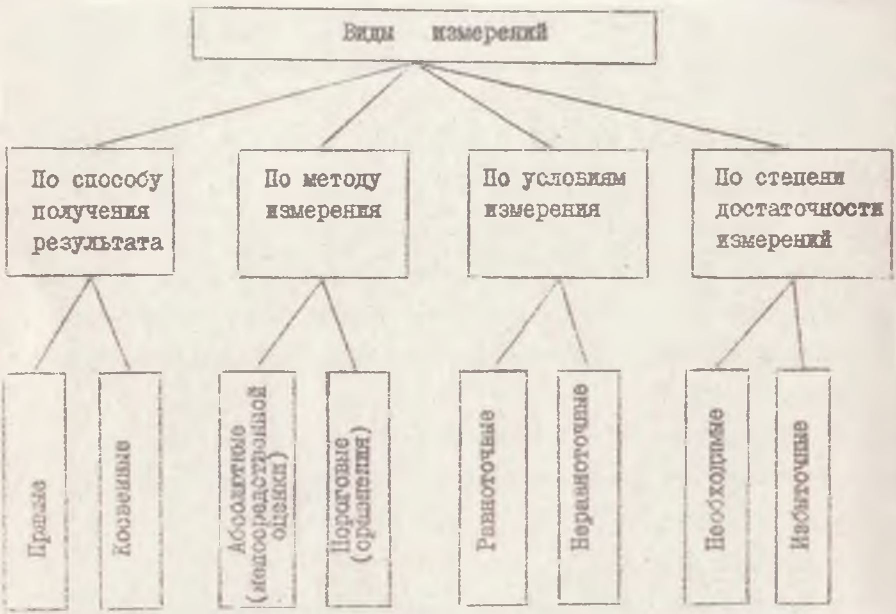
Количественная сторона физической величины характеризуется значением физической величины. З н а ч е н и е ф и з и ч е с к о й в е л и ч и н ы – это её оценка в виде некоторого числа принятых для неё единиц [I]. Можно также сказать, что значение физической величины показывает, сколько раз в данной величине содержится однородная ей физическая величина, выбранная за единицу измерения (меру).

Процесс нахождения значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств называется и з м е р е н и е м. Процесс измерения можно представить в виде схемы, приведенной на рис. I.

В связи с большой важностью процесса измерения для науки и техники, а также многообразием измеряемых величин существует целый ряд видов измерений. Классификация видов измерений в зависимости от различных признаков приведена на рис.2.


Значение физической величины
Вспомогательное приспособление
Единица измерения
Измерительный прибор
Вид измерения

Р и с. I


Виды измерений
По способу получения результата
По методу измерения
По условиям измерения
По степени достаточности измерений
Прямые
Косвенные
Абсолютные (непосредственной оценки)
Пороговые (ощущения)
Равноточные
Неравноточные
Необходимые
Избыточные

Р и с. 2

П р я м о е   и з м е р е н и е – измерение, при котором искомое значение измеряемой величины находится непосредственно из опытных данных [I]. Примеры прямых измерений: измерение длины линейкой или штангенциркулем, измерение температуры термометром и т.д.

К о с в е н н о е   и з м е р е н и е – такое измерение, при котором искомое значение физической величины находят на основании известной функциональной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям [I] (определение объема тела по его геометрическим размерам, определение плотности тела по массе и объему и т.д.).

Деление измерений по этому признаку до некоторой степени является условным, так как на практике часто встречаются различные сочетания прямых и косвенных измерений.

Измерения можно классифицировать и по методу измерений (рис.2). М е т о д   и з м е р е н и я – это совокупность приемов использования принципов и средств измерения [I]. Основных методов два: метод непосредственной оценки, когда искомое значение измеряемой величины определяется непосредственно по отсчетному устройству, и метод сравнения, когда искомое значение измеряемой величины определяется путем сравнения с известной величиной. Примерами метода непосредственной оценки являются: отсчет по шкале термометра, линейки, электроизмерительного прибора и т.д.; а примером метода сравнения является взвешивание на рычажных весах.

Р а в н о т о ч н ы е   измерения проводятся в одинаковых условиях, определяющих общую точность измерений. Н е р а в н о т о ч н ы е   измерения не отвечают этим условиям.

Однако из-за несовершенства измерительной аппаратуры при любых измерениях получаются лишь приближенные значения измеряемых величин. Это означает, что проводя измерения мы допускаем некоторые погрешности. В задачу измерений, кроме определения значения измеряемой величины, входит оценка допущенных погрешностей.

2. Погрешности при измерениях и их классификация

Погрешности принято классифицировать в соответствии со схемой, приведенной на рис. 3.

Р и с. 3

<u>Абсолютная погрешность</u> равна разности между результатом измерения x искомой величины и её истинным значением x_0:

$$\Delta x = x - x_0 . \tag{I}$$

<u>Относительная погрешность</u> называется погрешность, приходящаяся на единицу измеряемой величины. Она обычно выражается в процентах:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_0} \cdot 100\% . \tag{2}$$

<u>Приведенная погрешность</u> относится не к конкретному значению измеряемой величины, а к её максимально возможному значению или к максимальному значению шкалы прибора x_{max}:

$$\delta_{пр} = \frac{\Delta x}{x_{max}} \cdot 100\% . \tag{3}$$

Погрешности, рассчитываемые по формулам (I)-(3), являются в общем случае полными погрешностями, так как они состоят из случайной систематической и грубой составляющих.

Случайная погрешность - составляющая полной погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины [I]. Она обусловлена большим числом как объективных, так и субъективных причин, действие которых на каждое измерение не может быть учтено заранее. Обычно известны только числовые характеристики закона распределения погрешностей измерений. Например, при измерении периода колебаний маятника к случайному разбросу результатов приводят многие независимые факторы: непостоянство реакции экспериментатора при включении и выключении секундомера, случайные изменения угла зрения при определении полного колебания, непостоянство трения в пусковом механизме секундомера и др.

Систематическая погрешность - это составляющая полной погрешности, которая от измерения к измерению остается либо постоянной, либо изменяется по какому-то определенному закону. Так, систематическая погрешность возникает, если смещен нуль прибора или неправильно отградуирована его шкала. Недостаточное наполнение ртутью баллончика термометра приведёт также к постоянному смещению результатов.

В общем случае систематические погрешности принято разделять на две большие группы с известной и неизвестной величиной погрешности. Так, все измерительные приборы, работающие в нормальных условиях, обладают известной систематической погрешностью - приборной. Эта погрешность определяется классом точности прибора. Для прибора с классом точности ε_T абсолютная систематическая погрешность измеряемой величины x определяется из формулы

$$\Delta x = \frac{\varepsilon_T \cdot x_{max}}{100\%}, \tag{4}$$

где x_{max} - интервал значений рабочей шкалы прибора. Если на приборе не указан класс точности, то считают, что систематическая погрешность такого прибора равна половине цены деления прибора. Например, для линейки с ценой деления I мм систематическая погрешность составляет 0,5 мм, а для термометра с ценой деления IК она равна 0,5К.

