

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
И ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
САМАРСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания

САМАРА 1992

Составители: В. Я. Логунов, И. Г. Рыбакова,  
В. П. Сеницын, Ю. Н. Храмова

УДК 517.2(075)

Интегральное исчисление функций одной переменной: Метод, указания /Самар. авиац. ин-т; Сост.: В. Я. Логунов, И. Г. Рыбакова, В. П. Сеницын, Ю. Н. Храмова. Самара, 1992. 28 с.

По каждой изучаемой теме дан подбор примеров и задач, которые предназначены для проведения контролируемой самостоятельной работы студентов и для выдачи им отчетных индивидуальных домашних заданий по циклам. Для работы с сильными студентами в каждую тему включено по пять задач повышенной трудности.

Предназначены для студентов механических факультетов. Составлены на кафедре высшей математики.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского ордена Трудового Красного Знамени авиационного института имени академика С. П. Королёва

Рецензент канд. техн. наук Л. Н. Прокофьев

## КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными в параметрической форме:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y'(t) x'(t) dt.$$

Пределы интегрирования  $t_1$  и  $t_2$  должны быть выбраны так, чтобы при обходе кривой площадь, ограниченная данной кривой, оставалась справа. Площадь фигуры, образованной кривой, описанной в полярных координатах, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

При этом нужно следить за тем, чтобы при обходе кривой угол  $\varphi$  изменялся в сторону увеличения. Длина дуги кривой, заданной в параметрической форме, вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt,$$

где  $t_1 < t_2$ .

Работа переменной силы:

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Моменты инерции площади  $S$  плоской фигуры относительно осей  $ox$  и  $oy$ :  $J_{ox} = \int_S y^2 ds$ ,  $J_{oy} = \int_S x^2 ds$ .

Статические моменты инерции плоской кривой  $l$  относительно осей  $ox$  и  $oy$ :  $M_{ox} = \int_S y dl$ ,  $M_{oy} = \int_S x dl$ .

## НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

З а д а н и е № I. Непосредственное интегрирование

Найти интегралы:

- |                                             |                                                  |
|---------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1. $\int x e^{-x^2} dx$ .                   | 13. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{5 - \sin 2x}}$ |
| 2. $\int \frac{dx}{x(3+4 \ln x)}$ .         | 14. $\int x(\sqrt{1+x^2})^5 dx$ .                |
| 3. $\int \frac{\sin x dx}{4 + \cos^2 x}$ .  | 15. $\int e^{-x} \cos e^{-x} dx$ .               |
| 4. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-3e^{2x}}}$ . | 16. $\int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$ .           |
| 5. $\int \frac{x dx}{\sqrt{3+x^2}}$ .       | 17. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4x^{12}-5}}$ .     |
| 6. $\int \frac{e^{2x} dx}{7+e^{2x}}$ .      | 18. $\int \frac{\sqrt{\arctg x} dx}{(1+x^2)}$ .  |
| 7. $\int \sin^3 x \cos x dx$ .              | 19. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}$ .        |
| 8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{6+3 \ln x}}$ .    | 20. $\int \frac{\arcsin^3 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ . |
| 9. $\int \frac{e^{-x} dx}{(1-e^{-x})^5}$ .  | 21. $\int \frac{x^2 dx}{5x^3-4}$ .               |
| 10. $\int \frac{dx}{x \ln x}$ .             | 22. $\int x \sin(3x^2+4) dx$ .                   |
| 11. $\int \frac{\sin x dx}{(5-\cos x)^2}$ . | 23. $\int \frac{\cos \ln x}{x} dx$ .             |
| 12. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$ .    | 24. $\int x^3 \sqrt{2x^2+3} dx$ .                |

## КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными в параметрической форме:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt.$$

Пределы интегрирования  $t_1$  и  $t_2$  должны быть выбраны так, чтобы при обходе кривой площадь, ограниченная данной кривой, оставалась справа. Площадь фигуры, образованной кривой, описанной в полярных координатах, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

При этом нужно следить за тем, чтобы при обходе кривой угол  $\varphi$  изменялся в сторону увеличения. Длина дуги кривой, заданной в параметрической форме, вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt,$$

где  $t_1 < t_2$ .

Работа переменной силы:

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Моменты инерции площади  $S$  плоской фигуры относительно осей  $ox$  и  $oy$ :  $J_{ox} = \int_S y^2 ds$ ,  $J_{oy} = \int_S x^2 ds$ .

