МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени С. П. КОРОЛЕВА

КВАНТОВАНИЕ СИГНАЛОВ

Методические указания

г. КУЙБЫШЕВ, 1981

УДК 691.398

В указаниях рассмотрено решение задачи квантования непрерывных сигналов по уровню и во времени. Приведены необходимые теоретические сведения, подробные таблицы, формулы, позволяющие обоснованно выбрать параметры квантования сигнала (шаг квантования по уровню и во времени).

Рассмотрены наиболее распространенные варианты квантования сигналов:

задача восстановления непрерывного сигнала по дискретным отсчетам ставится как задача интерполяции;

конкретные результаты получены для случаев ступенчатой и линейной интерполяции.

1. КВАНТОВАНИЕ СИГНАЛОВ ПО УРОВНЮ

Пусть измеряемый параметр S может принимать любые значения в диапазоне $[S_{\min}, S_{\max}]$, который называется *шкалой параметра*. При представлении значений параметра в цифровой форме в пределах шкалы следует зафиксировать N *квантованных уровней:* $S_0, S_1, \ldots S_{(N-1)}$. Текущее значение параметра отождествляется с одним из квантованных уровней, и далее в системе вместо значения параметра используется номер выбранного уровня. Для представления этого номера чаще всего используется двоичный код. Используя n двоичных символов, можно пронумеровать N уровней:

$$N = 2^n. \qquad (1)$$

Расположение квантованных уровней на шкале параметра может быть различным. На практике интервалы между квантованными уровнями обычно выбираются одинаковыми (исключение составляют некоторые специальные случаи). При этом *шаг квантования по уровню*

$$h = S_i - S_{(i-1)}$$

для любых $1 \leqslant i \leqslant N-1$ есть величина постоянная.

Наилучшее, с точки зрения точности представления параметра, равномерное расположение N квантованных уровней на шкале параметра показано на рис. 1.

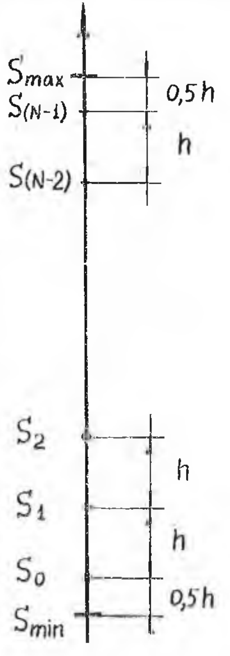

Рис. 1

В данном случае текущее значение параметра отождествляется с ближайшим квантованным уровнем (ограничимся рассмотрением именно такого варианта квантования).

Здесь, очевидно, шаг квантования по уровню

$$h = \frac{S_{max} - S_{min}}{N}. \qquad (2)$$

Максимальная ошибка квантования по уровню

$$\varepsilon_{у\ max} = \max|\varepsilon_у| = \frac{h}{2}. \qquad (3)$$

Обычно шаг квантования h значительно меньше шкалы параметра (т. е. $N \gg 1$). При этом случайная ошибка квантования по уровню $\varepsilon_у$ распределена в диапазоне $[-0{,}5\,h;\ 0{,}5\,h]$ практически равномерно, и, следовательно, среднеквадратическая ошибка квантования по уровню:

$$\varepsilon_{у\,кв} = \frac{h}{2\sqrt{3}}. \qquad (4)$$

Для сигнала, описываемого моделью нормального стационарного случайного процесса со среднеквадратическим отклонением σ, можно принять

$$S_{max} - S_{min} = 6\,\sigma \qquad (5)$$

и середину шкалы совместить с математическим ожиданием. В этом случае шкала совпадает с доверительным диапазоном $\pm 3\sigma$, в котором с вероятностью, близкой к единице, лежат все значения параметра. При этом из выражений (1)—(5) получаем выражения для ошибок:

$$\varepsilon_{у\ max} = \frac{3\sigma}{2^n}; \qquad (6)$$

$$\varepsilon_{у\,кв} = \frac{\sqrt{3}\,\sigma}{2^n}, \qquad (7)$$

которые и будем использовать далее.

Более подробно вопросы квантования сигналов по уровню (учет аппаратурных ошибок аналого-цифровых преобразований, квантование с неравномерным шагом и т. п.) рассмотрены в работе [1].

2. КВАНТОВАНИЕ СИГНАЛОВ ВО ВРЕМЕНИ

Сущность операции квантования сигнала во времени (дискретизации) состоит в замене непрерывного сигнала последовательностью дискретных *отсчетов* (рис. 2). Квантование во

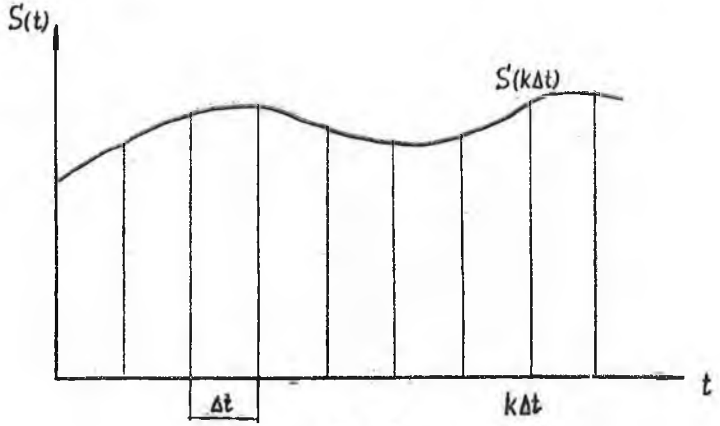

Рис. 2

времени может быть равномерным, когда *шаг квантования во времени* Δt постоянен, и неравномерным, когда Δt меняется в соответствии с изменением каких-либо характеристик сигнала (адаптивная дискретизация). Наибольшее распространение получило равномерное квантование во времени, которое и рассматривается далее.

2.1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СИГНАЛОВ

Следует помнить, что связь шага квантования во времени с погрешностью восстановления непрерывного сигнала по отсчетам определяется не только параметрами сигнала, но и выбранным способом восстановления.

