САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Контрольные работы

САМАРА 1999

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Контрольные работы для студентов-заочников

САМАРА 1999

Составитель: *Прокофьев Л. Н.*

УДК 510. 2(075)

Линейная алгебра: Контрольные работы для студентов-заочников/ Самарский гос. аэрокосмический ун-т ; Сост. *Л. Н. Прокофьев.* Самара, 1999, 87 с.

Контрольные работы по линейной алгебре предназначены для индивидуальной, самостоятельной работы студентов I курса факультета заочного обучения университета специальности 220 200 "Автоматизированные системы обработки информации и управления". Они включают в себя основные типы задач, необходимых для усвоения курса линейной алгебры.

Подготовлены на кафедре прикладной математики факультета информатики.

Печатаются по решению радакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королева

Семестр 1

Контрольная работа № 1

Определители. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений.

(30 вариантов по 6 задач)

Решение типового варианта

Контрольная работа № 1 (30 вариантов по 6 задач)

1. Для данного определителя Δ найти миноры алгебраические дополнения элементов a_{i2}, a_{3j}. Вычислить определитель Δ: а) разложив его элементам i-й строки; б) разложив его по элементам j-го столбца; в) получив предварительно нули в i-ой строке.

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$, i=4, j=1.

1.1. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, i=3, j=3.

1.2. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$, i=4, j=1.

1.2. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$, i=1, j=3.

1.3. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, i=2, j=4.

1.3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$, i=1, j=2.

1.4. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=3.$

1.5. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=3.$

1.6. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=4.$

1.7. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=4.$

1.8. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=3.$

1.9. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=1.$

1.4. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=1.$

1.5. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=2.$

1.6. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2.$

1.7. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=4.$

1.8. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=2.$

1.9. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=4.$

1.10. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$, i=2, j=3.

1.10. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, i=4, j=3.

1.11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, i=1, j=2.

1.11. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$, i=3, j=2.

1.12. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, i=4, j=4.

1.12. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, i=3, j=2.

1.13. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, i=2, j=3.

1.13. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, i=4, j=1.

1.14. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$, i=3, j=4.

1.14. $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, i=1, j=2.

1.15. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, i=4, j=4.

1.15. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$, i=2, j=2.

2. Даны две матрицы A и B. Найти: а) AB; б) BA; в) A-1; г) AA-1; д) A-1A.

2.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

2.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.4. $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

2.6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2.7. $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

2.8. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

2.9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

2.10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

2.11. $A=\begin{pmatrix}6 & 9 & 4\\ -1 & -1 & 1\\ 10 & 1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 3\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

2.12. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 4\\ -3 & 0 & 1\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}$.

2.13. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 8 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 5\\ 7 & 1 & 2\\ 1 & 6 & 0\end{pmatrix}$.

2.14. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\ 3 & 3 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

2.15. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

2.16. $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4 & -5\\ 3 & -7 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

2.17. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 0\\ 5 & 3 & 1\\ 1 & -6 & 1\end{pmatrix}$.

2.18. $A=\begin{pmatrix}8 & -1 & -1\\ 5 & -5 & -1\\ 10 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

2.19. $A=\begin{pmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 5 & -3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & -5\end{pmatrix}$.

2.20. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

2.21. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 4 & -9 & 3\\ 2 & -7 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 4\\ 5 & -6 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

2.22. $A=\begin{pmatrix}8 & 5 & -1\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -7 & -6\\ 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

2.23. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 2 & 5 & -3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

2.24. $A=\begin{pmatrix}5 & -8 & -4\\ 7 & 0 & -5\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$.

2.25. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

2.26. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ 1 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

2.27. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ -2 & 3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 0 & 2 & 6\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

2.28. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -3\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 5 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

2.29. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 7\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

2.30. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

3. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

3.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = -7. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_2 + 4x_3 = -20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

3.18.

$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$

3.19.

$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

3.26. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

3.27. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \qquad\qquad = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 \qquad\qquad + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ \quad\quad 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$

3.30. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$

4. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

4.1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 \quad + 3x_3 = -2. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 \quad\quad = 5. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 \quad\quad = 1. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 9x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 4. \end{cases}$

4.22. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 1. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 \qquad - 2x_3 = 5. \end{cases}$

4.24. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

4.25. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

4.26. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

4.27. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

4.28. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

4.29. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$

4.30. $\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 1, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 11, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$

5. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

5.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_4 + 7x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \qquad = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

5.26. $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 \qquad = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ \qquad 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

5.28. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

5.29. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.30. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

6.1. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

6.12. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 \qquad - 9x_3 = 0. \end{cases}$

6.14. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

6.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

6.17. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

6.18. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

6.19. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

6.20. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

6.21. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

6.22. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

6.23. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

6.24. $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

6.25. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

6.26. $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

6.27. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

6.28. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

6.29. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

6.30. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

Решение типового варианта

1. Для данного определителя

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{12}, a_{32}. Вычислить определитель Δ_4: а) разложив его по элементам 1-ой строки; б) разложив его по элементам 2-го столбца; в) получив предварительно нули в 1-ой строке.

Решение. Находим:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 16 + 6 + 12 + 4 - 16 = -18,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 12 - 12 - 8 = -20.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -(-18) = 18,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -(-20) = 20.$$

а) Вычислим

$\Delta_4 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$

$$= -3\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$-3(8 + 2 + 4 - 4) - 2(-8 - 16 + 6 + 12 + 4 - 16) + (16 - 12 - 4 + 32) =$$

$$= 38;$$

б) Разложим определитель по элементам 2-го столбца:

$$\Delta_4 = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-8 + 6 - 16 + 12 + 4 - 16) - 2(12 + 6 - 6 - 16) +$$

$$+ (-6 + 16 - 12 - 4) = 38.$$

в) Вычислим $\Delta 4$, получив предварительно нули в 1-ой строке:

Умножим 3-й столбец определителя на 3 и прибавим к 1-му, затем умножим на –2 и прибавим ко 2-му, тогда в 1-ой строке все элементы кроме одного будут нулями. Разложим полученный таким образом определитель по элементам 1-ой строки и вычислим его:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -14 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-56+18) = 38.$$

2. Даны две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти а) AB; б)BA; в)A^{-1}; г)AA^{-1}; д)$A^{-1}A$.

<u>Решение.</u>

а) Произведение AB имеет смысл, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Находим матрицу C = AB, элементы которой $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$.

Имеем:

$$C = AB = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3 \\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9 \\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix};$$

б) Вычислим:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4+4-9 & 0-2-6 & 1+6-6 \\ -8+0+3 & 0+0+2 & 2+0+2 \\ 8+2+9 & 0-1+6 & -2+3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -8 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 19 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $AB \neq BA$;

в) Обратная матрица A^{-1} матрицы A имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},\text{ где } |A|=\begin{vmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=39\neq 0,\text{ то есть}$$

матрица A -невырожденная, и, значит, существует матрица A^{-1}.

Находим:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-8,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=5,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-11,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=14,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=7,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}=8,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=4.$$

$$\text{Тогда}\quad A^{-1}=\frac{1}{39}\begin{pmatrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39}\\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39}\\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39}\end{pmatrix}.$$

г) Имеем:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39}\\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39}\\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

д) Имеем:

$$A^{-1}A=\frac{1}{39}\begin{pmatrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

то есть обратная матрица найдена верно.

3. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) методом Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}x_1+5x_2-x_3=3,\\ 2x_1+4x_2-3x_3=2,\\ 3x_1-x_2-3x_3=-7.\end{cases}$$

<u>Решение.</u> С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

данной системы и ранг расширенной матрицы

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -3 & -7\end{array}\right).$$

Для этого умножим 1-ую строку матрицы В на –2 и сложим со второй, затем умножим 1-ую строку на –3 и сложим с третьей, поменяем местами 2-ой и 3-й столбцы.

Получим

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -3 & -7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & -6 & -1 & -4\\ 0 & -16 & 0 & -16\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & -6 & -4\\ 0 & 0 & -16 & -16\end{array}\right).$$

Следовательно, rang A=rang B=3 (т.е. числу неизвестных). Значит исходная система совместна и имеет единственное решение.

а) По формулам Крамера

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & 4 & 3\\ 3 & -1 & -3\end{vmatrix}=-16;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ -7 & -1 & -3\end{vmatrix}=64;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & -3\\ 3 & -7 & 3\end{vmatrix}=-16;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & -1 & -7\end{vmatrix}=32 \quad \text{находим}$$

$$x_1=64/(-16)=-4;\quad x_2=-16/(-16)=1;\quad x_3=32/(-16)=-2;$$

б) запишем систему уравнений в матричной форме: $AX=\widetilde{B}$. Решение системы в матричной форме имеет вид $X=A^{-1}\widetilde{B}$.

$$A^{-1}=-\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-15 & 16 & -11\\ -3 & 0 & 1\\ -14 & 16 & -6\end{pmatrix}\quad \text{(задача 26)}$$

Решение системы:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-15 & 16 & -11\\-3 & 0 & 1\\-14 & 16 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1=-4$, $x_2=1$, $x_3=-2$.

4. Дана система $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=2,\\3x_1+x_2-3x_3=1,\\5x_1-2x_2-2x_3=4.\end{cases}$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее.

Решение.

В расширенной матрице $B=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 1 & 2\\3 & 1 & -3 & 1\\5 & -2 & -2 & 4\end{array}\right)$ меняем 3-й и 1-й стобцы местами, умножаем 1-ую строку на 3 и прибавляем к 2-ой, умножаем 1-ую строку на 2 и прибавляем к 3-ей, из 2-ой строки вычитаем 3-ю:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 1 & 2\\3 & 1 & -3 & 1\\5 & -2 & -2 & 4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & 2\\-3 & 1 & 3 & 1\\-2 & -2 & 5 & 4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & 2\\0 & -8 & 9 & 7\\0 & -8 & 9 & 8\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & 2\\0 & -8 & 9 & 7\\0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Ясно, что rang A=2, rang B=3. Так как rang A $\neq$ rang B, то система несовместна.

5. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+5x_3=0,\\x_1+2x_2-3x_3=0,\\3x_1-x_2+2x_3=0.\end{cases}$$

Решение.

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -4 & 5\\1 & 2 & -3\\3 & -1 & 2\end{vmatrix}=11\neq 0,$$

поэтому система имеет единственное нулевое решение: $x_1=x_2=x_3=0$.

6. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Так как $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, то система имеет бесконечно много решений.

Так как rang A=2, n=3, то исходная система равносильна, например, системе $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

Так как определитель из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2 не равен 0, то в качестве базисных неизвестных возьмем x_1 и x_2 (хотя можно брать и другие пары неизвестных), а x_3 – свободное неизвестное. Перенесем члены с x_3 в правые части уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = x_3, \\ x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$$

Решаем последнюю систему по формулам Крамера:

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = 17x_3; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -16x_3.$$

Отсюда находим, что

$$x_1 = -\frac{17x_3}{13}, \quad x_2 = \frac{16x_3}{13}.$$

Полагая $x_3=13u$, где u – произвольное число, получаем решение исходной системы:

$x_1=-17u$, $x_2=16u$, $x_3=13u$.

Контрольная работа №2

Задача №1

Даны векторы $\bar{a} = \alpha\bar{m} + \beta\bar{n}$,
$\bar{b} = \gamma\bar{m} + \delta\bar{n}$.

Где
$|\bar{m}| = k, |\bar{n}| = l; (m, n) = \varphi$.

Найти:

1) $(\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}) * (\nu\bar{a} + \tau\bar{b})$;

2) $\text{пр}_{\bar{b}}(\nu\bar{a} + \tau\bar{b})$;

3) $\text{Cos}(\bar{a}, \tau\bar{b})$.

1.1

$\alpha=-5,\ \beta=-4,\ \gamma=3,\ \delta=6,\ \kappa=3,\ l=5,\ \varphi=5\pi/3,\ \lambda=-2,\ \mu=1/3,\ \nu=1,\ \tau=2$

1.2

$\alpha=-2,\ \beta=3,\ \gamma=3,\ \delta=-1,\ \kappa=1,\ l=5,\ \varphi=\pi,\ \lambda=3,\ \mu=2,\ \nu=-2,\ \tau=4$

1.3

$\alpha=5,\ \beta=-2,\ \gamma=-3,\ \delta=-1,\ \kappa=4,\ l=5,\ \varphi=4\pi/3,\ \lambda=2,\ \mu=3,\ \nu=-1,\ \tau=5$

1.4

$\alpha=5,\ \beta=2,\ \gamma=-6,\ \delta=-4,\ \kappa=3,\ l=2,\ \varphi=5\pi/3,\ \lambda=-1,\ \mu=1/2,\ \nu=2,\ \tau=3$

1.5

$\alpha=3,\ \beta=-2,\ \gamma=-4,\ \delta=5,\ \kappa=2,\ l=3,\ \varphi=\pi/3,\ \lambda=2,\ \mu=-3,\ \nu=5,\ \tau=1$

1.6

$\alpha=2,\ \beta=-5,\ \gamma=-3,\ \delta=4,\ \kappa=2,\ l=4,\ \varphi=2\pi/3,\ \lambda=3,\ \mu=-4,\ \nu=2,\ \tau=3$

1.7

$\alpha=3,\ \beta=2,\ \gamma=-4,\ \delta=-2,\ \kappa=2,\ l=5,\ \varphi=4\pi/3,\ \lambda=1,\ \mu=-3,\ \nu=0,\ \tau=-1/2$

1.8

$\alpha=5,\ \beta=2,\ \gamma=1,\ \delta=-4,\ \kappa=3,\ l=2,\ \varphi=\pi,\ \lambda=1,\ \mu=-2,\ \nu=3,\ \tau=-4$

1.9

$\alpha=-3,\ \beta=-2,\ \gamma=1,\ \delta=5,\ \kappa=3,\ l=6,\ \varphi=4\pi/3,\ \lambda=-1,\ \mu=2,\ \nu=1,\ \tau=1$

1.10

$\alpha=5,\ \beta=-3,\ \gamma=4,\ \delta=2,\ \kappa=4,\ l=1,\ \varphi=2\pi/3,\ \lambda=2,\ \mu=-1/2,\ \nu=3,\ \tau=0$

1.11

$\alpha=-2,\ \beta=3,\ \gamma=3,\ \delta=-6,\ \kappa=6,\ l=3,\ \varphi=5\pi/3,\ \lambda=3,\ \mu=-1/3,\ \nu=1,\ \tau=2$

1.12

$\alpha=-2,\ \beta=-4,\ \gamma=3,\ \delta=1,\ \kappa=3,\ l=2,\ \varphi=7\pi/3,\ \lambda=-1/2,\ \mu=3,\ \nu=1,\ \tau=2$

1.13

$\alpha=4,\ \beta=3,\ \gamma=-1,\ \delta=2,\ \kappa=4,\ l=5,\ \varphi=3\pi/2,\ \lambda=2,\ \mu=-3,\ \nu=1,\ \tau=2$

1.14

$\alpha=-2,\ \beta=3,\ \gamma=5,\ \delta=1,\ \kappa=2,\ l=5,\ \varphi=2\pi,\ \lambda=-3,\ \mu=4,\ \nu=2,\ \tau=3$

1.15

$\alpha=4,\ \beta=-3,\ \gamma=5,\ \delta=2,\ \kappa=4,\ l=7,\ \varphi=4\pi/3,\ \lambda=-3,\ \mu=2,\ \nu=2,\ \tau=-1$

1.16

$\alpha=-5,\ \beta=3,\ \gamma=2,\ \delta=4,\ \kappa=5,\ l=4,\ \varphi=\pi,\ \lambda=-3,\ \mu=1/2,\ \nu=-1,\ \tau=1$

1.17

$\alpha=5,\ \beta=-2,\ \gamma=3,\ \delta=4,\ \kappa=2,\ l=5,\ \varphi=\pi/2,\ \lambda=2,\ \mu=3,\ \nu=1,\ \tau=-2$

1.18

$\alpha=7,\ \beta=-3,\ \gamma=2,\ \delta=6,\ \kappa=3,\ l=4,\ \varphi=5\pi/3,\ \lambda=3,\ \mu=-1/2,\ \nu=2,\ \tau=1$

1.19

$\alpha=4,\ \beta=-5,\ \gamma=-1,\ \delta=3,\ \kappa=6,\ l=3,\ \varphi=2\pi/3,\ \lambda=2,\ \mu=-5,\ \nu=1,\ \tau=2$

1.20

$\alpha=3,\ \beta=-5,\ \gamma=-2,\ \delta=3,\ \kappa=1,\ l=6,\ \varphi=3\pi/2,\ \lambda=2,\ \mu=5,\ \nu=1,\ \tau=-2$

1.21

$\alpha=-5,\ \beta=-6,\ \gamma=2,\ \delta=7,\ \kappa=2,\ l=7,\ \varphi=\pi,\ \lambda=-2,\ \mu=5,\ \nu=1,\ \tau=3$

1.22

$\alpha=-7,\ \beta=2,\ \gamma=4,\ \delta=6,\ \kappa=2,\ l=9,\ \varphi=\pi/3,\ \lambda=1,\ \mu=2,\ \nu=-1,\ \tau=3$

1.23

$\alpha=5,\ \beta=4,\ \gamma=-6,\ \delta=2,\ \kappa=2,\ l=9,\ \varphi=2\pi/3,\ \lambda=3,\ \mu=2,\ \nu=1,\ \tau=-1/2$

1.24

$\alpha=-5,\ \beta=-7,\ \gamma=-3,\ \delta=2,\ \kappa=2,\ l=11,\ \varphi=3\pi/2,\ \lambda=-3,\ \mu=4,\ \nu=-1,\ \tau=2$

1.25

$\alpha=5,\ \beta=-8,\ \gamma=-2,\ \delta=3,\ \kappa=4,\ l=3,\ \varphi=4\pi/3,\ \lambda=2,\ \mu=-3,\ \nu=1,\ \tau=2$

1.26

$\alpha=-3,\ \beta=5,\ \gamma=1,\ \delta=7,\ \kappa=4,\ l=6,\ \varphi=5\pi/3,\ \lambda=-2,\ \mu=3,\ \nu=3,\ \tau=-2$

1.27

$\alpha=-3,\ \beta=4,\ \gamma=5,\ \delta=-6,\ \kappa=4,\ l=5,\ \varphi=\pi,\ \lambda=2,\ \mu=3,\ \nu=-3,\ \tau=-1$