Статические моменты инерции плоской кривой  $L$  относительно осей  $ox$  и  $oy$ :  $M_{ox} = \int_L y dl$ ,  $M_{oy} = \int_L x dl$ .

## НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

З а д а н и е \* I. Непосредственное интегрирование

Найти интегралы:

- |                                             |                                                  |
|---------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1. $\int x e^{-x^2} dx$ .                   | 13. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{5-\sin 2x}}$   |
| 2. $\int \frac{dx}{x(3+4\ln x)}$ .          | 14. $\int x(\sqrt{1+x^2})^5 dx$ .                |
| 3. $\int \frac{\sin x dx}{4+\cos^2 x}$ .    | 15. $\int e^{-x} \cos e^{-x} dx$ .               |
| 4. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-3e^{2x}}}$ . | 16. $\int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$ .           |
| 5. $\int \frac{x dx}{\sqrt{3+x^2}}$ .       | 17. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4x^{10}-3}}$ .     |
| 6. $\int \frac{e^x dx}{7+e^{2x}}$ .         | 18. $\int \frac{\sqrt{\arctg x} dx}{(1+x^2)}$ .  |
| 7. $\int \sin^3 x \cos x dx$ .              | 19. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}$ .        |
| 8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{8+3\ln x}}$ .     | 20. $\int \frac{\arcsin^3 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ . |
| 9. $\int \frac{e^{-x} dx}{(1-e^{-x})^3}$ .  | 21. $\int \frac{x^2 dx}{5x^2-4}$ .               |
| 10. $\int \frac{dx}{x \ln x}$ .             | 22. $\int x \sin(3x^2+4) dx$ .                   |
| 11. $\int \frac{\sin x dx}{(3-\cos x)^4}$ . | 23. $\int \frac{\cos \ln x}{x} dx$ .             |
| 12. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$ .    | 24. $\int x \sqrt{2x^2+3} dx$ .                  |

25.  $\int e^{2x} \operatorname{tge}^{2x} dx.$

28.  $\int \frac{(1+x-x^2) dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}},$

26.  $\int \frac{\sin 4x dx}{\cos^2 2x + 4}.$

29.  $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^2} dx.$

27.  $\int \frac{(2x - \sqrt{\arcsin x})}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

30.  $\int \frac{(x + (\arccos 3x)^2)}{\sqrt{1-9x^2}} dx.$

З а д а н и е № 2. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

Найти интегралы:

I.  $\int \frac{5x-5}{\sqrt{x^2-2x+6}} dx.$

10.  $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1-4x-x^2}} dx.$

II.  $\int \frac{x+1}{3+x+x^2} dx.$

11.  $\int \frac{x-5}{x^2+3x-7} dx.$

3.  $\int \frac{x-1}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx.$

12.  $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx.$

4.  $\int \frac{x-7}{x^2+3x+5} dx.$

13.  $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx.$

5.  $\int \frac{2x+3}{\sqrt{4+3x+x^2}} dx.$

14.  $\int \frac{5x+1}{x^2+5x+1} dx.$

6.  $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-4x-x^2}} dx.$

15.  $\int \frac{x-8}{\sqrt{x^2+7x-1}} dx.$

7.  $\int \frac{5x-1}{x^2+6x+4} dx.$

16.  $\int \frac{8x-1}{\sqrt{x^2+2x+7}} dx.$

8.  $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+5x+4}} dx.$

17.  $\int \frac{2x-1}{x^2+x+5} dx.$

9.  $\int \frac{x+1}{x^2+4x+9} dx.$

18.  $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-3x-x^2}} dx$

19.  $\int \frac{2x+3}{x^2-7x-5} dx.$

25.  $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+9x-1}} dx.$

20.  $\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2+5x-9}} dx.$

26.  $\int \frac{3x-11}{\sqrt{2x^2+3x-8}} dx.$

21.  $\int \frac{2x-1}{\sqrt{2-2x-x^2}} dx.$

27.  $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1} dx.$

22.  $\int \frac{8x-3}{x^2-5x-3} dx.$

28.  $\int \frac{8x+5}{\sqrt{1+5x-3x^2}} dx.$

23.  $\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+7x+1}} dx.$

29.  $\int \frac{7x+3}{\sqrt{2x^2-11x+5}} dx.$

24.  $\int \frac{x-8}{x^2+5x+7} dx.$

30.  $\int \frac{x^2}{x^2+3x+4} dx.$

З а д а н и е № 3. Интегрирование по частям

Найти интегралы:

1.  $\int (x+1) \ln x dx.$

7.  $\int x \sin 3x dx.$

2.  $\int x \cos 2x dx.$

8.  $\int x^2 e^x dx.$

3.  $\int x e^{-2x} dx.$

9.  $\int x \arcsin x dx.$

4.  $\int x \arctg 3x dx.$

10.  $\int x \arccos 2x dx.$

5.  $\int x \arccos (x+1) dx.$

11.  $\int \ln (2x+3) dx.$

6.  $\int x^2 \ln x dx.$

12.  $\int (x+1) \cos x dx.$



13.  $\int x e^{-2x-1} dx.$

22.  $\int (2x-3) \cos 3x dx.$

14.  $\int x^2 \arctg x dx.$

23.  $\int (x+1) e^x dx.$

15.  $\int \arccos 7x dx.$

24.  $\int x \arctg 5x dx.$

16.  $\int (x^3+3x) \ln x dx.$

25.  $\int \arcsin 10x dx.$

17.  $\int (2x-1) \sin x dx.$

26.  $\int \sin \ln x dx.$

18.  $\int (\frac{x}{2}+2) e^{3x} dx.$

27.  $\int e^x \cos x dx.$

19.  $\int \arcsin 5x dx.$

28.  $\int x^3 e^{x^2} dx.$

20.  $\int \arctg (2x+3) dx.$

29.  $\int \cos \ln x dx.$

21.  $\int \ln (x^2-4) dx.$

30.  $\int \sqrt{a^2+x^2} dx.$

З а д а н и е № 4. Интегрирование рациональных дробей  
Найти интегралы:

1.  $\int \frac{x^4+6}{x^4+3x^2} dx.$

5.  $\int \frac{x^3+2x^2+6x}{x^3-6x^2+12x-8} dx.$

2.  $\int \frac{x^3+2}{x^3-x} dx.$

6.  $\int \frac{x^3-x}{(x-1)^2(x+3)} dx.$

3.  $\int \frac{1+x^4}{x^3-3x^2+2x} dx.$

7.  $\int \frac{1+x^5}{x^5-x^2} dx.$

4.  $\int \frac{x^5}{x^4-16} dx.$

8.  $\int \frac{x^4-2x^2}{(x^2+1)^2} dx.$

9.  $\int \frac{x^3 + 4x^2}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} dx.$
10.  $\int \frac{x^3 + 2}{x^3 - 3x^2} dx.$
11.  $\int \frac{x^4 + 2}{x^4 - x^2} dx.$
12.  $\int \frac{x^4 + x^2 + x}{x^4 - 81} dx.$
13.  $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 4x^2 + 3x} dx.$
14.  $\int \frac{x^4}{x^4 - 16} dx.$
15.  $\int \frac{3x^3 + x^2 + 5x + 1}{x^3 + x} dx.$
16.  $\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^3 - 6x^2 + 5x} dx.$
17.  $\int \frac{x^3}{x^3 - 8} dx.$
18.  $\int \frac{x^4 + 1}{(x^2 - 2x)^2} dx.$
19.  $\int \frac{x^3 - 2}{x^3 + x} dx.$
20.  $\int \frac{x^3 + 4}{x^3 + 1} dx.$
21.  $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3 dx.$
22.  $\int \frac{x^4 + x^2 - 1}{1 - x^4} dx.$
23.  $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx.$
24.  $\int \frac{x^5}{x^4 - 3x^2 + 2} dx.$
25.  $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$
26.  $\int \frac{x^5 + 1}{x^3 + 8x^3 + 16x} dx.$
27.  $\int \frac{x^3 + 3}{(x+1)(x^2+1)^2} dx.$
28.  $\int \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx.$
29.  $\int \frac{x^3}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx.$
30.  $\int \frac{x^5}{x^4 + 6x^2 + 9} dx.$

Задание № 5. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Найти интегралы:

1.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} \sqrt[4]{1-2x}}.$
2.  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}}.$
3.  $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}.$
4.  $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx.$

5. 
$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx.$$

6. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

7. 
$$\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x^5}} dx.$$

8. 
$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} dx.$$

9. 
$$\int \frac{1 - \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

10. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}.$$

11. 
$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + 1} dx.$$

12. 
$$\int \frac{x^2 dx}{(5x+2)\sqrt{5x+2}}.$$

13. 
$$\int \frac{\sqrt{x+2} + 3}{\sqrt{x+2} - 4} dx.$$

14. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+2x)^2} + \sqrt[3]{3+2x}}.$$