Восстановление сигнала (и выбор шага) в соответствии с теоремой Котельникова на практике не используется, во-первых, из-за несоответствия характеристик реальных сигналов условиям теоремы, во-вторых, из-за физической нереализуемости процедуры идеального восстановления. Используются другие, менее эффективные, но просто реализуемые способы восстановления.

При обработке результатов измерений на ЭВМ задача восстановления часто ставится как задача интерполяции сигнала степенными полиномами. Пусть известны значения сигнала $S(t)$ в точках $t_0, t_1, \ldots t_m$, называемых *узлами интерполяции.* Интерполирующая функция $\bar{S}(t)$ строится так, что принимает в узлах интерполяции те же значения, что и $S(t)$. Известно, что существует единственный полином степени не выше m, принимающий в точках $t_0, t_1, \ldots, t_m$ заданные значения. В общем случае он задается *интерполяционной формулой Лагранжа:*

$$\bar{S}(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_m)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)\ldots(t_0-t_m)} S(t_0) +$$

$$+ \frac{(t-t_0)(t-t_2)\ldots(t-t_m)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)\ldots(t_1-t_m)} S(t_1) + \ldots +$$

$$+ \frac{(t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_{m-1})}{(t_m-t_0)(t_m-t_1)\ldots(t_m-t_{m-1})} S(t_m). \qquad (8)$$

Из соображений простоты на практике обычно используются интерполяционные полиномы невысокого порядка. Чаще всего применяется интерполяция полиномами 0-го и 1-го порядка, их рассмотрением мы и ограничимся.

При *ступенчатой интерполяции* $m=0$ и из общей формулы (8) получаем:

$$\bar{S}(t) = S(t_0). \qquad (9)$$

Эту интерполирующую функцию обычно рассматривают на одном из двух интервалов:

а) при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t$ (просто ступенчатая интерполяция);

б) при $t_0 - 0{,}5\,\Delta t \leqslant t \leqslant t_0 + 0{,}5\,\Delta t$ (ступенчатая интерполяция со сдвигом).

Иллюстрация к этим способам интерполяции дана на рис. 3, а, б. Можно показать, что *для сигнала, описываемого моделью стационарного случайного процесса, при одинаковых ошибках интерполяции шаг при ступенчатой интерполяции в 2 раза меньше шага при ступенчатой интерполяции со сдвигом.* В силу сказанного далее ограничимся рассмотрением только первого варианта, который несколько проще анализируется.

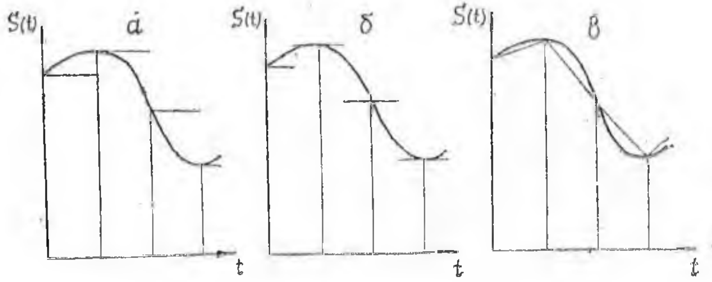

Рис. 3

При *линейной интерполяции* $m = 1$ и из общей формулы (8) при постоянном шаге квантования во времени получаем:

$$\bar{S}(t) = \frac{t_0 + \Delta t - t}{\Delta t} S(t_0) + \frac{t - t_0}{\Delta t} S(t_0 + \Delta t). \qquad (10)$$

Эта интерполирующая функция рассматривается на интервале между отсчетами, то есть при

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t.$$

Восстановление непрерывного сигнала путем линейной интерполяции иллюстрируется рис. 3, в.

Ниже при анализе будем рассматривать один интервал между отсчетами, причем для упрощения выкладок, не умаляя общности результатов, положим $t_0 = 0$. При этом из выражений (9), (10) получим следующие выражения для интерполирующих функций:

для ступенчатой интерполяции:

$$\bar{S}(t) = S(0),$$

для линейной интерполяции:

$$\bar{S}(t) = \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right) S(0) + \frac{t}{\Delta t} S(\Delta t). \qquad (12)$$

Оба эти выражения рассматриваются при

$$0 \leqslant t \leqslant \Delta t.$$

2.2. СВЯЗЬ ШАГА КВАНТОВАНИЯ ВО ВРЕМЕНИ СО СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Выясним, как связаны между собой шаг квантования Δt и среднеквадратическая ошибка восстановления сигнала по дискретным отсчетам (ошибка интерполяции). При анализе примем, что сигнал есть стационарный случайный процесс с известной автокорреляционной функцией

$$B(\tau) = \sigma^2 R(\tau),$$

где σ^2 — дисперсия сигнала;

$R(\tau)$ — его нормированная автокорреляционная функция.

Текущая ошибка, возникающая из-за квантования сигнала во времени, —

$$\varepsilon_{\text{в}}(t) = S(t) - \bar{S}(t) \tag{13}$$

Дисперсия ошибки в каждый момент времени есть математическое ожидание квадрата текущей ошибки:

$$D(t) = M\{\varepsilon_{\text{в}}^2(t)\}. \tag{14}$$

Выражение для среднеквадратической ошибки получим, усреднив текущую дисперсию $D(t)$ по интервалу интерполяции:

$$\varepsilon_{\text{в кв}}^2 = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} D(t)\,dt. \tag{15}$$

Рассмотрим конкретные способы интерполяции.

