

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»

ИНТЕГРАЛЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве методических разработок для практических занятий*

САМАРА
Издательство САУ
2006

УДК 517.1(075)

ББК 22.161

И73



Инновационная образовательная программа «Развитие центра компетенции и подготовка специалистов мирового уровня в области аэрокосмических и геoinформационных технологий»

Составители: *Е.А. Денискина, Ю.Л. Файницкий*

Рецензент канд. техн. наук, доц. Н. Л. А к с е н о в а

Интегралы и дифференциальные уравнения : метод. разработки. для
И73 практ. занятий / [сост. Е.А. Денискина, Ю.Л. Файницкий]. – Самара : Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 34 с.

Методические разработки составлены в соответствии с действующей программой по курсу математики для инженерно-технических специальностей вузов. Указания содержат набор стандартных задач для проведения практических занятий со студентами первого и второго курсов, а также задачи для самостоятельной работы студентов и ответы к ним.

Настоящие методические разработки предназначены для студентов первого и второго курсов 1-4 факультетов СГАУ. Указания могут быть рекомендованы преподавателям для подготовки и проведения практических занятий по темам «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Дифференциальные уравнения».

Методические разработки выполнены на кафедре высшей математики СГАУ.

УДК 517.1(075)

ББК 22.161

СОДЕРЖАНИЕ

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.....	4
1.1. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ	4
1.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН.....	6
1.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ.....	7
1.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ	8
1.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.....	10
2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.....	11
2.1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА.....	11
2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ПО ЧАСТЯМ И ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....	14
2.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР.....	15
2.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ	16
2.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИН ДУГ	18
2.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ.....	19
2.7. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	20
3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	22
3.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ	22
3.2. ОДНОРОДНЫЕ И ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	23
3.3. УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ.....	24
3.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА	25
3.5. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	26
3.6. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ	27
3.7. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ НА ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	29
3.8. РЕШЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИСКЛЮЧЕНИЙ.....	30
3.9. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ	31
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	33

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Найти следующие интегралы:

1. $\int \left(x^5 - 6x^3 - \frac{7}{x} + \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3 \right) dx$. 2. $\int (x+1)^{10} dx$. 3. $\int \sqrt{1+2x} dx$.

4. $\int \sin(3x-4) dx$ 5. $\int \frac{dx}{1+4x^2}$. 6. $\int \frac{dx}{1+4x}$. 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x}}$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$. 9. $\int \frac{dx}{\sin 4x}$. 10. $\int 3^{-2x} dx$. 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$.

12. $\int \frac{dx}{2-7x^2}$. 13. $\int \frac{dx}{\cos(2-3x)}$. 14. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-2x)^2}}$. 15. $\int \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

16. $\int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^4}}$. 17. $\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$. 18. $\int \operatorname{tg}(5-3x) dx$ 19. $\int \frac{\cos \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$.

20. $\int x e^{-2x^2} dx$. 21. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2+4x^4}}$. 22. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2+4x^8}}$. 23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt[3]{4-\sqrt{x}}}$.

24. $\int \sin x \cos x dx$. 25. $\int x^2 \sqrt{(3-5x^3)^7} dx$. 26. $\int \frac{e^x dx}{e^x + 9}$.

27. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 9}$. 28. $\int \frac{x dx}{3x^4 - 2}$. 29. $\int \frac{x dx}{x^2}$. 30. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{2-3x^{10}}}$.

31. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 3x dx}{\cos^2 3x}$. 32. $\int \frac{dx}{(x^2+4) \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}$. 33. $\int \frac{2x+5}{3x^2-2} dx$.

34. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{4-5x^2}} dx$. 35. $\int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{2-\ln^4 x}}$. 36. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 \cos 2x - 1}} dx$.

37. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos 5x} dx}{\sqrt{1-25x^2}}$. 38. $\int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 4 \sin^2 x}$. 39. $\int \frac{\sin 2x}{3-2 \cos^4 x} dx$.

40. $\int \frac{dx}{\sin^2 4x \operatorname{ctg}^3 4x}$. 41. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2} \sqrt{4+\arccos \frac{x}{2}}}$.

42. $\int \frac{\operatorname{tg} 2x}{\cos^2 2x (9 + \operatorname{tg}^2 2x)} dx$. 43. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+7} dx$.

44. $\int e^{2x^3-3x-1} (2x^2-1) dx$.

Задания для самостоятельной работы

Найти следующие интегралы:

45. $\int \frac{x^3 + 2}{x} dx$. 46. $\int 2^x e^x dx$. 47. $\int (2x + 3 \cos x) dx$. 48. $\int \frac{2 - \sin x}{\sin^2 x} dx$.

49. $\int \frac{dx}{3x^2 + 4}$. 50. $\int \frac{dx}{4x^2 - 5}$. 51. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x^2}}$. 52. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

53. $\int \sqrt{3 + 2x} dx$. 54. $\int (3 - 4 \sin x)^{\frac{1}{3}} \cos x dx$. 55. $\int \frac{dx}{x \ln x}$. 56. $\int 3^{4x} dx$.

57. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$. 58. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$. 59. $\int x 5^{-x^2} dx$. 60. $\int \frac{e^{-2x} dx}{1 + e^{-4x}}$.

61. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4}}$. 62. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{3x^6 + 1}}$. 63. $\int \frac{\sin 4x dx}{\cos^3 4x}$. 64. $\int \frac{e^x dx}{(7 - e^x)^4}$.

65. $\int \frac{x dx}{4x^2 + 7}$. 66. $\int \frac{x^3}{9 - 4x^8} dx$. 67. $\int \frac{x^4 + 1}{x^5 + 5x - 8} dx$.

68. $\int x^3 \sqrt[4]{5x^4 - 3} dx$. 69. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - 4 \ln x}}$. 70. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - 4 \ln^2 x}}$.

71. $\int \frac{x^2 dx}{\cos(x^3)}$. 72. $\int \frac{e^{-2 \operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$. 73. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 3x dx}{1 + 9x^2}$.

74. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2} (3 - 5 \arccos 2x)}$. 75. $\int \frac{4 - 3x}{9x^2 + 7} dx$. 76. $\int \frac{8x + 5}{\sqrt{2x^2 - 3}} dx$.

Ответы: 45. $\frac{x^3}{3} + 2 \ln x + C$. 46. $\frac{2^x e^x}{\ln 2 + 1} + C$. 47. $x^2 + 3 \sin x + C$.

48. $-2 \operatorname{ctg} x - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$. 49. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{2} + C$. 50. $\frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x - \sqrt{5}}{2x + \sqrt{5}} \right| + C$.

51. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}} + C$. 52. $-\operatorname{ctg} x - x + C$. 53. $\frac{1}{3} \sqrt{(3 + 2x)^3} + C$.

54. $-\frac{3}{16} (3 - 4 \sin x)^{\frac{4}{3}} + C$. 55. $\ln |\ln x| + C$. 56. $\frac{3^{4x}}{4 \ln 3} + C$.

57. $-\cos(\ln x) + C$. 58. $\frac{3}{4} \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} + C$. 59. $-\frac{1}{2 \ln 5} 5^{-x^2} + C$.

60. $-\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(e^{-2x}) + C$. 61. $-\ln(\cos x + \sqrt{\cos^2 x + 4}) + C$.

$$62. \frac{1}{3\sqrt{3}} \ln \left| \sqrt{3x^3 + \sqrt{3x^6 + 1}} \right| + C. \quad 63. \frac{1}{8 \cos^2 4x} + C. \quad 64. \frac{1}{3(7 - e^x)^3} + C.$$

$$65. \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{7}} + C. \quad 66. \frac{1}{48} \ln \left| \frac{2x^4 + 3}{2x^4 - 3} \right| + C. \quad 67. \frac{1}{5} \ln |x^5 + 5x - 8| + C.$$

$$68. \frac{1}{25} 4 \sqrt[4]{(5x^4 - 3)^5} + C. \quad 69. -\frac{1}{2} \sqrt{1 - 4 \ln x} + C. \quad 70. \frac{1}{2} \arcsin(2 \ln x) + C.$$

$$71. \frac{1}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x^3}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \quad 72. -\frac{1}{2} e^{-2 \operatorname{tg} x} + C. \quad 73. \frac{1}{9} \operatorname{arctg}^3 3x + C.$$

$$74. \frac{1}{10} \ln |3 - 5 \arccos 2x| + C. \quad 75. \frac{4}{3\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{3x}{\sqrt{7}} - \frac{1}{6} \ln(9x^2 + 7) + C.$$

$$76. 4\sqrt{2x^2 - 3} + \frac{5}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2x} + \sqrt{2x^2 - 3}) + C.$$

1.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Применяя формулу интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

$$77. \int (2x - 1) \sin 3x dx. \quad 78. \int \frac{\ln x}{x^3} dx. \quad 79. \int \operatorname{arctg} x dx. \quad 80. \int \frac{x dx}{\sin^2 2x}.$$

$$81. \int (x^2 - 6x + 2) e^{-x} dx. \quad 82. \int \ln(4x - 5) dx. \quad 83. \int e^{2x} \cos x dx.$$

$$84. \int x \ln^2(3x) dx. \quad 85. \int \sin(\ln x) dx.$$

Найти следующие интегралы:

$$86. \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}. \quad 87. \int \frac{(x - 3) dx}{x^2 + 4x + 8}. \quad 88. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 6x - 1}}.$$

$$89. \int \frac{(2x + 1) dx}{\sqrt{5 - 2x - x^2}}. \quad 90. \int \frac{(1 - x) dx}{2x^2 - 3x + 1}. \quad 91. \int \frac{(2 - 5x) dx}{\sqrt{6x - x^2}}.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти следующие интегралы:

$$92. \int x \cos x dx. \quad 93. \int \ln(x^2 + 1) dx. \quad 94. \int \arccos x dx. \quad 95. \int x^2 \sin x dx.$$

$$96. \int x \operatorname{arctg} x dx. \quad 97. \int \frac{x dx}{\cos^2 x}. \quad 98. \int e^x \sin x dx. \quad 99. \int \cos(\ln x) dx.$$

$$100. \int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 5} \quad 101. \int \frac{x dx}{x^2 - 5x + 4} \quad 102. \int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$$

$$103. \int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}} \quad 104. \int \frac{(1+x)dx}{x^2+4x}$$

Ответы: 92. $x \sin x + \cos x + C$. 93. $x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctg x + C$.

94. $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$. 95. $(2-x^2) \cos x + 2x \sin x + C$.

96. $\frac{x^2+1}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + C$. 97. $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$. 98. $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$.

99. $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$. 100. $\frac{1}{\sqrt{6}} \arctg \frac{2(x-1)}{\sqrt{6}} + C$.

101. $\frac{1}{2} \ln|x^2 - 5x + 4| + \frac{5}{6} \ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right| + C$. 102. $-\sqrt{2-x-x^2} + \frac{7}{2} \arcsin \frac{2x+1}{3} + C$.

103. $\frac{2}{9} \sqrt{9x^2+6x+2} + \frac{13}{9} \ln(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}) + C$.

104. $\frac{1}{4} \ln[x(x+4)^3] + C$.

1.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

105. Найти интеграл: $\int \frac{x^2 + x + 4}{(x^2 + 4)^2} dx$.

Представить следующие функции в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

106. $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2 x(x^2+3x+5)}$. 107. $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 10}{(x^2+3)^2 (x-1)^2 (2x+7)^3}$.

Найти следующие интегралы:

108. $\int \frac{6x^2 + 2x - 2}{x(x-1)(x-2)} dx$. 109. $\int \frac{x^6 - 2x^5 + 6x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 1}{x^4 + 3x^2} dx$.

110. $\int \frac{x^5 + 4x^3 - x^2 + 3}{x^3 + x^2 + 3x} dx$. 111. $\int \frac{x^4 - 3x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx$. 112. $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$.

113. $\int \frac{x}{x^4 - 3x^2 + 2} dx$. 114. $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx$. 115. $\int \frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)} dx$.

$$116. \int \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx. \quad 117. \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx. \quad 118. \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

$$119. \int \frac{5x^2 - 12}{(x^2 - 6x + 13)^2} dx. \quad 120. \int \frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти следующие интегралы:

$$121. \int \frac{2x^2 - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx. \quad 122. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3(x-5)} dx.$$

$$123. \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx. \quad 124. \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2 + 1)}. \quad 125. \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx$$

$$126. \int \frac{2x}{(x+1)(x^2 + 1)^2} dx. \quad 127. \int \frac{x^2}{1-x^4} dx. \quad 128. \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx.$$

Ответы: 121. $-\frac{1}{6} \ln|x| - \frac{7}{2} \ln|x-2| + \frac{17}{3} \ln|x-3| + C.$

122. $\frac{3}{2(x-2)^2} + \ln|x-5| + C.$

123. $\frac{3}{2} \ln|x^2 - 2x + 5| - \ln|x-1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.$