Систематическая погрешность неизвестной величины может возникать тогда, когда прибор работает не в нормальных условиях (повышенная или пониженная температура, давление, влажность и т.д.), используемые физические законы не точно описывают процесс, а также из-за свойств и условий обработки измеряемых объектов.

Физический анализ условий измерения позволяет, в принципе, обнаружить, исключить, либо учесть в виде поправок все систематические погрешности часто до выполнения самих измерений. Однако реальные трудности такого учета резко возрастают при повышении точности измерений.

Важно отметить, что, несмотря на принципиальное отличие систематических и случайных погрешностей, систематическую погрешность часто можно перевести в случайную. Для этого надо организовать измерения таким образом, чтобы постоянный (систематический) фактор, влияющий на результат измерений, при каждом повторном измерении действовал разным образом, т.е. результат его действия носил случайный характер.

Этот прием превращения систематической погрешности в случайную называется р а н д о м и з а ц и е й. Он позволяет учесть многие неизвестные систематические погрешности.

Так, при изготовлении цилиндра, его диаметр из-за постепенного износа резца будет в разных местах различным. Проводя измерения диаметра в различных, случайно выбранных точках, мы переведем систематические погрешности, связанные с условиями изготовления детали, в случайные погрешности результатов измерений.

Для рандомизации процесса измерения часто используют вместо одного целый набор приборов.

Грубая погрешность (промах) вызывается просчетом экспериментатора, неисправностью средств измерений, неучетом резко изменившихся внешних условий и т.д. Грубые погрешности приводят к явному искажению результатов, поэтому при обработке результатов измерений их надо исключить.

Выявить уже сделанные промахи можно, анализируя полученные результаты с помощью теории вероятностей.

3. Источники погрешностей

Процесс измерения является сложным процессом, состоящим из нескольких этапов (операций). На каждом из этих этапов различные факторы могут приводить к появлению погрешностей. Поэтому полная погрешность измерения будет складываться из составляющих, имеющих различное происхождение. Эти составляющие в зависимости от источника погрешности можно представить в виде схемы, приведенной на рис.4.

Рис. 4

Погрешность измерительного прибора может содержать как случайную, так и систематическую составляющую. Эта погрешность определяется классом точности прибора и указывается либо на самом приборе, либо в паспорте, прилагаемом к прибору.

Погрешность отсчета по шкале прибора может возникнуть как из-за того, что записываемый результат выражается конечным числом значащих цифр, так и из-за неопытности оператора.

Погрешность эксперимента состоит так же из систематической и случайной составляющих. Примеры этой погрешности были даны нами в разделе 2.

Наконец, в процессе математической обработки результатов измерений могут появиться дополнительные погрешности, связанные с вычислением и округлением получаемых величин. В п.7 даны практические рекомендации, позволяющие учитывать эту погрешность. В дальнейшем будем считать, что погрешность вычислений существенно меньше погрешностей прибора и эксперимента.

Сформулируем теперь задачи измерения.

4. Задачи измерений

При измерении физической величины ставятся две задачи:

I. Найти число, наилучшим образом отражающее значение физической величины x_0.

2. Определить величину погрешности измерения и вероятность, с которой она найдена.

В зависимости от преобладания случайной или систематической погрешностей решение этих задач будет различным. Поэтому рассмотрим раздельно три случая:

I. Систематическая погрешность известна, и она существенно больше случайной погрешности.

2. Случайная погрешность измерения существенно больше систематической погрешности.

3. Случайная погрешность измерения является величиной сравнимой

с систематической погрешностью.

Рассмотрим первый случай.

5. Обработка результатов прямых измерений

5.I. Влияние систематических погрешностей на результат измерений

В этом случае задача измерения решается наиболее просто, так как число, отражающее наилучшим образом значение физической величины, находится путем одного измерения этой величины, погрешность измерения равна систематической погрешности, а вероятность, с которой она найдена, равна вероятности нахождения систематической погрешности. Например, надо произвести измерение длины бруска стальной линейкой с ценой деления I мм. Систематическая погрешность этого прибора равна 0,5 мм. Измерения показали, что измеряемая длина незначительно (менее чем на 0,5 мм) превышает 330 мм и при повторных измерениях практически не меняется. Поэтому можно сделать вывод, что систематическая погрешность прибора (0,5 мм) преобладает над случайной погрешностью измерения. Таким образом, число, наилучшим образом отражающее истинное значение физической величины, равно 330 мм. Пусть измерения проводятся при температуре 27°C. Следовательно систематическая погрешность эксперимента, связанная с тепловым расширением линейки, равна:

$$\Delta_э = \ell_0 \alpha_T \Delta T = 330 \cdot 1{,}06 \cdot 10^{-5}(27-20) \simeq 0{,}02 \text{ мм},$$

где ℓ_0 - длина линейки; α_T - коэффициент температурного расширения. Эта величина много меньше, чем систематическая погрешность прибора, поэтому погрешность измерения будет равна 0,5 мм. Доверительная вероятность возникновения этой погрешности 0,5 мм определяется условиями изготовления линейки и для большинства приборов равна 0,95. Окончательный результат измерения записываем в виде

$$l = (330{,}0 \pm 0{,}5)\cdot 10^{-3}\ \text{м};$$

$$\varepsilon_l = \frac{0{,}5 \cdot 100}{330} = 0{,}2\%.$$

Доверительная вероятность $\alpha = 0{,}95$.

Рассмотрим второй случай.

5.2. Влияние случайных погрешностей на результат измерений

Допустим, что все систематические погрешности у нас учтены, т.е. поправки, которые следовало определить, вычислены, класс точности измерительного прибора известен и есть уверенность, что отсутствуют какие-либо существенные и неизвестные нам источники систематических погрешностей.

В этом случае результаты измерений не свободны от случайных погрешностей. Если случайная погрешность окажется меньше систематической, то очевидно, нет смысла пытаться еще уменьшить величину случайной погрешности - все равно результаты измерений не станут от этого заметно точнее, и, желая получить большую точность, нужно искать пути к уменьшению систематической погрешности. Наоборот, если случайная погрешность больше систематической, то именно случайную погрешность нужно уменьшать в первую очередь.

Поэтому рассмотрим случай, при котором систематическая погрешность существенно меньше случайной. При этом результаты отдельных измерений будут отличаться от истинного значения измеряемой величины как в большую, так и в меньшую сторону, т.е. абсолютные погрешности отдельных измерений $\Delta x = x_0 - x$ могут быть и положительными, и отрицательными.

Как оценить величину погрешности серии измерений? На этот вопрос, если число измерений в серии достаточно велико (по крайней мере, больше 20), отвечает классическая теория погрешностей, основанная на трех естественных предположениях, называемых постулатами Гаусса:

1. Погрешности измерений могут принимать непрерывный ряд значений.
2. Появление равных по величине, но противоположных по знаку погрешностей равновероятно.
3. Вероятность появления погрешности уменьшается с ростом её абсолютной величины.

В этом разделе мы будем использовать некоторые понятия теории вероятностей, с которыми можно познакомиться в приложении I.