Для ступенчатой интерполяции из выражений (11), (13), (14) после преобразований получим:

$$D(t) = 2\sigma^2[1 - R(t)], \tag{16}$$

и далее, подставив (16) в (15), —

$$\varepsilon_{\text{в кв}}^2 = 2\sigma^2\left[1 - \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} R(t)\,dt\right]. \tag{17}$$

Для линейной интерполяции из выражений (12), (13), (14):

$$D(t) = 2\sigma^2\left\{1 - \frac{t}{\Delta t}\left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right)[1 - R(\Delta t)] - \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right)R(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{t}{\Delta t}R(\Delta t - t)\right\}; \tag{18}$$

Подставив выражение (18) в (15), получим;

$$\varepsilon^2_{\text{в кв}} = 2\,\sigma^2 \left\{ 1 - \frac{1}{6}\,[1 - R\,(\Delta\,t)] - \frac{2}{\Delta\,t} \int\limits_0^{\Delta t} \left(1 - \frac{t}{\Delta\,t}\right) R\,(t)\,dt \right\}. \quad (19)$$

В табл. 1 приведены выражения для отношения

$$\beta = \frac{\varepsilon^2_{\text{в кв}}}{\sigma^2} \quad (20)$$

при ступенчатой и линейной интерполяции для некоторых часто встречающихся видов автокорреляционных функций. В этой таблице

$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z l^{-u^2}\,du$ — интеграл вероятностей;

$\operatorname{Si}(z) = \int\limits_0^z \frac{\sin u}{u}\,du$ — интегральный синус. Эти специальные функции подробно табулированы (см., например, [2]).

Для определения связи между ошибкой и шагом квантования нормированную автокорреляционную функцию $R\,(\tau)$ при $\tau > 0$ удобно представить в виде суммы степенного ряда:

$$R\,(\tau) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i\,\tau^i. \quad (21)$$

При этом для ступенчатой интерполяции из выражения (17) получаем:

$$\varepsilon^2_{\text{в кв}} = -2\,\sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i\,\frac{\Delta\,t^i}{i+1}; \quad (22)$$

и для линейной интерполяции из (19) —

$$\varepsilon^2_{\text{в кв}} = 2\,\sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(i+1)\,(i+2) - 12}{6\,(i+1)\,(i+2)}\,a_i\,\Delta\,t^i. \quad (23)$$

Практический интерес представляют малые значения ошибок интерполяции, когда $\beta \ll 1$. При этом значения $\Delta\,t$ малы, и в выражениях (22), (23) можно ограничиться первым отличным от нуля членом, отбросив слагаемые высших порядков малости. Решения получаемых таким образом уравнений относительно $\Delta\,t$ для рассматриваемых видов автокорреляционных функций также приведены в табл. 1.

Таблица 1

Нормированная автокорреляционная функция	β		Δ t при β ≪ 1	
	Интерполяция		Интерполяция	
	ступенчатая	линейная	ступенчатая	линейная
$e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$	$2-\frac{2}{\alpha\Delta t}(1-e^{-\alpha\Delta t})$	$\frac{5}{3}-\frac{4}{\alpha\Delta t}+\frac{4}{(\alpha\Delta t)^2}+e^{-\alpha\Delta t}\times$ $\times\left[\frac{1}{3}-\frac{4}{(\alpha\Delta t)^2}\right]$	$\frac{\beta}{\alpha}$	$3\frac{\beta}{\alpha}$
$(1+\alpha)\lvert\tau\rvert)\,e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$	$2-\frac{4}{\alpha\Delta t}+e^{-\alpha\Delta t}\times$ $\times\left(2+\frac{4}{\alpha\Delta t}\right)$	$\frac{5}{3}-\frac{8}{\alpha\Delta t}+\frac{12}{(\alpha\Delta t)^2}+e^{-\alpha\Delta t}\times$ $\times\left[\frac{\alpha\Delta t}{3}+\frac{1}{3}-\frac{4}{\alpha\Delta t}-\frac{12}{(\alpha\Delta t)^2}\right]$	$\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\approx$ $\approx 1{,}732\,\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}$	$\sqrt[3]{\frac{45}{2}}\,\frac{\sqrt[3]{\beta}}{\alpha}\approx$ $\approx 2{,}823\,\frac{\sqrt[3]{\beta}}{\alpha}$
$e^{-(\alpha\tau)^2}$	$2-\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha\Delta t}\operatorname{erf}(\alpha\Delta t)$	$\frac{5}{3}+\frac{2}{(\alpha\Delta t)^2}+e^{-(\alpha\Delta t)^2}\left[\frac{1}{3}-\right.$ $\left.-\frac{2}{(\alpha\Delta t)^2}\right]-\frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha\Delta t}\operatorname{erf}(\alpha\Delta t)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\approx$ $\approx 1{,}225\,\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}$	$\sqrt[4]{10}\,\frac{\sqrt[4]{\beta}}{\alpha}\approx$ $\approx 1{,}778\,\frac{\sqrt[4]{\beta}}{\alpha}$
$\frac{\sin(\alpha\tau)}{\alpha\tau}$	$2-\frac{2}{\alpha\Delta t}\operatorname{Si}(\alpha\Delta t)$	$\frac{5}{3}+\frac{\sin(\alpha\Delta t)}{\alpha\Delta t}-\frac{4}{\alpha\Delta t}\operatorname{Si}(\alpha\Delta t)+$ $+\frac{4}{(\alpha\Delta t)^2}[1-\cos(\alpha\Delta t)]$	$3\,\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}$	$\sqrt[4]{600}\,\frac{\sqrt[4]{\beta}}{\alpha}\approx$ $\approx 4{,}949\,\frac{\sqrt[4]{\beta}}{\alpha}$

2.3. СВЯЗЬ ШАГА КВАНТОВАНИЯ ВО ВРЕМЕНИ С МАКСИМАЛЬНОЙ ОШИБКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Определим взаимозависимость шага квантования во времени и максимальной ошибки интерполяции. На интервале интерполяции дисперсия текущей ошибки определяется по формуле (14). В некоторой точке интервала (обозначим ее t_{max}) эта дисперсия принимает максимальное значение:

$$D_{max} = D(t_{max}) = \max_{0 \leqslant t \leqslant \Delta t} [D(t)]. \tag{24}$$

Свяжем значение максимальной ошибки ($\varepsilon_{в\,max}$), возникающей из-за квантования сигнала во времени, с наибольшим среднеквадратическим отклонением текущей ошибки на интервале интерполяции $\sqrt{D_{max}}$. С этой целью зададимся некоторой *доверительной вероятностью* ($P_{дов}$) того, что значение текущей ошибки в точке с наибольшей дисперсией лежит в интервале $[-\varepsilon_{в\,max}, \varepsilon_{в\,max}]$, и воспользуемся известным неравенством Чебышева, которое для данного случая имеет вид

$$P\{|\varepsilon_в(t_{max})| > \varepsilon_{в\,max}\} = 1 - P_{дов} < \frac{D_{max}}{\varepsilon^2_{в\,max}}. \tag{25}$$

Очевидно, при $t \neq t_{max}$ значения текущей ошибки интерполяции лежат в указанном выше интервале с вероятностью, большей $P_{дов}$.