1.28

$\alpha=6,\ \beta=-7,\ \gamma=-1,\ \delta=-3,\ \kappa=2,\ l=6,\ \varphi=4\pi/3,\ \lambda=3,\ \mu=-2,\ \nu=1,\ \tau=4$

1.29

$\alpha=5,\ \beta=3,\ \gamma=-4,\ \delta=-2,\ \kappa=6,\ l=3,\ \varphi=5\pi/3,\ \lambda=-2,\ \mu=-1/2,\ \nu=3,\ \tau=2$

1.30

$\alpha=4,\ \beta=-3,\ \gamma=-2,\ \delta=6,\ \kappa=4,\ l=7,\ \varphi=\pi/3,\ \lambda=2,\ \mu=-1/2,\ \nu=3,\ \tau=2$

Задача №2

По координатам точек A,B,C для указанных векторов найти:

А)модуль вектора $\bar{a}$;

Б)скалярное произведение векторов $\bar{a}\,\bar{b}$;

В) $пр_{\vec{d}}\vec{c}$;

Г)координаты точки М, делящей отрезок l в отношении $\alpha:\beta$

2.1 $A(4,6,3), B(-5,2,6), C(4,-4,-3), \vec{a}=4\overline{CB}-\overline{AC}, \vec{b}=\overline{AB}, \vec{c}=\overline{CB}, \vec{d}=\overline{AC},$

$l=\overline{AB}, \alpha=5, \beta=4$

2.2 $A(4,3,-2), B(-3,-1,4), C(2,2,1), \vec{a}=-5\overline{AC}+2\overline{CB}, \vec{b}=\overline{AB}, \vec{c}=\overline{AC}, \vec{d}=\overline{CD},$

$l=\overline{BC}, \alpha=2, \beta=3$

2.3 $A(-2,-2,4), B(1,3,-2), C(1,4,2), \vec{a}=2\overline{AC}-3\overline{BA}, \vec{b}=\overline{BC}, \vec{c}=\overline{BC}, \vec{d}=\overline{AC},$

$l=\overline{BA}, \alpha=2, \beta=1$

2.4 $A(2,4,3), B(3,1,-4), C(-1,2,2), \vec{a}=2\overline{BA}+4\overline{AC}, \vec{b}=\overline{BA}, \vec{c}=\vec{b}, \vec{d}=\overline{AC},$

$l=\overline{BA}, \alpha=1, \beta=4$

2.5 $A(2,4,5), B(1,-2,3), C(-1,-2,4), \vec{a}=3\overline{AB}-4\overline{AC}, \vec{b}=\overline{BC}, \vec{c}=\vec{b}, \vec{d}=\overline{AB},$

$l=\overline{AB}, \alpha=2, \beta=3$

2.6 $A(-1,-2,4), B(-1,3,4), C(1,4,2), \vec{a}=3\overline{AC}-7\overline{BC}, \vec{b}=\overline{AB}, \vec{c}=\vec{b}, \vec{d}=\overline{AC},$

$l=\overline{AC}, \alpha=1, \beta=7$

2.7 $A(1,3,2), B(-2,4,-1), C(1,3,-2), \vec{a}=2\overline{AB}+5\overline{CB}, \vec{b}=\overline{AC}, \vec{c}=\vec{b}, \vec{d}=\overline{AB},$

$l=\overline{AB}, \alpha=2, \beta=4$

2.8 $A(2,-4,3), B(-3,-2,4), C(0,0,-2), \vec{a}=3\overline{AC}-4\overline{CB}, \vec{b}=\vec{c}=\overline{BA}, \vec{d}=\overline{AB},$

$l=\overline{AC}, \alpha=2, \beta=1$

2.9 $A(3,4,-4), B(-2,1,2), C(2,-3,1), \vec{a}=5\overline{CB}+4\overline{AC}, \vec{b}=\vec{c}=\overline{AB}, \vec{d}=\overline{AC},$

$l=\overline{AC}, \alpha=2, \beta=5$

2.10 $A(0,2,5), B(2,-3,4), C(3,2,-5), \vec{a}=-3\overline{AB}+4\overline{CB}, \vec{b}=\vec{c}=\overline{AC}, \vec{d}=\overline{BC},$

$l=\overline{AC}, \alpha=3, \beta=2$

2.11 $A(-2,-3,-4), B(2,-4,0), C(1,4,5), \vec{a}=4\overline{AC}-8\overline{BC}, \vec{b}=\vec{c}=\overline{AB}, \vec{d}=\overline{BC},$

$l=\overline{AB}, \alpha=4, \beta=2$

2.12 $A(-2,-3,-2), B(1,4,2), C(1,-3,3), \vec{a}=2\overline{AC}-4\overline{BC}, \vec{b}=\vec{c}=\overline{AB}, \vec{d}=\overline{AC},$

$l=\overline{BC}, \alpha=3, \beta=1$

2.13 $A(5,6,1)$, $B(-2,4,-1)$, $C(3,-3,3)$, $\vec{a} = 3\overline{AB}-4\overline{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overline{AC}$, $\vec{d} = \overline{AB}$,

$l = \overline{BC}$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$

2.14 $A(10,6,3)$, $B(-2,4,5)$, $C(3,-4,-6)$, $\vec{a} = 5\overline{AC}-2\overline{CB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overline{BA}$, $\vec{d} = \overline{AC}$,

$l = \overline{CB}$, $\alpha = 1$, $\beta = 5$

2.15 $A(3,2,4)$, $B(-2,1,3)$, $C(2,-2,-1)$, $\vec{a} = 4\overline{BC}-3\overline{AC}$, $\vec{b} = \overline{BA}$, $\vec{c} = \overline{BC}$, $\vec{d} = \overline{BC}$,

$l = \overline{AC}$, $\alpha = 2$, $\beta = 4$

2.16 $A(-2,3,-4)$, $B(3,-1,2)$, $C(4,2,4)$, $\vec{a} = 7\overline{AC}+4\overline{CB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overline{AB}$, $\vec{d} = \overline{CB}$,

$l = \overline{AB}$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$

2.17 $A(4,5,3)$, $B(-4,2,3)$, $C(5,-6,-2)$, $\vec{a} = 9\overline{AB}-4\overline{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overline{AC}$, $\vec{d} = \overline{AB}$,

$l = \overline{BC}$, $\alpha = 5$, $\beta = 1$

2.18 $A(2,4,6)$, $B(-3,5,1)$, $C(4,-5,-4)$, $\vec{a} = -6\overline{BC}+2\overline{BA}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overline{CA}$, $\vec{d} = \overline{BA}$,

$l = \overline{BC}$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$

2.19 $A(-4,-2,-5)$, $B(3,7,2)$, $C(4,6,-3)$, $\vec{a} = 9\overline{BA}+3\overline{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overline{AC}$, $\vec{d} = \overline{BC}$,

$l = \overline{BA}$, $\alpha = 4$, $\beta = 3$

2.20 $A(5,4,4)$, $B(-5,2,3)$, $C(4,2,-5)$, $\vec{a} = 11\overline{AC}-6\overline{AB}$, $\vec{b} = \overline{BC}$, $\vec{c} = \overline{AB}$, $\vec{d} = \overline{AC}$,

$l = \overline{BC}$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$

2.21 $A(3,4,6)$, $B(-4,6,4)$, $C(5,-2,-3)$, $\vec{a} = -7\overline{BC}+4\overline{CA}$, $\vec{b} = \overline{BA}$, $\vec{c} = \overline{CA}$, $\vec{d} = \overline{BC}$.

$l = \overline{BA}$, $\alpha = 5$, $\beta = 3$

2.22 $A(-5,-2,-6)$, $B(3,4,5)$, $C(2,-5,4)$, $\vec{a} = 8\overline{AC}-5\overline{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overline{AB}$, $\vec{d} = \overline{BC}$,

$l = \overline{AC}$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$

2.23 $A(3,4,1)$, $B(5,-2,6)$, $C(4,2,-7)$, $\vec{a} = -7\overline{AC}+5\overline{AB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overline{BC}$, $\vec{d} = \overline{AC}$,

$l = \overline{AB}$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$

2.24 $A(4,3,2)$, $B(-4,-3,5)$, $C(6,4,-3)$, $\vec{a} = 8\overline{AC}-5\overline{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overline{BA}$, $\vec{d} = \overline{AC}$,

$l = \overline{BC}$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$

2.25 $A(-5,4,3)$, $B(4,5,2)$, $C(2,7,-4)$, $\vec{a} = 3\overline{BC}+2\overline{AB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overline{CA}$, $\vec{d} = \overline{AB}$,

$l = \overline{BC}$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$

2.26 $A(6,4,5)$, $B(-7,1,8)$, $C(2,-2,-7)$, $\vec{a} = 5\overline{CB}-2\overline{AC}$, $\vec{b} = \overline{AB}$, $\vec{c} = \overline{CB}$, $\vec{d} = \overline{AC}$,

$l = \overline{AB}$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$

2.27 $A(6,5,-4)$, $B(-5,-2,2)$, $C(3,3,2)$, $\vec{a} = 6\overline{AB}-3\overline{CB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overline{AC}$, $\vec{d} = \overline{CB}$,

$l = \overline{BC}$, $\alpha = 1$, $\beta = 5$

2.28 $A(-3,-5,6)$, $B(3,5,-4)$, $C(2,6,4)$, $\bar{a} = 4\overline{AC}-5\overline{BA}$, $\bar{b} = \overline{CB}$, $\bar{c} = \overline{BA}$, $\bar{d} = \overline{AC}$, $l = \overline{BA}$, $\alpha = 4$, $\beta = 2$

2.29 $A(3,5,4)$, $B(4,2,-3)$, $C(-2,4,7)$, $\bar{a} = 3\overline{BA}-4\overline{AC}$, $\bar{b} = \overline{AB}$, $\bar{c} = \overline{BA}$, $\bar{d} = \overline{AC}$, $l = \overline{BA}$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$

2.30 $A(4,6,7)$, $B(2,-4,1)$, $C(-3,-4,2)$, $\bar{a} = 5\overline{AB}-2\overline{AC}$, $\bar{b} = \bar{c} = \overline{BC}$, $\bar{d} = \overline{AB}$, $l = \overline{AB}$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$

Задача №3

Доказать, что векторы $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\bar{D}$ в этом базисе.

3.1 $\bar{a} = (5,4,1)$, $\bar{b} = (-3,5,2)$, $\bar{c} = (2,-1,3)$, $\bar{d} = (7,23,4)$

3.2 $\bar{a} = (2,-1,4)$, $\bar{b} = (-3,0,-2)$, $\bar{c} = (4,5,-3)$, $\bar{d} = (0,11,-14)$

3.3 $\bar{a} = (-1,1,2)$, $\bar{b} = (2,-3,-5)$, $\bar{c} = (-6,3,-1)$, $\bar{d} = (28,19,-7)$

3.4 $\bar{a} = (1,3,4)$, $\bar{b} = (-2,5,0)$, $\bar{c} = (3,-2,-4)$, $\bar{d} = (13,-5,-4)$

3.5 $\bar{a} = (1,-1,1)$, $\bar{b} = (-5,-3,1)$, $\bar{c} = (2,-1,0)$, $\bar{d} = (-15,-10,5)$

3.6 $\bar{a} = (3,1,2)$, $\bar{b} = (-7,-2,-4)$, $\bar{c} = (-4,0,3)$, $\bar{d} = (16,6,15)$

3.7 $\bar{a} = (-3,0,1)$, $\bar{b} = (2,7,-3)$, $\bar{c} = (-4,3,5)$, $\bar{d} = (-16,33,13)$

3.8 $\bar{a} = (5,1,2)$, $\bar{b} = (-2,1,-3)$, $\bar{c} = (4,-3,5)$, $\bar{d} = (15,-15,24)$

3.9 $\bar{a} = (0,2,-3)$, $\bar{b} = (4,-3,-2)$, $\bar{c} = (-5,-4,0)$, $\bar{d} = (-19,-5,-4)$

3.10 $\bar{a} = (3,-1,2)$, $\bar{b} = (-2,3,1)$, $\bar{c} = (4,-5,-3)$, $\bar{d} = (-3,2,-3)$

3.11 $\bar{a} = (5,3,1)$, $\bar{b} = (1,2,-3)$, $\bar{c} = (3,-4,2)$, $\bar{d} = (-9,34,-20)$

3.12 $\bar{a} = (3,1,-3)$, $\bar{b} = (-2,4,1)$, $\bar{c} = (1,-2,5)$, $\bar{d} = (1,12,-20)$

3.13 $\bar{a} = (6,1,-3)$, $\bar{b} = (-3,2,1)$, $\bar{c} = (-1,-3,4)$, $\bar{d} = (15,6,-17)$

3.14 $\bar{a} = (4,2,3)$, $\bar{b} = (-3,1,-8)$, $\bar{c} = (2,-4,5)$, $\bar{d} = (-12,14,-31)$

3.15 $\bar{a} = (-2,1,3)$, $\bar{b} = (3,-6,2)$, $\bar{c} = (-5,-3,-1)$, $\bar{d} = (31,-6,22)$

3.16 $\bar{a} = (1,3,6)$, $\bar{b} = (-3,4,-5)$, $\bar{c} = (1,-7,2)$, $\bar{d} = (-2,17,5)$

3.17 $\bar{a} = (7,2,1)$, $\bar{b} = (5,1,-2)$, $\bar{c} = (-3,4,5)$, $\bar{d} = (26,11,1)$

3.18 $\bar{a} = (3,5,4)$, $\bar{b} = (-2,7,-5)$, $\bar{c} = (6,-2,1)$, $\bar{d} = (6,-9,22)$

3.19 $\bar{a} = (5,3,2)$, $\bar{b} = (2,-5,1)$, $\bar{c} = (-7,4,-3)$, $\bar{d} = (36,1,15)$

3.20 $\bar{a} = (11,1,2)$, $\bar{b} = (-3,3,4)$, $\bar{c} = (-4,-2,7)$, $\bar{d} = (-5,11,-15)$

3.21 $\bar{a} = (9,5,3)$, $\bar{b} = (-3,2,1)$, $\bar{c} = (4,-7,4)$, $\bar{d} = (-10,-13,8)$

3.22 $\bar{a} = (7,2,1)$, $\bar{b} = (3,-5,6)$, $\bar{c} = (-4,3,-4)$, $\bar{d} = (-1,18,-16)$

3.23 $\bar{a} = (1,2,3)$, $\bar{b} = (-5,3,-1)$, $\bar{c} = (-6,4,5)$, $\bar{d} = (-4,11,20)$

3.24 $\bar{a} = (-2,5,1)$, $\bar{b} = (3,2,-7)$, $\bar{c} = (4,-3,2)$, $\bar{d} = (-4,22,-13)$

3.25 $\bar{a} = (3,1,2)$, $\bar{b} = (-4,3,-1)$, $\bar{c} = (2,3,4)$, $\bar{d} = (14,14,20)$

3.26 $\bar{a} = (3,-1,2)$, $\bar{b} = (-2,4,1)$, $\bar{c} = (4,-5,-1)$, $\bar{d} = (-5,11,1)$

3.27 $\bar{a} = (4,5,1)$, $\bar{b} = (1,3,1)$, $\bar{c} = (-3,-6,7)$, $\bar{d} = (19,33,0)$

3.28 $\bar{a} = (1,-3,1)$, $\bar{b} = (-2,-4,3)$, $\bar{c} = (0,-2,3)$, $\bar{d} = (-8,-10,13)$

3.29 $\bar{a} = (5,7,-2)$, $\bar{b} = (-3,1,3)$, $\bar{c} = (1,-4,6)$, $\bar{d} = (14,9,-1)$

3.30 $\bar{a} = (-1,4,3)$, $\bar{b} = (3,2,-4)$, $\bar{c} = (-2,-7,1)$, $\bar{d} = (6,20,-3)$

Задача №4

Даны векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Требуется:

a)вычислить смешанное произведение трех векторов;

b)найти модуль векторного произведения;

c)вычислить скалярное произведение двух векторов;

d)проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора;

e) проверить, будут ли компланарны три вектора.