Используя постулаты Гаусса, рассмотрим решение первой задачи теории измерения о нахождении числа, наилучшим образом отражающего значение физической величины.

Проведем серию из n измерений некоторой физической величины x_0. При этом мы получим следующие значения: x_1, x_2, ..., x_n. То есть, каждое значение будет получено с абсолютной погрешностью Δx_i:

$$\Delta x_1 = x_0 - x_1$$

$$\Delta x_2 = x_0 - x_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta x_n = x_0 - x_n\ .$$

Сложив почленно полученные равенства, будем иметь:

$$x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\ . \tag{5}$$

При бесконечно большом числе измерений ($n \to \infty$), в силу постулатов Гаусса, среднее арифметическое значение абсолютной погрешности обратится в нуль:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = 0.$$

Поэтому, истинное значение физической величины будет равно среднему арифметическому значению бесконечной серии измерений или математическому ожиданию случайной величины:

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n} x_i = \lim_{n \to \infty} \bar{x} = M(x).$$

При ограниченном числе измерений равенство (5) можно записать в виде

$$x_0 = \bar{x} \pm \Delta x , \tag{6}$$

где $$\Delta x = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \right| .$$

Таким образом, при ограниченном числе измерений,измеряемая величина лежит внутри интервала $[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x]$, определяемого погрешностью серии измерений Δx. Для того, чтобы найти границы этого интервала, необходимо установить, с какой частотой появляются погрешности различной величины, т.е. установить закон распределения погрешностей. Теория вероятностей помогает найти этот закон.

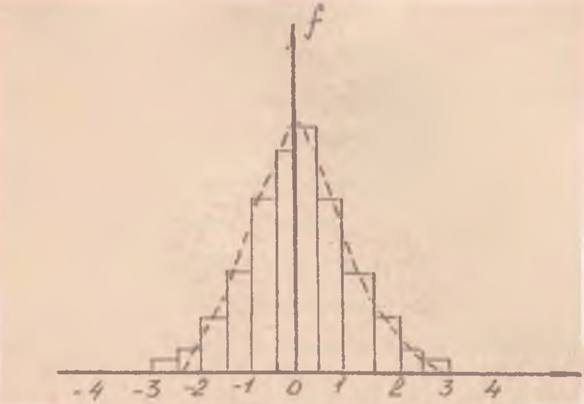
Разобьем полный интервал измерения переменной величины на более узкие интервалы и будем определять, с какой частотой появится погрешность в данном узком интервале.

При большом числе измерений относительная частота появления погрешностей в интервале имеет вид ступенчатой кривой (гистограммы), изображенной на рис.5. На этом рисунке показаны I2 узких интервалов.

При стремлении ширины узкого интервала к нулю и числа измерений к бесконечности ломаная линия превращается в плавную кривую распределения погрешностей, описываемую соотношением:

$$f(\Delta x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta x_i)^2}{2\sigma^2}} . \tag{7}$$

Функция $f(\Delta x_i)$ называется плотностью распределения вероятностей погрешности Δx_i. Здесь e – основание натуральных логарифмов; σ – некоторый параметр распределения.



Р и с. 5

Приведенный закон называется законом нормального распределения Гаусса. Пример кривых Гаусса дан на рис.6.

Р и с. 6

В этом законе максимум кривой соответствует

$$\Delta x_i = x_0 - x_i = 0 \ .$$

Следовательно, при бесконечно большом числе измерений истинное значение измеряемой величины оказывается наиболее вероятным.

Входящий в закон распределения Гаусса параметр σ называется д и с п е р с и е й. Эта величина характеризует разброс погрешностей: при большом значении дисперсии кривая расплывается, в случае $\sigma=2$ большие отклонения от истинного значения измеряемой величины встречаются чаще, чем в случае $\sigma=0,5$.

Величина σ зависит от условий измерений и может быть приближенно выражена через измеряемые величины.

Можно показать, что если число измерений очень велико $(n \to \infty)$, то величина дисперсии оказывается равной:

$$\sigma_{x_n}^2 = \Delta S_{x_n}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i^2)}{n} \ .$$

При ограниченном числе измерений приближенным выражением для дисперсий распределения погрешностей результата серии измерений будет

$$\sigma_{\bar{x}}^2 \simeq \Delta S_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n(n-1)} \ . \qquad (8)$$

В этом случае погрешность отдельного измерения Δx_i находится как разность между средним арифметическим значением и результатом данного измерения, т.е. $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$.

После того как выполнена серия измерений и получено среднее арифметическое значение этой серии, а так же определена дисперсия этих измерений, можно определить, на сколько среднее арифметическое значение отличается от истинного значения измеряемой величины. Для этого в теории погрешностей пользуются понятиями доверительный интервал и доверительная вероятность. Эти понятия взаимосвязаны и определяются следующим образом.

Вероятность того, что среднее значение x лежит в интервале $x_0 - \Delta x \leqslant \bar{x} \leqslant x_0 + \Delta x$ будет

$$\alpha = \int_{-\Delta x}^{+\Delta x} f(\Delta x_i)\, d\Delta x_i \qquad (9)$$

и равна заштрихованной площади на рис.6 (Δx =0,5). Такой же, очевидно, будет и вероятность того, что истинное значение величины x_0 лежит в интервале $\bar{x} - \Delta x \leqslant x_0 \leqslant \bar{x} + \Delta x$.

Очевидно, чем больший интервал мы берем, тем больше вероятность того, что измеряемая величина попадет в этот интервал. Таким образом, задаваясь одной из этих величин (например, вероятностью), можно вычислить другую (границы интервала, внутри которого находится значение измеряемой величины).

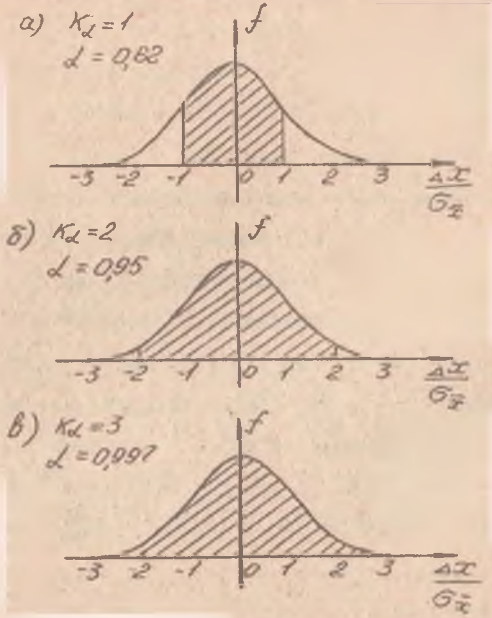
Доверительным интервалом погрешности Δx называется интервал $[\bar{x} - \Delta x_{гр}, \bar{x} + \Delta x_{гр}]$, в пределах которого содержится истинное значение измеряемой величины с заданной вероятностью α. Доверительной вероятностью α или надежностью результата серии измерений называется вероятность того, что истинное значение измеряемой величины содержится в доверительном интервале $[\bar{x} - \Delta x_{гр}, \bar{x} + \Delta x_{гр}]$.