Из выражения (25) получаем:

$$\varepsilon_{в\,max} < \sqrt{\frac{D_{max}}{1 - P_{дов}}},$$

откуда, в частности, имеем:

$$\varepsilon_{в\,max} = 10\sqrt{D_{max}} \text{ при } P_{дов} > 0{,}99.$$

Неравенство Чебышева справедливо для любой функции распределения случайной величины. В случае нормального распределения рекомендуется воспользоваться более строгим соотношением

$$P\{|\varepsilon_в(t_{max})| \leqslant \varepsilon_{в\,max}\} = P_{дов} = \mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon_{в\,max}}{\sqrt{2D_{max}}}\right),$$

из которого следует, что

$$\varepsilon_{в\,max} = 3\sqrt{D_{max}} \text{ при } P_{дов} \approx 0{,}997. \tag{26}$$

Используя последнее соотношение, определим выражения для $\varepsilon_{в\, max}$ при ступенчатой и линейной интерполяции.

При ступенчатой интерполяции дисперсия текущей ошибки определяется выражением (16). Для большинства встречающихся на практике автокорреляционных функций дисперсия $D(t)$ принимает максимальное значение на правом конце интервала интерполяции, т. е. $t_{max} = \Delta t$.

При этом из выражений (16), (24) и (26) получаем:

$$\varepsilon^2_{в\, max} = 18\,\sigma^2 [1 - R(\Delta t)]. \tag{27}$$

При линейной интерполяции дисперсия текущей ошибки задается выражением (18). В большинстве случаев она максимальна в середине интервала интерполяции, т. е. $t_{max} = 0{,}5\,\Delta t$. С учетом этого из выражений (18), (24) и (26) после преобразований имеем:

$$\varepsilon^2_{в} = 18\,\sigma^2 \left[\frac{3}{4} - R\left(\frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{1}{4} R(\Delta t) \right]. \tag{28}$$

В табл. 2 приведены выражения для отношения

$$\gamma = \frac{\varepsilon^2_{в\, max}}{\sigma^2} \tag{29}$$

при четырех видах автокорреляционных функций.

При представлении автокорреляционной функции в виде степенного ряда (21) получаем:

для ступенчатой интерполяции из выражения (27) —

$$\varepsilon^2_{в\, max} = -18\,\sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, \Delta t^i, \tag{30}$$

для линейной интерполяции из выражения (28) —

$$\varepsilon^2_{в\, max} = 18\,\sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-2} - 1}{2^i} a_i\, \Delta t^i. \tag{31}$$

При $\gamma \ll 1$ обычно можно ограничиться первым отличным от нуля членом ряда. Полученные при этом значения шага квантования во времени Δt представлены во второй части табл. 2.

Более подробно с вопросами квантования сигналов во времени можно ознакомиться, например, в [1, 3].

Таблица 2

Нормированная автокорреляционная функция	γ		Δt при $\gamma \ll 1$	
	Интерполяция		Интерполяция	
	ступенчатая	линейная	ступенчатая	линейная
$e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$	$18\,(1-e^{-\alpha\Delta t})$	$\frac{27}{2}-18\,e^{-\frac{\alpha\Delta t}{2}}+\frac{9}{2}\,e^{-\alpha\Delta t}$	$\frac{1}{18}\frac{\gamma}{\alpha}\approx$ $\approx 0{,}0556\,\frac{\gamma}{\alpha}$	$\frac{2}{9}\frac{\gamma}{\alpha}\approx$ $\approx 0{,}222\frac{\gamma}{\alpha}$
$(1+\alpha\lvert\tau\rvert)e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$	$18\,[1-(1+\alpha\Delta t)\,e^{-\alpha\Delta t}]$	$\frac{27}{2}-18\left(1+\frac{\alpha\Delta t}{2}\right)e^{-\frac{\alpha\Delta t}{2}}+$ $+\frac{9}{2}(1+\alpha\Delta t)\,e^{-\alpha\Delta t}$	$\frac{1}{3}\frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}\approx$ $\approx 0{,}333\frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}$	$\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\,\frac{\sqrt[3]{\gamma}}{\alpha}\approx$ $\approx 1{,}101\frac{\sqrt[3]{\gamma}}{\alpha}$
$e^{-(\alpha\tau)^2}$	$18\,[1-e^{-(\alpha\Delta t)^2}]$	$\frac{27}{2}-18\,e^{-\frac{(\alpha\Delta t)^2}{4}}+\frac{9}{2}\,e^{-(\alpha\Delta t)^2}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}\approx$ $\approx 0{,}236\frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}$	$\sqrt[4]{\frac{16}{27}}\,\frac{\sqrt[4]{\gamma}}{\alpha}\approx$ $\approx 0{,}877\frac{\sqrt[4]{\gamma}}{\alpha}$
$\frac{\sin(\alpha\tau)}{\alpha\tau}$	$18\left[1-\frac{\sin(\alpha\Delta t)}{\alpha\Delta t}\right]$	$\frac{27}{2}-36\,\frac{\sin\left(\frac{\alpha\Delta t}{2}\right)}{\alpha\Delta t}+\frac{9}{2}\,\frac{\sin(\alpha\Delta t)}{\alpha\Delta t}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}\approx$ $\approx 0{,}577\,\frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}$	$\sqrt[4]{\frac{320}{9}}\,\frac{\sqrt[4]{\gamma}}{\alpha}\approx$ $\approx 2{,}442\,\frac{\sqrt[4]{\gamma}}{\alpha}$