124. $\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2(x+1)} + C.$

125. $\frac{1}{4} x + \ln|x| - \frac{7}{16} \ln|2x-1| - \frac{9}{16} \ln|2x+1| + C.$

126. $\frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + C. \quad 127. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$

128. $\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln(x^2 + 2x + 2) - 2 \operatorname{arctg}(x+1) + C.$

1.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Найти следующие интегралы:

129. $\int \cos^3 x \sin^4 x dx. \quad 130. \int \sin^5 3x dx. \quad 131. \int \sin^4 x dx.$

132. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx$. 133. $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$. 134. $\int \cos 4x \sin 2x dx$.
135. $\int \sin^2 x \cos 4x dx$. 136. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. 137. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.
138. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$. 139. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$. 140. $\int \frac{dx}{5-3 \cos x}$. 141. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.
142. $\int \frac{dx}{1-\sin^4 x}$. 143. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$. 144. $\int (1+\operatorname{ctg} x)^3 dx$.
145. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx$. 146. $\int \frac{\sin 2x}{1+4 \cos^2 x} dx$. 147. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$.
148. $\int \sin x \cos 4x \cos 6x dx$.

Задания для самостоятельной работы

Найти следующие интегралы:

149. $\int \sin^3 x dx$. 150. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} dx$. 151. $\int \cos^7 x dx$. 152. $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$.
153. $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$. 154. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$. 155. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.
156. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$. 157. $\int \sin^6 2x dx$. 158. $\int \cos x \cos^2 2x dx$.
159. $\int \sin 3x \cos 5x dx$. 160. $\int \sin 10x \sin 15x dx$.
161. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$. 162. $\int \frac{dx}{3 \cos x + 2}$. 163. $\int \frac{dx}{3-2 \sin x + \cos x}$.
164. $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 7 \cos^2 x}$. 165. $\int \frac{1+\operatorname{ctg} x}{1-\operatorname{ctg} x} dx$.

Ответы: 149. $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$. 150. $\frac{1}{7 \cos^7 x} - \frac{1}{5 \cos^5 x} + C$.

151. $\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C$. 152. $\frac{3x}{8} + \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{16} + C$.

153. $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$. 154. $-\operatorname{ctg} x - \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + C$.

155. $\frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$. 156. $-\frac{1}{3 \operatorname{tg}^3 x} - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + C$.

157. $\frac{5}{16} x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{96} \sin^3 4x + \frac{3}{128} \sin 8x + C$.

$$158. \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{1}{20} \sin 5x + C. \quad 159. -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

$$160. -\frac{\sin 25x}{50} + \frac{\sin 5x}{10} + C. \quad 161. \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 2x}{8} + C.$$

$$162. \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C. \quad 163. \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right) + C.$$

$$164. \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} x - \sqrt{7}}{2 \operatorname{tg} x + \sqrt{7}} \right| + C. \quad 165. \ln |\sin x - \cos x| + C.$$

1.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Найти следующие интегралы:

$$166. \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}. \quad 167. \int \frac{dx}{1+\sqrt{3x+5}}. \quad 168. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2-4}\sqrt{x}} dx.$$

$$169. \int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}} dx. \quad 170. \int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}} \frac{dx}{x^3}. \quad 171. \int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}.$$

$$172. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}. \quad 173. \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx. \quad 174. \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$175. \int x\sqrt{2x+2-x^2} dx. \quad 176. \int x^3 \sqrt{x^2-9} dx. \quad 177. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{25+x^2}}.$$

$$178. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{3-x^2}}. \quad 179. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-4}}. \quad 180. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти следующие интегралы:

$$181. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}. \quad 182. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}. \quad 183. \int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{x+1}}.$$

$$184. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x-3}}. \quad 185. \int \frac{dx}{\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}}. \quad 186. \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{(x-1)^3}.$$

$$187. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}. \quad 188. \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x+4})\sqrt{x}}. \quad 189. \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx.$$

$$190. \int \sqrt{(3-2x-x^2)^3} dx. \quad 191. \int \frac{\sqrt{x^2+5} dx}{x^2}. \quad 192. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx.$$

$$193. \int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3} dx}{x^6}.$$

Ответы: 181. $\ln|x| - \ln|1+4x+\sqrt{x^2+8x+1}| + C.$ 182. $-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-1}} + C.$

$$183. \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x}}{2} + C. \quad 184. \frac{3}{20} \sqrt[3]{(2x-3)^5} + \frac{9}{8} \sqrt[3]{(2x-3)^2} + C.$$

$$185. 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x}-1| + C.$$

$$186. \frac{3}{16} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4} - \frac{3}{28} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7} + C.$$

$$187. \ln \left| \frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{x+1}} \right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + C. \quad 188. 6\sqrt[6]{x} - 12 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C.$$

$$189. \ln \left| \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} \right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C.$$

$$190. 6 \arcsin \frac{x+1}{2} - \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{4} (x^3 + 3x^2 - 7x - 9) + C.$$

$$191. -\frac{\sqrt{x^2+5}}{x} + \ln(x + \sqrt{x^2+5}) + C. \quad 192. \frac{x}{2} \sqrt{x^2-4} + 2 \ln|x + \sqrt{x^2-4}| + C.$$

$$193. -\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5} + C.$$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

194. Используя определение, вычислить интеграл $\int_0^1 e^x dx.$

195. Определить знаки следующих интегралов, не вычисляя их:

а) $\int_0^1 (1-x^3) dx;$ б) $\int_{-2}^1 \sqrt[3]{x} dx.$

196. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из следующих интегралов больше:

а) $\int_0^1 x^2 dx$ или $\int_0^1 x^3 dx$; б) $\int_1^2 x^2 dx$ или $\int_1^2 x^3 dx$;
 в) $\int_1^2 \ln x dx$ или $\int_1^2 \ln^2 x dx$; г) $\int_3^4 \ln x dx$ или $\int_3^4 \ln^2 x dx$.

197. Оценить следующие интегралы:

а) $\int_0^1 x(1-x) dx$; б) $\int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2} dx$.

198. Найти производные $\Phi'(x)$ следующих функций:

а) $\Phi(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$, $\Phi'(2) = ?$ б) $\Phi(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin u}{u} du$;
 в) $\Phi(x) = \int_{x^2}^1 \ln z dz$; г) $\Phi(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \arcsin t dt$.

Используя формулу Ньютона–Лейбница, вычислить следующие интегралы:

199. $\int_0^3 2^x dx$. 200. $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[4]{(3-x)^5}}$. 201. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.
 202. $\int_1^2 \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$. 203. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$. 204. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx$.
 205. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3x+2}$. 206. $\int_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2} dx$. 207. $\int_0^2 \frac{x^2-1}{x^2+2} dx$.
 208. $\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2} dx$. 209. $\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)} dx$.