Часто $\Delta x_{гр}$ представляют в виде $\Delta x_{гр} = K_\alpha \sigma_{\bar{x}}$, где $\sigma_{\bar{x}}$ вычисляется по формуле (8), а K_α – коэффициент, зависящий только от доверительной вероятности (приведен в приложении 3).

Рассмотрим пример нахождения доверительной вероятности α по заданной величине $\Delta x_{гр}$. Возьмем $\Delta x_{гр} = \pm \sigma_{\bar{x}}$. Чтобы найти доверительную вероятность α, нужно вычислить площадь под кривой, ограниченной ординатами $-\sigma_{\bar{x}}$ и $\sigma_{\bar{x}}$, то есть вычислить интеграл (9). Результаты таких вычислений приведены в приложении 3, из которых находим α = 0,68. Если выбрать $\Delta x_{гр} = \pm 2\sigma_{\bar{x}}$, то α =0,95, а если $\Delta x_{гр} = \pm 3\sigma_{\bar{x}}$, то α =0,997.

Это значит, что за пределы доверительного интервала попадает в первом случае 32% результатов измерений, во втором случае 5%, а в третьем случае лишь 0,3%.

На рис. 7 приведены графики зависимости доверительной вероятности (заштрихованная площадь кривой) от величины доверительного интервала. Дисперсия распределения $\sigma_{\bar{x}} = 1$.



Р и с. 7

Описанный метод вычисления погрешностей применим, как уже было сказано, при большом числе измерений. Если n не очень велико ($n < 20$), то среднеквадратичные оценки S_x^2 и $S_{\bar{x}}^2$ сами являются случайными величинами и в лучшем случае дают лишь представление о порядке дисперсий σ_x^2 и $\sigma_{\bar{x}}^2$. Поэтому при нахождении границ доверительного интервала мы не можем пользоваться коэффициентами $K_\alpha = \frac{\Delta x_{гр}}{\sigma_{\bar{x}}}$, так как $\sigma_{\bar{x}}$ нам неизвестна.

Чтобы можно было пользоваться аналогичным методом оценки погрешностей при $n \leq 20$, пришлось ввести новый коэффициент. Он был впервые предложен в 1908 году английским математиком Госсетом, который установил, что при малых n случайные погрешности подчиняются другому распределению - распределению Стьюдента. (Госсет публиковал свои работы под псевдонимом "Стьюдент" - студент, поэтому открытое им распределение и коэффициент впоследствии стали называться распределением и коэффициентом Стьюдента). При $n > 20$ распределение Стьюдента очень мало отличается от распределения Гаусса.

Распределение Стьюдента позволяет по заданной величине доверительной вероятности α найти границы доверительного интервала по формуле

$$\Delta x_{гр} = t_\alpha(n) S_{\bar{x}} \tag{7}$$

и, наоборот, по заданному значению $\Delta x_{гр}$ определить, с какой вероятностью истинное значение измеряемой величины будет лежать внутри интервала $[\bar{x} - \Delta x_{гр}, \bar{x} + \Delta x_{гр}]$.

Коэффициенты Стьюдента для различных n и различных доверительных вероятностей α вычислены и приведены в приложении 3.

Вычисления при обработке результатов прямых измерений рекомендуется проводить в следующем порядке:

1. Записать результат каждого измерения x_i в таблицу.

2. Вычислить среднее арифметическое значение серии из n измерений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

3. Найти абсолютную погрешность отдельных измерений:

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i .$$

4. Вычислить квадраты абсолютных погрешностей отдельных измерений:

$$(\Delta x_i)^2 .$$

5. Определить среднюю квадратичную погрешность результата серии измерений:

$$\Delta S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}{n(n-1)}}.$$

6. Задать значение надежности α.

7. Определить коэффициент Стьюдента $t_\alpha(n)$ для заданной надежности α и числа произведенных измерений n.

8. Найти границу доверительного интервала абсолютной погрешности:

$$\Delta x_{гр} = t_\alpha(n) \cdot \Delta S_{\bar{x}}.$$

9. Окончательный результат записать в виде

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_{гр};$$

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{\Delta x_{гр}}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

Доверительная вероятность равна α.

<u>Примечание</u>. В разделах 5.I и 5.2 были рассмотрены случаи, при которых систематическая погрешность существенно превышала случайную и случайная погрешность существенно превышала систематическую. Однако в практике измерений часто имеет место случай, при котором значение границы доверительного интервала $\Delta x_{гр}$ сравнимо с систематической погрешностью δ. В этом случае погрешность измерений вычисляют по формуле

$$\Delta x_n = \sqrt{\Delta x_{гр}^2 + \left(\frac{K_\alpha}{3}\right)^2 \delta^2},$$

где $K_\alpha = t_\alpha(\infty)$ при значении надежности α, заданной в пункте 6.

В этом случае окончательный результат (п.9) записывают в виде

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_n,$$

а относительную погрешность вычисляют по формуле

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{\Delta x_n}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

6. Обработка результатор косвенных измерений

До сих пор мы говорили о прямых измерениях величины x. Однако большинство измерений являются косвенными, поэтому необходимо знать, как находить погрешности косвенных измерений.

Задача ставится следующим образом. Предположим, что проводится косвенное измерение какой-то величины $y = F(x, z, u, t \ldots)$ на основе прямых измерений величин x, z, u, t, ... Требуется найти число, наилучшим образом отражающее значение физической величины y, а также определить величину погрешности измерения и вероятность, с которой она найдена. Для решения этой задачи существует два способа.

Первый способ. Первый способ применим, если систематические погрешности величин x, z, u, t, ... либо устранены, либо пренебрежимо малы по сравнению со случайными. Проводим прямые измерения величин x, z, u, t, ... :

$$x_1;\ x_2;\ \ldots x_n$$
$$z_1;\ z_2;\ \ldots z_n$$
$$u_1;\ u_2;\ \ldots u_n$$
$$t_1;\ t_2;\ \ldots t_n$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Так как x_i, z_i, u_i, t_i, ... - случайные величины, то и $y_i = F(x_i, z_i, u_i, t_i, \ldots)$ тоже является случайной величиной. Поэтому для каждой совокупности значений величин (x_i, z_i, u_i, t_i, ...) вычисляем величину y_i:

$$y_1 = F(x_1, z_1, u_1, t_1, \ldots)$$
$$y_2 = F(x_2, z_2, u_2, t_2, \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = F(x_n, z_n, u_n, t_n, \ldots)$$

и полученный ряд значений y_i обрабатываем, по правилам п.5.2 как и результат прямых измерений. Окончательный результат записываем в виде

$$y = \bar{y} \pm \Delta y_{гр},$$

где $\bar{y} = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{t}, \ldots)$.

Второй способ. Проводим прямые измерения величин x, z, u, t, ...:

$$x_1;\ x_2;\ \ldots\ x_n$$
$$z_1;\ z_2;\ \ldots\ z_n$$
$$u_1;\ u_2;\ \ldots\ u_n$$
$$t_1;\ t_2;\ \ldots\ t_n$$

Величины x, z, u, t, ... обрабатываем по правилам п.5.2 как результат прямых измерений при одном и том же значении надежности α. Окончательный результат представляем в виде

$$y = \bar{y} \pm \Delta y_{гр},$$

где $\bar{y} = F(\bar{x}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{t}, \ldots)$.