3. КВАНТОВАНИЕ СИГНАЛОВ ВО ВРЕМЕНИ И ПО УРОВНЮ

При преобразовании сигнала в цифровую форму он подвергается квантованию как по уровню, так и во времени. В данном случае восстановление непрерывного сигнала (интерполяцию) следует производить не по истинным значениям отсчетов $S(k\Delta t)$ (k — произвольное целое число), а по искаженным:

$$z(k\Delta t) = S(k\Delta t) + \varepsilon_y(k\Delta t). \tag{32}$$

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ КВАНТОВАНИЯ

Полная погрешность восстановления сигнала определяется параметрами обеих процедур квантования, а именно: числом двоичных символов (n), отводимых на описание отсчета сигнала; шагом квантования во времени (Δt).

Важнейшей характеристикой цифровой системы сбора измерительной информации является ее информационная производительность (скорость модуляции, скорость создания сообщений). Для одного канала системы сбора величина информационной производительности в нашем случае задается соотношением

$$B = \frac{n}{\Delta t}. \tag{33}$$

При проектировании системы сбора информации необходимо при заданной верности восстановления данных обеспечить по возможности меньшее значение B, поскольку это позволяет построить более экономичные и эффективные системы передачи и обработки информации. Таким образом, возникает задача оптимального проектирования системы сбора информации (в нашем случае — оптимального выбора параметров квантования n и Δt) по критерию минимума информационной производительности.

Рассмотрим решение этой задачи для случаев оценки погрешности восстановления по среднеквадратическому критерию и по критерию максимальной ошибки при использовании для восстановления ступенчатой и линейной интерполяции.

3.2. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ КВАНТОВАНИЯ ПО ЗАДАННОЙ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ

Пусть предполагается ступенчатая интерполяция сигнала. С учетом выражения (32) интерполирующая функция на интервале $[0, \Delta t]$ вместо равенства (11) задается выражением

$$\bar{S}(t) = z(0) = S(0) + \varepsilon_у(0). \tag{35}$$

Определим среднеквадратическую ошибку восстановления:

$$\varepsilon_{кв}^2 = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} M\{[S(t) - \bar{S}(t)]^2\}\, dt. \tag{35}$$

Подставив (34) в (35), раскроем последнее выражение, учтем при этом, что обычно ошибку квантования по уровню можно считать некоррелированной с сигналом [4]. После преобразований из выражения (35) получаем:

$$\varepsilon_{кв}^2 = \varepsilon_{у\,кв}^2 + \varepsilon_{в\,кв}^2, \tag{36}$$

где $\varepsilon_{у\,кв}$ определяется формулой (7), а $\varepsilon_{в\,кв}$ —формулой (17).

При проектировании систем сбора обычно задается величина допустимой относительной ошибки восстановления $\delta_{доп}$ (по отношению к шкале сигнала). Тогда с учетом формулы (5) допустимая абсолютная ошибка равна $6\sigma\,\delta_{доп}$, и из выражений (7), (20 и (36) имеем:

$$36\,\delta_{доп}^2 = 3 \cdot 2^{-2n} + \beta(\Delta t). \tag{37}$$

Задача оптимизации системы сбора здесь сводится к минимизации информационной производительности (33) с учетом функциональной связи параметров квантования (37) и дополнительного условия целочисленности параметра n. При этом должны быть заданы величины $\delta_{доп}$ и модель сигнала.

При линейной интерполяции с учетом квантования по уровню интерполирующая функция на отрезке $[0, \Delta t]$, как следует из выражения (32), вместо формулы (12) определяется соотношением

$$\bar{S}(t) = \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right) z(0) + \frac{t}{\Delta t}\, z(\Delta t) = \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right) S(0) + \frac{t}{\Delta t}\, S(\Delta t) + \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right)\varepsilon_у(0) + \frac{t}{\Delta t}\,\varepsilon_у(\Delta t). \tag{38}$$

Подставив (38) в (35) с учетом некоррелированности ошибок квантования по уровню с сигналом после преобразований получим:

$$\varepsilon^2_{\text{кв}} = \varepsilon^2_{\text{у кв}} \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} R_\varepsilon \ (\Delta t) \ \right] + \varepsilon^2_{\text{в кв}} \,, \tag{39}$$

где $\varepsilon_{\text{у кв}}$ определяется формулой (7), $\varepsilon_{\text{в кв}}$ — (19), а R_ε есть нормированная автокорреляционная функция шумов квантования по уровню. Согласно работе [4], для нормальных случайных процессов с достаточной для практических приложений точностью

$$R_\varepsilon (\tau) \approx \frac{6}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} e^{-\frac{4\pi^2 j^2 \sigma^2}{h^2}[1 - R(\tau)]}. \tag{40}$$

Таким образом, если задана допустимая относительная ошибка восстановления $\delta_{\text{доп}}$ (относительно шкалы сигнала 6σ), то из выражений (39), (40) с учетом (1), (2), (5), (7), (20) получаем:

$$36\,\delta^2_{\text{доп}} = 3 \cdot 2^{-2n} \left\{ \frac{2}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} e^{-\left(\frac{\pi j 2^n}{3}\right)^2 [1 - R(\Delta t)]} \right\} + \beta(\Delta t). \tag{41}$$

Задача оптимизации системы сбора здесь сводится к минимизации (33) с учетом (41).

3.3. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ КВАНТОВАНИЯ ПО ЗАДАННОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ

Полная максимальная погрешность восстановления сигнала складывается из максимальных ошибок от квантования по уровню и во времени:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{\text{у}\max} + \varepsilon_{\text{в}\max}. \tag{42}$$

Это справедливо и для ступенчатой, и для линейной интерполяции.

