МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМ

КУЙБЫШЕВ 1982

Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт имени академика С.П.Королева

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМ

Куйбышев 1982

УДК 621.396.934

Составитель В.Г.Н и к и т и н

Рецензент А.Я.О б о и м о в

Утверждены **редакционным советом** института в качестве методических указаний к лабораторной работе 16.12.81 г.

Ц е л ь   р а б о т ы - ознакомиться с принципами построения оптимальных систем управления; исследовать оптимальную по быстродействию систему управления.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Объект управления (процесс) n -го порядка описывается системой уравнений

$$\dot{x}_i = f_c(X,U), \quad i = 1,2,\dots,n, \qquad (1)$$

где $X = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$ - вектор переменных состояний;

$U = \begin{vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{vmatrix}$ - вектор управления.

Цель управления - перевести объект управления (ОУ) из начального состояния X_o в конечное $X_к$ за минимальное время при соблюдении ограничений на управление $U \in V$, которые чаще всего задаются неравенствами $A_i \leq U_i \leq B_i$.

Оптимизацию будем осуществлять, используя принцип максимума Понтрягина. В соответствии с этим принципом показатель качества управления представляется в интегральной форме:

$$I = \int_{t_o}^{t_к} f_{n+1}(X,U)\,dt, \qquad (2)$$

а система уравнений будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \int_{t_o}^{t} f_{n+1}(X,U)\,dt \\ \dot{x}_{n+1} &= f_{n+1}(X,U) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Заметим, что показатель качества - это x_{n+1} в конечный момент времени: $I = x_{n+1}(t_к) = \int_{t_o}^{t_к} f_{n+1}(X,U)\,dt.$

При оптимизации по быстродействию

$$I = t_к - t_o = \tau; \qquad (4)$$

2-1177

следовательно

$$f_{n+1}(X,U) \equiv 1 \; . \qquad (5)$$

Так как конечное состояние ОУ задано, то при составлении функции Понтрягина следует учесть ограничение на конечные координаты:

$$\rho = b_{n+1} x_{n+1}(t_к) + \lambda_1 [x_1(t_к) - x_к] + \ldots + \lambda_n [x_n(t_n) - x_{nк}] \qquad (6)$$

где $b_{n+1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – коэффициенты.

Для минимизации этой функции вводится сопряженная система переменных $\psi_1, \ldots, \psi_n$, с помощью которой определяется гамильтонниан:

$$H = (\psi, f) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i \qquad (7)$$

Переменные ψ_i выбираются таким образом, чтобы они удовлетворяли уравнениям Гамильтона:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \\ \psi_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned} \right\} \qquad (8)$$

и, кроме того, должны **удовлетворяться граничные условия:**

$$\psi_i(t_к) = -\frac{\partial \rho}{\partial x_i(t_к)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (9)$$

Принцип максимума можно сформулировать следующими положениями:

I. Сопряженная система переменных, удовлетворяющая соотношениям (8) и (9), существует.

2. Для минимизации функции Понтрягина ρ необходимо (а для линейных ОУ и достаточно) управляющие воздействия выбирать так, чтобы гамильтонниан (7) был максимальным (по U) на всем интервале управления ($t_o - t_к$).

Главная трудность в применении принципа максимума заключается в решении двухточечной кривой задачи: основная система (I) должна удовлетворять начальным условиям $x_i(t_o) = x_{io}$, а сопряженная система – граничным условиям на конце интервала управления (9). Обычно решение находится методом проб и ошибок с применением ЦВМ.

Пример. Оптимальное по быстродействию управление двигателем.

Передаточная функция двигателя и ограничения на управление

$$W(p) = \frac{y(p)}{U(p)} = \frac{K}{p(1+pT)}; \quad (-U_m \le U(t) \le U_m) \qquad (I0)$$

Вводя безразмерные время $\bar{t} = \frac{t}{T}$, управление $U = \frac{U}{U_m}$ и выходную переменную $y = \frac{y}{kTU_m}$, получим дифференциальное уравнение ОУ в виде

$$\dot{y} + \ddot{y} = U \tag{11}$$

(черточки над переменными отброшены).