Задания для самостоятельной работы

210. Определить знак интеграла $\int_{-1}^1 x^3 e^x dx$, не вычисляя его.

211. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из следующих интегралов больше:

$$\text{а) } \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \text{ или } \int_1^2 \frac{dx}{x}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \text{ или } \int_0^1 \frac{dx}{x^3}.$$

212. Найти производные $\Phi'(x)$ следующих функций:

$$\text{а) } \Phi(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \sin(t^2) dt \quad \text{б) } \Phi(x) = \int_{x^2}^x \frac{du}{\ln u}.$$

213. Найти точку экстремума и точки перегиба графика функции

$$y = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt.$$

Используя формулу Ньютона–Лейбница, вычислить следующие интегралы:

$$214. \int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx. \quad 215. \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{dx}{\cos^2 x}. \quad 216. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \varphi d\varphi.$$

$$217. \int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}. \quad 218. \int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3 - x^2} dx. \quad 219. \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx.$$

$$220. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \alpha d\alpha. \quad 221. \int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1} dx.$$

Ответы: 210. Плюс. 211. а) Второй; б) Второй. 212. а) $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x^2}$;

б) $\frac{x^2 - x}{\ln x}$. 213. $y_{\min} = y(1) = -\frac{17}{22}$, точки перегиба $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ и $\left(\frac{4}{3}, -\frac{112}{81}\right)$.

214. $\frac{45}{4}$. 215. 1. 216. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$. 217. $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{4}{7}$. 218. $2 \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{2}$.

219. $\frac{1}{2}(e - \sqrt[4]{e})$. 220. $\frac{2}{3}$. 221. $2 - \ln 5$.

2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ПО ЧАСТЯМ И ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Вычислить следующие интегралы методом интегрирования по частям или заменой переменной:

$$222. \int_0^1 x^2 e^{-x} dx. \quad 223. \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx. \quad 224. \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$225. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx. \quad 226. \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx. \quad 227. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{x dx}{\sin^2 x}. \quad 228. \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{4}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$229. \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx. \quad 230. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}. \quad 231. \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}} dx.$$

$$232. \int_{\frac{29}{3}}^{\frac{29}{4}} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{4+\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx. \quad 233. \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx. \quad 234. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4 x dx.$$

$$235. \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx. \quad 236. \int_{\frac{2}{2}}^{\frac{4}{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить следующие интегралы методом интегрирования по частям или заменой переменной:

$$237. \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^3}}. \quad 238. \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}. \quad 239. \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+1}}.$$

$$240. \int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx. \quad 241. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}. \quad 242. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-3) \cos 2x dx.$$

$$243. \int_1^e \ln^2 x dx. \quad 244. \int_0^{\frac{4}{4}} e^{3x} \sin 4x dx. \quad 245. \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx.$$

Ответы: 237. $\frac{\pi}{6}$. 238. $\ln \frac{7+2\sqrt{7}}{9}$. 239. $\ln \frac{\sqrt{5}+3}{2}$. 240. $\frac{81\pi}{16}$.
 241. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 242. -1 . 243. $e-2$. 244. $\frac{4}{25} \left(e^{\frac{3\pi}{4}} + 1 \right)$. 245. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

2.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

Найти площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

246. $y = 4 - x^2$, $y = 0$. 247. $y = 2x^2$, $y = x^2$, $x = 1$.

248. $xy = 8$, $y = 2x$, $y = 0$, $x = 4$. 249. $xy = 8$, $y = 2x$, $x = 4$.

250. $y = 2x - x^2$, $y = x$. 251. $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$.

252. Найти площадь фигуры, ограниченной циклоидой $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$,

осью Ox , прямыми $x = 0$ и $x = 2\pi$.

253. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}$, прямыми $x = 0$ и $x = 2$.

254. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $\begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t \end{cases}$, осью Ox и прямой $y = x$.

255. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $\rho = 2a \sin \varphi$ и лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Примечание: Здесь и далее ρ – полярный радиус, φ – полярный угол точки.

256. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $x^2 - 4x + y^2 = 0$ и прямыми $y = \pm\sqrt{3}$.

257. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$.

258. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 5(1 + \cos \varphi)$.

259. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = 3 \cos 2\varphi$.

260. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = 2 \sin 3\varphi$.

Задания для самостоятельной работы

261. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и $y = \frac{x^3}{3}$.

262. Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{3}{x}$, параболой $y = 3\sqrt{x}$ и прямой $x = 9$.

263. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $x = 8 - y^2$ и прямой $x = -2y$.

264. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$.

265. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ и осью Ox .

266. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \sin \varphi)$.

267. Найти площадь одного лепестка кривой $\rho = a \sin 2\varphi$.

268. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $\rho = \sqrt{3} \sin \varphi$ и кардиоидой $\rho = 1 - \cos \varphi$ (вне кардиоиды).

Ответы: 261. $\frac{9}{4}$. 262. $52 - 6 \ln 3$. 263. 36. 264. $\frac{3}{8} \pi a^2$. 265. $3 \pi a^2$.

266. $\frac{3}{2} \pi a^2$. 267. $\frac{\pi a^2}{8}$. 268. $\frac{3}{4} \sqrt{3}$.

2.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

269. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $x = y^2$.

270. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $xy = 6$, $y = 6$, $x = 3$.

271. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 0$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

272. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy астроида

$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$$

273. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной арки циклоиды $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$.

274. Найти объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси кривой $\rho = 2 - \cos \varphi$.

275. Найти объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси лемнискаты Бернулли $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

276. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 1$, $x = 0$.

Задания для самостоятельной работы

277. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2$ и $2x + 2y - 3 = 0$.

278. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$ и $y = 2$.

279. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy эллипса

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases}$$

280. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox астроида

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, \text{ расположенной в первой четверти.}$$

281. Найти объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси части кривой $\rho = 3 - \sin \varphi$, расположенной над полярной осью.

282. Найти объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси кривой $\rho = a \sin \varphi$.

Ответы: 277. $\frac{272}{15} \pi$. 278. $\frac{64}{3} \pi$. 279. $\frac{4}{3} \pi a^2 b$. 280. $\frac{16}{105} \pi a^3$.

281. $44\pi - \frac{37}{4} \pi^2$. 282. $\frac{\pi^2 a^3}{4}$.

2.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИН ДУГ

283. Найти длину дуги полукубической параболы $8y^2 = x^3$, где $0 \leq x \leq 16$.