Пусть допустимая максимальная погрешность восстановления характеризуется величиной $\delta_{\text{доп}}$ (допустимой погрешностью, отнесенной к шкале сигнала 6σ). Тогда из выражений (6), (29) и (42) имеем:

$$6\,\delta_{\text{доп}} = 3 \cdot 2^{-n} + \sqrt{\gamma\,(\Delta t)}. \tag{43}$$

В данном случае требуется найти пару $\{n, \Delta t\}$, минимизирующую величину (33) с учетом (43).

3.4. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ КВАНТОВАНИЯ

Приведем некоторые результаты решения задачи оптимизации, сформулированной в п. 3.1.—3.3.

В табл. 3—10 даны значения параметров квантования, обеспечивающих минимум информационной производительности системы сбора измерительной информации, и сами значения минимальной информационной производительности. Расчеты проведены для четырех видов автокорреляционной функции сигнала, для среднеквадратической и максимальной допустимой погрешностей восстановления и для двух способов интерполяции (ступенчатой и линейной).

Таблица 3

Оптимальные параметры квантования и минимальная информационная производительность при заданной среднеквадратической погрешности восстановления и автокорреляционной функции сигнала $R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$

Относительная погрешность восстановления, $\delta_{доп}$	Интерполяция					
	ступенчатая			линейная		
	n_{opt}	$\alpha\Delta t_{opt}$	B_{min}/α	n_{opt}	$\alpha\Delta t_{opt}$	B_{min}/α
0,001	10	0,00003314	301800	10	0,0001026	97470
0,002	9	0,0001326	67870	9	0,0004097	21970
0,003	8	0,0002787	28700	8	0,0008800	9091
0,004	8	0,0005305	15080	8	0,001636	4891
0,005	8	0,0008555	9351	7	0,002332	3002
0,006	7	0,001112	6295	7	0,003521	1988
0,007	7	0,001582	4425	7	0,004927	1421
0,008	7	0,002125	3294	7	0,006532	1072
0,009	7	0,002735	2559	6	0,007297	822,3
0,010	7	0,003419	2047	6	0,009325	643,4
0,015	6	0,007374	813,7	6	0,002284	262,7
0,020	5	0,01152	443,9	5	0,03730	134,1
0,025	5	0,01973	253,5	5	0,06152	81,27
0,030	5	0,02979	167,9	4	0,07391	54,12
0,035	5	0,04180	119,6	4	0,1089	36,72
0,040	4	0,04649	86,05	4	0,1499	26,69
0,045	4	0,06250	64,00	4	0,1955	20,46
0,05	4	0,08047	49,71	4	0,2477	16,15
0,06	4	0,1227	32,61	3	0,2969	10,10
0,07	3	0,1352	22,20	3	0,4392	6,830
0,08	3	0,1953	15,36	3	0,6097	4,920
0,09	3	0,2672	11,23	3	0,8092	3,707
0,10	3	0,3500	8,571	2	0,7245	2,761

Таблица 4

Оптимальные параметры квантования и минимальная информационная производительность при заданной среднеквадратической погрешности восстановления и автокорреляционной функции сигнала

$$R(\tau) = (1 + \alpha \mid \tau \mid) e^{-\alpha \mid \tau \mid}$$

$\delta_{доп}$	Интерполяция					
	ступенчатая			линейная		
	n_{opt}	$\alpha \Delta t_{opt}$	B_{min}/α	n_{opt}	$\alpha \Delta t_{opt}$	B_{min}/α
0,001	10	0,009986	1001	9	0,08757	102,8
0,002	9	0,02002	449,5	8	0,1403	57,03
0,003	8	0,02910	274,9	7	0,1708	40,98
0,004	8	0,04028	198,6	7	0,2263	30,94
0,005	7	0,04688	149,3	7	0,2729	25,65
0,006	7	0,05859	119,5	6	0,2767	21,69
0,007	7	0,07012	99,83	6	0,3249	18,47
0,008	6	0,06992	85,81	6	0,3688	16,27
0,009	6	0,08262	72,62	6	0,4095	14,65
0,010	6	0,09492	63,21	6	0,4474	13,41
0,015	6	0,1545	38,84	5	0,5748	8,699
0,020	5	0,1945	25,70	5	0,7502	6,665
0,025	5	0,2582	19,36	4	0,7998	5,001
0,030	4	0,2656	15,06	4	0,9797	4,083
0,035	4	0,3391	11,80	4	1,149	3,481
0,040	4	0,4102	9,752	3	1,006	2,981
0,045	4	0,4812	8,312	3	1,219	2,461
0,05	4	0,5547	7,211	3	1,410	2,127
0,06	3	0,5719	5,246	3	1,779	1,686
0,07	3	0,7469	4,017	3	2,153	1,393
0,08	3	0,9250	3,243	2	1,838	1,088
0,09	3	1,1156	2,689	2	2,309	0,8663
0,10	2	0,8875	2,254	2	2,785	0,7182

Таблица 5

Оптимальные параметры квантования и минимальная информационная производительность при заданной среднеквадратической погрешности восстановления и автокорреляционной функции сигнала $R(\tau) = e^{-(\alpha\tau)^2}$

$\delta_{доп}$	Интерполяция					
	ступенчатая			линейная		
	n_{opt}	$\alpha\Delta t_{opt}$	B_{in}/α	n_{opt}	$\alpha\Delta t_{opt}$	B_{in}/α
0,001	10	0,006983	1432	9	0,1299	69,29
0,002	9	0,01406	640,0	8	0,1842	43,43
0,003	8	0,02041	391,9	7	0,2130	32,86
0,004	8	0,02817	283,9	7	0,2614	26,78
0,005	7	0.03281	213,3	7	0,3000	23,33
0,006	7	0,04082	171,5	6	0,3028	19,81
0,007	7	0,04873	143,6	6	0,3404	17,63
0,008	6	0,04854	123,6	6	0,3724	16,11
0,009	6	0,05723	104,8	6	0,4019	14,93
0,010	6	0,06562	91,43	5	0,3635	13,76
0,015	5	0,08828	56,65	5	0,5123	9,760
0,020	5	0,1316	37,98	4	0,5218	7,666
0,025	5	0,1723	29,02	4	0,6474	6,179
0,030	4	0,1770	22,60	4	0,7465	5,358
0,035	4	0,2219	18,03	4	0,8351	4,790
0,040	4	0,2648	15,10	3	0,7615	3,940
0,045	4	0,3070	13,03	3	0,8695	3,450
0,05	4	0,3492	11,45	3	0,9637	3,113
0,06	3	0,3594	8,348	3	1,133	2,647
0,07	3	0,4547	6,598	3	1,295	2,316
0,08	3	0,5484	5,470	2	1,159	1,725
0,09	3	0,6437	4,660	2	1,364	1,466
0,10	2	0,5297	3,776	2	1,557	1,284