4.1 $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}; \bar{b} = \bar{j} + 4\bar{k}; c = 5\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k};$

a)$\bar{a}, 3\bar{b}, \bar{c}$ b)$3\bar{a}, 2\bar{c}$ c)$\bar{b}, -4\bar{c}$ d)$\bar{a}, \bar{c}$ e)$\bar{a}, 2\bar{b}, 3\bar{c}$

4.2 $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}; \bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 7\bar{k}; c = 3\bar{i} - 6\bar{j} + 21\bar{k};$

a)$5\bar{a}, 2\bar{b}, \bar{c}$ b)$4\bar{b}, 2\bar{c}$ c)$\bar{a}, \bar{c}$ d)$\bar{b}, \bar{c}$ e)$2\bar{a}, -3\bar{b}, \bar{c}$

4.3 $\bar{a} = 2\bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}; \bar{b} = 7\bar{i} + 2\bar{j}; c = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 7\bar{k};$

a)$\bar{a}, 2\bar{b}, 3\bar{c}$ b)$3\bar{a}, -7\bar{b}$ c)$\bar{c}, -2\bar{a}$ d)$\bar{a}, \bar{c}$ e)$3\bar{a}, 2\bar{b}, 3\bar{c}$

4.4 $\bar{a} = -7\bar{i} + 2\bar{k}; \bar{b} = 2\bar{i} - 6\bar{j} + 4\bar{k}; c = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k};$

a)$\bar{a}, -2\bar{b}, -7\bar{c}$ b)$4\bar{b}, 3\bar{c}$ c)$2\bar{a}, -7\bar{c}$ d)$\bar{b}, \bar{c}$ e)$2\bar{a}, 4\bar{b}, 3\bar{c}$

4.5 $\bar{a} = -4\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}; \bar{b} = 3\bar{i} + 6\bar{j} - 4\bar{k}; c = \bar{j} + 5\bar{k};$

a)$\bar{a}, 6\bar{b}, 3\bar{c}$ b)$2\bar{b}, \bar{a}$ c)$\bar{a}, -4\bar{c}$ d)$\bar{a}, \bar{b}$ e)$\bar{a}, 6\bar{b}, 3\bar{c}$

4.6 $\bar{a} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}; \bar{b} = 2\bar{j} - 3\bar{k}; c = -3\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k};$

a)$\bar{a}, -3\bar{b}, 2\bar{c}$ b)$5\bar{a}, 3\bar{c}$ c)$-2\bar{a}, 4\bar{b}$ d)$\bar{a}, \bar{c}$ e)$5\bar{a}, 4\bar{b}, 3\bar{c}$

4.7 $\bar{a} = 4\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}; \bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 5\bar{k}; c = 7\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k};$

a)$7\bar{a}, -4\bar{b}, 3\bar{c}$ b)$3\bar{a}, 5\bar{c}, \bar{b}$ c)$2\bar{b}, 4\bar{c}$ d)$\bar{b}, \bar{c}$ e)$7\bar{a}, 2\bar{b}, 5\bar{c}$

4.8 $\bar{a} = 4\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}; \bar{b} = 2\bar{i} + \bar{k}; c = -12\bar{i} - 6\bar{j} + 9\bar{k};$

a)$2\bar{a}, 3\bar{b}, \bar{c}$ b)$4\bar{a}, 3\bar{b}$ c)$\bar{b}, -4\bar{c}$ d)$\bar{a}, \bar{c}$ e)$2\bar{a}, 3\bar{b}, -4\bar{c}$

4.9 $\bar{a} = -\bar{i} + 5\bar{k}; \bar{b} = -3\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}; c = -2\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k};$

a)$3\bar{a}, -4\bar{b}, 2\bar{c}$ b)$7\bar{a}, -3\bar{c}$ c)$2\bar{b}, 3\bar{a}$ d)$\bar{b}, \bar{c}$ e)$7\bar{a}, 2\bar{b}, -3\bar{c}$

4.10 $\bar{a} = 6\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k}; \bar{b} = 9\bar{i} - 6\bar{j} + 9\bar{k}; c = \bar{i} - 8\bar{k};$

a)$2\bar{a}, -4\bar{b}, 3\bar{c}$ b)$3\bar{b}, -9\bar{c}$, c)$3\bar{a}, -5\bar{c}$ d)$\bar{a}, \bar{b}$ e)$3\bar{a}, -4\bar{b}, -9\bar{c}$

4.11 $\bar{a} = 5\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}; \bar{b} = 2\bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}; c = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 7\bar{k};$

a)$\bar{a}, -4\bar{b}, 2\bar{c}$ b)$-2\bar{b}, 4\bar{c}$, c)$-3\bar{a}, 6\bar{c}$ d)$\bar{b}, \bar{c}$ e)$\bar{a}, -2\bar{b}, 6\bar{c}$

4.12 $\bar{a} = -4\bar{i} + 3\bar{j} - 7\bar{k}; \bar{b} = 4\bar{i} + 6\bar{j} - 2\bar{k}; c = 6\bar{i} + 9\bar{j} - 3\bar{k};$

a) $-2\bar{a}, \bar{b}, -2\bar{c}$ b)$4\bar{b}, 7\bar{c}$, c)$5\bar{a}, -3\bar{b}$ d)$\bar{b}, \bar{c}$ e)$-2\bar{a}, 4\bar{b}, 7\bar{c}$

4.13 $\vec{a} = -5\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k};\ \vec{b} = 7\vec{i} - 5\vec{k};\ c = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k};$

a) $2\vec{a}, 4\vec{b}, -5\vec{c}$ b) $3\vec{b}, 11\vec{c}$ c) $8\vec{a}, -6c$ d) $a, \vec{c}$ e) $8\vec{a}, -3\vec{b}, 11\vec{c}$

4.14 $\vec{a} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k};\ \vec{b} = 2\vec{i} + 3j - \vec{k};\ c = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k};$

a) $5\vec{a}, 7\vec{b}, 2\vec{c}$ b) $-4\vec{b}, 11a$ c) $3\vec{a}, -7c$ d) a, b e) $3\vec{a}, 7\vec{b}, -2\vec{c}$

4.15 $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k};\ \vec{b} = -3j + 5\vec{k};\ c = 6\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k};$

a) $5\vec{a}, -\vec{b}, 3\vec{c}$ b) $-7a, 4c$ c) $3\vec{a}, 9b$ d) a, c e) $3\vec{a}, -9\vec{b}, 4\vec{c}$

4.16 $\vec{a} = -3\vec{i} + 8\vec{j};\ \vec{b} = 2i - 3j - 2\vec{k};\ c = 8\vec{i} + 12\vec{j} - 8\vec{k};$

a) $4\vec{a}, -6\vec{b}, 5\vec{c}$ b) $-7a, 9c$ c) $3b, -8c$ d) b, c e) $4\vec{a}, -6\vec{b}, 5\vec{c}$

4.17 $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k};\ \vec{b} = -9i + 2\vec{k};\ c = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k};$

a) $7\vec{a}, 5\vec{b}, -\vec{c}$ b) $-5a, 4b$ c) $3b, -8c$ d) a, c e) $7\vec{a}, 5\vec{b}, -\vec{c}$

4.18 $\vec{a} = 9\vec{i} - 3\vec{j} + k;\ \vec{b} = 3i - 15j + 21\vec{k};\ c = \vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k};$

a) $2\vec{a}, -7\vec{b}, 3\vec{c}$ b) $-6a, 4c$ c) $5b, 7a$ d) b, c e) $2\vec{a}, -7\vec{b}, 4\vec{c}$

4.19 $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3k;\ \vec{b} = 5i + j - 2\vec{k};\ c = 7\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k};$

a) $\vec{a}, -6\vec{b}, 2\vec{c}$ b) $-8b, 5c$ c) $-9a, 7c$ d) a, b e) $\vec{a}, -6\vec{b}, 2\vec{c}$

4.20 $\vec{a} = -9\vec{i} + 4\vec{j} - 5k;\ \vec{b} = i - 2j + 4\vec{k};\ c = -5\vec{i} + 10\vec{j} - 20\vec{k};$

a) $-2\vec{a}, 7\vec{b}, 5c$ b) $-6b, 7c$ c) $9a, 4c$ d) b, c e) $-2\vec{a}, 7\vec{b}, 4\vec{c}$

4.21 $\vec{a} = 2i - 7\vec{j} + 5k;\ \vec{b} = -i + 2j - 6\vec{k};\ c = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k};$

a) $-3\vec{a}, 6\vec{b}, -\vec{c}$ b) $5b, 3c$ c) $7a, -4b$ d) b, c e) $7\vec{a}, -4\vec{b}, 3\vec{c}$

4.22 $\vec{a} = 7i - 4\vec{j} - 5k;\ \vec{b} = i - 11j + 3\vec{k};\ c = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k};$

a) $3\vec{a}, -7\vec{b}, 2\vec{c}$ b) $2b, 6c$ c) $-4a, -5c$ d) a, c e) $-4\vec{a}, 2\vec{b}, 6\vec{c}$

4.23 $\vec{a} = 4i - 6\vec{j} - 2k;\ \vec{b} = -2i + 3j + \vec{k};\ c = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k};$

a) $6\vec{a}, 3\vec{b}, 8\vec{c}$ b) $-7b, 6a$ c) $-5a, 4c$ d) a, b e) $-5\vec{a}, 3\vec{b}, 4\vec{c}$

4.24 $\vec{a} = 3i - \vec{j} + 2k;\ \vec{b} = -i + 5j - 4\vec{k};\ c = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k};$

a) $4\vec{a}, -7\vec{b}, -2\vec{c}$ b) $6a, -4c$ c) $-2a, 5b$ d) a, c e) $6\vec{a}, -7\vec{b}, -2\vec{c}$

4.25 $\vec{a} = -3\vec{i} - \vec{j} - 5k;\ \vec{b} = 2i - 4\vec{j} + 8\vec{k};\ c = 3\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k};$

a) $2\vec{a}, -\vec{b}, 3\vec{c}$ b) $-9a, 4c$ c) $5b, -6c$ d) b, c e) $2\vec{a}, 5\vec{b}, -6\vec{c}$

4.26 $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k};\ \vec{b} = i - 5\vec{k};\ c = 6\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k};$

a) $-2\vec{a}, \vec{b}, 7\vec{c}$ b) $5a, -2c$ c) $3b, c$ d) a, c e) $-2\vec{a}, 3\vec{b}, 7\vec{c}$

4.27 $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k};\ \vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k};\ c = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k};$

a) $-3\vec{a}, 4\vec{b}, -5\vec{c}$ b) $6b, 3c$ c) $a, 4c$ d) b, c e) $-3\vec{a}, 4\vec{b}, -5\vec{c}$

4.28 $\bar a = 4\bar i - 5\bar j - 4\bar k; \bar b = 5\bar i - \bar j; \bar c = 2\bar i + 4\bar j - 3\bar k;$

a)$\bar a, 7\bar b, -2\bar c$ b)$-5a, 4b$ c)$8c, -3a$ d)a, c e)$-3\bar a, 4\bar b, 8\bar c$

4.29 $\bar a = -9\bar i + 4\bar k; \bar b = 2\bar i - 4\bar j + 6\bar k; \bar c = 3\bar i - 6\bar j + 9\bar k;$

a)$3\bar a, -5\bar b, -4\bar c$ b)$6b, 2c$ c)$-2a, 8c$ d)b, c e)$3\bar a, 6\bar b, -4\bar c$

4.30 $\bar a = 5\bar i - 6\bar j - 4\bar k; \bar b = 4\bar i + 8\bar j - 7\bar k; \bar c = 3\bar j - 4\bar k;$

a)$5\bar a, 3\bar b, -4\bar c$ b)$4b, a$ c)$7a, -2c$ d)a, b e)$5\bar a, 4\bar b, -2\bar c$

Задача №5

Вершины пирамиды находятся в точках A,B,C и D. Вычислить:

А)площадь указанной грани;

Б)площадь сечения, проходящего через середину ребра *l* и две вершины пирамиды;

В)объем пирамиды ABCD.

5.1 A(3, 4, 5), B(1, 2, 1), C(-2, -3, 6), D(3, -6, -3) A)ACD Б)L=AB, C и D
5.2 A(-7 ,-5, 6), B(-2 ,5 ,-3), C(3, -2, 4), D(1, 2, 2) A)BCD Б)L=CD, A и B
5.3 A(1, 3, 1), B(-1, 4, 6), C(-2, -3, 4), D(3, 4, -4) A)ACD Б)L=BC, A и D
5.4 A(2. 4, 1), B(-3, -2, 4), C(3, 5, -2), D(4, 2, -3) A)ABD Б)L=AC, B и D
5.5 A(-5, -3, -4), B(1, 4, 6), C(3, 2, -2), D(8, -2, 4) A)ACD Б)L=BC, A и D
5.6 A(3, 4, 2), B(-2, 3, -5), C(4, -3, 6), D(6, -5, 3) A)ABD Б)L=BD, A и C
5.7 A(-4, 6, 3), B(3, -5, 1), C(2, 6, -4), D(2, 4, -5) A)ACD Б)L=AD, B и C
5.8 A(7, 5, 8), B(-4, -5, 3), C(2, -3, 5), D(5, 1, -4) A)BCD Б)L=BC, A и D
5.9 A(3, -2, 6), B(-6, -2, 3), C(1, 1, -4), D(4, 6, -7) A)ABD Б)L=BD, A и C
5.10 A(-5, -4, -3), B(7, 3, -1), C(6, -2, 0), D(3, 2, -7) A)BCD Б)L=AD, B и C
5.11 A(3, -5, -2), B(-4, 2, 3), C(1, 5, 7), D(-2, -4, 5) A)ACD Б)L=BD, A и C
5.12 A(7, 4, 9), B(1, -2, -3), C(-5, -3, 0), D(1, -3, 4) A)ABD Б)L=AB, C и D
5.13 A(-4, -7, -3), B(-4, -5, 7), C(2, -3, 3), D(3, 2, 1) A)BCD Б)L=BC, A и D
5.14 A(-4, -5, -3), B(3, 1, 2). C(5, 7, -6), D(6, -1, 5) A)ACD Б)L=BC, A и D
5.15 A(5, 2, 4), B(-3, 5, -7), C(1, -5, 8), D(9, -3, 5) A)ABD Б)L=BD, B и C
5.16 A(-6, 4, 5), B(5, -7, 3), C(4, 2, -8), D(2, 8, -3) A)ACD Б)L=AD, B и C
5.17 A(5, 3, 6), B(-3, -4, 4), C(5, -6, 8), D(4, 0, -3) A)BCD Б)L=BC, A и D
5.18 A(5, -4, 4), B(-4, -6, 5), C(3, 2, -7), D(6, 2, -9) A)ABD Б)L=BD, A и C
5.19 A(-7, -6, -5), B(5, 1, -3), C(8, -4, 0), D(3, 4, -7) A)BCD Б)L=AD, B и C
5.20 A(7, -1, -2), B(1, 7, 8), C(3, 7, 9), D(-3, -5, 2) A)ACD Б)L=BD, A и C
5.21 A(5, 2, 7), B(7, -6, -9), C(-7, -6, 3), D(1, -5, 2) A)ABD Б)L=AB, C и D
5.22 A(-2, -5, -1), B(-6, -7, 9), C(4, -5, 1), D(2, 1, 4) A)BCD Б)L=BC, A и D
5.23 A(-6, -3, -5), B(5, 1, 7), C(3, 5, -1), D(4, -2, 9) A)ACD Б)L=BC, A и D
5.24 A(7, 4, 2), B(-5, 3, -9), C(1, -5, 3), D(7, -9, 1) A)ABD Б)L=BD, A и C
5.25 A(-8, 2, 7), B(3, -5, 9) C(2, 4, -6), D(4, 6, -5) A)ACD Б)L=AD, B и C
5.26 A(4, 3, 1), B(2, 7, 5), C(-4, -2, 4), D(2, -3, -5) A)ACD Б)L=AB, C и D
5.27 A(-9 ,-7, 4), B(-4 ,3 ,-1), C(5, -4, 2), D(3, 4, 4) A)BCD Б)L=CD, A и B
5.28 A(3, 5, 3), B(-3, 2, 8), C(-3, -2, 6), D(7, 8, -2) A)ACD Б)L=BD, A и C

5.29 A(4, 2, 3), B(-5, -4, 2), C(5, 7, -4), D(6, 4, -7) А)ABD Б)L=AD, B и C
5.30 A(-4, -2, -3), B(2, 5, 7), C(6, 3, -1), D(6, -4, 1) А)ACD Б)L=BC, A и D

Задача №6.

Сила **F** приложена к точке А. Вычислить:
А)работу силы **F** в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку В;
Б)модуль момента силы **F** относительно точки В.

6.1 **F**=(5, -3, 9), A(3, 4, -6), B(2, 6, 5)
6.2 **F**=(-3, 1, -9), A(6, -3, 5), B(9, 5, -7)
6.3 **F**=(2, 19, -4), A(5, 3, 4), B(6, -4, -1)
6.4 **F**=(-4, 5, -7), A(4, -2, 3), B(7, 0, -3)
6.5 **F**=(4, 11, -6), A(3, 5, 1), B(4, -2, -3)
6.6 **F**=(3, -5, 7), A(2, 3, -5), B(0, 4, 3)
6.7 **F**=(5, 4, 11), A(6, 1, -5), B(4, 2, -6)
6.8 **F**=(-9, 5, 7), A(1, 6, -3), B(4, -3, 5)
6.9 **F**=(6, 5, -7), A(7, -6, 4), B(4, 9, -6)
6.10 **F**=(-5, 4, 4), A(3, 7, -5), B(2, -4, 1)
6.11 **F**=(4, 7, -3), A(5, -4, 2), B(8, 5, -4)
6.12 **F**=(2, 2, 9), A(4, 2, -3), B(2, 4, 0)

Даны три силы **P**, **Q**, **R**, приложенные к точке А. Вычислить:
А)работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку В;
Б)величину момента равнодействующей этих сил относительно точки В.

6.13 **P**=(9, -3, 4), **Q**=(5, 6, -2), **R**=(-4, -2, 7) A(-5, 4, -2), B(4, 6, -5)
6.14 **P**=(5, -2, 3), **Q**=(4, 5, -3), **R**=(-1, -3, 6) A(7, 1, -5), B(2, -3, -6)
6.15 **P**=(3, -5, 4), **Q**=(5, 6, -3), **R**=(-7, -1, 8) A(-3, 5, 9), B(5, 6, -3)
6.16 **P**=(-10, 6, 5), **Q**=(4, -9, 7), **R**=(5, 3, -3) A(4, -5, 9), B(4, 7, -5)
6.17 **P**=(5, -3, 1), **Q**=(4, 2, -6), **R**=(-5, -3, 7) A(-5, 3, 7), B(3, 8, -5)
6.18 **P**=(-5, 8, 4), **Q**=(6, -7, 3), **R**=(3, 1, -5) A(2, -4, 7), B(0, 7, 4)
6.19 **P**=(7, -5, 2), **Q**=(3, 4, -8), **R**=(-2, -4, 3) A(-3, 2, 0), B(6, 4, -3)
6.20 **P**=(3, -4, 2), **Q**=(2, 3, -5), **R**=(-3, -2, 4) A(5, 3, -7), B(4, -1, -4)
6.21 **P**=(4, -2, -5), **Q**=(5, 1, -3), **R**=(-6, 2, 5) A(-3, 2, -6), B(4, 5, -3)
6.22 **P**=(7, 3, -4), **Q**=(9, -4, 2), **R**=(-6, 1, 4) A(-7, 2, 5), B(4, -2, 11)
6.23 **P**=(9, -4, 4), **Q**=(-4, 6, -3), **R**=(3, 4, 2) A(5, -4, 3), B(4, -5, 9)
6.24 **P**=(6, -4, 5), **Q**=(-4, 7, 8), **R**=(5, 1, -3) A(-5, -4, 2), B(7, -3, 6)
6.25 **P**=(5, 5, -6), **Q**=(7, -6, 6), **R**=(-4, 3, 4) A(-9, 4, 7), B(8, -1, 7)
6.26 **P**=(7, -6, 2), **Q**=(-6, 2, -1), **R**=(1, 6, 4) A(3, -6, 1), B(6, -2, 7)
6.27 **P**=(4, -2, 3), **Q**=(-2, 5, 6), **R**=(7, 3, -1) A(-3, -2, 5), B(9, -5, 4)
6.28 **P**=(7, 3, -4), **Q**=(3, -2, 2), **R**=(-5, 4, 3) A(-5, 0, 4), B(4, -3, 5)
6.29 **P**=(3, -2, 4), **Q**=(-4, 4, -3), **R**=(3, 4, 2) A(1, -4, 3), B(4, 0, -2)
6.30 **P**=(2, -1, -3), **Q**=(3, 2, -1). **R**=(-4, 1, 3) A(-1, 4, -2), B(2, 3, -1)

Решение типового варианта

Задача №1

Даны векторы $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 6\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$, где $|m| = 2$, $|n| = 5$; $(m, n) = 2\pi/3$.