284. Найти длину дуги цепной линии $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$, где $-2 \leq x \leq 2$.

285. Найти длину одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

286. Найти длину линии $\begin{cases} x = at^2, \\ y = a\left(t + \frac{t^3}{3}\right), \\ z = a\left(t - \frac{t^3}{3}\right), \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \sqrt{3})$.

287. Дуга астроиды $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}$ отсекается прямой $y = \sqrt{2}$ и расположена

выше неё. Найти длину этой дуги.

288. Найти длину той части линии $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ z = t/\pi, \end{cases}$ которая заключена между

плоскостями $z = 0$ и $z = 2$.

289. Найти длину кривой $\rho = 3 \sin \varphi$.

290. Найти длину дуги кардиоиды $\rho = 7(1 + \cos \varphi)$, заключенной между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Задания для самостоятельной работы

291. Найти длину дуги параболы $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 1$.

292. Найти длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ между точками ее пересечения с осью Ox .

293. Найти длину эвольвенты окружности $\begin{cases} x = R(\cos t + t \sin t), \\ y = R(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ от $t = 0$ до

$t = \pi$.

294. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \text{ между плоскостями } z = 0 \text{ и} \\ z = a. \end{cases}$

295. Найти длину дуги спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ от начала до конца первого завитка.

296. Найти длину дуги кардиоиды $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$, находящейся внутри окружности $\rho = 1$.

Ответы: 291. $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5})$. 292. $2\sqrt{3}$. 293. $\frac{\pi^2 R}{2}$. 294. $a\sqrt{3}$.

295. $\pi a\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$. 296. $8(2 - \sqrt{3})$.

2.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

297. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox линии $4y = x^3$ от точки $(0, 0)$ до $(2, 2)$.

298. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy дуги параболы $x = \sqrt{y + 5}$ от вершины до точки пересечения с осью Ox .

299. Найти площадь поверхности, образованной вращением окружности $\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t \end{cases}$ вокруг оси Ox .

300. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy дуги астроиды $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$, расположенной выше прямой $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

301. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ вокруг оси Ox .

302. Найти площадь поверхности, образованной вращением окружности $\rho = 2 \cos \varphi$ вокруг полярной оси.

303. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\rho = 3(1 - \cos \varphi)$ вокруг полярной оси.

304. Найти площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты Бернулли $\rho = 5\sqrt{\sin 2\varphi}$ вокруг полярной оси.

Задания для самостоятельной работы

305. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox параболы $y^2 = 4x$ от вершины до точки с абсциссой $x = 3$.

306. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги цепной линии $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$, где $-2 \leq x \leq 2$.

307. Найти площадь поверхности, образованной вращением астроида $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ вокруг оси Ox .

308. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ вокруг оси Oy .

309. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ вокруг полярной оси.

310. Найти площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты Бернулли $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Ответы: 305. $\frac{56}{3}\pi$. 306. $2\pi(4 + e^2 - e^{-2})$. 307. $\frac{12}{5}\pi a^2$.

308. $\frac{32}{3}\pi a^2(3\pi - 4)$. 309. $\frac{32}{5}\pi a^2$. 310. $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$.

2.7. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Вычислить следующие несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\begin{array}{lll}
 311. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} & 312. \int_{-\infty}^0 e^{ax} dx, \quad (a > 0) & 313. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \\
 314. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^4} & 315. \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx & 316. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad 317. \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}
 \end{array}$$

$$318. \int_1^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} \quad 319. \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x} \quad 320. \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} \quad 321. \int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx.$$

Исследовать следующие интегралы на сходимость:

$$322. \int_1^{+\infty} \frac{x^3 + \arctg e^x}{x^4} dx \quad 323. \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^3} dx \quad 324. \int_1^{+\infty} \frac{3 + \sin x}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$325. \int_{-0.5}^{-0.25} \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}} \quad 326. \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} \quad 327. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arccos x}}$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить следующие несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$328. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} \quad 329. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} \quad 330. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}$$

$$331. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} \quad 332. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx \quad 333. \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt[5]{(x^2-1)^4}}$$

$$334. \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}-8} \quad 335. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Исследовать следующие интегралы на сходимость:

$$336. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{3+2x^2+5x^4} \quad 337. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}} \quad 338. \int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx.$$

$$339. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad 340. \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt[3]{(4-x^2)^5}}$$

Ответы: 328. $\frac{1}{2}$. 329. Расходится. 330. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 331. Расходится. 332. $\frac{1}{2}$.

333. $\frac{5}{2}(\sqrt[5]{3}+1)$. 334. π . 335. $\frac{16}{3}$. 336. Сходится. 337. Сходится.

338. Расходится. 339. Сходится. 340. Расходится.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

1

341. Показать, что при любых значениях постоянной C , функция $y = C e^x$ является решением уравнения $x^2 y' + y = 0$.

Составить дифференциальные уравнения первого порядка, для которых следующие функции являются решениями:

342. $y = C x^2$. 343. $y = \frac{1}{x+a}$.

Найти общее решение или общий интеграл следующих уравнений:

344. $\sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1-x^2} dy = 0$. 345. $x + xy + y'(y + xy) = 0$.

346. $y' \operatorname{tg} x - y = 1$.

Для следующих уравнений решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую:

347. $xy' + y = 0$. $y(1) = 3$. 348. $yy' + x = 0$, $y(3) = 4$.

349. $(1 + y^2) dx - xy dy = 0$. $y(1) = 0$.

Решить следующие уравнения:

350. $(e^x + 3) dy + ye^x dx = 0$, $y(0) = 1$. 351. $x^2 dy + \sqrt{4 - y^2} \ln x dx = 0$.

352. $y' = \frac{(xy^2 + 2xy)e^{-x^2}}{y+1}$. 353. $y' \sin 2x + y \ln y = 0$.

354. $e^y dx + \cos 2x dx = 0$. 355. $x^2 dx + yx^3 dy = 4y dy - y^2 x^2 dx$.

356. $y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}$. 357. $y - xy' = \frac{1}{2}(1 + x^2 y')$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

Задания для самостоятельной работы

358. Показать, что функция $y = x \left(\int_0^x \frac{1}{x} e^x dx + C \right)$ определяет общее решение

дифференциального уравнения $xy' - y = xe^x$.

359. Составить дифференциальное уравнение семейства парабол $y = x^2 + 2ax$.