Таблица 6

Оптимальные параметры квантования и минимальная информационная производительность при заданной среднеквадратической погрешности восстановления и автокорреляционной функции сигнала

$$R(\tau)=\frac{\sin(\alpha\tau)}{\alpha\tau}$$

$\tilde{\delta}_{доп}$	Интерполяция					
	ступенчатая			линейная		
	n_{opt}	$\alpha\Delta t_{opt}$	B_{min}/α	n_{opt}	$\alpha\Delta t_{opt}$	B_{min}/α
0,001	10	0,01729	578,5	9	0,3615	24,90
0,002	9	0,03457	260,3	8	0,5116	15,64
0,003	8	0,05000	160,0	7	0,5920	11,82
0,004	8	0,06914	115,7	7	0,7254	9,649
0,005	7	0,08027	87,20	7	0,8314	8,420
0,006	7	0,1000	70,00	6	0,8384	7,157
0,007	7	0,1193	58,66	6	0,9413	6,374
0,008	6	0,1189	50,44	6	1,030	5,827
0,009	6	0,1402	42,79	6	1,109	5,408
0,010	6	0,1605	37,37	5	1,004	4,980
0,015	5	0,2156	23,19	5	1,407	3,552
0,020	5	0,3219	15,53	4	1,433	2,791
0,025	5	0,4203	11,90	4	1,767	2,264
0,030	4	0,4328	9,242	4	2,023	1,977
0,035	4	0,5422	7,378	4	2,246	1,781
0,040	4	0,6469	6,184	3	2,060	1,457
0,045	4	0,7484	5,344	3	2,334	1,285
0,05	4	0,8484	4,715	3	2,565	1,169
0,06	3	0,8719	3,441	3	2,970	1,010
0,07	3	1,100	2,727	3	3,331	0,9005
0,08	3	1,319	2,275	2	3,031	0,6597
0,09	3	1,537	1,951	2	3,472	0,5761
0,10	2	1,275	1,569	2	3,873	0,5165

Таблица 7

Оптимальные параметры квантования и минимальная информационная производительность при заданной максимальной погрешности восстановления и автокорреляционной функции сигнала

$R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$

$\delta_{доп}$	Интерполяция					
	ступенчатая			линейная		
	n_{opt}	$\alpha\Delta t_{opt}$	B_{min}/α	n_{opt}	$\alpha\Delta t_{opt}$	B_{min}/α
0,001	13	0,000001763	7372000	13	0,000007053	1843000
0,002	12	0,000007053	1701000	12	0,00002821	425300
0,003	12	0,00001656	724400	12	0,00006626	181100
0,004	11	0,00002821	389900	11	0,0001129	97470
0,005	11	0,00004524	243200	11	0,0001811	60760
0,006	10	0,00006076	164600	10	0,0002429	41180
0,007	10	0,00008480	117900	10	0,0003397	29430
0,008	10	0,0001128	88610	10	0,0004514	22150
0,009	10	0,0001452	68870	10	0,0005793	17260
0,010	10	0,0001811	55230	10	0,0007243	13810
0,015	9	0,0003932	22890	9	0,001576	5712
0,020	8	0,0006510	12290	8	0,002601	3076
0,025	8	0,001063	7526	8	0,004249	1883
0,030	8	0,001576	5077	8	0.006300	1270
0,035	7	0,001936	3616	7	0,007740	904,4
0,040	7	0,002613	2679	7	0,01040	673,0
0,045	7	0,003382	2070	7	0,01353	517,5
0,05	7	0,004261	1643	7	0,01699	411,9
0,06	6	0,005470	1097	6	0,02178	275,5
0,07	6	0,007765	772,7	6	0,03096	193,8
0,08	6	0,01050	571,5	6	0,04160	144,2
0,09	6	0,01358	442,0	6	0,05410	110,9
0,10	5	0,01436	348,3	5	0,05703	87,67

Таблица 8

Оптимальные параметры квантования и минимальная информационная производительность при заданной максимальной погрешности восстановления и автокорреляционной функции сигнала

$$R(\tau) = (1 + \alpha|\tau|)e^{-\alpha|\tau|}$$

$\delta_{доп}$	Интерполяция					
	ступенчатая			линейная		
	n_{opt}	$\alpha\Delta t_{opt}$	B_{min}/α	n_{opt}	$\alpha\Delta t_{opt}$	B_{min}/α
0,001	12	0,001759	6823	12	0,03355	357,7
0,002	11	0,003517	3128	11	0,05342	205,9
0,003	10	0,005030	1988	10	0,06797	147,1
0,004	10	0,007032	1422	9	0,07715	116,7
0,005	10	0,009059	1104	9	0,09355	96,20
0,006	9	0,01008	892,5	9	0,1088	82,73
0,007	9	0,01209	744,7	9	0,1230	73,14
0,008	9	0,01411	637,7	8	0,1234	64,81
0,009	9	0,01614	557,7	8	0,1371	58,35
0,010	8	0,01616	495,0	8	0,1500	53,33
0,015	8	0,02632	304,0	7	0,1871	37,41
0,020	7	0,03252	215,2	7	0,2422	28,90
0,025	7	0,04277	163,6	6	0,2539	23,63
0,030	7	0,05313	131,8	6	0,3035	19,77
0,035	6	0,05537	108,4	6	0,3508	17,10
0,040	6	0,06582	91,16	6	0,3957	15,16
0,045	6	0,07637	78,57	5	0,3703	13,50
0,05	6	0,08691	69,03	5	0,4148	12,05
0,06	5	0,09141	54,70	5	0,5000	10,00
0,07	5	0,1129	44,29	5	0,5805	8,614
0,08	5	0,1348	37,10	4	0,5359	7,464
0,09	5	0,1566	31,92	4	0,6156	6,497
0,10	4	0,1441	27,75	4	0,6922	5,779