Найти: А) $\mathbf{a}*\mathbf{b}$;

Б) $пр_b(4\mathbf{a} - 5\mathbf{b})$;

В) $\cos(2\mathbf{b} - a, 4\mathbf{b})$.

Решение

А) Вычисляем:

$$a * b = (-m + 6n)*(3m + 4n) = -3m^2 + 14|m||n|\cos(m, n) + 24n^2 =$$

$$= -3*2^2 + 14*2*5(-1/2) + 24*5^2 = 518.$$

Б) Пусть $\mathbf{c} = 4\mathbf{a} - 5\mathbf{b} = -19\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$. Тогда $пр_b\mathbf{c} = \dfrac{c*b}{|b|}$.

$$c * b = (-19m + 4n)*(3m + 4n) = -57m^2 - 64|m||n|\cos(m, n) + 16n^2 = -148,$$

$$|b| = \sqrt{b^2} = \sqrt{(3m + 4n)^2} = \sqrt{9m^2 + 24|m||n|\cos(m, n) + 16n^2} = \sqrt{316}.$$

Окончательно получаем:

$$пр_b(4a\text{-}5b) = -148/\sqrt{316}.$$

В)Пусть $\mathbf{d} = 2\mathbf{b} - \mathbf{a} = 7\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$, $\mathbf{e} = 4\mathbf{b} = 12\mathbf{m} + 16\mathbf{n}$.

$$\mathrm{Cos}(\mathbf{d}, \mathbf{e}) = \frac{d*e}{|d||e|},$$

$$\mathbf{d} * e = (7m + 2n)*(12m + 16n) = 84m^2 + 136|m||n|\cos(m, n) + 32|n|^2 = 456,$$

$$|d| = \sqrt{(7m + 2n)^2} = \sqrt{49m^2 + 28|m||n|\cos(m, n) + 4n^2} = \sqrt{156},$$

$$|e| = \sqrt{(12m + 16n)^2} = \sqrt{144m^2 + 384|m||n|\cos(m, n) + 256n^2} = \sqrt{5056}.$$

В результате имеем:

$$\mathrm{Cos}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}, 4\mathbf{b}) = 456/\sqrt{788736} \approx 0.5$$ Ч.Т.Д.

Задача №2

По координатам точек A(-5, 1,6), B(1, 4, 3) и C(6, 3, 9) найти:

А)модуль вектора **a**=4AB+BC ;

Б)скалярное произведение векторов **a** и **b**=BC ;

В)проекцию вектора **c**=**b** на вектор **d**=AB ;

Г)координаты точки M, делящей отрезок ***l***=AB в отношении 1:3.

Решение:

А)Последовательно находим AB=(6, 3, -3), BC=(5, -1, 6),
4AB+BC=(29, 11, -6)

$$|4AB + BC| = \sqrt{29^2 + 11^2 + (-6)^2} = \sqrt{998}.$$

Б)Имеем **a**=(29, 11, -6), **b**=(5, -1, 6.).

Тогда **a*b** = 29*5 + 11(-1) + (-6)6 = 98.

В)Так как

$$пр_d c = \frac{c * d}{|d|}, \mathbf{d}=(6, 3, -3),$$

$$\mathbf{c*d} = 30 - 3 - 18 = 9, \ |d| = \sqrt{36+9+9} = \sqrt{54},$$

то

$$пр_{AB}BC = 9/\sqrt{54};$$

Г)имеем : $\lambda = 1/3$, $r_m = \dfrac{r_A + \lambda r_B}{1+\lambda}$. Следовательно,

$$X_M = \frac{-5 + 1/3 * 1}{1 + 1/3} = -\frac{7}{2}, \quad Y_M = \frac{1 + 4 * 1/3}{1 + 1/3},$$

$$Z_M = \frac{6 + 1/3 * 3}{1 + 1/3} = \frac{21}{4}, \quad M\left(-7/2, 7/4, 21/4\right).$$

Задача №3

Доказать, что векторы a=(3, -1, 0), b=(2, 3, 1), c=(-1, 4, 3) образуют базис, и найти координаты вектора d=(2, 3, 7) в этом базисе.

Вычислим :

$$abc = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0.$$

Следовательно, векторы a,b,c образуют базис, и вектор d линейно выражается через базисные векторы: $d = \alpha a + \beta b + \gamma c$

или в координатной форме :

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha + 2\beta - \gamma = 2 \\ -\alpha + 3\beta + 4\gamma = 3 \\ \beta + 3\gamma = 7 \end{aligned}\right|.$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера.

Находим Δ=22,

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 66, \quad \Delta(\beta) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -44, \quad \Delta(\gamma) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 66,$$

$$\alpha = \frac{\Delta(\alpha)}{\Delta} = 3\ ; \quad \beta = \frac{\Delta(\beta)}{\Delta} = -2\ ; \quad \gamma = \frac{\Delta(\gamma)}{\Delta} = 3\ .$$

Поэтому d=(3, -2, 3) = 3a - 2b + 3c.

ч.т.н.

Задача №4

Даны векторы a = 4i + 4k, b = -i + 3j + 2k и c = 3i + 5j.

Необходимо:

a)вычислить произведение векторов a,b,5c ;

b)найти модуль векторного произведения 3c и b ;

c)вычислить скалярное произведение векторов a и 3b;

d)проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы a и b;

e) проверить, будут ли компланарны вектора a, b и c;

Решение:

А)Так как 5c = 15i + 25j, то

$$(a \times b) * 5c = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 15 & 25 & 0 \end{vmatrix} = -100 - 180 - 200 = -480.$$

b) Поскольку 3c = 9i+15j, то

$$3c\times b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 9 & 15 & 0\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=30i+27k+15k-18j=30i-18j+42k,$$

$$|3c\times b|=\sqrt{30^2+(-18)^2+42^2}=\sqrt{2988}.$$

c)Находим: 3b = -3i + 9j + 6k, a*3b = 4(-3) + 0*9 + 4*6 = 12.

d)Так как a=(4, 0, 4), b=(-1, 3, 2) и $\frac{4}{-1}\neq\frac{0}{3}\neq\frac{4}{2}$,то векторы a и b не коллинеарны. Поскольку $a*b=4(-1)+0*3+4*2\neq 0$, то векторы a и b не ортогональны;

e)векторы a,b и c компланарны, если abc = 0. Вычисляем :

$$abc=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{vmatrix}=-20-36-40\neq 0,$$ т.е. векторы a,b и c не компланарны.

ЧТД.

Задача №5

Вершины пирамиды находятся в точках A(2, 3, 4), B(4, 7, 3), C(1, 2, 2) и D(-2, 0, -1). Вычислить:А)площадь грани ABC;
Б)площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC и AD;
В)объем пирамиды ABCD.

А)Известно, что $S_{abc}=\frac{1}{2}|AB\times AC|$. Находим :AB=(2, 4, -1), AC=(-1, -1, -2)

$$AB\times AC=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{vmatrix}=-9i+5j+2k.$$

Окончательно имеем: $S_{abc}=\frac{1}{2}\sqrt{9^2+5^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{110}$

Б) Середины ребер AB, BC и AD находятся в точках
K(3, 5, 3.5), M(1.5, 2.5, 3), N(0, 1.5, 1.5).

Далее имеем: $S_{сеч}=\frac{1}{2}|KM\times KN|$, KM=(-1.5, -2.5, -0.5) ,KN=(-3, -3.5, -2)

$$KM\times KN=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1.5 & -2.5 & -0.5\\ -3 & -3.5 & -2\end{vmatrix}=3.25i-1.5j-2.25k.$$

$S_{сеч}=\frac{1}{2}\sqrt{3.25^2+1.25^2+2.25^2}=\frac{1}{2}\sqrt{17.875}.$

В) Поскольку $V_{пир}=\frac{1}{6}\left|(AB\times AC)*AD\right|$, AD=(-4, -3, -5),

$$(AB\times AC)*AD=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\\ -4 & -3 & -5\end{vmatrix}=11 \Rightarrow V=11/6,$$

Задача №6

Сила **F**=(2, 3, -5) приложена к точке A(1, -2, 2). Вычислить:
А)работу силы **F** в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B(1, 4, 0);
Б)модуль момента силы **F** относительно точки B.

Решение:
А)Так как A=**F***S, S=AB=(0,6,-2), то **F***AB=2*0+3*6+(-5)(-2)=28, A=28.
Б)Момент силы M= $BA\times F$, $BA=(0,-6,2)$

$$BA\times F=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 0 & -6 & 2\\ 2 & 3 & -5\end{vmatrix}=24i+4j+12k \Rightarrow |M|=\sqrt{24^2+4^2+12^2}=4\sqrt{46}.$$

Семестр № 2

Контрольная работа № 3

Плоскость. Прямая в пространстве

Прямая и плоскость. Прямая на плоскости

Решение типового варианта

Контрольная работа № 3

(30 вариантов по 5 задач)

Задача №1

Даны четыре точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ и $A_4(x_4, y_4)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$;

б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2;

д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.

Вычислить:

е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

ж) косинус угла между координатной плоскостью OXY и плоскостью $A_1A_2A_3$.

1.1. $A_1(3, 1, 4)$, $A_2(-1, 6, 1)$, $A_3(-1, 1, 6)$, $A_4(0, 4, -1)$.

1.2. $A_1(3, -1, 2)$, $A_2(-1, 0, 1)$, $A_3(1, 7, 3)$, $A_4(8, 5, 8)$.

1.3. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(5, 8, 3)$, $A_3(1, 2, -2)$, $A_4(-1, 0, 2)$.

1.4. $A_1(2, 4, 3)$, $A_2(1, 1, 5)$, $A_3(4, 9, 3)$, $A_4(3, 6, 7)$.

1.5. $A_1(9, 5, 5)$, $A_2(-3, 7, 1)$, $A_3(5, 7, 8)$, $A_4(6, 9, 2)$.

1.6. $A_1(0, 7, 1)$, $A_2(2, -1, 5)$, $A_3(1, 6, 3)$, $A_4(3, -9, 8)$.

1.7. $A_1(5, 5, 4)$, $A_2(1, -1, 4)$, $A_3(3, 5, 1)$, $A_4(5, 8, -1)$.

1.8. $A_1(6, 1, 1)$, $A_2(4, 6, 6)$, $A_3(4, 2, 0)$, $A_4(1, 2, 6)$.

1.9. $A_1(7, 5, 3)$, $A_2(9, 4, 4)$, $A_3(4, 5, 7)$, $A_4(7, 9, 6)$.

1.10. $A_1(6, 8, 2)$, $A_2(5, 4, 7)$, $A_3(2, 4, 7)$, $A_4(7, 3, 7)$.

1.11. $A_1(4, 2, 5)$, $A_2(0, 7, 1)$, $A_3(0, 2, 7)$, $A_4(1, 5, 0)$.

1.12. $A_1(4, 4, 10)$, $A_2(7, 10, 2)$, $A_3(2, 8, 4)$, $A_4(9, 6, 9)$.

1.13. $A_1(4, 6, 5)$, $A_2(6, 9, 4)$, $A_3(2, 10, 10)$, $A_4(7, 5, 9)$.

1.14. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(8, 7, 4)$, $A_3(5, 10, 4)$, $A_4(4, 7, 8)$.

1.15. $A_1(10, 9, 6)$, $A_2(2, 8, 2)$, $A_3(9, 8, 9)$, $A_4(7, 10, 3)$.

1.16. $A_1(1, 8, 2)$, $A_2(5, 2, 6)$, $A_3(5, 7, 4)$, $A_4(4, 10, 9)$.

1.17. $A_1(6, 6, 5)$, $A_2(4, 9, 5)$, $A_3(4, 6, 11)$, $A_4(6, 9, 3)$.

1.18. $A_1(7, 2, 2)$, $A_2(-5, 7, -7)$, $A_3(5, -3, 1)$, $A_4(2, 3, 7)$.

1.19. $A_1(8, -6, 4)$, $A_2(10, 5, -5)$, $A_3(5, 6, -8)$, $A_4(8, 10, 7)$.

1.20. $A_1(1, -1, 3)$, $A_2(6, 5, 8)$, $A_3(3, 5, 8)$, $A_4(8, 4, 1)$.

1.21. $A_1(1, -2, 7)$, $A_2(4, 2, 10)$, $A_3(2, 3, 5)$, $A_4(5, 3, 7)$.

1.22. $A_1(4, 2, 10)$, $A_2(1, 2, 0)$, $A_3(3, 5, 7)$, $A_4(2, -3, 5)$.

1.23. $A_1(2, 3, 5)$, $A_2(5, 3, -7)$, $A_3(1, 2, 7)$, $A_4(4, 2, 0)$.

1.24. $A_1(5, 3, 7)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(4, 2, 10)$, $A_4(1, 2, 7)$.

1.25. $A_1(4, 3, 5)$, $A_2(1, 9, 7)$, $A_3(0, 2, 0)$, $A_4(5, 3, 10)$.

1.26. $A_1(3, 2, 5)$, $A_2(4, 0, 6)$, $A_3(2, 6, 5)$, $A_4(6, 4, -1)$.

1.27. $A_1(2, 1, 6)$, $A_2(1, 4, 9)$, $A_3(2, -5, 8)$, $A_4(5, 4, 2)$.

1.28. $A_1(2, 1, 7)$, $A_2(3, 3, 6)$, $A_3(2, -3, 9)$, $A_4(1, 2, 5)$.

1.29. $A_1(2, -1, 7)$, $A_2(6, 3, 1)$, $A_3(3, 2, 8)$, $A_4(2, -3, 7)$.

1.30. $A_1(0, 4, 5)$, $A_2(3, -2, 1)$, $A_3(4, 5, 6)$, $A_4(3, 3, 2)$.

Задача №2

2.1. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку M(-2, 7, 3) параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

2.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1, 5, 6)$, $M_2(-1, 7, 10)$.

2.3. Найти расстояние от точки M(2; 0; -0,5) до плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.

2.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(2, -3, 5) параллельно плоскости OXY.

2.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OX и точку A(2, 5, -1).

2.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(2, 5, -1), B(-3, 1, 3) параллельно оси OY.

2.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(3, 4, 0) и прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.

2.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

2.9. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось OX и точку A(3, 2, -5).

2.10. Составить уравнение плоскости в <<отрезках>>, если она проходит через точку M(6, -10, 1) и отсекает на оси Ox отрезок $\alpha = -3$, а на оси OZ — отрезок $c = 2$.

2.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(2, 3, -4) параллельно двум векторам $a = (4, 1, -1)$ и $b = (2, -1, 2)$.

2.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(1, 1, 0), B(2, -1, -1) перпендикулярно к плоскости $5x + 2y + 3z - 7 = 0$.

2.13. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x - 3y + z - 1 = 0$ и $x - y + 5z + 3 = 0$.

2.14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(3, -1, 2), B(2, 1, 4) параллельно вектору $a = (5, -2, -1)$.

2.15. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к вектору $\overline{AB}$, если A(5, -2, 3), B(1, -3, 5).

2.16. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку M(2, -3, 3) параллельно плоскости $3x + y - 3z = 0$.

2.17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(1, -1, 2) перпендикулярно к отрезку M_1M_2, если $M_1(2, 3, -4)$, $M_2(-1, 2, -3)$.

2.18. Показать, что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z - 1 = 0$, а прямая $x = t + 7$, $y = t - 2$, $z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости.

2.19. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку A(3, -4, 1) параллельно координатной плоскости OXZ.

2.20. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OY и точку M(3, -5, 2).

2.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M(1, 2, 3) и N(-3, 4, -5) параллельно оси OZ.

2.22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(2, 3, -1) и прямую $x = t - 3$, $y = 2t + 5$, $z = -3t + 1$.

2.23. Найти проекцию точки M(4, -3, 1) на плоскость $x - 2y - z - 15 = 0$.

2.24. Определить при каком значении B плоскости $x - 4y + z - 1 = 0$ и $2x + By + 10z - 3 = 0$ будут перпендикулярны.

2.25. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку M(2, -3, -4) и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины.

2.26. При каких значениях n и A прямая $\frac{x}{3}=\frac{y-5}{n}=\frac{z+5}{6}$ перпендикулярна к плоскости $Ax + 2y - 2z - 7 = 0$?

2.27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(2, 3, -1), B(1, 1, 4) перпендикулярно к плоскости $x - 4y + 3z + 2 = 0$.

2.28. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x + 5y - z + 7 = 0$ и $3x - y + 2z - 3 = 0$.

2.29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M(2, 3, -5) и N(-1, 1, -6) параллельно вектору a = (4, 4, 3).

2.30. Определить, при каком значении C плоскости $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ и $x + 3y + 2z + 5 = 0$ будут перпендикулярны.

Задача №3

3.1. Доказать параллельность прямых $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ и $x - 2y + 2z - 8 = 0$, $x + 6z - 6 = 0$.

3.2. Доказать, что прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x + y - z = 0$, а прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{3}$ лежит в этой плоскости.

3.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(1, -3, 3) и образующей с осями координат углы, соответственно равные 60°, 45° и 120°.

3.4. Доказать, что прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{6}$ перпендикулярна к прямой

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - 4z + 2 = 0,\\ 4x - y - 5z + 4 = 0.\end{aligned}\right\}$$

3.5. Составить параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами A(3, 6, -7), B(-5, 1, -4), C(0, 2, 3), проведенной из вершины C.

3.6. При каком значении n прямая $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{n}=\frac{z}{1}$ параллельна прямой

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{array}\right\}$$

3.7. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ и плоскости 2x + 3y + +z - 1 = 0.

3.8. Найти проекцию точки P(3, 1, -1) на плоскость x + 2y + 3z - 30 = 0.

3.9. При каком значении C плоскости 3x - 5y + Cz - 3 = 0 и x + 3y + 2z + 5= =0 перпендикулярны?