Ограничение на управляющее воздействие также упрощается:

$$-1 \leq U \leq 1 \tag{12}$$

Для получения уравнений в виде (I) делаем замену переменных:

$$y = x_1; \quad \dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$$

С учетом выражения (5) получаем расширенную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= U - x_2 \\ \dot{x}_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Задача управления – перевести ОУ из начального состояния ($\dot{x}_{10}$, $\dot{x}_{20}$) в конечное (x_{1K} , x_{2K}) за минимальное время. Функция Понтрягина (6) с учетом ограничений имеет вид

$$\rho = b_3 x_3(t_K) + \lambda_1[x_1(t_K) - x_{1K}] + \lambda_2[x_2(t_K) - x_{2K}] \tag{14}$$

С учетом выражений (7) и (13) запишем Гамильтонниан:

$$H = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 + \psi_3 f_3 = \psi_1 x_2 + \psi_2 (U - x_2) + \psi_3 1 \tag{15}$$

Так как управление U входит только в одно слагаемое Гамильтонниана то для максимизации H по U требуется брать +I, если $\psi_2 > 0$, и – I при $\psi_2 < 0$, т.е.

$$U^* = \operatorname{sign} \psi_2 \tag{16}$$

С учетом второго уравнения (8) составляем сопряженную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{\psi}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 + \psi_2 \\ \dot{\psi}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Из первых двух уравнений находим

$$\psi_2 = Ae^t + B \tag{18}$$

Нетрудно убедиться, что эта функция может менять знак не более одного раза. Следовательно, управление может состоять не более чем из двух интервалов, на одном из них $U = +1$ (или -1), а на другом $U = -1$ (или 1).

Сначала двигатель разгоняется в нужном направлении с максимальным ускорением, а затем тормозится также с максимальным ускорением.

С учетом того, что на каждом интервале управление постоянно ($U = const$), можно провести следующие упрощения:

Разделим в выражении (I3) первое уравнение на второе:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = \frac{x_2}{U - x_2} \tag{I9}$$

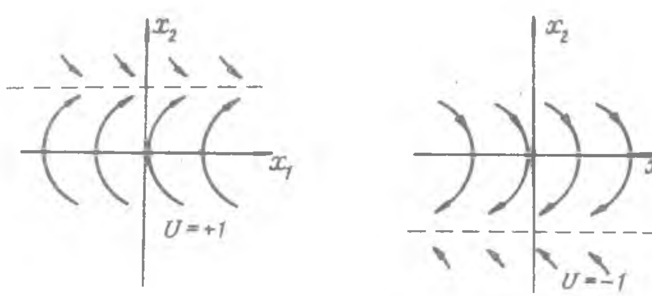
Решаем это уравнение при $U = const = \pm 1$:

$$x_1 - x_{10} = -(x_2 - x_{20}) - U \ln \frac{U - x_2}{U - x_{20}} \tag{20}$$

Учитывая, что U может принимать два значения ± 1, получаем два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} (x_1 - x_{10}) = +(x_2 - x_{20}) + \ln \frac{1 - x_2}{1 - x_{20}} = 0, \quad U = +1 \\ (x_1 - x_{10}) + (x_2 - x_{20}) - \ln \frac{1 + x_2}{1 + x_{20}} = 0, \quad U = -1 \end{aligned}\right\} \tag{2I}$$

Графики этих функций на фазовой плоскости (x_1, x_2) приведены на рис.I.



Р и с. I

Не теряя общности, можно допустить $x_{1K} = x_{2K} = 0$ и систему нужно привести в нулевое состояние. На каждом из графиков рис.I только одна траектория приводит в нужную точку. Эти особые траектории – линии переключения – определяются уравнениями (2I) при $x_{10} = x_{20} = 0$, т.е.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ln(1-x_2) = 0 \\ x_1 + x_2 - \ln(1+x_2) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Так как первое из этих уравнений описывает линию переключения при $X_2 < 0$, а второе при $X_2 > 0$, то оба уравнения можно объединить в одно:

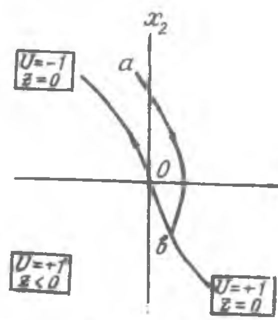
$$x_1 + [|x_2| - \ln(1+|x_2|)]\, \mathrm{sign}\, x_2 \qquad (23)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$Z = x_1 + [|x_2| - \ln(1+|x_2|)]\, \mathrm{sign}\, x_2 \qquad (24)$$

На линии переключения $Z = 0$; при $Z > 0$ рабочая точка находится выше линии переключения (рис.2). Чтобы вывести ее на линию переключения, нужно подать управляющий сигнал U = –I. При этом рабочая точка будет двигаться по траектории.

В момент z =0 нужно произвести переключение U = +I и затем в конечной точке (0,0) отключить управление.