15. 
$$\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} dx.$$

16. 
$$\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx.$$

17. 
$$\int \sqrt{\frac{3-4x}{9-5x}} dx.$$

18. 
$$\int (x-2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

19. 
$$\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx.$$

20. 
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx.$$

21. 
$$\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx.$$

22. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}.$$

23. 
$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} dx.$$

24. 
$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}} dx.$$

25. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

26. 
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+8}}.$$

27. 
$$\int \frac{\sqrt{3x+4}}{x^2} dx.$$

28. 
$$\int \sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}} dx.$$

29. 
$$\int \frac{(x+3)}{(x-3)} \sqrt{\frac{(x+3)}{(x-3)}} dx.$$

30. 
$$\int \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3} dx.$$

З а д а н и е № 6. Интегрирование тригонометрических функций

Найти интегралы:

$$1. \int \frac{dx}{3\cos x + 2}$$

$$14. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx.$$

$$2. \int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}$$

$$15. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$$

$$3. \int \frac{dx}{2 - \sin x}$$

$$16. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$$

$$4. \int \sin^2 2x dx.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sin^3 x}$$

$$5. \int \cos^2 x dx.$$

$$18. \int \sin 2x \sin 3x \cos 5x dx.$$

$$6. \int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx.$$

$$19. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + \sin x} dx.$$

$$7. \int \sin^2 2x \cos^2 2x dx.$$

$$20. \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^6 x}$$

$$21. \int \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$9. \int \operatorname{tg}^3 x dx.$$

$$22. \int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}$$

$$10. \int \sin^6 2x dx.$$

$$23. \int \cos 3x \cos 5x \cos 8x dx.$$

$$11. \int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

$$24. \int \operatorname{ctg}^4 x dx.$$

$$12. \int \sin \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3} dx$$

$$25. \int \frac{dx}{4 - 5 \sin x}$$

$$13. \int \cos^5 3x dx.$$

$$26. \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx.$$

$$27. \int \frac{(\sin x + \sin^3 x) dx}{\cos^2 x}$$

$$29. \int \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}} dx.$$

$$28. \frac{(\cos^2 x - \cos^5 x)}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx.$$

$$30. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

### ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Задача № 7. Замена переменной в определенном интеграле

Вычислить интегралы:

$$I. \int_3^{19} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}}.$$

$$II. \int_{27}^{125} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-2}.$$

$$2. \int_0^1 \frac{x dx}{1+\sqrt{x}}.$$

$$12. \int_{15}^{39} \frac{dx}{3-\sqrt{x+1}}.$$

$$3. \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}.$$

$$13. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^2}.$$

$$4. \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$14. \int_{\ln 2}^{2 \ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

$$5. \int_{-2}^5 \sqrt{5x+2} dx.$$

$$15. \int_0^{e^{25}} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1} dx}{e^x + 3}.$$

$$6. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\tan x}}{\cos^2 x} dx.$$

$$16. \int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}.$$

$$7. \int_{\sqrt{5}}^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx.$$

$$17. \int_{\ln 3}^{e \ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$$

$$8. \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}.$$

$$18. \int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}.$$

$$9. \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx.$$

$$19. \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$$

$$10. \int_{25}^{196} \frac{dx}{x-4\sqrt{x}}.$$

$$20. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}.$$

$$21. \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$$

$$22. \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$$

$$23. \int_1^3 \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$$

$$24. \int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$25. \int_0^{\sqrt[3]{\ln 2}} \sqrt{1-e^{2x}} dx.$$

$$26. \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{1+x} dx [x = \cos \varphi].$$

$$27. \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx [x = \pi - t].$$

$$28. \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$29. \int_0^3 \sqrt{\frac{x}{5-x}} dx.$$

$$30. \int \frac{e^x \sqrt{e^x-2}}{\ln 2 e^x + 2} dx.$$

З а д а н и е    К 8. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Вычислить интегралы:

$$1. \int_0^1 x \arctg x dx.$$

$$2. \int_1^e \ln^2 x dx.$$

$$3. \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$5. \int_0^1 (\arcsin x)^2 dx.$$

$$6. \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

$$7. \int_1^e \cos \ln x dx.$$

$$8. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx.$$

$$9. \int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$10. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-x) \sin 3x dx.$$