3.10. При каком значении A плоскость Ax + 3y - 5z + 1 = 0 параллельна прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$?

3.11. При каких значениях m и C прямая $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости 3x - 2y + Cz + 1 = 0?

3.12. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой x = 2t + 5, y = -3t + 1, z = -7t - 4.

3.13. Проверить, лежат ли на одной прямой точки A(0, 0, 2), B(4, 2, 5) и C(12, 6, 11).

3.14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(2, -5, 3) параллельно прямой 2x - y + 3z - 1 = 0, 5x + 4y - z - 7 = 0.

3.15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(2, -3, 4) перпендикулярно к прямым $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$ и $\frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-3}$.

3.16. При каких значениях A и B плоскость Ax + By + 6z - 7 = 0 перпендикулярна к прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$?

3.17. Показать, что прямая $\frac{x}{6}=\frac{y-3}{-8}=\frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости x +3y--2z + 1 = 0, а прямая x = t + 7, y = t - 2, z = 2t + 1 лежит в этой плоскости.

3.18. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OZ и точку K(-3, 1, -2).

3.19. Показать, что прямые $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и 3x + y - 5z + 1 =0, 2x + 3y - 8z + 3= = 0 перпендикулярны.

3.20. При каком значении D прямая 3x - y + 2z - 6 = 0, x + 4y - z + D = 0 пересекает ось OZ?

3.21. При каком значении p прямые

$$\left.\begin{array}{l} x = 2t+5, \\ y = -t+2, \\ z = pt-7. \end{array}\right\} \text{ и } \left.\begin{array}{l} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0. \end{array}\right\}$$

параллельны?

3.22. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{4}$ и плоскости 3x - y+ + 2z - 8 = 0.

3.23. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку K(2, -5, 3) параллельно плоскости OXZ.

3.24. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости x + 2y - z + 5 = 0 с плоскостью, проходящей через ось OY и точку M(5, 3, 2).

3.25. При каких значениях B и D прямая x - 2y + z - 9 = 0, 3x + By + z + D = =0 лежит в плоскости OXY?

3.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 3, 3)$ параллельно двум векторам $\mathbf{a} = (-1, -3, 1)$ и $\mathbf{b} = (4, 1, 6)$.

3.27. Составить уравнение прямой, проходящей через точку E(5, 4, 5) параллельно оси OX.

3.28. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(2, 3, 1) перпендикулярно к прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

3.29. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку M(1, -5, 3) перпендикулярно к прямым $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$ и $x = 3t + 1$, $y = -t - 5$, $z = 2t + 3$.

3.30. Найти точку, симметричную точке M(4, 3, 10) относительно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

<u>Задача №4</u>

Даны вершины треугольника ABC: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

4.1. A(-2, 4), B(3, 1), C(10, 7),

4.2. A(-3, -2), B(14, 4), C(6, 8),

4.3. A(1, 7), B(-3, -1), C(11, -3),

4.4. A(1, 0), B(-1, 4), C(9, 5),

4.5. A(1, -2), B(7, 1), C(3, 7),

4.6. A(-2, -3), B(1, 6), C(6, 1),

4.7. A(-4, 2), B(-6, 6), C(6, 2),

4.8. A(4, -3), B(7, 3), C(1, 10),

4.9. A(4, -4), B(8, 2), C(3, 8),

4.10. A(-3, -3), B(5, -7), C(7, 7),

4.11. A(1, -6), B(3, 4), C(-3, 3),

4.12. A(-4, 2), B(8, -6), C(2, 6),

4.13. A(-5, 2), B(0, 4), C(5, 7),

4.14. A(4, -4), B(6, 2), C(-1, 8),

4.15. A(-3, 8), B(-6, 2), C(0, -5),

4.16. A(6, -9), B(10, -1), C(-4, 1),

4.17. A(4, 1), B(-3, -1), C(7, -3),

4.18. A(-4, 2), B(6, -4), C(4, 10).

4.19. A(3, -1), B(11, 3), C(-6, 2),

4.20. A(-7, -2), B(-7, 4), C(5, -5),

4.21. A(-1, -4), B(9, 6), C(-5, 4),

4.22. A(10, -2), B(4, -5), C(-3, 1),

4.23. A(-3, -1), B(-4, -5), C(8, 1),

4.24. A(-2, -6), B(-3, 5), C(4, 0),

4.25. A(-7, -2), B(3, -8), C(-4, 6),

4.26. A(0, 2), B(-7, -4), C(3, 2),

4.27. A(7, 0), B(1, 4), C(-8, -4),

4.28. A(1, -3), B(0, 7), C(-2, 4),

4.29. A(-5, 1), B(8, -2), C(1, 4),

4.30 A(2, 5), B(-3, 1), C(0, 4).

Задача №5

5.1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y - 7 = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3.

5.2. Найти проекцию точки A(-8, 12) на прямую, проходящую через точки B(2, -3) и C(-5, 1).

5.3. Даны две вершины треугольника ABC: A(-4, 4), B(4, -12) и точка M(4, 2) пересечения его высот. Найти вершину C.

5.4 Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y - x = 3$.

5.5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(2, -3) и точку пересечения прямых $2x - y = 5$ и $x + y = 1$.

5.6. Доказать, что четырехугольник ABCD - трапеция, если A(3, 6), B(5, 2), C(-1, -3), D(-5, 5).

5.7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку A(3, 1) перпендикулярно к прямой BC, если B(2, 5), C(1, 0).

5.8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, 1) параллельно прямой MN, если M(-3, -2), N(1, 6).

5.9. Найти точку, симметричную точке M(2, -1) относительно прямой $x - 2y + 3 = 0$.

5.10. Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника ABCD, если A (-1,-3), B(3, 5), C(5, 2), D(3, -5)

5.11. Через точку пересечения прямых $6x - 4y + 5 = 0$, $2x + 5y + 8 = 0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс.

5.12. Известны уравнения стороны AB треугольника ABC $4x + y = 12$, его высот BH $5x - 4y = 12$ и AM $x + y = 6$. Найти уравнения двух других сторон треугольника ABC.

5.13. Даны две вершины треугольника ABC: A(-6, 2), B(2, -2) и точка пересечения его высот H(1, 2). Найти координаты точки M пересечения стороны AC и высоты BH.

5.14. Найти уравнения высот треугольника ABC, проходящих через вершины A и B, если A(-4, 2), B(3, -5), C(5, 0).

5.15. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки A(2, 3), B(0, -3), C(6, -3).

5.16. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину A треугольника ABC, зная уравнения его сторон: AB - $2x - y - 3 = 0$, AC - $x + 5y - 7 = 0$, BC - $3x - 2y + 13 = 0$.

5.17. Дан треугольник с вершинами A(3, 1), B(-3, -1), и C(5, -12). Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C.

5.18. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x + 5y - 8 = 0$ и $2x + 3y + 4 = 0$.

5.19. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x + 5y - 15 = 0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.

5.20. Даны уравнения сторон четырехугольника: $x - y = 0$, $x + 3y = 0$, $x - y - 4 = 0$, $3x + y - 12 = 0$. Найти уравнения его диагоналей.

5.21. Составить уравнение медианы CM и высоты CK треугольника ABC, если A(4, 6), B(-4, 0), C(-1, -4).

5.22. Через точку P(5, 2) провести прямую: а) отсекающие равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси Ox; в) параллельную оси Oy.

5.23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, 3) и составляющей с осью Ox угол: а) 45°, б) 90°, в) 0°.

5.24. Какую ординату имеет точка C, лежащая на одной прямой с точками A(-6, -6) и B(-3, -1) и имеющая абсциссу, равную 3?

5.25. Через точку пересечения прямых $2x - 5y - 1 = 0$ и $x + 4y - 7 = 0$ провести прямую, делящую отрезок между точками A(4, -3) и B(-1, 2) в отношении $\lambda = \frac{2}{3}$.

5.26. Известны уравнения двух сторон ромба $2x - 5y - 1 = 0$ и $2x - 5y - 34 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $x + 3y - 6 = 0$. Найти уравнение второй диагонали.

5.27. Найти точку E пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки A(-3, 1), B(7, 5) и C(5, -3).

5.28. Записать уравнения прямых, проходящих через точку A(-1, 1) под углом 45° к прямой $2x + 3y = 6$.

5.29. Даны уравнения высот треугольника ABC $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ и координаты его вершины A(2, 3). Найти уравнения сторон AB и AC треугольника.

5.30. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - 2y = 0$, $x - y - 1 = 0$ и точка пересечения его диагоналей M(3, -1). Найти уравнения двух других сторон.

Решение типового варианта.

Задача №1.

Даны четыре точки $A_1(4, 7, 8)$, $A_2(-1, 13, 0)$, $A_3(2, 4, 9)$, $A_4(1, 8, 9)$.Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$;

б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_4N, параллельной прямой A_1A_2;

Вычислить:

д) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

е) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Решение.

а) Составим уравнение на плоскости $A_1A_2A_3$ по трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $6x - 7y - 9z + 97 = 0$.

б) Учитывая уравнения прямой, проходящей через две точки , уравнения прямой A_1A_2 можно записать в виде

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y-7}{-6} = \frac{z-8}{8}.$$

в) Из условия перпендикулярности прямой A_4M и плоскости $A_1A_2A_3$ следует, что в качестве направляющего вектора прямой s можно взять нормальный вектор n = (6, -7, -9) плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда уравнение прямой A_4M запишется в виде

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-8}{-7} = \frac{z-9}{-9}.$$

г) Так как прямая A_4N параллельна прямой A_1A_2, то их направляющие векторы s_1 и s_2 можно считать совпадающими: $s_1 = s_2 = (5, -6, 8)$. Следовательно уравнение прямой A_4N имеет вид

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-8}{-6} = \frac{z-9}{8}$$

д) По формуле (3.18)

$$sin\varphi = \frac{|6\cdot 5+(-7)(-6)+(-9)8|}{\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}\sqrt{5^2+(6)^2+8^2}} = \frac{34}{\sqrt{11}\sqrt{166}} \approx 0,8 .$$

е) В соответствии с формулой (3.5)

$$\cos\varphi = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|} = \frac{0\cdot 6+0\cdot(-7)+1\cdot(-9)}{\sqrt{1}\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}} = \frac{-9}{\sqrt{166}} \approx -0,7 .$$

Что и требовалось.

Задача №2

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M(4, 3, 1) и N(-2 , 0, -1) параллельно прямой, проведенной через точки A(1, 1, -1) и B(-3, 1, 0).

Решение.

Уравнение прямой AB имеет вид

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{1} .$$

Если плоскость проходит через точку M(4, 3, 1), то ее уравнение можно записать в виде A(x - 4) + B(y - 3) + C(z - 1) = 0. Так как эта плоскость проходит через точку N(-2, 0, -1), то выполняется условие

A(- 2 - 4) + B(0 - 3) + C(- 1 - 1) = 0 или

6A + 3B + 2C = 0.

Поскольку искомая плоскость параллельна найденной прямой AB, то с учетом условия параллельности имеем:

-4A + 0B + 1C = 0 или 4A - C = 0.

Решая систему

$$\left.\begin{array}{l} 6A+3B+2C=0, \\ 4A-C=0, \end{array}\right\}$$

находим, что C = 4A, $B = -\frac{14}{3}A$. Подставив полученные значения C и B в уравнение искомой плоскости, имеем

$$A(x-4)-\frac{14}{3}A(y-3)+4A(z-1)=0.$$

Так как $A \neq 0$, то полученное уравнение эквивалентно уравнению

$3(x - 4) - 14(y - 3) + 12(z - 1) = 0.$

Что и требовалось.

Задача №3

Найти координаты x_2, y_2, z_2 точки M_2, симметричной точке $M_1(6, -4, -2)$ относительно плоскости $x + y + z - 3 = 0$.

Решение.

Запишем параметрическое уравнение прямой M_1M_2, перпендикулярной к данной плоскости: $x = 6 + t$, $y = -4 + t$, $z = -2 + t$. Решив их совместно с уравнением данной плоскости, найдем $t = 1$ и, следовательно, точку M пересечения прямой M_1M_2 с данной плоскостью: $M(7, -3, -1)$. Так как точка M является серединой отрезка M_1M_2, то верны равенства:

$$7=\frac{6+x_2}{2},\quad -3=\frac{-4+y_2}{2},\quad -1=\frac{-2+z_2}{2},$$

из которых находим координаты точки M_2: $x_2 = 8$, $y_2 = -2$, $z_2 = 0$,

что и требовалось.

Задача №4

Даны вершины треугольника ABC: A(4, 3), B(-3, -3), C(2, 7). Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

Решение.

а) Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки, получим уравнение стороны AB:

$$\frac{x-4}{-3-4}=\frac{y-3}{-3-3},$$

откуда

$6(x - 4) = 7(y - 3)$ или $6x - 7y - 3 = 0$.

б) Угловой коэффициент прямой AB $k_1=6/7$. С учетом условия перпендикулярности прямых AB и CH угловой коэффициент высоты CH $k_2 = -7/6$ ($k_1k_2 = -1$). По точке C(2, 7) и угловому коэффициенту $k_2 = -7/6$ составляем уравнение высоты CH

$$y-7=-\frac{7}{6}(x-2) \text{ или } 7x + 6y - 56 = 0.$$

в) По известным формулам находим координаты x, y середины M отрезка BC:

$x = (- 3 + 2)/2 = -1/2$, $y = (- 3 + 7)/2 = 2$.

Теперь по двум известным точкам A и M составляем уравнение медианы AM:

$$\frac{x-4}{-1/2-4}=\frac{y-3}{2-3} \text{ или } 2x - 9y + 19 = 0.$$

г) Для нахождения координат точки N пересечения медианы AM и высоты CH составляем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l}7x+6y-56=0\\2x-9y+19=0\end{array}\right\}$$

Решая ее, получаем N(26/5, 49/15).

д) Так как прямая, проходящая через вершину C, параллельна стороне AB, то их угловые коэффициенты равны k_1 = 6/7. Тогда по точке C и угловому коэффициенту k_1 составляем уравнение прямой CD:

$$y-7=\frac{6}{7}(x-2) \text{ или } 6x - 7y + 37 = 0.$$

е) Расстояние от точки C до прямой AB вычисляем по формуле (3.29):

$$d=|CH|=\frac{|6\cdot 2-7\cdot 7-3|}{\sqrt{6^2+(-7)^2}}=\frac{40}{\sqrt{85}}\approx 4.4\,.$$

Решение данной задачи проиллюстрировано на рис. 3.1, что и требовалось.

Задача №5

Известны вершины O(0, 0), A(-2, 0) параллелограмма OACD и точка пересечения его диагоналей B(2, -2). Записать уравнения сторон параллелограмма.

Решение.

Уравнение стороны OA можно записать сразу: y = 0. Далее, так как точка B является серединой диагонали AD (рис. 3.2), то по формулам деления отрезка пополам можно вычислить координаты вершины D(x, y):

$$2=\frac{-2+x}{2}\,,\quad -2=\frac{0+y}{2}\,,$$

откуда x = 6, y = - 4.

Теперь можно найти уравнения всех остальных сторон. Учитывая параллельность сторон OA и CD, составляем уравнение стороны CD: y = -4. Уравнение стороны OD составляем по двум известным точкам:

$$\frac{x-0}{6-0}=\frac{y-0}{-4-0},$$

откуда $y=-\frac{2}{3}x$, $2x+3y=0$.

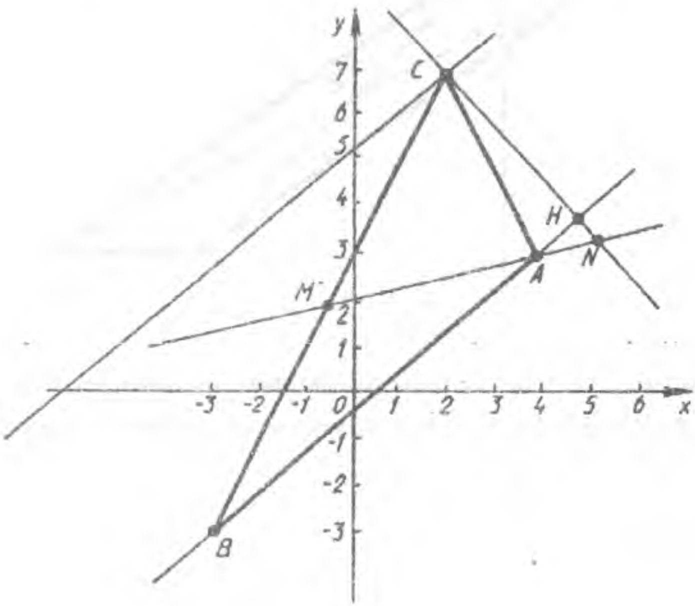


Рис. 3.1

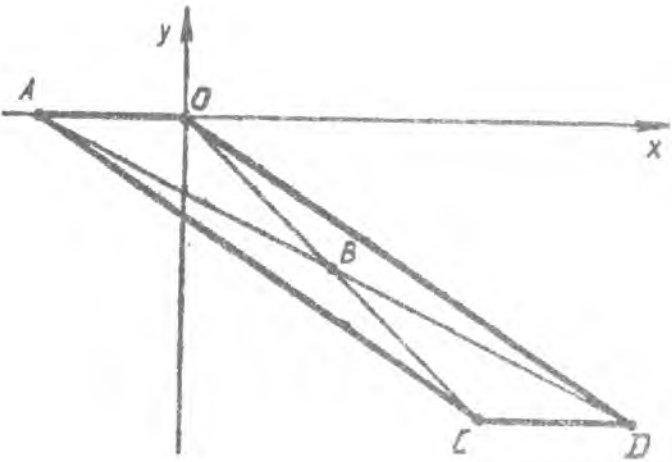


Рис.3.2

Наконец, уравнение стороны AC находим, учитывая тот факт, что она проходит через известную точку A(-2, 0) параллельно известной прямой OD:

$y - 0 = -\frac{2}{3}(x + 2)$ или $2x + 3y + 4 = 0$.

Что и требовалось.

Контрольная работа № 4

Линейные пространства

Линейные операторы

Приложение самосопряженных операторов к исследованию КВП и ПВП

Решение типового варианта

Контрольная работа № 4 (30 вариантов по 8 задач)

Задача №1

1.1. Выяснить, является ли вещественным линейным пространством множество всех вещественных матриц 2-го порядка.