Величина $\Delta y_{гр}$ вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta y_{гр} = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 (\Delta x_{гр})^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 (\Delta z_{гр})^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 (\Delta u_{гр})^2 + \ldots}, \qquad (10)$$

где $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ – частные производные функции $y = F(x, z, u, \ldots)$ по переменным x, z, u, ... соответственно, вычисленные при $x = \bar{x}$, $z = \bar{z}$, $u = \bar{u}, \ldots$

Частная производная от функции многих переменных по одной из них, например по x, находится как обычная производная, при этом все другие переменные z, u, ... считаются постоянными.

<u>Примечание</u>. Если функция y имеет вид $y = x^{\beta} z^{\gamma} u^{\eta}$, то выражение (10) можно представить в аналитическом виде удобном для расчетов. Выполнив операции, указанные в (10), можно относительную погрешность ε_y измерения величины y представить в виде

$$\varepsilon_y = \sqrt{(\beta \varepsilon_x)^2 + (\gamma \varepsilon_z)^2 + (\eta \varepsilon_u)^2}. \qquad (11)$$

Так как предварительно мы уже провели обработку прямых измерений и нам известны относительные погрешности ε_x, ε_z, ε_u, то проще сначала найти относительную погрешность косвенного измерения ε_y по формуле (II), а уже после этого подсчитать абсолютную погрешность, т.е. границы доверительного интервала:

$$\Delta y_{гр} = \frac{\varepsilon_y \cdot \bar{y}}{100\%} .$$

7. Правила приближенных вычислений

Как было отмечено в п.3, одним из источников погрешностей является округление чисел при вычислениях. С другой стороны, необоснованное увеличение точности вычислений приводит к возрастанию трудоемкости обработки результатов и в ряде случаев не приводит к уменьшению погрешностей измерений. Поэтому точность обработки числового материала должна быть согласована с точностью самих измерений.

Количество значащих цифр в окончательной записи результата измерений определяется величиной абсолютных погрешностей. Однако погрешность при определении абсолютных погрешностей довольно велика, поэтому обычно значение абсолютной погрешности округляется до одной значащей цифры, а при особо точных измерениях - до двух значащих цифр. В результатах лабораторного практикума в абсолютной погрешности нужно оставлять только одну значащую цифру.

Ошибка, получающаяся в результате вычислений, должна быть примерно на порядок меньше суммарной ошибки измерений, то есть в промежуточных вычислениях погрешностей достаточно оставлять только две значащие цифры.

При отбрасывании лишних значащих цифр необходимо руководствоваться следующими правилами округлений:

I. Если первая отбрасываемая цифра больше пяти, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Если отбрасываемая цифра меньше пяти, то последняя цифра остается без изменений.

2. Если отбрасываемая цифра пять, а последующих цифр младших разря-

дов нет или они неизвестны, то сохраняемая четная цифра увеличивается на единицу.

3. Запись чисел необходимо выполнять по возможности в нормализованной форме, например, число 264 записывается так $2{,}64\cdot 10^2$, число 0,012 – $1{,}2\cdot 10^{-2}$. При округлении целых чисел все цифры, отброшенные при округлении, заменяются множителем 10^n. При округлении десятичных дробей цифры, стоящие после запятой, просто отбрасываются, нулями их заменить нельзя, так как нуль в конце десятичной дроби характеризует точность.

4. При сложении и вычитании все слагаемые округляются до сомнительной цифры, стоящей в самом высшем разряде, а затем выполняется операция.

5. При умножении и делении в полученном результате будет столько значащих цифр, сколько в исходном данном с наименьшим количеством значащих цифр. Поэтому следует предварительно округлить все числа, до сомнительной цифры, стоящей в самом высшем разряде, а затем выполнить операцию.

6. При возведении в степень и извлечении корня у приближенного числа должно быть оставлено значащих цифр столько, сколько их в основании.

7. При логарифмировании в мантиссе приближенного числа берется столько значащих цифр, сколько их в логарифмируемом числе.

8. Графическое представление результатов измерений

На практике большое распространение получили графики, изображающие функциональную зависимость искомой величины от одной либо от двух переменных в двумерной системе координат. Чтобы построить график, необходимо:

1. Провести ряд измерений искомой величины при нескольких значениях переменной (большое значение имеет выбор числа эксперимен-

тальных точек, то есть совокупности численных значений аргумента и функции). В местах перегибов, минимумов, максимумов, крутых скачков число точек должно быть большим, чем в областях плавного изменения функции. Поэтому перед началом работы следует провести несколько предварительных измерений по всему диапазону изменения переменных, чтобы составить общее представление об исследуемой зависимости и наметить план эксперимента.

2. Установить интервал изменения аргумента и функции и выбрать масштаб по осям координат. Рекомендуется выбирать масштаб, кратный 10^n, $2 \cdot 10^n$, $5 \cdot 10^n$, где n - любое целое число, положительное или отрицательное. Например, I см - 20 Ом или I см - $5 \cdot 10^{-1}$ А. Выбор масштаба I см - 30 Ом или I см - $4 \cdot 10^{-2}$ А следует считать неудачным. Такой график трудно построить и неудобно использовать в дальнейшей работе.

Начало отсчета следует выбирать так, чтобы отрезки по осям координат, которые определяются форматом листа миллиметровки, несколько перекрывали интервалы изменения аргумента и функции.

3. Нанести на поле графика экспериментальные точки. Если проведено несколько серий измерений, то рекомендуется точки каждой серии отмечать условными значками - кружочками, треугольниками, квадратами и т.д.

4. Построить график исследуемой функции, который в подавляющем большинстве случаев должен представлять собой плавную непрерывную кривую. При этом необходимо следить, чтобы число точек под кривой и над ней было по возможности одинаково. Описанный способ построения графиков существенно сглаживает "шум" эксперимента, обусловленный наличием случайных погрешностей, однако требует от экспериментатора некоторых предварительных представлений о возможном ходе искомой зависимости.

5. Если на графике для сравнения с экспериментом приводят тео-

ретическую кривую, то точки, по которым её проводят, выбирают по своему усмотрению. Наносить их нужно без нажима, лучше всего карандашом, чтобы при необходимости можно было стереть. Экспериментальные же данные следует отмечать жирными, хорошо выделяющимися точками, сначала тоже карандашом.

6. Если на графике имеется теоретическая кривая, то плавную кривую через экспериментальные точки можно не проводить.

7. Оценить погрешность полученного графического представления искомой зависимости. Для выполнения этой операции можно воспользоваться методом обработки при прямых измерениях, применяя его к нескольким экспериментальным точкам, выбираемым на кривой в характерных участках, например, в начале кривой, в точках перегиба, экстремумов, в конце кривой. При этом в качестве среднего арифметического берется точка, лежащая непосредственно на кривой.