$$11. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \cos x dx.$$

$$12. \int_1^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln x dx.$$

$$13. \int_1^3 \ln x dx.$$

$$14. \int_{-1}^0 \arccos x dx.$$

15.  $\int_0^{\pi} (\pi-x) \sin x dx.$

23.  $\int_1^2 \ln^2 x dx.$

16.  $\int_{-1}^2 (2x+3)e^{-x} dx.$

24.  $\int_0^1 \frac{x^2 \cos x}{\sqrt{1+x}} dx.$

17.  $\int_{-2}^{\frac{\pi}{2}} (1-x) \sin \pi x dx.$

25.  $\int_0^{\pi} (9x^2+9x+11) \cos 3x dx.$

18.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x dx.$

26.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx.$

19.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin x dx.$

27.  $\int_0^2 \ln(\sqrt{1+x^2}-x) dx.$

20.  $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$

28.  $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx.$

21.  $\int_1^2 x \log_2 x dx.$

29.  $\int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^2(x+2) dx.$

22.  $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$

30.  $\int_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}.$

## З а д а н и е    # 9. Несобственные интегралы

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

1.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}.$

5.  $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2+4}.$

2.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}.$

6.  $\int_1^{\infty} \frac{1+2x}{x^2(1-x)} dx.$

3.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}.$

7.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$

4.  $\int_0^{\infty} e^{-2x} \cos x dx.$

8.  $\int_0^{\infty} \sin x dx.$

9.  $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$ .
10.  $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+9}$ .
11.  $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$ .
12.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ .
13.  $\int_0^1 x \cos x dx$ .
14.  $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ .
15.  $\int_0^1 \frac{dx}{2-x}$ .
16.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ .
17.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .
18.  $\int_1^2 x \ln x dx$ .
19.  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x^4}$ .
20.  $\int_0^1 \frac{x dx}{(x^2-1)^{3/5}}$ .
21.  $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}$ .
22.  $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$ .
23.  $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$ .
24.  $\int_0^1 \operatorname{ctg} x dx$ .
25.  $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .
26.  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx$ .
27.  $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3}$ .
28.  $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}$ .
29.  $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-x-1}}$ .
30.  $\int_{-1}^1 \frac{4x^3}{x^2-1} dx$ .

Задание № 10. Приближенное вычисление определенного интеграла

Вычислить приближенно методами трапеций и парабол интегралы с относительной погрешностью  $\epsilon = 0,001$ :

1.  $\int_1^{2,3} \sqrt{1+x^2} dx$ .

2.  $\int_{0,5}^{7,5} \sin \sqrt{1+x} dx$ .



3.  $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$ .
4.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^2 dx$ .
5.  $\int_0^{1.2} e^{-x^2} dx$ .
6.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin x} dx$ .
7.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\cos x} dx$ .
8.  $\int_0^{1.2} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ .
9.  $\int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{7}} \frac{dx}{x \operatorname{tg} x}$ .
10.  $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{5}} \frac{dx}{x \operatorname{ctg} x}$ .
11.  $\int_0^{1.5} \frac{dx}{\sin \sqrt{1+x}}$ .
12.  $\int_0^{0.4} \frac{dx}{\cos \sqrt{1-x}}$ .
13.  $\int_0^{0.4} x \sin x dx$ .
14.  $\int_0^{0.4} 2^{x \cos x} dx$ .
15.  $\int_0^{0.2} \sin(2^{2x}) dx$ .
16.  $\int_0^{0.2} \cos(3^{2x}) dx$ .
17.  $\int_1^5 a z \cos \frac{1}{z} dz$ .
18.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\operatorname{tg} x} dx$ .
19.  $\int_0^1 \sqrt{x+\sin x} dx$ .
20.  $\int_0^1 \sqrt{x+\cos x} dx$ .
21.  $\int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{x} dx$ .
22.  $\int_0^{\frac{\pi}{10}} \frac{x}{\cos x} dx$ .
23.  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos x} dx$ .
24.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0.1 \sin^2 x} dx$ .
25.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0.1 \cos^2 x} dx$ .