1.2. Является ли множество R всех вещественных чисел вещественным линейным пространством ?

1.3 Является ли множество Z всех целых чисел вещественным линейным пространством ?

1.4. Является ли множество Q всех рациональных чисел вещественным линейным пространством ?

1.5. Каким должно быть число α, чтобы множество, состоящее из одного этого числа, являлось вещественным линейным пространством ?

1.6. Является ли вещественным линейным пространством множество всех многочленов степени не выше n.

1.7. Является ли вещественным линейным пространством множество всех многочленов степени n.

1.8. Является ли вещественным линейным пространством множество всех многочленов степени выше n.

1.9. Является ли множество всех вещественных матриц размерности $m x n$ вещественным линейным пространством ?

1.10. Пусть R_{1x2} – множество всех вещественных матриц вида (α_1, α_2). Является ли это множество вещественным линейным пространством, если операция сложения определена обычным способом, а операция умножения на число $\alpha \in R$ равенством $\alpha(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha\alpha_2)$?

1.11. Показать, что множество C комплексных чисел над полем R действительных чисел образует пространство размерности n=2.

1.12. Является ли вещественным линейным пространством множество всех вещественных функций, область определения которых – вся числовая прямая.

1.13. Является ли вещественным линейным пространством множество всех числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$, где $\alpha_n \in R$?

1.14. Является ли вещественным линейным пространством множество всех геометрических векторов, удовлетворяющих условию $|x| > \alpha$, где α – фиксированное число.

1.15. Является ли вещественным линейным пространством множество всех сходящихся последовательностей ?

1.16. Является ли вещественным линейным пространством множество всех расходящихся последовательностей ?

1.17. Является ли подмножество L элементов линейного пространства V его подпространством, если L – множество рациональных чисел, V – множество вещественных чисел ?

Является ли подмножество L элементов линейного пространства V его подпространством, если V множество квадратных матриц $A=(\alpha_{ij})$ третьего порядка ($\alpha_{ij} \in R$), L – множество матриц вида:

1.18. $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(\alpha \in R)$

1.19. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.20. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $(\alpha,b,c)\in R$

1.21. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(\alpha,b,c)\in R$

Является ли подмножество L элементов линейного пространства V его подпространством, если V – множество многочленов с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не выше трех, L – множество многочленов вида

1.22. αx^2+bx+c $(\alpha,b,c\in R)$.

1.23. αx^2+bx+c $(\alpha,b,c\in R,\ \alpha\neq 0)$

1.24. αx^2+b $(a,b\in R)$

1.25. Пусть α– фиксированный вектор евклидова пространства V, α - фиксированное действительное число. Будет ли множество всех векторов x, для которых $(x, \alpha)= \alpha$, линейным подпространством пространства V ?

1.26. Будет ли линейным пространством множество многочленов f(t) от одного переменного с действительными коэффициентами, удовлетворяющих условиям:

а) $f(0)=1$, б) $f(0)=0$.

в) $2f(0)-3f(1)=0$; г) $f(1)+f(2)+\ldots+f(k)=0$.

1.27. Будет ли линейным пространством множество всех многочленов данной степени n ?

1.28. Является ли линейным пространством множество векторов на плоскости, концы которых лежат на данной прямой ? Предполагается, что начало каждого вектора находится в фиксированной точке “О” плоскости, являющейся началом прямоугольной системы координат.

1.29. Можно ли определить на множестве из двух элементов операции сложения и умножения на число так, чтобы это множество стало линейным пространством ?

1.30. Выяснить образует ли данное множество функций на произвольном отрезке $[\alpha,b]$ линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на число:

множество функций, непрерывных на $[\alpha,b]$;

множество функций, дифференцируемых на $[\alpha,b]$;

множество функций, интегрируемых на $[\alpha,b]$;

множество функций, неотрицательных на $[\alpha,b]$;

Задача № 2

2.1. Показать, что в линейном вещественном пространстве вещественных квадратных матриц второго порядка векторы $e_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ образуют базис, и найти в указанном базисе координаты вектора $x=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}$.

2.2. Известно, что любой вектор $x\in V$ линейно выражается через векторы $e_1,e_2,\ldots,e_n$ этого пространства. Образуют ли векторы $e_1,e_2,\ldots,e_n$ базис пространства V ?

2.3. Выяснить, образует ли базис в пространстве $R^3=\{x=(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3)\mid \alpha_i \in R\}$ данная система векторов:

а) (1,0,0) , (0,1,0) , (0,0,1)

б) (1,2,-7) , (0,3,1) , (0,0,1)

в) (1,0,0) , (0,1,0) , (1,1,0)

г) (3,0,5) , (1,2,-1)

д) (1,2,-1) , (2,3,4) , (-1,7,2) , (3,4,6).

Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве квадратных матриц $A=(a_{ij})$ ($a_{ij}\in R$) 2-го порядка данная система векторов:

2.4. а) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$;

2.5. а) $\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}2&3\\0&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&7\\2&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&4\\0&7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\5&7\end{pmatrix}$.

Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не выше двух, данная система векторов.

2.6. а) $1, x, x^2$; б) $3, x-2, x+1$.

2.7. а) $3x+3, x^2-1, x^2+3x+2$; б) $1, (x-2), (x-2)^2$.

2.8. Доказать, что если e_1,e_2,e_3,e_4 - базис линейного пространства, то $e_1, x=\sum_{i=1}^{4}\alpha_i e_i\,(\alpha_2\neq 0)$, e_3,e_4 – также базис этого пространства.

Найти размерность и один из базисов линейного пространства решений системы:

2.9. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0,\\ 2x_1-x_2+x_3=0.\end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3+x_4-x_5=0,\\ x_1+3x_2-2x_3+x_4-x_5=0,\\ 4x_1+2x_2-x_3+2x_4-2x_5=0.\end{cases}$

2.11. Указать координаты векторов α,b,c в базисе e_1,e_2,e_3,e_4, если: $\alpha=2e_1-e_2+3e_3+5e_4$, $b=4e_2-e_1$, $c=e_3$.

2.12. Найти координаты вектора $(3,1,-2,5,6)\in R^5$ в базисе.

$(1,0,0,0,0)$, $(0,1,0,0,0)$, $(0,0,1,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$, $(0,0,0,0,1)$.

2.13. Найти координаты вектора $(3,1,-2,5,6)\in R^5$ в базисе: $(0,1,0,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$, $(1,0,0,0,0)$, $(0,0,0,0,1)$, $(0,0,1,0,0)$.

2.14. Найти координаты каждого из указанных векторов пространства $R_2(x)$ в базисе x^2 , x , 1 :

а) $3x^2-2x+5$; б) $4x-1$.

2.15. Найти координаты каждого из указанных векторов пространства $R_2(x)$ в базисе x^2 , x , 1 : а) $4x-1$, б) $(2x+3)^2$.

2.16. Найти координаты каждого из указанных векторов пространства R_{2x2} в базисе $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$:

а) $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}3 & -4\\ 7 & 12\end{pmatrix}$.

Даны координаты векторов α и b в некотором базисе. Найти координаты вектора c в этом же базисе, если:

2.17. $\alpha(-1,3,4,1)$, $b(2,0,1,-1)$, $c=3\alpha-b$.

2.18. $\alpha(0,2,4,7)$, $b(-1,8,5,-3)$, $c=2\alpha+b$.

2.19. Даны векторы $\alpha=e_1+e_2$, $b=2e_1-e_2$, где e_1,e_2 – базис. Доказать, что векторы α и b образуют базис. Найти координаты вектора $c=2e_1-4e_2$ в базисе e_1,e_2.

2.20. Даны векторы $\alpha=2e_1+3e_2+e_3$. $b=-3e_1+2e_2+4e_3$, $c=e_1-e_2-5e_3$, где e_1,e_2,e_3 – базис. Доказать, что векторы α,b,c образуют базис. Найти координаты вектора $d=4e_1+e_2-9e_3$ в базисе α,b,c.

Выяснить, является ли вектор d линейной комбинацией остальных векторов, и если является, то найти эту линейную комбинацию:

2.21. $\alpha_1(2,-3,4)$, $\alpha_2(3,-1,4)$, $d(5,3,4)$.

2.22. $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $d=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.23. $\alpha_1(2,-3,4)$, $\alpha_2(3,-1,4)$, $d(0,0,9)$.

2.24. $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $d=\begin{pmatrix} 2 & 39 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

2.25. $\alpha_1=2+x+x^2$, $\alpha_2=3+5x$, $d=1-3x+2x^2$.

2.26. $\alpha_1=1+x+x^2$, $\alpha_2=1-x$, $d=2+4x+3x^2$.

Найти наибольшее число линейно независимых векторов в системе:

2.27. $x_1(2,-1,3,4)$, $x_2(1,5,13)$, $x_3(-1,0,2,5)$, $x_4(0,-6,4,6)$, $x_5(1,6,-2,1)$.

2.28. $x_1(-1,2,0,7)$, $x_2(1,3,-1,0)$, $x_3(4,1,2,5)$, $x_4(4,6,1,12)$, $x_5(7,14,2,31)$.

Найти все значения λ, при которых вектор d является линейной комбинацией векторов α_1, α_2, α_3, если

2.29. $\alpha_1(2,-1,3)$, $\alpha_2(3,1,4)$, $\alpha_3(1,-1,2)$, $d(8, \lambda,12)$.

2.30. $\alpha_1(3, \lambda,4)$, $\alpha_2(\lambda,1,3)$, $\alpha_3(0,5,1)$, $d(3-3\lambda, \lambda+2,-4)$.

Задача № 3

3.1. В линейном вещественном пространстве вещественных квадратных матриц 2-го порядка найти матрицу перехода от базиса

$e_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ к базису $e_1'=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2'=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3'=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4'=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3.2. Дана матрица $T=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ перехода от базиса e_1,e_2 к базису e_1',e_2'. Найти координаты вектора $\alpha=4e_1+e_2$ в базисе e_1',e_2'.

3.3. В пространстве V_3 найти матрицу перехода от базиса $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ к базису:

а) $\bar{i},\bar{j},-\bar{k}$; б) $\bar{j},\bar{i},\bar{k}$.

3.4.Найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 к базису e_2, e_3, e_1, e_5, e_4.

3.5.В пространстве $R_3(x)$ найти матрицу перехода от базиса x^2, x, 1 к базису $(x+1)^2$, $(x+1)$, 1.

3.6.В пространстве R^2 найти матрицу перехода от базиса α,b к базису α+b, α-b.

Дана матрица $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1',e_2', e_3'. Найти координаты вектора:

3.7.e_2' в базисе e_1, e_2, e_3.

3.8.e_3 в базисе e_1', e_2', e_3'

Найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису α,b,c и матрицу перехода от базиса α,b,c к e_1, e_2, e_3, если:

3.9.$\alpha=2e_1+2e_3$, $b=3e_3-e_2$, $c=3e_1+e_3$.

3.10.$\alpha=e_1+e_2+e_3$, $b=e_3$, $c=e_1+2e_2+3e_3$.

3.11.$\alpha=e_1-3e_2+2e_3$, $b=2e_1+4e_2+e_3$, $c=3e_2$.

3.12.$\alpha=5e_2$, $b=2e_1+3e_2+e_3$, $c=2e_2-e_1-2e_3$.

Даны два базиса: e_1,e_2 и e_1',e_2'. Найти координаты вектора x в базисе e_1,e_2, если:

3.13.$e_1'=2e_1+3e_2$, $e_2'=e_2-e_1$, $x=e_1'-3e_2'$.

3.14.$e_1'=e_2-e_1$, $e_2'=3e_2$, $x=2e_1'+4e_2'$.

Даны два базиса: e_1,e_2 и e_1',e_2'. Найти координаты вектора x в базисе e_1', e_2', если:

3.15.$e_1'=e_1+3e_2$, $e_2'=e_1-e_2$, $x=2e_1-5e_2$.

3.16.$e_1'=2e_1+3e_2$, $e_2=e_1+4e_2$, $x=5e_1+7e_2$.

Даны два базиса: e_1,e_2,e_3 и e_1',e_2',e_3'. Найти координаты вектора x в базисе e_1', e_2',e_3' если:

3.17. $e_1'=e_1+e_2+e_3$, $e_2'=3e_1+4e_3$, $e_3'=e_3$, $x=3e_1-2e_2+e_3$.

3.18. $e_1'=2e_1+2e_2+e_3$, $e_2'=-2e_1+e_2+2e_3$, $e_3'=e_1-2e_2+2e_3$, $x=2e_1+2e_2+e_3$.

Найти матрицу перехода от базиса α_1 , α_2 к базису b_1, b_2 по указанным разложениям этих векторов в базисе e_1 , e_2:

3.19. $\alpha_1=e_1+4e_2$, $\alpha_2=3e_1+5e_2$, $b_1=7e_1+e_2$, $b_2=e_2$.

3.20. $\alpha_1=e_1-e_2$, $\alpha_2=2e_1+5e_2$, $b_1=2e_1-3e_2$, $b_2=5e_2-3e_1$.

Найти матрицу перехода от базиса α_1, α_2, α_3 к базису b_1, b_2, b_3 по указанным разложениям этих векторов в базисе e_1 , e_2, e_3:

3.21. $\alpha_1=3e_1+2e_2+e_3$, $\alpha_2=e_1-2e_2+e_3$, $\alpha_3=2e_1+2e_2+3e_3$, $b_1=e_1+e_2$, $b_2=e_1-e_3$, $b_3=e_1+e_2+e_3$.

3.22. $\alpha_1=e_1+e_3$, $\alpha_2=2e_1+e_2$, $\alpha_3=3e_1+2e_2$, $b_1=3e_1+2e_2$, $b_2=e_1+7e_2+e_3$, $b_3=4e_3-2e_1$.

3.23. Доказать, что любой ненулевой вектор пространства можно включить в некоторый базис этого пространства.

3.24. Доказать, что любую линейно независимую систему векторов можно дополнить до базиса пространства.

3.25. В пространстве R^4 найти два различных базиса, имеющих общие векторы $e_1=(1,1,0,0)$, $e_2=(0,0,1,1)$.

3.26. Систему многочленов t^5+t^4 , t^5-3t^3 , t^5+2t^2 , t^5-t дополнить до базиса пространства $R^5(t)$ (пространство многочленов степени ≤ 5 с действительными коэффициентами).

Проверить, образуют ли векторы $e_1,\ldots, e_n$ базис пространства R^4 и найти координаты вектора x в этом базисе:

3.27. $e_1=(2,2,-1)$, $e_2=(2,-1,2)$, $e_3=(-1,2,2)$, $x=(1,1,1)$.

3.28. $e_1=(1,2,1,1)$, $e_2=(2,3,1,0)$, $e_3=(3,1,1,-2)$, $e_4=(4,2,-1,-6)$, $x=(0,0,2,7)$.

Найти коэффициенты многочлена $t^5-t^4+t^3-t^2-t+1$ в базисе пространства $R^5(t)$ (многочленов с действительными коэффициентами степени ≤ 5).

3.29. $1,\ t+1,\ t^2+1,\ t^3+1,\ t^4+1,\ t^5+1$.

3.30. $1+t^3,\ t+t^3,\ t^2+t^3,\ t^3,\ t^4+t^3,\ t^5+t^3$.

Задача № 4

Выяснить, какие из преобразований трехмерного пространства R3 являются линейными. Для линейных преобразований найти матрицу в каноническом базисе: $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$.

4.1. $$f(x)=(\alpha_1+\alpha_2.\alpha_3+\alpha_1, 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$ $$\varphi(x)=(\alpha_1^2, \alpha_1+2\alpha_2, \alpha_3+\alpha_1)$$

4.2. $$f(x)=(\alpha_1-\alpha_2+1, 3\alpha_1+\alpha_2, \alpha_3)$$ $$\varphi(x)=(-\alpha_1+2\alpha_2, \alpha_2-\alpha_1, \alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3)$$

4.3. $$f(x)=(\alpha_1+2\alpha_3, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2)$$ $$\varphi(x)=(\alpha_1+3\alpha_2, \alpha_2+2, \alpha_3-\alpha_1)$$

4.4. $$f(x)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$ $$\varphi(x)=(\alpha_1+5\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2, \alpha_3-1)$$

4.5. $$f(x)=(\alpha_1-\alpha_2, \alpha_3-\alpha_2, 2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)$$ $$\varphi(x)=(2\alpha_1, 3\alpha_2+\alpha_3, \alpha_3-1)$$

4.6. $$f(x)=(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)$$ $$\varphi(x)=(2\alpha_1-\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3-2, 3\alpha_3)$$

4.7. $$f(x)=(\alpha_1+2\alpha_2, \alpha_3^2, \alpha_3-\alpha_2)$$ $$\varphi(x)=(\alpha_2, \alpha_3-\alpha_1, -3\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)$$

4.8. $$f(x)=(\alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1, \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)$$ $$\varphi(x)=(\alpha_2+2\alpha_3. \alpha_1-\alpha_2+3, \alpha_1+\alpha_2)$$

4.9. $$f(x)=(2\alpha_1-1, \alpha_2-\alpha_1, \alpha_3-\alpha_1)$$ $$\varphi(x)=(-\alpha_1, 3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3)$$

4.10. $$f(x)=(3\alpha_1-3, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)$$ $$\varphi(x)=(2\alpha_1+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, -2\alpha_2-\alpha_3)$$

4.11 $f(x)=(2\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3-\alpha_1,2\alpha_3-\alpha_2)$
$\varphi(x)=(3\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2^2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1)$

4.12. $f(x)=((\alpha_2-\alpha_1)^2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1)$
$\varphi(x)=(5\alpha_1-\alpha_2,-\alpha_2+\alpha_1,5\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)$

4.13. $f(x)=(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)$
$\varphi(x)=(\alpha_2-\alpha_3,\alpha_2-2,\alpha_3-\alpha_1)$

4.14. $f(x)=(\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_2+2\alpha_3)$
$\varphi(x)=(\alpha_1-3\alpha_3,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-2)$

4.15. $f(x)=(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,2\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3)$
$\varphi(x)=(\alpha_3-\alpha_1,2\alpha_2-\alpha_1,\alpha_1-1)$

4.16. $f(x)=(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_2,3\alpha_2+2\alpha_3)$
$\varphi(x)=(\alpha_1,(\alpha_2-\alpha_1)^2,\alpha_2+\alpha_3)$