Запись полученных погрешностей может даваться либо в численном виде, особенно когда погрешность почти постоянна по всей кривой, либо отмечается непосредственно на графике в соответствующих точках в виде отрезков прямой, длина которых равна погрешности (с учетом масштаба). Последний способ часто применяется для указания на графике разброса экспериментальных точек.

8. График выполняется на миллиметровке, подклеивается в журнал лабораторных работ и снабжается подписью, разъясняющий его смысл. На рис.8 приведен пример выполнения такого графика.

Здесь представлена зависимость результатов измерения температуры от времени нагрева образцов из различных материалов. Каждая точка на графиках является средней величиной трех измерений температуры. Если на одном рисунке приводится несколько кривых, то для каждой из них выбирают свое обозначение экспериментальных точек. Использованные обозначения надо обязательно расшифровать либо в подписи под рисунком, либо в тексте, где описывается данный график.

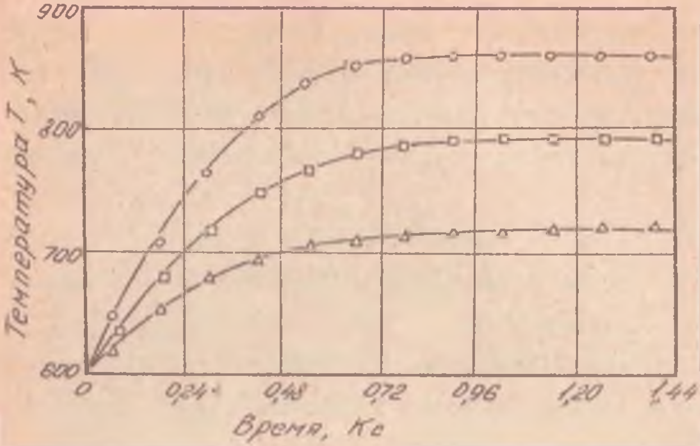


Рис.8. Зависимость температуры от времени нагрева образцов: △ - образец №I, □ - образец №2, ○ - образец №3

9. Указания к выполнению лабораторных работ

9.I. Требования, предъявляемые к оформлению лабораторных работ

Результаты измерений необходимо записывать и обрабатывать определенным образом. Разумная форма записи предупреждает грубые ошибки при выполнении измерений, экономит время, позволяет по записям быстро понять смысл работы.

Результаты измерений записываются только в журнал лабораторных работ без какой-либо обработки. Чтобы не внести арифметических ошибок, не следует заниматься переписыванием результатов со всевозможных черновиков, так как это приводит к потери времени и ошибкам. Цифры следует записывать чётко, вместо исправлений зачеркивать ненужную запись и писать рядом. Для этого надо оставлять в таблицах несколько пустых строк и вообще делать таблицы достаточно просторными.

Всю подготовительную работу (оформление вводной части, вычерчивание таблиц, подготовка миллиметровой бумаги для графиков и т.д.) следует выполнять обязательно накануне с тем, чтобы в лаборатории только производить измерения, записывать и обрабатывать результаты измерений.

Правильно оформленная лабораторная работа - это отчет, основу которого составляют три части. В первой, вводной части, описывается установка и применяемый метод измерения. Во второй, основной части должны содержаться результаты всех прямых измерений. Итоговые результаты эксперимента и выводы приводятся в третьей части.

9.I.I. Оформление вводной части

Вводная часть должна содержать краткое описание примененного метода измерений и основных элементов установки. Можно рекомендовать следующую схему оформления вводной части.

I. Указать название работы.

2. Нарисовать чертеж, рисунок или схему, поясняющую идею применяемого метода измерения. На чертеже обозначить характерные величины.

3. В одном-двух предложениях сформулировать идею метода измерений.

4. Привести основные расчетные формулы.

5. Привести обозначения и названия величин, встречающихся в задаче.

6. Указать название, диапазон измерения, цену деления и погрешности для всех используемых приборов.

7. Если лабораторная работа состоит из нескольких упражнений, то перечисленные пункты необходимо выполнить для каждого упражнения.

9.1.2. Запись результатов измерений

Результаты измерений заносятся в таблицы, вычерченные заранее в рабочей тетрадке по форме, указанной в описании лабораторной работы или составленной самостоятельно. Рекомендуется таблицы составлять следующим образом.

1. Сначала записывается номер таблицы и её название.

2. Каждый столбец (или строка) таблицы должны иметь свое название, обозначение и единицы измерения.

3. Разумно в первых столбцах записывать величины, играющие роль аргумента, а в последующих - роль функции.

4. Таблицы для записи результатов прямых измерений величин, погрешности которых будут обрабатываться по методике п.5.2 должны иметь вид

Таблица 1

Результаты определения периода колебаний

№	период, T_i, с	$\Delta T_i = \bar{T} - T_i$	$(\Delta T_i)^2$
1			
2			
.			
.			
.			
n			
	$\bar{T}$		$\Delta S_{\bar{T}}$

После окончания измерений проводятся расчеты. В журнале лабораторных работ для каждой рассчитываемой величины сначала записывается алгебраическая формула, затем переписывается та же формула с подставленными в неё числовыми значениями и, наконец, приводится результат вычислений.

9.I.3. Форма представления результатов эксперимента

В третьей части отчета нужно привести все итоговые результаты эксперимента и сделать необходимые выводы. Например:

I. Плотность тела равна:

$\rho = (2,6I \pm 0,02)\cdot 10^3$ кг/м^3, $\mathcal{E}_\rho$ =0,8%, результат получен с надежностью α =0,95.

2. Графики представляются в виде указанном на рис.8.

Рекомендуется также проанализировать достоинства и недостатки примененного метода измерений. В выводах можно отметить возможность уменьшения ошибок и сделать замечания по работе установки.

9.2. Порядок выполнения лабораторных работ

Каждая измерительная установка в лаборатории кафедры физики находится на отдельном столе. Перед тем, как приступить к сборке измерительной схемы, студент должен предъявить преподавателю конспект лабораторной работы, написанной в соответствии с п.9.I, сдать допуск по теоретической части.

При сборке схемы и выполнении лабораторной работы необходимо выполнять следующие правила:

I. Проверить соответствие имеющихся измерительных средств, перечисленных в описании лабораторной работы.

2. Расположить средства измерения так, чтобы работа с ними была удобной.

3. После сборки необходимо установить все ручки управления в нейтральное положение или положение, соответствующее минимуму напряжения.

4. Включать питание можно только после проверки схемы преподавателем или лаборантом и обязательно в их присутствии.

5. Если при работе установки обнаруживаются какие-либо неис-

правности, то необходимо немедленно выключить питание и обратиться к преподавателю или лаборанту.

6. Результаты наблюдений заносятся только в рабочие тетради.

7. После того как наблюдения закончены, следует выключить питание и представить тетрадь с результатами измерений преподавателю. Если в лабораторной работе имеется несколько упражнений, при выполнении которых необходимо частично или полностью изменять измерительную схему, то в этом случае нужно результаты показывать преподавателю после каждого упражнения.

8. Разбирать схему можно только после того, как преподаватель проверит полученные результаты.