Решить следующие уравнения:

$$360. y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2. \quad 361. y' = e^{x+y}.$$

$$362. xdx + dy + xy^2 dx + x^2 dy = 0. \quad 363. ye^{2x} dx - (1 + e^{2x}) dy = 0.$$

$$364. (1 + y^2) dx - xy dy = 0, \quad y(1) = 0. \quad 365. y' \operatorname{tg} x = y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Ответы: 359. $x^2 + y = xy'$. 360. $\operatorname{arctg} y - \arcsin x = C, \quad x \neq \pm 1$.

361. $e^x + e^{-y} = C$. 362. $\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \operatorname{arctg} y = C$. 363. $y = C\sqrt{1 + e^{2x}}$.

364. $x^2 - y^2 = 1$. 365. $y = \sin x$.

3.2. ОДНОРОДНЫЕ И ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решить следующие дифференциальные уравнения:

$$366. yy' = 2y - x. \quad 367. \frac{ds}{dt} = \frac{s}{t} - \frac{t}{s}. \quad 368. x^2 y' = y^2 - 2x^2.$$

$$369. ydx + (y - x)dy = 0. \quad 370. xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$371. (xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x, \quad y|_{x=1} = 0. \quad 372. xy' = y \ln \frac{y}{x}, \quad y(1) = e.$$

$$373. xy' - 2y = 2x^4, \quad y(1) = 2. \quad 374. y' = xe^{-x^2} - 2xy.$$

$$375. (x + y^2) dy = y dx. \quad 376. y' = \frac{y}{2x - y^2}. \quad 377. (2e^y - x) y' = 1.$$

$$378. y' - y \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} = 0, \quad y(0) = 0.$$

Задания для самостоятельной работы

Решить следующие уравнения:

$$379. y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}. \quad 380. y' = \frac{x - y}{x + y}.$$

$$381. (x^2 + xy) y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2. \quad 382. (x - y) dx + x dy = 0.$$

$$383. (\sqrt{xy} - x) dy + y dx = 0, \quad y(1) = 1. \quad 384. y' = y \operatorname{ctg} x + \sin x.$$

$$385. (1 + x^2) y' = 2xy + (1 + x^2)^2. \quad 386. y' + 2y = e^{3x}.$$

$$387. y' = 2y + e^x - x, \quad y(0) = \frac{1}{4}. \quad 388. xy' = x - \frac{y}{x+1}, \quad y|_{x=1} = 0.$$

$$389. y' = \frac{1}{2x - e^{2y}}.$$

Ответы: 379. $y = 2x \operatorname{arctg} Cx$. 380. $x^2 - 2xy - y^2 = C$.

381. $\arcsin \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - y^2} - \ln|x| = C$. 382. $xe^{y/x} = C$. 383. $\ln|y| + 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 2$.

384. $y = (x + C) \sin x$. 385. $y = (x + C)(1 + x^2)$. 386. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x}$.

387. $y = e^{2x} - e^x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. 388. $y = \frac{x}{x+1}(x-1 + \ln|x|)$. 389. $x = (C - y)e^{2y}$.

3.3. УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Решить следующие дифференциальные уравнения:

390. $y' + 2xy = 2x^3 y^3$. 391. $x dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy$.

392. $y' + y = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{y}$, $y(0) = \frac{9}{4}$. 393. $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$.

394. $(x \cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y dy = 0$. 395. $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)dy = 0$.

396. $\left(\frac{y^2}{x} + 1 \right) dx + (2y \ln x - 2y) dy = 0$, $y(1) = 2$.

Определить тип следующих дифференциальных уравнений и решить их:

397. $y' = \frac{(1+y)^2}{x(1+y) - x^2}$. 398. $y \sin x + y' \cos x = 1$. 399. $y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$.

400. $x^2 dy - x^2 dx - xy dx = y^2 dx$. 401. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{x \cos^2 x}$.

Задания для самостоятельной работы

Решить следующие уравнения:

402. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \sqrt{y}$. 403. $y' = y \operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x}$.

404. $3 dy = (1 - 3y^3) y \sin x dx$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. 405. $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$.

406. $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$.

407. $(2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0$. $y(0) = 1$.

Ответы: 402. $y = e^{-2x^2} \left(C + \frac{x^2}{2} \right)^2$. 403. $y = \frac{\sin x}{\sqrt{2 \cos x + C}}$.

404. $y^3 = \frac{1}{3 - 2e^{\cos x}}$. 405. $x^2 + xy + y^2 = C$. 406. $x^2 \cos^2 y + y^2 = C$.

407. $x^2 + y + e^{xy} = 2$.

3.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПониЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Решить следующие дифференциальные уравнения:

408. $y''' = \sin x - \cos x$. 409. $y'' = \frac{2}{x^2}$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

410. $xy'' = y'$. 411. $y'' = \frac{y'}{x} + x$. 412. $1 + (y')^2 = 2yy''$.

413. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$. 414. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

415. $y'' \cdot y' = y^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$. 416. $y''' = y''$.

417. $y' \cdot y''' = 3(y'')^2$. 418. $y y'' - (y')^2 = y^2 y'$.

419. $xy^{(4)} = y'''$. $y(1) = \frac{25}{4}$, $y'(1) = \frac{7}{6}$, $y''(1) = \frac{1}{2}$, $y'''(1) = 1$.

420. $2y'' = 3y^2$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$.

Задания для самостоятельной работы

Решить следующие уравнения:

421. $y'' = \frac{1}{1+x^2}$. 422. $y'' + 2x(y')^2 = 0$. 423. $y^3 y'' + 1 = 0$.

424. $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$. 425. $(y-1)y'' = 2(y')^2$.

426. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$.

427. $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Ответы: 421. $y = (C_1 + \operatorname{arctg} x)x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_2$. 422. $y = \frac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \frac{x}{C_1} + C_2$.

423. $\frac{1}{C_1} \sqrt{C_1 y^2 + 1} = C_2 \pm x$. 424. $\operatorname{ctg} y = C_1 x + C_2$. 425. $y = 1 + \frac{1}{C_1 x + C_2}$.

426. $y = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \frac{16}{5}$. 427. $y = -\ln|x-1|$.

3.5. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Найти решения следующих дифференциальных уравнений:

428. $y'' - 6y' + 5y = 0$. 429. $y'' - 2y' + y = 0$. 430. $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

431. $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$.

432. $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 15$. 433. $y'' - 25y = 0$.

434. $y''' + 9y' = 0$. 435. $8y''' - y = 0$. 436. $y^{IV} = 8y'' - 16y$.

437. $y^{IV} - y = 0$. $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

438. $y^{VI} + 2y^{IV} + y^{II} = 0$. 439. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

440. $y''' - 13y'' - 12y' = 0$. 441. $y^{IV} - 8y'' - 9y = 0$. 442. $y^{VI} - 16y^{IV} = 0$.