4.17. $f(x)=(2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1)$
$\varphi(x)=(2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3-1,3\alpha_3)$

4.18. $f(x)=(\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_1-4\alpha_2+6\alpha_3,-\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3)$
$\varphi(x)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1-1)$

4.19. $f(x)=(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3,-\alpha_1+2\alpha_3)$
$\varphi(x)=(\alpha_1-1,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3)$

4.20. $f(x)=(-2\alpha_1-3\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,-2\alpha_1+\alpha_2)$
$\varphi(x)=(\alpha_2^2,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_3)$

4.21. $f(x)=(2\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3)$
$\varphi(x)=(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_3-1,\alpha_1+2\alpha_2)$

4.22. $f(x)=(-\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+2\alpha_3,2\alpha_1+2\alpha_2)$
$\varphi(x)=(\alpha_1-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_2,\alpha_1-1)$

4.23. $f(x)=(2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)$
$\varphi(x)=(\alpha_1+2\alpha_3,\alpha_2+2,\alpha_3-\alpha_1)$

4.24. $f(x)=(\alpha_2-2\alpha_1,\alpha_3-1,\alpha_2+2\alpha_3)$
$\varphi(x)=(\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,-\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3,2\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3)$

4.25. $$f(x)=(\alpha_2-3\alpha_3,\alpha_3-3\alpha_2,\alpha_1-3)$$ $$\varphi(x)=(\alpha_1+5\alpha_2,\alpha_2+5\alpha_3,\alpha_1+4\alpha_1-5\alpha_3)$$

4.26. $$f(x)=(2\alpha_1-\alpha_3,2\alpha_2-\alpha_1,4\alpha_2-\alpha_3)$$ $$\varphi(x)=(2\alpha_1-3,\alpha_2-3\alpha_1,\alpha_3-3\alpha_2)$$

4.27. $$f(x)=(4\alpha_1-\alpha_2,4\alpha_2-\alpha_3,4\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3)$$ $$\varphi(x)=((\alpha_1+\alpha_2)^2,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3)$$

4.28. $$f(x)=(3\alpha_1-\alpha_3,3\alpha_2-\alpha_1,2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3)$$ $$\varphi(x)=(\alpha_3-\alpha_1,\alpha_2-\alpha_1,\alpha_1-5)$$

4.29. $$f(x)=(\alpha_3-2\alpha_1,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_2-4\alpha_1)$$ $$\varphi(x)=(\alpha_1-\alpha_2,(\alpha_2-\alpha_3)^2,\alpha_3-\alpha_1)$$

4.30. $$f(x)=(\alpha_1+2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3)$$ $$\varphi(x)=(\alpha_3-\alpha_1,\alpha_2+2\alpha_1,\alpha_1-3)$$

Задача № 5

Линейный оператор f пространства V2 в базисе e_1, e_2 имеет матрицу A, а линейный оператор φ задан своим действием на базисные векторы $\alpha_1=c_{11}e_1+$ $+c_{21}e_2$, $\alpha_2=c_{12}e_1+c_{22}e_2$,следующим образом:

$\varphi(\alpha_1)=\beta_{11}\alpha_1+\beta_{21}\alpha_2$,

$\varphi(\alpha_2)=\beta_{12}\alpha_1+\beta_{22}\alpha_2$.

Найти матрицы линейных операторов fφ , $\gamma_1 f+\gamma_2\varphi$ в базисе α_1, α_2 .

5.1. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=e_1-e_2;\\ a_2=e_1;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=2a_1-a_2; & \gamma_1=1,\\ \varphi(a_2)=2a_1+5a_2; & \gamma_2=3.\end{cases}$

5.2. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=2e_1-e_2;\\ a_2=e_1+e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=a_1+a_2; & \gamma_1=2,\\ \varphi(a_2)=a_1+2a_2; & \gamma_2=1.\end{cases}$

5.3. $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=2e_1; ,\\ a_2=e_1-e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=a_1+a_2; & \gamma_1=2,\\ \varphi(a_2)=a_1; & \gamma_2=3.\end{cases}$

5.4. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=3e_2;\\ a_2=e_1+e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=a_1-a_2; & \gamma_1=-1,\\ \varphi(a_2)=2a_2; & \gamma_2=3.\end{cases}$

5.5. $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=5e_1;\\ a_2=e_1+5e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=2a_2; & \gamma_1=-2,\\ \varphi(a_2)=a_1+2a_2; & \gamma_2=1.\end{cases}$

5.6. $A=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=3e_1-e_2;\\ a_2=e_1+5e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=3a_1-a_2; & \gamma_1=3,\\ \varphi(a_2)=a_1-2a_2; & \gamma_2=1.\end{cases}$

5.7. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=2e_1-e_2;\\ a_2=2e_1+e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=2a_1-a_2; & \gamma_1=5,\\ \varphi(a_2)=a_1; & \gamma_2=1.\end{cases}$

5.8. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=e_1-2e_2;\\ a_2=5e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=a_1+2a_2; & \gamma_1=3,\\ \varphi(a_2)=a_2; & \gamma_2=2.\end{cases}$

5.9. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=e_2-2e_1;\\ a_2=e_1-e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=a_1-3a_2; & \gamma_1=-1,\\ \varphi(a_2)=2a_2; & \gamma_2=-3.\end{cases}$

5.10. $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=e_1+3e_2;\\ a_2=4e_1;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=-2a_1; & \gamma_1=1,\\ \varphi(a_2)=a_1-2a_2; & \gamma_2=2.\end{cases}$

5.11. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=-e_1+e_2;\\ a_2=-e_1+2e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=-5a_1; & \gamma_1=1,\\ \varphi(a_2)=-a_1+2a_2; & \gamma_2=3.\end{cases}$

5.12. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=e_1-2e_2;\\ a_2=e_1-e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=3a_1+a_2; & \gamma_1=2,\\ \varphi(a_2)=3a_2; & \gamma_2=5.\end{cases}$

5.13. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=4e_1;\\ a_2=e_1+e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=-4a_1-a_2; & \gamma_1=2,\\ \varphi(a_2)=a_1+a_2; & \gamma_2=6.\end{cases}$

5.14. $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=e_1;\\ a_2=5e_1-e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=a_2; & \gamma_1=1,\\ \varphi(a_2)=2a_1+a_2; & \gamma_2=5.\end{cases}$

5.15. $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=e_2;\\ a_2=e_1-e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=2a_2; & \gamma_1=1,\\ \varphi(a_2)=3a_1-a_2; & \gamma_2=6.\end{cases}$

5.16. $A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=2e_2;\\ a_2=e_1+2e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=3a_1; & \gamma_1=3,\\ \varphi(a_2)=a_1+5a_2; & \gamma_2=-1.\end{cases}$

5.17. $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=3e_2;\\ a_2=e_1+3e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=4a_1; & \gamma_1=3,\\ \varphi(a_2)=2a_1-4a_2; & \gamma_2=-3.\end{cases}$

5.18. $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; $\begin{cases}a_1=4e_2;\\ a_2=e_1-3e_2;\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi(a_1)=a_1-2a_2; & \gamma_1=3,\\ \varphi(a_2)=a_2-a_1; & \gamma_2=4.\end{cases}$

5.19. $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $\begin{cases} a_1 = 5e_2; \\ a_2 = -e_1 + 2e_2; \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi(a_1) = a_1 - a_2; & \gamma_1 = 1, \\ \varphi(a_2) = 2a_2; & \gamma_2 = 7. \end{cases}$

5.20. $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $\begin{cases} a_1 = -e_2; \\ a_2 = e_1 - 2e_2; \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi(a_1) = 2a_1 - a_2; & \gamma_1 = -2, \\ \varphi(a_2) = -2a_2; & \gamma_2 = 2. \end{cases}$

5.21. $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $\begin{cases} a_1 = -2e_2; \\ a_2 = -e_1 + 3e_2; \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi(a_1) = 2a_1 + 5a_2; & \gamma_1 = -2, \\ \varphi(a_2) = -3a_1; & \gamma_2 = 3. \end{cases}$

5.22. $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; $\begin{cases} a_1 = -3e_2; \\ a_2 = 2e_1 - 3e_2; \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi(a_1) = 2a_1 - 5a_2; & \gamma_1 = -2, \\ \varphi(a_2) = -4a_2; & \gamma_2 = 4. \end{cases}$

5.23. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$; $\begin{cases} a_1 = -4e_2; \\ a_2 = 4e_1 - 3e_2; \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi(a_1) = 2a_1 - 6a_2; & \gamma_1 = -2, \\ \varphi(a_2) = 4a_2; & \gamma_2 = -4. \end{cases}$

5.24. $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$; $\begin{cases} a_1 = -5e_2; \\ a_2 = 3e_1 - 2e_2; \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi(a_1) = 2a_1 - 7a_2; & \gamma_1 = -3, \\ \varphi(a_2) = a_2; & \gamma_2 = 1. \end{cases}$

5.25. $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$; $\begin{cases} a_1 = 5e_2; \\ a_2 = 3e_1 + e_2; \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi(a_1) = 2a_1 - a_2; & \gamma_1 = -3, \\ \varphi(a_2) = 3a_2; & \gamma_2 = -1. \end{cases}$

5.26. $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 5 & -2\end{pmatrix}$; $\begin{cases} a_1 = 2e_2; \\ a_2 = -e_1 + 4e_2; \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi(a_1) = 3a_1 - a_2; & \gamma_1 = 4, \\ \varphi(a_2) = -3a_2, & \gamma_2 = 1. \end{cases}$

5.27. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; $\begin{cases} a_1 = 3e_2; \\ a_2 = -e_1 + 4e_2; \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi(a_1) = 4a_1 - a_2; & \gamma_1 = 4, \\ \varphi(a_2) = a_1 - 4a_2; & \gamma_2 = -1. \end{cases}$

5.28. $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 5\end{pmatrix}$; $\begin{cases} a_1 = -e_1; \\ a_2 = e_1 + 2e_2; \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi(a_1) = 5a_1, & \gamma_1 = 1, \\ \varphi(a_2) = a_1 - 4a_2; & \gamma_2 = 2. \end{cases}$

5.29. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$; $\begin{cases} a_1 = -2e_1; \\ a_2 = e_1 - 3e_2; \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi(a_1) = a_1 - a_2; & \gamma_1 = 5, \\ \varphi(a_2) = -a_1 + 2a_2; & \gamma_2 = 1. \end{cases}$

5.30. $A=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 3 & 0\end{pmatrix}$; $\begin{cases} a_1 = e_1 - e_2; \\ a_2 = e_1 - 2e_2; \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi(a_1) = -2a_2, & \gamma_1 = -1, \\ \varphi(a_2) = 3a_1 - a_2; & \gamma_2 = -1. \end{cases}$

Задача № 6

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей:

6.1. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

6.2. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

6.3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 2 & 11 & 8 \\ -10 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

6.4. $\begin{pmatrix} 13 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 13 \end{pmatrix}$

6.5. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

6.6. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -10 \\ 8 & 11 & 8 \\ -10 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

6.7. $\begin{pmatrix} 7 & -8 & 16 \\ -8 & -5 & -8 \\ 16 & -8 & 7 \end{pmatrix}$

6.8. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

6.9. $\begin{pmatrix} 17 & 8 & -4 \\ 8 & 17 & -4 \\ -4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$

6.10. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

6.11. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

6.12. $\begin{pmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$

6.13. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

6.14. $\begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

6.15. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

6.16. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

6.17. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

6.18. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

6.19.

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

6.20.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

6.21.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

6.22.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

6.23.

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

6.24.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

6.25.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

6.26.

$$\begin{pmatrix} -8 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & 5 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

6.27.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

6.28.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

6.29.

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

6.30. $\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -11 \\ -2 & -11 & -1 \end{pmatrix}$

Задача №7

Привести к каноническому виду уравнение линии 2-го порядка и схематически изобразить эту линию.

7.1. $32x^2+52xy-7y^2+180=0$

7.2. $5x^2-6xy+5y^2-32=0.$

7.3. $17x^2-12xy+8y^2=0.$

7.4. $5x^2+24xy-5y^2=0.$

7.5. $5x^2-6xy+5y^2+8=0$.

7.6. $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$.

7.7. $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0$.

7.8. $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$.

7.9. $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0$.

7.10. $19x^2+6xy+11y^2+38x+6y+29=0$.

7.11. $5x^2-2xy+5y^2-4x+20y+20=0$.

7.12. $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$.

7.13. $11x^2-20xy-4y^2-20x-8y+1=0$.

7.14. $7x^2+60xy+32y^2-14x-60y+7=0$.

7.15. $50x^2-8xy+35y^2+100x-8y+67=0$.

7.16. $41x^2+24xy+34y^2+34x-112y+129=0$.

7.17. $29x^2-24xy+36y^2+82x-96y-91=0$.

7.18. $4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0$.

7.19. $41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0$.

7.20. $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$.

7.21. $9x^2+12xy+4y^2-24x-16y+3=0$.

7.22. $16x^2-24xy+9y^2-160x+120y+425=0$.

7.23. $9x^2+24xy+16y^2-18x+226y+209=0$.

7.24. $x^2-2xy+y^2-12x+12y-14=0$.

7.25. $4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+1=0$.

7.26. $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$.

7.27. $5x^2+12xy-12y-22x-19=0$.

7.28. $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$.

7.29. $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$.

7.30. $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0$.

Задача № 8

Привести к каноническому виду уравнение поверхности 2-го порядка и схематично изобразить эту поверхность.

8.1. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8zx-4yz-14x-4y+14z+16=0$.

8.2. $x^2+y^2-3z^2-6yz-6zx-2xy+2x+2y+4z=0$.

8.3. $6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+1=0$.

8.4. $2x^2+9y^2+2z^2-4xy+4yz-1=0$.

8.5. $4y^2-3z^2+4xy-4xz+8yz=0$.

8.6. $x^2+y^2+4z^2-2xy+4xz-4yz-2x+2y+2z=0$.

8.7. $x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz+3x+3y-3z=0$.

8.8. $x^2-3z^2-4yz-4y+2z+5=0$.

8.9. $x^2+y^2+z^2-2xy-4x+4y+3=0$.

8.10. $y^2+2xz+2x+2z+1=0$.

8.11. $x^2+2y^2+5z^2+4yz+20y+20z-10=0$.

8.12. $-x^2+5y^2+5z^2+8yz+2x+12y+24z+36=0$.

8.13. $2x^2+5y^2+5z^2+6yz+4x+16y+16z+10=0$.

8.14. $4x^2+4y^2-4xy-12x-12y-5z+1=0$.

8.15. $x^2+y^2+z^2+2xy-12x+4y+6z-3=0$.

8.16. $4x^2+9y^2-12xy+2x+10y+1=0$.

8.17. $6xy-8y^2-z^2+60y+2z+89=0$.

8.18. $5x^2+8y^2+4xy+2x+44y-36z+65=0$.

8.19. $16x^2+9y^2-z^2-24xy-9x-12y+4z+71=0$.

8.20. $2x^2+2y^2+z^2-10xy+20x-8y+29=0$.

8.21. $-x^2+7y^2-24yz+2x+120y=0$.

8.22. $x^2-4y^2-4z^2+10yz+2x+2y+2z+3=0$.

8.23. $3x^2+4xy+8x+8y-4z=0$.

8.24. $-x^2-9y^2+6xy+50x-50y-15z-100=0$.

8.25. $-x^2+y^2+z^2-2yz+2x+3y-5z+1=0$.

8.26. $5x^2+5y^2+3z^2+2xy+2\sqrt{2}\,xz+2\sqrt{2}\,yz+26x+34y+10\sqrt{2}\,z+49=0$.

8.27. $2x^2+9y^2+2z^2-4xy+4yz+4x+2y-4z-1=0$.

8.28. $4y^2-3z^2+4xy-4xz+8yz+4x-2z-1=0$.

8.29. $2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz+4x-4y+4=0$.

8.30. $3x^2+3y^2+3z^2-2xy-2xz-2yz-8x+8y+4=0$.

Решение типового варианта

Задача № 1: Пусть R^+ - множество всех положительных чисел. Будем обозначать их буквами α,b,c.... Сумму двух чисел α и b будем в этом множестве обозначать через $\alpha \oplus b$ и определим равенства, $a \oplus b \overset{def}{=} a \cdot b$, где $\alpha \cdot b$ - обычное произведение чисел α и b. Произведение любого числа λ на число $\alpha \in R^+$ обозначим через $\lambda(\cdot)a$ и определим равенством $a(\cdot)b \overset{def}{=} a^{\lambda}$. Показать, что R^+ -линейное действительное пространство размерности 1.

Решение: Заметим, что если $\alpha \in R^+$, $b \in R^+$ то и $\alpha \oplus b \in R^+$. Проведем доказательство аксиом 1°-8°.

1° $\alpha \oplus b = b \oplus a$, так как $\alpha b = ba$.

2° $(\alpha \oplus b) \oplus c = \alpha \oplus (b \oplus c)$, так как $(\alpha b)c = \alpha(bc)$.

3° В R^+ существует Θ, обозначаемый через 1, такой, что $\alpha \oplus 1 = \alpha$, так как $\alpha \oplus 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$.

4° $\forall\ \alpha \in R^+$ существует противоположный элемент, обозначаемый в R^+ через $1/\alpha$, такой, что $\alpha \oplus (1/\alpha) = \Theta$, так как $\alpha \oplus (1/\alpha) = \alpha \cdot (1/\alpha) = 1$, где $1 = \Theta$.

5° $\alpha(\cdot)(\alpha \oplus b) = (\alpha(\cdot)\alpha) \oplus (\alpha(\cdot)b)$, так как $\alpha(\cdot)(\alpha \oplus b) = (\alpha \oplus b)^{\alpha} = (\alpha b)^{\alpha} = \alpha^{\alpha} \cdot b^{\alpha} = \alpha^{\alpha} \oplus b^{\alpha} = (\alpha(\cdot)\alpha) \oplus (\alpha(\cdot)b)$.

6° $(\alpha+\beta)(\cdot)\alpha = (\alpha(\cdot)\alpha) \oplus (\beta(\cdot)\alpha)$, так как $(\alpha+\beta)(\cdot)\alpha = \alpha^{\alpha+\beta} = \alpha^{\alpha} \cdot \alpha^{\beta} = (\alpha(\cdot)\alpha) \oplus (\beta(\cdot)\alpha)$.