Задача № II. Вычисление площади плоских фигур в декартовой системе координат

Вычислить площадь фигур, ограниченной линиями:

1) окружностью радиусом  $R = 2$  с центром в начале координат и кривой  $y = x^3$  (часть круга в первой четверти выше кривой  $y = x^3$ );

2)  $y = 2x^2$ ,  $y = x^3$ ,  $x = 0$  (в первой четверти);

3)  $y^3 = x$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ ;

4)  $y = x(x-1)(x-2)$ ,  $y = 0$ ;

5)  $y = 2 \operatorname{ch} \frac{x}{2}$ ,  $x = 0$ ,  $y = \frac{e^2 + 1}{e}$  (в первой четверти);

6)  $4y^2 = x^2(4 - x^2)$ ;

7)  $(\frac{x}{5})^2 + (\frac{y}{4})^3 = 1$ ;

8)  $y = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $y = \frac{x^2}{2}$ ;

9) гиперболой  $y^2 = \frac{x^2}{2-x}$  и окружностью диаметром  $d = 2$  с центром в точке  $A(1, 0)$  (справа от гиперболы);

10) строфоидой  $y^2 = x^2 \frac{2+x}{2-x}$  и окружностью диаметром  $d = 2$  с центром в точке  $A(1, 0)$  (справа от строфоиды);

11) строфоидой  $y^2 = x^2 \frac{4+x}{4-x}$  и окружностью диаметром  $d = 2$  с центром в точке  $A(-1, 0)$  (внутри строфоиды,  $x < 0$ );

12) строфоидой  $y^2 = x^2 \frac{3+x}{3-x}$  окружностью  $x^2 + y^2 = 9$  и осью  $Ox$  (в первой четверти);

13) окружностью  $x^2 + y^2 = 16$  и кривой  $x^2 = 12(y-1)$  (малая часть);

14) окружностью диаметром  $d = 1$  с центром в точке  $C(1/2; 0)$  и лемнискатой Бернулли  $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$  (внутри лемнискаты);

$$15) (x^2 + y^2)^2 - 4x^2 - 9y^2 = 0;$$

16) кривой  $y = \ln(x-3)$ , касательной к ней в точке с ординатой  $y_0 = \ln 2$  и осью  $Ox$ ;

$$17) y = a \cos x, y = a \cos x, y = 0;$$

18) окружностью  $x^2 + y^2 = 1$ , касательной к ней в точке  $(x_0, y_0)$ , расположенной в первой четверти и проведенной под углом  $\frac{3}{4}\pi$  к оси  $Ox$ , и осью  $Ox$ ;

19) кривой  $x^2 y^2 = 4(x-1)$  и прямой, проходящей через ее точки перегиба;

$$20) y^2 = x^2 - x^4;$$

$$21) y = 2x^2 e^x, y = -x^3 e^x;$$

$$22) y = \frac{\ln x}{4x}, y = x \ln x;$$

$$23) x^4 + y^4 = x^2 + y^2.$$

24) кривой  $(y-3)^3 = x-2$ , касательной к ней в точке с ординатой  $y_0 = 5$  и осями  $Ox$  и  $Oy$ ;

25) линией  $y = 2^{x-1}$ , касательной к ней в точке с ординатой  $y_0 = 4$  и осью  $Oy$ ;

$$26) 6x = y^3 - 16y, 24x = y^3 - 16y;$$

$$27) (x^2 + y^2)^3 - 16xy(x^2 - y^2);$$

28) кривой  $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 - 9y^2 = 0$ , касательной к ней в точке с ординатой  $y_0 = \frac{\sqrt{21}}{4}$  (в первой четверти) и осью ординат;

$$29) (y - a \cos x)^2 = x - x^2;$$

30) кривой  $y^2 = \frac{x^4}{4-x^2}$  и ее асимптотами.

Т а б л и ц а № 12. Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) двумя первыми витками спирали  $\rho = \varphi$  и лучом  $\varphi = 0$ ;

2) спиралью  $\rho = \frac{\theta}{3} \pi \varphi$ , окружностью радиусом  $R = 2$  с центром в полюсе и лучом  $\varphi = 0$ ;

3) кардиной  $\rho = \sqrt{3}(1 + \cos \varphi)$  и окружностью радиусом  $R = 1$  с центром в точке  $C(0, 1)$ ;

4) кардиной  $\rho = 1 + \cos \varphi$  и окружностью радиусом  $R = 1$  с центром в полюсе;

5) лемнискатой Бернулли  $\rho^2 = \cos 2\varphi$  и окружностью радиусом  $R = \sqrt{\frac{2}{3}}$  с центром в точке  $C(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0)$ ;

6)  $\rho = \sin \varphi$ ,  $\rho = \cos 2\varphi$ ;

7)  $\rho = \sin \varphi$ ,  $\rho = \sin 2\varphi$ ;

8)  $\rho = \frac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}(2 + \cos \varphi)$ ,  $\rho = \sin \varphi$ ,  $\varphi = 0$ ;

9)  $\rho = \frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}(2 + \cos \varphi)$ ,  $\rho = \sin \varphi$ ,  $\varphi = \pi$ ;