443. Найти общее решение уравнения $xy'' + 2y' + xy = 0$, если функция $y = \frac{\sin x}{x}$ есть его частное решение.

444. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 5y = 0$, если функция $y = e^x$ есть его частное решение.

Задания для самостоятельной работы

Найти решения следующих дифференциальных уравнений:

445. $y'' - 6y' + 9y = 0$. 446. $3y'' - 2y' - 8y = 0$. 447. $4y'' + 4y' + y = 0$.

448. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$. 449. $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$.

450. $y^{IV} - y'' = 0$. 451. $y^{IV} + 25y'' = 0$. 452. $y''' + 27y = 0$.

453. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$. 454. $8y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$.

455. $y'' - 2y' + y = 0$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -2$.

Ответы: 445. $y = e^{3x}(C_1 + C_2x)$. 446. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-\frac{4}{3}x}$.

447. $y = e^{-\frac{x}{2}}(C_1 + C_2x)$. 448. $y = C_1e^x + e^{2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)$.

449. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos \sqrt{3}x + C_4 \sin \sqrt{3}x$.

450. $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x}$.

451. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4 \cos 5x + C_5 \sin 5x$.

$$452. y = C_1 e^{-3x} + e^{2x} \left(C_2 \cos \frac{3\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{3\sqrt{3}}{2} x \right).$$

$$453. y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2). \quad 454. y = e^x. \quad 455. y = (7 - 3x)e^{x-2}.$$

3.6. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Найти решения следующих дифференциальных уравнений:

$$456. y'' - 4y' + 3y = 5e^{2x}.$$

$$457. y'' + y = 3 \sin 2x - 6 \cos 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$458. y''' - 6y'' + 9y' = 9x^2 + 1. \quad 459. y'' + 4y = x e^x.$$

$$460. y''' + 4y' - 5y + 2 = 0. \quad 461. y''' - 8y = (4x - 3)e^{2x}.$$

$$462. y'' - 4y' + 13y = \sin 2x. \quad 463. y^{IV} - 16y'' = 2x - 3 \cos x + 5.$$

$$464. y'' - 3y' + 2y = 3e^{3x} - 4e^{-2x}. \quad 465. y''' + 2y'' + 3 = 5 \sin 2x - 4 \cos 2x.$$

$$466. y'' + 2y' - 3y = e^x \cos x. \quad 467. y'' - 3y' + 2y = x - 2e^{2x} + 1.$$

$$468. y'' + y = \sin x - 2e^{-x}. \quad 469. y^{IV} + y''' = x^2 - 1.$$

$$470. y'' - y' = 3(2 - x^2), \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$$

$$471. y'' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10).$$

Подобрать вид частного решения, не находя значений неизвестных коэффициентов:

$$472. y^{IV} + 8y'' + 16y = 3x \sin 2x + (3 - x^2)e^{2x}.$$

$$473. y''' + 4y'' = 2 - x \sin 3x + \cos 3x.$$

$$474. y''' + 8y + 3x^2 = e^x(2x + 7) \cos \sqrt{3} x.$$

Найти решение следующих дифференциальных уравнений, используя метод вариации произвольных постоянных:

$$475. y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}. \quad 476. y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

$$477. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}. \quad 478. y'' + y' = \frac{e^x}{2 + e^x}.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти решения следующих дифференциальных уравнений:

$$479. y'' - y' = e^{-x}. \quad 480. y'' - 5y' + 6y = 13 \sin 3x.$$

$$481. y^{IV} + y'' - x = x^2. \quad 482. y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x).$$

$$483. y'' - 3y' + 2y = 2e^x - e^{-2x}.$$

Подобрать вид частного решения, не находя значений неизвестных коэффициентов:

$$484. y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(2x \cos 2x - 7 \sin 2x).$$

$$485. y''' + 5y'' - 3 = 4(x-2)\sin 5x + 7x.$$

$$486. y^{IV} + 8y'' + 16y = x^2 e^{2x} - 5 \cos 2x.$$

Найти решение следующих дифференциальных уравнений, используя метод вариации произвольных постоянных:

$$487. y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}. \quad 488. y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{1+x^2}. \quad 489. y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x.$$

Ответы: 479. $y = C_1 e^x + \left(C_2 - \frac{x}{2}\right) e^{-x}.$

$$480. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(5 \cos 3x - \sin 3x).$$

$$481. y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{x^2}{12}(x^2 + 2x - 12).$$

$$482. y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}.$$

$$483. y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2x e^x - \frac{1}{12} e^{-2x}.$$

$$484. \bar{y} = e^{-x} x ((Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x).$$

$$485. \bar{y} = x^2 (Ax + B) + (Cx + D) \cos 5x + (Ex + F) \sin 5x.$$

$$486. \bar{y} = (Ax^2 + Bx + C) e^{2x} + x^2 (D \cos 2x + E \sin 2x).$$

$$487. y = C_1 e^x + C_2 + (e^x + 1) \ln(e^{-x} + 1).$$

$$488. y = \left(C_1 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right) e^{-2x} + (C_2 + \operatorname{arctg} x) x e^{-2x}.$$

$$489. y = \frac{1}{4} \left[\left(\sin 2x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C_1 \right) \cos 2x + (C_2 - \cos 2x) \sin 2x \right].$$

3.7. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ НА ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определить типы следующих дифференциальных уравнений и решить их соответствующими способами:

490. $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$. 491. $(1-x)(y' + y) = e^{-x}$, $y(2) = 0$.

492. $(x + \ln y)dx + \left(1 + \frac{x}{y} + \sin y\right)dy = 0$. 493. $(2x - y^2)y' = 2y$.

494. $xy' \cos y + \sin y = 0$. 495. $y' - y \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}y^4 \sin x$, $y(0) = 1$.

496. $yy'' = (y')^2$. 497. $y''' = 2 \cos x$.

498. $(y''x - y')y' = x^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$. 499. $xy^{VI} = y^V$.

500. $y''' - y' = 3(2 - x^2)$, $y(0) = y'(0) = 1$.

501. $y'' + 9y = \frac{2}{\cos 3x}$. 502. $27y''' - y = 2e^{\frac{x}{3}} + 5 \sin 2x - \cos x$.

503. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$. 504. $y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos x$.

Задания для самостоятельной работы

Определить типы следующих дифференциальных уравнений и решить их соответствующими способами:

505. $(x\sqrt{x^2 + y^2} + 1)dx + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)dy = 0$. 506. $y = x(y' - \sqrt[3]{e^y})$.