Таблица 9

Оптимальные параметры квантования и минимальная информационная производительность при заданной максимальной погрешности восстановления и автокорреляционной функции сигнала $R(\tau) = e^{-(\alpha\tau)^2}$

$\delta_{доп}$	Интерполяция					
	ступенчатая			линейная		
	n_{opt}	$\alpha\Delta t_{opt}$	B_{min}/α	n_{opt}	$\alpha\Delta t_{opt}$	B_{min}/α
0,001	12	0,001242	9665	11	0,05908	186,2
0,002	11	0,002485	4426	10	0,08359	119,6
0,003	10	0,003553	2814	10	0,1078	92,75
0,004	10	0,004969	2012	9	0,1184	76,04
0,005	10	0,006385	1566	9	0,1365	65,92
0,006	9	0,007106	1267	8	0,1369	58,43
0,007	9	0,008522	1056	8	0,1531	52,24
0,008	9	0,009938	905,7	8	0,1676	47,74
0,009	9	0,01135	792,7	8	0,1811	44,19
0,010	8	0,01138	703,1	8	0,1936	41,33
0,015	8	0,01846	433,4	7	0,2277	30,74
0,020	7	0,02275	307,6	6	0,2387	25,14
0,025	7	0,02984	234,6	6	0,2840	21,13
0,030	7	0,03692	189,6	6	0,3234	18,55
0,035	6	0,03848	155,9	5	0,3020	16,56
0,040	6	0,04551	131,8	5	0,3398	14,71
0,045	6	0,05264	114,0	5	0,3734	13,39
0,05	6	0,05977	100,4	5	0,4055	12,33
0,06	5	0,06289	79,50	5	0,4625	10,81
0,07	5	0,07695	64,97	4	0,4312	9,275
0,08	5	0,09121	54,82	4	0,4859	8,232
0,09	5	0,1055	47,41	4	0,5367	7,453
0,10	4	0,09746	41,04	4	0,5836	6,854

Таблица 10

Оптимальные параметры квантования и минимальная информационная производительность при заданной максимальной погрешности восстановления и автокорреляционной функции сигнала

$$R(\tau) = \frac{\sin(\alpha\tau)}{\alpha\tau}$$

$\delta_{доп}$	Интерполяция					
	ступенчатая			линейная		
	n_{opt}	$\alpha\Delta t_{opt}$	B_{min}/α	n_{opt}	$\alpha\Delta t_{opt}$	B_{min}/α
0,001	12	0,003041	3947	11	0,1645	66,89
0,002	11	0,006080	1809	10	0,2326	42,99
0,003	10	0,008692	1150	10	0,3000	33,33
0,004	10	0,01216	822,4	9	0,3293	27,33
0,005	10	0,01563	640,0	9	0,3797	23,70
0,006	9	0,01738	517,7	8	0,3809	21,01
0,007	9	0,02085	431,6	8	0,4258	18,79
0,008	9	0,02432	370,1	8	0,4656	17,18
0,009	9	0,02778	323,9	8	0,5031	15,90
0,010	8	0,02788	286,9	8	0,5375	14,88
0,015	8	0,04522	176,9	7	0,6320	11,08
0,020	7	0,05576	125,5	6	0,6625	9,057
0,025	7	0,07305	95,83	6	0,7875	7,619
0,030	7	0,09043	77,41	6	0,8969	6,690
0,035	6	0,09414	63,74	5	0,8375	5,970
0,040	6	0,1115	53,80	5	0,9406	5,316
0,045	6	0,1289	46,55	5	1,033	4,841
0,05	6	0,1461	41,07	5	1,119	4,469
0,06	5	0,1539	32,49	4	1,022	3,914
0,07	5	0,1887	26,50	4	1,191	3,360
0,08	5	0,2234	22,38	4	1,337	2,991
0,09	5	0,2578	19,39	4	1,473	2,715
0,10	4	0,2383	16,79	4	1,598	2,502

4. МЕТОДИКА ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ КВАНТОВАНИЯ

На основании изложенного можно рекомендовать следующую методику выбора параметров квантования сигнала, заданного моделью в виде гауссовского стационарного процесса.

1. Определить автокорреляционную функцию сигнала.

2. Задаться критерием оценки погрешности восстановления непрерывного процесса по дискретным данным.

3. Определить допустимое значение погрешности восстановления.

4. Выбрать способ восстановления (интерполяции) сигнала.

Пункты 1—4 выполняются, если соответствующие характеристики не являются заранее заданными.

5. Если полученные результаты соответствуют исходным данным таблиц 3—10, то из таблицы выбрать значения оптимальных параметров квантования и минимальной информационной производительности.

6. В более общем случае — полностью решить задачу оптимизации, изложенную в п. 3.1—3.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мановцев А. П.* Основы теории радиотелеметрии.—М., Энергия, 1973.
2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1970.
3. Справочник по теоретическим основам радиоэлектроники. Т. 2. — М.: Энергия, 1977.
4. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статической радиотехники. Кн. 1.— М.: Советское радио, 1969.

Составители: *Владимир Андреевич Виттих,*
Владислав Викторович Сергеев

КВАНТОВАНИЕ СИГНАЛОВ

Методические указания

Редактор Н. В. Касаткина
Техн. редактор Н. М. Каленюк
Корректор Т. В. Пикурова

Подписано в печать 29.12.1980 г. Формат $60\times84^1/_{16}$.
Бумага оберточная белая. Печать высокая.
Литературная гарнитура. Усл. п. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,3.
Тираж 500 экз. Заказ № 153. Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт имени С. П. Королева, г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Типография УЭЗ КуАИ, г. Куйбышев, ул. Ульяновская, 18.