10)  $\rho = \sin 3\varphi$ ,  $\rho = \sin \varphi$ ;

11)  $\rho = 1 + \cos \varphi$ ,  $\rho = 3 \cos \varphi$ ;  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ;

12)  $\rho = 1 + \sin \varphi$ ,  $\rho = 3 \sin \varphi$ ,  $\varphi = 0$ ;

13) кривой  $\rho = 1 + \sin \varphi$  и первым витком спирали  $\rho = \frac{\varphi}{4}$ ;

14)  $\rho = 2 + \cos \varphi$ ,  $\rho = \frac{9}{4} \pi \varphi$ ,  $\rho = \frac{\varphi}{4}$ ;

15) окружностью  $\rho = \sqrt{3} \sin \varphi$  и кардиной  $\rho = 1 - \cos \varphi$  (две точки);

16)  $\rho = 1 - \cos \varphi$ ,  $\rho = \cos \varphi$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ;

17) двумя последовательными витками логарифмической спирали  $\rho = e^\varphi$ , начиная с  $\varphi = 0$ ;

18) кривыми  $\rho = \operatorname{tg} \varphi$ ,  $\rho = \frac{1}{\cos \varphi}$ ,  $\rho = \frac{1}{\sin \varphi}$  и полярной осью (в первой четверти);

19)  $\rho = 1 - \sin \varphi$ ,  $\rho = \sin \varphi$ ;

20)  $\rho = \frac{1}{\sin \varphi}$ ,  $\rho = \frac{4}{\sqrt{3}} \cos \varphi$ ,  $\rho = \frac{4}{4 - \sqrt{3}} (2 - \cos \varphi)$ ,  $\varphi = 0$ ;

21)  $\rho = \frac{4}{\sqrt{3}} \cos \varphi$ ,  $\rho = \frac{4}{4 - \sqrt{3}} (2 - \cos \varphi)$ ,  $\varphi = 0$  (вне кардиоиды);

22)  $\rho = \frac{4}{\sqrt{3}} \cos \varphi$ ,  $\rho = \frac{1}{\sin \varphi}$ ;

23)  $\rho = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin \varphi$ ,  $\rho = \frac{1}{\cos \varphi}$ ;

24) окружностью  $\rho = \frac{4}{\sqrt{3}} \cos \varphi$ , кардиоидой  $\rho = \frac{4}{4 - \sqrt{3}} (2 - \sin \varphi)$  и лучом  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (вне кардиоиды);

25) спиралью  $\rho = \frac{6\varphi}{\pi}$ ,  $\varphi = 0$  и окружностью радиусом  $R = 2$  с центром в полюсе;

26) окружностью диаметром  $d = \pi$  с центром в точке  $(\frac{\pi}{2}; 0)$ , окружностью диаметром  $d = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$  с центром в точке  $(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \rho)$  и спиралью  $\rho = \varphi + \frac{\pi}{6}$ ;

27) лемнискатой Бернулли  $\rho^2 = \frac{2}{9} \pi^2 \cos 2\varphi$ , окружностью с центром  $\pi$  с центром в точке  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  и спиралью  $\rho = \varphi + \frac{\pi}{6}$ ;

28) окружностью диаметром  $\pi$  с центром в точке  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , частью первого витка спирали  $\rho = \varphi + \frac{\pi}{3}$  и лучом  $\varphi = 0$ ;

29) петлей декартова листа  $x^3 + y^3 = 3xy$  (перейти к полярным координатам);

30)  $x = 1, x = 2, y = 1, y = 2$  (перейти к полярным координатам).

З а д а н и е № 13. Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными в параметрической форме

Вычислить площади фигур, ограниченной указанными линиями:

1) эвольвентой (разверткой)  $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t$  четверти окружности  $x = \cos t, y = \sin t$  и прямыми  $y = 1, x = 0, y = 0$ ;

2) эвольвентой  $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t$  половины окружности  $x = \cos t, y = \sin t$  и прямыми  $x = -1, y = 0$ ;

3) эвольвентой  $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t$  трех четвертей окружности  $x = \cos t, y = \sin t$  (начиная с первой), прямой  $y = -1$ , лучом  $x = 0$  ( $y < 0$ ) и лучом  $y = 0$  ( $x > 0$ );

4)  $a = a \sin t, y = b \sin 2t$ ;

5)  $x = \frac{t}{3}(b-t), y = \frac{t^2}{3}(b-t)$  (площадь петли);

6)  $x = t^2, y = t - \frac{t^3}{3}$  (площадь петли);