Р и с. 2

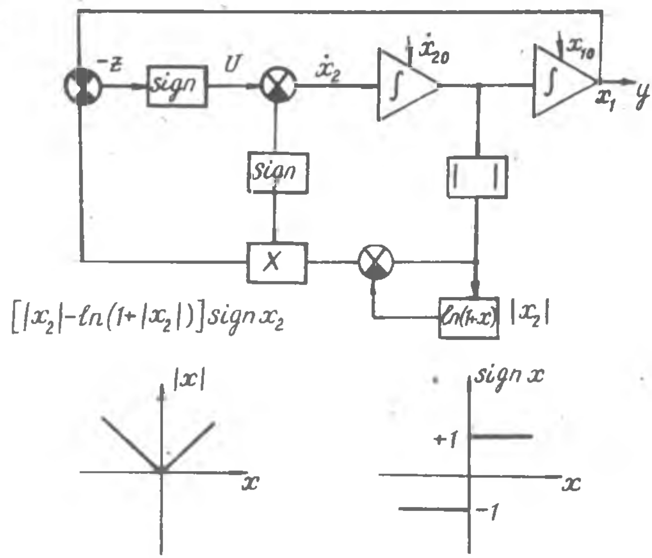
Таким образом, для оптимального управления следует создать устройство, определяющее знак Z по уравнению (24), и если $Z > 0$, включить U = –I и наоборот

$U = -\mathrm{sign}\, Z = \mathrm{sign}(-Z)$.

Такая схема управления приведена на рис.3.

Вводя начальные условия X_{10} и X_{20}, тем самым включаем управление. Далее система с оптимальным быстродействием будет приведена к нулевым координатам.

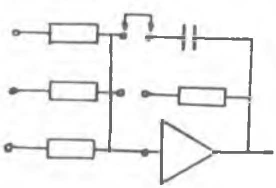
Таким образом, оптимальная по быстродействию система – это нелинейная релейная система.



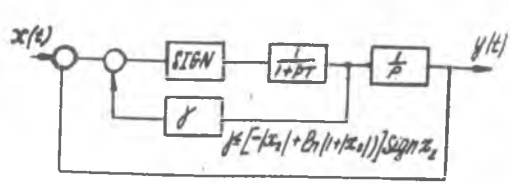
Р и с. 3

Описание лабораторной установки

Лабораторная установка состоит из набора операционных усилителей и нелинейных блоков. Операционные усилители собраны на интегральных микросхемах серии I4Т IOIБ. Схема УПТ представлена на рис.4. Блок-схема исследуемой САУ представлена на рис.5.

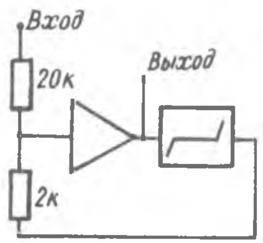


Р и с. 4.

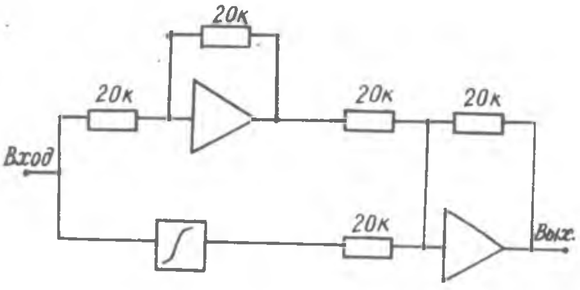


Р и с. 5.

Для реализации функций $SIGN\,\gamma$ нужно воспользоваться схемами рис.6 и 7.



Р и с. 6.



Р и с. 7.

Экспериментальная часть

I. Исследование оптимальной и неоптимальной системы по форме и времени переходного процесса.

2. Снятие вольт-амперных характеристик исследуемых нелинейностей.

С о д е р ж а н и е о т ч е т а

I. Номер, название, цель работы.
2. Результаты исследований (таблицы, графики, осциллограммы). по п.п. I-2.
3. Выводы.

Составитель Валерий Геронтьевич Никитин

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМ

Методические указания к лабораторной работе №7

Редактор Н.В.К а с а т к и н а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор С.С.Р у б а н

Подписано в печать I7.0I.83. Формат 60х84 I/I6
Бумага оберточная белая. Печать оперативная.
Усл.л. - 0,7. Уч.-изд.л. 0,6. Тираж 300 экз.
Заказ 1177 Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт имени академика С.П.Королева, г.Куйбышев, ул.Молодогвардейская, I5I.
Областная типография им.В.П.Мяги, г.Куйбышев, ул.Венцека, 60.