9. После выполнения лабораторной работы следует навести порядок на рабочем столе.

10. Пример. Определение погрешности при измерении периода колебания маятника

В данной работе предлагается провести многократные измерения периода колебания маятника (при постоянной амплитуде) с помощью секундомера.

Выполнение эксперимента:

1. Установить длину маятника 1 м.

2. Вывести маятник из положения равновесия, задав амплитуду, например, 100 мм.

3. Отпустить маятник и после того, как будет совершено одно полное колебание его, измерить период одного следующего полного колебания. Для этого в момент прохождения маятником крайнего положения включить секундомер. При повторном прохождении этого же крайнего положения секундомер выключить.

4. Измерения, указанные в п.3, провести n раз, положив $n=60$.

5. Полученные значения периодов занести в таблицу 2.

6. Для построения гистограммы необходимо:

а) по горизонтальной оси отложить время, соответствующее полученным периодам колебаний, в масштабе 2,5 мм – 0,0I с, приняв за начало координат минимальное значение периода (см.рис.9). По вертикальной оси отложить число появлений того или иного периода в масштабе 5 мм – одно появление;

Таблица 2. Результаты измерения периода колебаний

i	T_i	ΔT_i	$(\Delta T_i)^2$
I			
2			
.			
.			
.			
60			
$\bar{T}$ =		σ =	

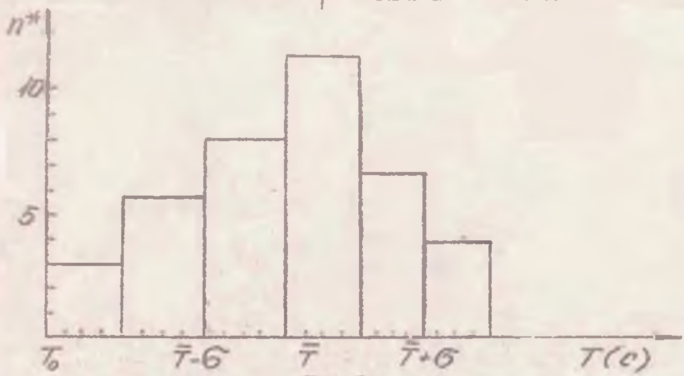


Рис.9.

б) обозначив минимальный период через T_0, подсчитать общее число появлений четырех периодов: T_0 с ; (T_0+0,0I)с ; (T_0 + +0,02)с ; (T_0+0,03) с . На отрезке T_0 с – (T_0+0,04)с построить прямоугольник с высотой, равной общему числу появлений этих четырех периодов;

в) подсчитать общее число появлений следующих четырех периодов: (T_0 +0,04) с; (T_0 +0,05) с; (T_0 +0,06) с; (T_0 +0,07) с. За основание соответствующего прямоугольника взять отрезок (+0,04)— – (T_0 +0,08) с. Высота прямоугольника должна быть равна соответствующему числу появлений периодов;

г) указанные построения проделать для всех периодов, полученных в эксперименте.

7. Провести обработку результатов измерений в следующем порядке:

а) вычислить среднее значение $\bar{T}$ из n измерений:

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_i \ ;$$

б) найти погрешности всех измерений

$$\Delta T_i = \bar{T} - T_i \ ;$$

в) вычислить квадраты погрешностей отдельных измерений

$$(\Delta T_i)^2 \ ;$$

г) определить среднюю квадратичную погрешность результата серии измерений

$$\sigma \approx \Delta S_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta T_i)^2}{n(n-1)}} \ ;$$

д) результаты, полученные в пунктах а, б, в, г занести в таблицу 2;

е) найти в справочной таблице (см. приложение 3) коэффициент Стьюдента $t_\alpha(n)$ для надежности α =0,95 и числа проведенных измерений n =60;

ж) определить полуширину доверительного интервала

$$\Delta T = t_\alpha(n) \Delta S_{\bar{T}} \ ;$$

з) окончательный результат записать в виде

$$\bar{T} \pm \Delta T \ ;$$

и) оценить относительную погрешность результата серии измерений

$$\varepsilon = \frac{\Delta T}{\bar{T}} \cdot 100\% \ .$$

8. На оси периодов T отметить среднеарифметическое значение $\bar{T}$, величину $\bar{T} - \sigma$ и $\bar{T} + \sigma$. При достаточно большом числе измерений в интервал $(\bar{T} - \sigma, \bar{T} + \sigma)$ должно попадать наибольшее число значений полученных периодов.

9. Для точных измерений периода колебаний маятника обычно используют метод, при котором измеряется время t большого числа n колебаний. Положив n =20, найти период колебания по формуле $T = \frac{t}{n}$ и сравнить этот результат со значением T, полученным в п.7а.

Приложение I

НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайным событием называется такое событие, которое в данных условиях может произойти, а может и не произойти, т.е. появление которого нельзя предсказать точно. Для примера представим игральный кубик с цифрами от I до 6 на гранях. Если кубик подбросить, то нельзя точно предсказать, какой цифрой вверх он упадет. Назовем событием выпадение какой-то определенной цифры, например, I. Очевидно, это событие случайное - цифра I может выпасть, а может и не выпасть.

Математической вероятностью события называется отношение числа случаев, в которых происходит это событие, к общему числу всех возможных равновероятных случаев. В нашем примере возможных случаев 6 (6 граней кубика). Из них один благоприятствующий нашему событию (выпадению цифры I). Отсюда вероятность выпадения цифры I при бросании кубика равна I/6. Обозначив число благоприятных событий n (в данном случае n =I), а число всех возможных событий m (в данном примере m =6), вероятность события можно записать как

$$P = \frac{n}{m} \, . \qquad (n.1)$$

Если бы на всех гранях кубика была только цифра I, то вероятность выпадения этой цифры была бы P_1 =I (всегда выпадает именно эта цифра). Таким образом, вероятность достоверного события равна единице. Если бы цифры I вообще не было на гранях кубика, то вероятность выпадения единицы была бы равна P_1 =0 (вероятность возможного события равна нулю). Вообще всегда

$$0 \leqslant P \leqslant I.$$

В данном случае нам известно общее число всех возможных равновероятных событий n . Но часто приходится определять вероятность какого-либо события, не зная возможного числа равновероятных событий. В этом случае пользуются другим, частотным определением вероятности. Пусть мы бросаем кубик N раз (не зная, какие цифры на его гранях). При этом цифра I выпадает n раз. Отношение $\frac{n}{N}$ называется относительной частотой события.

Чем больше N, тем меньше частота появления события $\frac{n}{N}$ отличается от математической вероятности этого события (закон больших чисел).

Теория вероятностей утверждает, что вероятность события (в нашем примере – вероятность выпадания цифры I) равна пределу частоты появления этого события при $N \to \infty$:

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{n}{N} .$$

Вероятность случайного события может быть определена любым из этих двух способов. При этом, очевидно, всегда выполняются два условия:

$$0 \leq P \leq 1$$

и $\sum_i P_i = 1$ (условие нормировки).

Определенная таким образом вероятность называется нормированной на единицу.