507. $y^2 dx - (2xy - 3)dy = 0$, $y(1) = 1$. 508. $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0$.

509. $\cos y dx = (x + 2 \cos y) \sin y dy$.

510. $y'' \sin x = (1 + y') \cos x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

511. $2y(y')^3 + y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$. 512. $y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}$.

513. $y''' - 3y' - 2y - \sin x = 2 \cos x$.

514. $y''' - y'' - y' + y = 3x + e^x(24x - 4)$.

Ответы: 505. $x + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3} + \frac{y^2}{2} = C$. 506. $e^{-\frac{y}{x}} + \ln|Cx| = 0$.

507. $xy = 1$. 508. $2\sqrt{y} + \ln|y| - 2\sqrt{x} = C$. 509. $2x \cos y = C - \cos 2y$.

510. $2(x + y) = \pi$. 511. $y^3 - y = 3x$. 512. $y = (C_1 - x)e^{-x} + (\ln|x| + C_2)xe^{-x}$.

$$513. y = e^{-x}(C_1 + C_2x) + C_3e^{2x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

$$514. y = e^x(C_1 + C_2x) + C_3e^{-x} + e^x(2x^3 - 4x^2) + 3(x+1).$$

3.8. РЕШЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИСКЛЮЧЕНИЙ

Решить следующие системы дифференциальных уравнений, используя метод исключения переменных:

$$515. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 + 4y_2. \end{cases} \quad 516. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -2y_1 + 4y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = 5.$$

$$517. \begin{cases} \dot{x} = 2y - 5x + e^t, \\ y = x - 6y. \end{cases} \quad 518. \begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 + y_3, \\ y_3' = 4y_1 - y_2 + 4y_3. \end{cases}$$

$$519. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y - 2z + 2 - t, \\ \frac{dy}{dt} = 1 - x, \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z + 1 - t. \end{cases}$$

$$520. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = z + y - x, \\ \frac{dy}{dt} = z + x - y, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = z(0) = 1. \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z, \end{cases}$$

$$521. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 3y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = 4y_1 - y_2 + 4y_3. \end{cases} \quad 522. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 3y_1 + 12y_2 - 4y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 - 3y_2 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_1 - 12y_2 + 6y_3. \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы

Решить следующие системы дифференциальных уравнений, используя метод исключения переменных:

$$523. \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases} \quad 524. \begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + z, \quad x(0) = y(0) = 2, \quad z(0) = -1. \\ \dot{z} = x + y, \end{cases}$$

$$525. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + t, \\ \dot{y} = 3x - 4y. \end{cases} \quad 526. \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y + e^t. \end{cases}$$

Ответы: 523.
$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \\ y = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}. \end{cases}$$

$$524. \begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}, \\ y = C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \\ z = C_1 e^{2t} - (C_2 + C_3) e^{-t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^{2t} + e^{-t}, \\ y = e^{2t} + e^{-t}, \\ z = e^{2t} - 2e^{-t}. \end{cases}$$

$$525. \begin{cases} x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - \frac{2}{3}t - \frac{5}{18}, \\ y = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{-3t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{12}. \end{cases} \quad 526. \begin{cases} x = (C_1 \cos t + C_2 \sin t - 1)e^t, \\ y = (C_1 \sin t - C_2 \cos t)e^t. \end{cases}$$

3.9. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Решить следующие системы дифференциальных уравнений, используя матричный метод:

$$527. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 + 4y_2. \end{cases} \quad 528. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases} \quad 529. \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

$$530. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 3y_1 + 12y_2 - 4y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 - 3y_2 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_1 - 12y_2 + 6y_3. \end{cases} \quad 531. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 3y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = 4y_1 - y_2 + 4y_3. \end{cases}$$

Найти экстремали следующих функционалов:

$$532. I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} (y')^2 + 3yy' + \frac{y^2}{2} + xy \right) dx, \quad y(0)=1, \quad y(1)=0.$$

$$533. I = \int_0^1 \left((y')^2 + 10yy' + 4y^2 + 2e^x y \right) dx, \quad y(0)=0, \quad y(1)=1.$$

$$534. I = \int_0^1 \left(xy' + (y')^2 \right) dx, \quad y(0)=2, \quad y(1)=1.$$

$$535. I = \int_0^1 y(y')^3 dx, \quad y(0)=0, \quad y(1)=1.$$

Задания для самостоятельной работы

Решить следующие системы дифференциальных уравнений, используя матричный метод:

$$536. \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases} \quad 537. \begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -x + 5y, \end{cases} \quad x(0)=3, \quad y(0)=1.$$

Найти экстремали следующих функционалов:

$$538. I = \int_{-1}^0 \left(12xy - (y')^2 \right) dx, \quad y(-1)=1, \quad y(0)=0.$$

$$539. I = \int_1^2 \left((y')^2 + 2yy' + y^2 \right) dx, \quad y(1)=1, \quad y(2)=0.$$

Ответы: 536. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \\ y = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}. \end{cases}$ 537. $\begin{cases} x = 3C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}, \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3e^{2t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$

538. $y = -x^3$. 539. $y = \frac{e^{2-x} - e^{x-2}}{e - e^{-1}}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа – М.: Наука, 1985. – 384 с.
2. Гурский Е.И., Домашов В.П., Кравнов В.К., Сильванович А.П. Руководство к решению задач по высшей математике: В 2 ч. – Минск: Вышэйш. шк., 1989. – 749 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и образование, 2003. – 304 с.
4. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по высшей математике -- М.: Высш. шк., 1966. – 460 с.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для вузов: В 2 т. – М.: Интеграл-Пресс, 2004. – 970 с.
6. Сборник задач по математике для вузов: Линейная алгебра и основы математического анализа / В.А. Болгов и др.; Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича – М.: Наука, 1981. – 464 с.
7. Сборник задач по математике для вузов: Специальные разделы математического анализа / В.А. Болгов и др.; Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича – М.: Наука, 1981. – 366 с.

Учебно издание

*Денискина Екатерина Александровна,
Файницкий Юрий Львович*

ИНТЕГРАЛЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические разработки для практических занятий

Технический редактор Ф. В. Гречников
Редакторская обработка М. Г. Бокарева, А. А. Гнутова
Корректорская обработка С. А. Нечитайло
Компьютерная верстка Е. А. Денискина
Доверстка Н. А. Доценко, А. А. Гнутова
Донабор А. А. Гнутова

Подписано в печать 21.11.2006 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,09. Усл. кр.-отг. 2,21. Печ. л. 2,25.
Тираж 50 экз. Заказ **158**. ИП – 22/2006

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.