7° $\alpha(\cdot)(\beta(\cdot)\alpha) = (\alpha\beta)(\cdot)\alpha$, так как $\alpha(\cdot)(\beta(\cdot)\alpha) = (\beta(\cdot)\alpha)^{\alpha} = (\alpha^{\beta})^{\alpha} = \alpha^{\alpha\beta} = (\alpha\beta)(\cdot)\alpha$.

8° $1(\cdot)\alpha = \alpha$, так как $1(\cdot)\alpha = \alpha^1 = \alpha$.

Таким образом, аксиомы выполнены, значит R^+ - линейное пространство.

В этом пространстве имеются ненулевые элементы, т.е. числа, отличные от 1. Поэтому его размерность больше 0. Однако любые два его элемента уже линейно зависимы, так как равенству

$(\alpha(\cdot)\alpha) \oplus (\beta(\cdot)b) = 1$ (*)

можно удовлетворить при одном из коэффициентов α или β, не равном 0. Действительно, равенство (*) равносильно равенству

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=1. \quad (**)$$

Если $a=1$ (т.е. $a=\Theta$), то можно положить $\alpha=2$, $\beta=0$. Если $b=1$, то можно положить $\alpha=0$, $\beta=1$. Если $a=b=1$, то равенство (**) справедливо при любых α и β.

Пусть $a\neq1$, $b\neq1$. Положим $\alpha=2$. Тогда $a^{2}b^{\beta}=1$, откуда $2\ln a+\beta\ln b=0$ и, следовательно, $\beta=-\dfrac{2\ln a}{\ln b}\neq0$.

Таким образом, равенство (**), а следовательно и равносильное ему равенство (*), имеет место хотя бы при одном из коэффициентов, не равном 0. Следовательно, любые два числа a и b из R^{+} линейно зависимы. Это означает, что $\dim R^{+}=1$, что и требовалось.

Задача №2: Определить размерность и указать какой-либо базис линейной оболочки векторов $x_1=(3,2,0)$ $x_2=(-1,4,5)$ $x_3=(7,0,-5)$.

Решение: ранг матрицы $\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&4&5\\7&0&-5\end{pmatrix}$ равен 2 и векторы x_1 и x_2 линейно независимы.

Следовательно, размерность данного пространства равна 2 и в качестве базиса можно взять векторы x_1 и x_2.

Задача №3: Найти матрицу перехода от базиса e_1,e_2,e_3,e_4 к базису e_3,e_4,e_2,e_1.

Решение: Так как $(e_3,e_4,e_2,e_1)=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, то искомая матрица

$$C=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Задача №4: Преобразования пространства R^3 $f(x)=(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3\ ,\alpha_2+2\alpha_3\ ,\alpha_1+3\alpha_3)$, $\varphi(x)=(\alpha_1+2\alpha_2\ ,\alpha_1-\alpha_2-1\ ,3\alpha_3)$ заданы своим действием на произвольный вектор $x=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

1) Выяснить, какие из преобразований f,φ являются линейными.

2) Для линейных преобразований найти матрицу в каноническом базисе.

Решение: 1) Если $x_1=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ $x_2=(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in R^3$, то $x_1+x_2=(\beta_1+\gamma_1\ , \beta_2+\gamma_2, \beta_3+\gamma_3) \in R^3$ и $\lambda x=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\lambda\alpha_3) \in R^3$.

Вычислим: $f(x_1+x_2)=((\beta_1+\gamma_1)-(\beta_2+\gamma_2)+(\beta_3+\gamma_3),(\beta_2+\gamma_2)+2(\beta_3+\gamma_3,(\beta_1+\gamma_1)+3(\beta_3+\gamma_3))=$ $=(\beta_1-\beta_2+\beta_3,\beta_2+2\beta_3,\beta_1+3\beta_3)+(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3,\gamma_2+2\gamma_3,\gamma_1+3\gamma_3)=f(x_1)+f(x_2)$.

Вычислим: $f(\lambda x)=(\lambda\alpha_1-\lambda\alpha_2+\lambda\alpha_3,\lambda\alpha_2+2\lambda\alpha_3,\lambda\alpha_1+3\lambda\alpha_3)=\lambda(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_3)=\lambda f(x)$.

Отсюда следует, что f - линейное преобразование(оператор) пространства R^3.

Вычислим: $\varphi(x_1+x_2)=((\beta_1+\gamma_1)+2(\beta_2+\gamma_2),(\beta_1+\gamma_1)-(\beta_2+\gamma_2)-1,(\beta_3+\gamma_3))$.

$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)=(\beta_1+2\beta_2,\beta_1-\beta_2-1,\beta_3)+(\gamma_1+2\gamma_2,\gamma_1-\gamma_2-1,\gamma_3)=((\beta_1+\gamma_1)+2(\beta_2+\gamma_2),(\beta_1+\gamma_1)-(\beta_2+\gamma_2)-2,\beta_3+\gamma_3)$.

Из последних равенств получаем, что $\varphi(x_1+x_2)\neq\varphi(x_1)+\varphi(x_2)$ и, следовательно, преобразование φ не является линейным.

2) Найдем матрицу линейного оператора f в каноническом базисе: $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$, используя формулу для задания линейного оператора f, получим:

$f(e_1)=(1,0,1)= 1e_1+0e_2+1e_3$,

$f(e_2)=(-1,1,0)= -1e_1+1e_2+0e_3$,

$f(e_3)=(1,2,3)= 1e_1+2e_2+3e_3$.

Из определения матрицы линейного оператора следует, что $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ является матрицей преобразования f в каноническом базисе e_1,e_2,e_3.

Задача №5: Линейное преобразование f пространства V2 в базисе e_1,e_2 имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, а линейное преобразование φ задано своим действием на базисные векторы $\alpha_1=e_1+e_2$, $\alpha_2=2e_1+e_2$ следующим образом: $\varphi(\alpha_1)=\alpha_1+\alpha_2$, $\varphi(\alpha_2)=\alpha_2$. Найти матрицы линейных преобразований fφ , f+2φ в базисе α_1, α_2.

Решение. Из определения матрицы линейного преобразования следует, что матрица $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ является матрицей преобразования φ в базисе α_1, α_2. Пусть D-матрица f в базисе α_1,α_2, тогда $D=C^{-1}AC$, где $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$- матрица перехода от базиса e_1,e_2 к базису α_1,α_2. Имеем $|C|=-1$; $C^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$;

$D=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

Матрица fφ в базисе α_1,α_2 равна $DB=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$, а матрица f+2φ в базисе α_1,α_2 равна $D+2B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, что и требовалось.

Задача № 6: Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix}9 & -2 & 2\\ -2 & 10 & 0\\ 2 & 0 & 8\end{pmatrix}$.

Решение: Составим характеристический многочлен φ(λ) линейного оператора $\varphi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-9 & 2 & -2\\ 2 & \lambda-10 & 0\\ -2 & 0 & \lambda-8\end{vmatrix}=\lambda^3-27\lambda^2+234\lambda-648$.

Найдем собственные значения линейного оператора, решив характеристическое уравнение $\varphi(\lambda)=0$:

$$\lambda^3-27\lambda^2+234\lambda-648=0.$$

Если это уравнение имеет целые корни, то все они находятся среди делителей свободного члена $648=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$.

Проверка подстановкой показывает, что $\lambda_1=9$ - одно из собственных значений, и

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-9)(\lambda^2-18\lambda+72).$$

Решив уравнение $\lambda^2-18\lambda+72=0$, получим еще два собственных значения $\lambda_2=12$, $\lambda_3=6$.

Для нахождения собственных векторов надо решить систему $(\lambda E-A)X=\theta$ (*) трижды: при $\lambda=\lambda_1=9$, при $\lambda=\lambda_2=12$, при $\lambda=\lambda_3=6$.

При $\lambda=9$ система (*) примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Фундаментальная система решений имеет вид: $C_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Отсюда заключаем, что собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1=9$, имеют вид: $x_{\lambda 1}=\xi C_1$, где $\xi\in R$, $\xi\neq 0$, то есть

$$x_{\lambda 1}=\xi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \xi\neq 0.$$

При $\lambda=12$ имеем систему

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

фундаментальная система решений

$$C_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2=12$ имеют вид

$x_{\lambda 2}=\eta C_2$, где $\eta\in R$, $\eta\neq 0$, то есть

$$x_{\lambda 2}=\eta\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\ \eta\neq 0.$$

При $\lambda=6$ имеем систему

$$\begin{pmatrix}-3 & 2 & -2\\ 2 & -4 & 0\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Найдя фундаментальную систему решений

$$C_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},$$

получим собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_3=6$:

$$x_{\lambda 3}=\zeta C_2,\ \text{где}\ \zeta\in R,\ \zeta\neq 0,\ \text{т.е.}$$

$$x_{\lambda 3}=\zeta\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\ \zeta\neq 0.$$

Задача №7: а) Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ и схематически изобразить эту линию.

Решение: Это центральная кривая эллиптического типа, так как $\delta=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9\neq 0$.

Вычислим координаты центра кривой

$$\begin{cases}10x+8y-18=0\\ 8x+10y-18=0\end{cases}\quad x_0=1,\ y_0=1\ ,\ O_1(1,1).$$

Перенесем начало координат в точку $O_1(1,1)$. Уравнение примет вид $5x^2+8xy+5y^2-9=0$, так как $F(x_0,y_0)=-9$. Составим характеристическое уравнение и решим его

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0,\ (5-\lambda)^2-16=0;\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=9.$$

Найдем собственные векторы, отвечающие собственным значениям λ_1=1 и λ_2=9.

$$\begin{cases}(5-\lambda)x+4y=0\\ 4x+(5-\lambda)y=0\end{cases}$$

При λ=1: 4x+4y=0, x= -y; $\bar{i}_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

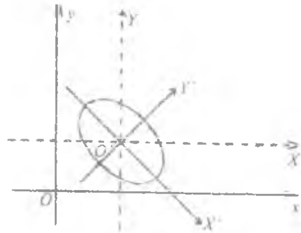
При λ=9: -4x+4y=0, x= y; $\bar{j}_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Перейдем к новой системе координат $O_1X_1Y_1$ с ортами $\bar{i}_1$ и $\bar{j}_1$.

В этой системе уравнение запишется в виде

$x_1^2+9y_1^2-9=0$, или $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{1}=1$.

Это эллипс.



б) Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка $4x^2$-4xy+y^2-2x-14y+7=0 и схематически изобразить эту линию.

<u>**Решение**</u>: Это уравнение параболического вида, так как

$\delta=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=0$.

Составим характеристическое уравнение и решим его:

$\begin{vmatrix}4-\lambda & -2\\ -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$ или λ^2-5λ=0; λ_1=0 , λ_2=5.

Найдем собственные векторы, отвечающие собственным числам λ_1=0 и λ_2=5. $\begin{cases}(4-\lambda)x-2y=0\\ -2x+(1-\lambda)y=0;\end{cases}$

при λ=0 $\begin{cases}4x-2y=0\\ -2x+y=0;\end{cases}\Leftrightarrow 2x-y=0\Leftrightarrow y=2x$.

Находим решение (любое ненулевое): x=1, y=2 - координаты собственного вектора. После нормировки имеем

$$\bar{i}_1=\frac{\{-2,1\}}{|\{-2,1\}|}=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}.$$

при λ=5 $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+4y=0; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=-2y$.

Находим решение (любое ненулевое): x= -2, y=1 - координаты собственного вектора. После нормировки имеем

$$\bar{j}_1=\frac{\{-2,1\}}{|\{-2,1\}|}=\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}.$$

Перейдем к новой системе координат OXY с ортами $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$:

$\bar{i}_1=\cos\alpha\bar{i}-\sin\alpha\bar{j}$;

$\bar{j}_1=-\sin\alpha\bar{i}+\cos\alpha\bar{j}$, где $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

При этом формулы преобразования координат будут:

$$x=\cos\alpha X-\sin\alpha Y=\frac{X-2Y}{\sqrt{5}};$$

$$y=\sin\alpha X+\cos\alpha Y=\frac{2X+Y}{\sqrt{5}}.$$

Переходя в данном уравнении к новым координатам, получим

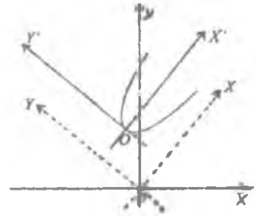
$5y^2-6\sqrt{5}x-2\sqrt{5}y+7=0.$

Заметим, что квадратичный член здесь определяется сразу согласно теории, так как λ_1=0, λ_2=5; свободный член переходит из данного уравнения без изменения. Таким образом, преобразование потребовалось лишь по отношению к членам первой степени.

Перепишем предыдущее уравнение

$$5(y-\frac{\sqrt{5}}{5})^2-6\sqrt{5}(x-\frac{\sqrt{5}}{5})=0.$$

Теперь видно, что нужен параллельный перенос системы OXY, при этом координаты преобразуются по формулам



$$x = x' + \frac{\sqrt{5}}{5},\ y = y' + \frac{\sqrt{5}}{5},$$

и данное уравнение принимает канонический вид

$$5y'^2 - 6\sqrt{5}x' = 0.$$

Это уравнение определяет параболу.

__Задача №8:__ Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка $9x^2 + 20y^2 + 20z^2 - 40yz - 36x + 4\sqrt{2}y - 4\sqrt{2}z + 4 = 0$ и схематически изобразить эту поверхность.

__Решение:__ Квадратичная форма, соответствующая этому уравнению, имеет вид $9x^2+20y^2+20z^2-40yz=0$, а ее матрица $A=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{pmatrix}$.

Собственные числа самосопряженного оператора с матрицей A равны $\lambda_1=9$, $\lambda_2=40$, $\lambda_3=0$. Следовательно, канонический вид квадратичной формы будет следующим:

$$9x_1^2 + 40y_1^2. \quad (*)$$

Найдем базис, в котором квадратичная форма имеет вид выражения (*). По аналогии с задачей 6 находим

$\bar{e}_1=(t,0,0)$ - собственный вектор с собственным числом $\lambda_1=9$,

$\bar{e}_2=(0,s,-s)$ - собственный вектор с собственным числом $\lambda_2=40$,

$\bar{e}_3=(0,r,r)$ - собственный вектор с собственным числом $\lambda_3=0$.

Здесь t, s, r - любые действительные числа, отличные от нуля. Пронормировав векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, получим новый ортонормированный базис $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{k}_1$, где $\bar{i}_1=(1,0,0)$, $\bar{j}_1=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\bar{k}_1=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Матрица $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ является матрицей перехода от старого базиса к новому.

Поэтому

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = x_1, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_1, \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_1. \end{array} \qquad (**)$$

Найдем уравнение данной фигуры в системе OX_1,Y_1,Z_1. Подставив в данное уравнение значения x,y,z из формул (**), получим

$$9x_1^2 + 40y_1^2 - 36x_1 + 8y_1 + 4 = 0$$

$$\text{или } \frac{(x_1-2)^2}{3,6} + \frac{(y_1+0,1)^2}{0,81} = 1.$$

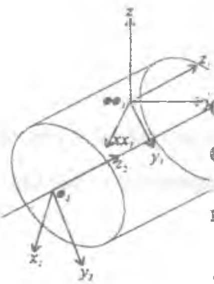


Рис. 1

Осуществляя параллельный перенос системы OX_1,Y_1,Z_1 на вектор $\overline{OO_2} = 2\bar{i}_1 - 0,1\bar{j}_1$, получим систему OX_2,Y_2,Z_2, в которой уравнение данного геометрического объекта имеет вид $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$, где $a = \sqrt{3,6}$ $b = 0,9$.

Это уравнение, а следовательно и исходное уравнение, определяет эллиптический цилиндр, изображенный на рис.1.

б) Построить в пространстве поверхность, определяемую уравнением $x^2+6x+4y-2z+1=0$, приведя предварительно данное к каноническому виду.

<u>**Решение:**</u> Обращаем внимание на то, что в уравнении присутствует квадрат только одной переменной и первые степени двух других переменных. Полагая

$$x_1 = x; \quad y_1 = \frac{2y-z}{\sqrt{5}}; \quad z_1 = \frac{y+2z}{\sqrt{5}},$$

получаем

$x=x_1;\quad y=\frac{2y_1+z_1}{\sqrt5};\quad z=\frac{-y_1+2z_1}{\sqrt5}$, что соответствует переходу к новому ортонормированному базису $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{k}_1$ с матрицей перехода $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$, в столбцах которой записаны координаты базисных векторов $\bar{i}_1=(1,0,0)$; $\bar{j}_1=\left(0,\frac{2}{\sqrt5},-\frac{1}{\sqrt5}\right)$; $\bar{k}_1=\left(0,\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\right)$. В результате перехода к новому базису исходное уравнение принимает вид $x_1^2+6x_1+2\sqrt5y_1+1=0$ или $(x_1+3)^2+2\sqrt5\left(y_1-\frac{8}{2\sqrt5}\right)^2=0$.

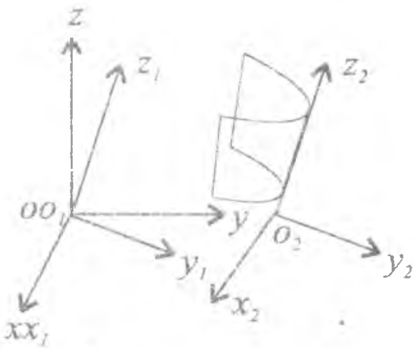


Рис. 2

Осуществив параллельный перенос системы OX_1,Y_1,Z_1 на вектор $\overline{OO_2}=3\bar{i}_1-\frac{8}{2\sqrt5}\bar{j}_1$, получим систему OX_2,Y_2,Z_2, в которой уравнение данной поверхности имеет вид $x_2^2=-2\sqrt5y_2$.

Это уравнение, а следовательно и исходное уравнение, определяет параболический цилиндр, изображенный на рис. 2.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Контрольные работы

Составитель: *Прокофьев Леонтий Николаевич*

Редактор Н. С. Куприянова
Корректор Т. И. Щелокова

Подписано в печать 16.08.99 г. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,11. Усл. кр.-отт. 5,23. Уч.- изд. л. 5,5.
Тираж 200 экз. Заказ 100,

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королева
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ИПО Самарского аэрокосмического университета.
443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151.