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Случайная величина x может принимать непрерывный ряд значений. Тогда нельзя говорить о вероятности данного значения x, так как эта вероятность всегда равна нулю (в знаменателе (пI) будет ∞). Можно судить только о вероятности того, что x попадает в какой-то определенный интервал dx. Обозначим эту вероятность dp (X). Величина

$$f(x) = \frac{dp(x)}{dx} . \qquad (п2)$$

называется плотностью вероятности. Из соотношения (п.2) видно, что

$$dP(x)=f(x)dx.$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Предположим, что какая-то случайная величина имеет n возможных значений.

Мы проводим N измерений, причем $N \gg n$ и получаем, что значение x_1 появилось m_1 раз, значение x_2 — m_2 раз, x_i — m_i раз и т.д. Тогда среднее значение величины x будет равно

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i .$$

Предел этого выражения при $N\to\infty$ называется математическим ожиданием случайной величины:

$$M(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i .$$

Это равенство можно записать, учитывая (п.I), в виде

$$M(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{N}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\lim_{N\to\infty}\frac{m_i}{N}=\sum_{i=1}^{n}x_i P_i ,$$

где P_i - вероятность того, что случайная величина имеет значение x_i

Если же величина x может принимать непрерывный ряд значений, то эта сумма будет представлена интегралом

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,dP(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x f(x)\,dx.$$

При $N\to\infty$, $\bar{x}\to M(x)$.

Приложение 2

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Прямые измерения.

Найти приборную погрешность δ, используемого измерительного прибора (п.2).

Провести несколько пробных измерений величины x. Расположить полученные результаты в ряд по мере возрастания величины x_1, x_2, ..., x_n и найти размах абсолютной погрешности $x_n - x_1$.

Если $\delta > 10(x_n - x_1)$, то значение физической величины определится в результате одного измерения этой величины (п.5.I).

Записать окончательный результат в виде:

$x = x_1 \pm \delta$, $\varepsilon_x = \dfrac{\delta}{x_1} \cdot 100\%$, надежность измерения α равна надежности, с которой найдена надежность приборной погрешности.

Если $10\,\delta < (x_n - x_1)$, то результаты измерений обработать по следующей методике (п.5.2):

I. Результаты каждого измерения x_i записываются в таблицу.

2. Вычисляется среднее значение из n измерений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

3. Находятся погрешности отдельных измерений:

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i .$$

4. Вычисляются квадраты погрешностей отдельных измерений $(\Delta x_i)^2$.

5. Если одно (или два) измерение резко отличается по своему значению от остальных, то следует проверить, не является ли оно грубой ошибкой.

6. Определяется средняя квадратичная погрешность серии измерений :

$$\Delta S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n(n-1)}} .$$

7. Задается значение надежности α. Выбор α зависит от требований, предъявляемых к результатам измерений. Однако при выполнении лабораторных работ с учебными целями, значение надежности может быть выбрано произвольно, например, 0,90 или 0,95.

8. Определяется коэффициент Стьюдента $t_\alpha(n)$ для выбранной надежности α и числа произведенных измерений n.

9. Находятся границы доверительного интервала (погрешность результата измерений):

$$\Delta x_{гр} = t_\alpha(n) \Delta S_{\bar{x}} .$$

10. Если значение погрешности результата измерений (определенная в п.9) окажется сравнимой со значением приборной погрешности, то границу доверительного интервала следует определять по формуле

$$\Delta x_{гр} = \sqrt{t_\alpha^2(n) \Delta S_{\bar{x}}^2 + t_\alpha^2(\infty) \left(\frac{\delta}{3}\right)^2},$$

где δ - величина приборной погрешности.

11. Окончательный результат записать в виде:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_{гр} ,$$

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%,$$ доверительная вероятность равна α.

Косвенные измерения.

Пусть искомая величина y связана с рядом величин x, z, u,..., определяемых непосредственно функциональной зависимостью $y = F(x, z, u...)$. В этом случае применяется следующий порядок обработки (п.6).

1. Для каждой серии измерений величин x, z, u,... проводится обработка, как и при прямых измерениях. При этом для всех величин задается одно и то же значение надежности α.

2. Оцениваются границы доверительного интервала для резуль-

тата косвенных измерений:

$$\Delta y=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2(\Delta x)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2(\Delta z)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2(\Delta u)^2\ldots},$$

где производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial u}$, ... вычисляются при $x=\bar{x}$, $z=\bar{z}$, $u=\bar{u}$, ...

3. Окончательный результат записывается в виде

$$y=F(\bar{x},\bar{z},\bar{u},\ldots)\pm\Delta y,$$

$\mathcal{E}=\frac{\Delta y}{y}\cdot 100\%$, доверительная вероятность равна α.

Приложение 3

ТАБЛИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ СТЬЮДЕНТА $t_\alpha(n)$

n	α						
	0,I	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99	0,999
2	0,I6	I	2	6,3	I2,7	63,7	636,6
3	0,I4	0,82	I,3	2,9	4,3	9,9	3I,6
4	0,I4	0,77	I,3	2,4	3,2	5,8	I2,9
5	0,I3	0,74	I,2	2,I	2,8	4,6	8,6
6	0,I3	0,73	I,2	2,0	2,6	4,0	6,9
I0	0,I3	0,70	I,I	I,8	2,3	3,3	4,8
20	0,I3	0,69	I,I	I,7	2,I	2,9	3,9
30	0,I3	0,68	I,I	I,7	2,0	2,8	3,7
40	0,I3	0,68	I,I	I,7	2,0	2,7	3,6
60	0,I3	0,68	I,0	I,7	2,0	2,7	3,5
∞	0,I3	0,67	I,0	I,6	2,0	2,6	3,3

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 16263-70. Метрология.- Термины.-М., 1970.
2. Касандрова О., Лебедев В. Обработка результатов наблюдений.- М.: Наука, 1970.
3. Зайдель А.И. Ошибки измерений физических величин.- Ленинград: Наука, 1974.
4. Лабораторный практикум по физике. Физические измерения.- Куйбышев: КуАИ.1977.
5. Деденко Л.Г., Керженцев В.В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента.- М.: МГУ, 1977.
6. Щиголев В.М. Математическая обработка наблюдений.- М.: Наука, 1969.
7. Крестьянников В.Н. Математическая обработка результатов эксперимента. - М.: МВТУ им.Н.Э.Баумана. 1975.
8. ГОСТ 8011-72. Показатели точности измерений и формы представления результатов измерений. Госкомитет стандартов. - М.,1972.
9. Долинский Е.Ф. Обработка результатов измерений.- М.: Комитет стандартов, 1973.

Содержание

Составители: Виталий Алексеевич Барвинок,
Валерий Иосифович Богданович, Александр Иванович
Косенко

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Редактор М.И.Л о г у н о в а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к

Подписано в печать I9.I2.83.
Формат 60x84 I/I6. Бумага оберточная белая.
Печать оперативная. Усл.п.л. 2,56. Уч.-изд.л. 2,0.
Т. 500 экз. Заказ 593 Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, I5I.

Офсетный участок КуАИ, г.Куйбышев,ул.Ульяновская, I8.