7)  $x = 2 \cos t(1 + \cos t), y = 2 \sin t(1 + \cos t)$ ;

8)  $x = 4 \cos t, y = 9 \sin^3 t$ ;

9)  $x = t^2 - 1, y = t^3 - t$ ;

10)  $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$ ;

11)  $x = \frac{t}{3}(3-t^2), y = t^2$ ;

12)  $x = 2 \cos t, y = 3 \sin t \cos^2 t;$

13)  $x = 3 \sin t, y = 2 \cos t \sin^2 t;$

14)  $x = 4 \sin 2t, y = 9 \sin t;$

15)  $x = \sin t (1 + \sin t), y = \cos t (1 + \sin t);$

16)  $x = 4 \sin t, y = 9 \cos^3 t;$

17)  $x = t^3 - t, y = t^2 - 1;$

18)  $x = 2t^2 - t^3, y = 2t - t^2;$

19)  $x = 3 \sin t (t + \cos t), y = 3 \cos t (1 + \cos t);$

20)  $x = 1 - t^2, y = t - t^3;$

21)  $x = 4 - t^2, y = t^3 - t;$

22)  $x = t^3 - 2t^2, y = 2t - t^2;$

23)  $x = t^2, y = \sin t$  (площадь одной петли);

24)  $x = t^2, y = \sin 2t$  (площадь одной петли);

25)  $x = t^3 - 2t^2, y = t^2 - 2t;$

26)  $x = \cos t, y = t^3 - t;$

27)  $x = \cos t, y = t^3 - t;$

28)  $x = t^2 + 1, y = t \cos t$  (площадь первой петли);

29) окружность  $x = \cos t, y = \sin t$ , ее эвольвентой  $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t$  и лучом  $y = I (x > 0);$

30)  $x = 2 + t^2, y = t^2 \sin t$  (площадь первой петли).

З а д а н и е    № 14. Вычисление объема тела вращения

Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, образованной линиями:

1)  $y=3x$  ;  $y=2$ ,  $y=4$ ,  $x=0$  относительно оси  $Oy$  ;

2) полуокружностью синусоиды  $y=\sin 2x$  относительно оси  $Ox$  ;

3) кривой  $y=\cos x$  , прямыми  $x=0$ ,  $y=0$  относительно оси  $Ox$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) ;

4) параболой  $y=x^2-4x+4$  и прямой  $y=\frac{x}{2}+2$  относительно оси  $Oy$  ;

5) параболой  $y=x^2-4x+4$  и прямой  $y=\frac{x}{2}+2$  относительно оси  $Ox$  ;

6) параболой  $y=x^2$  и  $8x=y^2$  относительно оси  $Oy$  ;

7)  $y=\frac{x}{2}$ ,  $y=x$ ,  $x=2$ ,  $x=3$  относительно оси  $Oy$  ;

8) дугой параболы  $y=x^3-4x$  и осью абсцисс относительно оси  $Ox$  ;

9) окружностью  $x^2+y^2=16$  и прямой  $y=-x+4$  относительно оси  $Ox$  (над прямой) ;

10) окружностью  $x^2+y^2=16$ , прямой  $y=-x+4$  и осью  $Oy$  относительно оси  $Oy$  ( $x \geq 0$ ) ;

11) гиперболой  $x^2-y^2=1$  и прямой  $x=\sqrt{5}$  относительно оси  $Oy$  ;

12) условие предыдущей задачи, но относительно оси  $Ox$  ;

13) эллипсом  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  и прямой  $y=\sqrt{5}$  относительно оси  $Ox$  ( $y \geq \sqrt{5}$ ) ;

14) эллипсом  $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{9} = 1$  и прямой  $x=\sqrt{2}$  относительно оси  $Oy$  ( $x \geq \sqrt{2}$ ) ;



15) параболы  $y = x^2$ ,  $y = x^3$  и прямой  $y = 2$  относительно оси  $Ox$ ;

16)  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ,  $y = \sqrt{x}$  относительно оси  $Ox$ ;

17)  $y = \log_2 x$ ,  $y = \log_4 x$  и  $y = 1$  относительно оси  $Ox$ ;

18)  $xy = 2$ ,  $y = x + 1$ ,  $y = 1$  относительно оси  $Ox$ ;

19) аркой циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  и отрезком оси абсцисс  $0 \leq x \leq 2\pi (a > 0)$  относительно оси  $Ox$ ;

20) дугой эллипса  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ , лежащей в первом квадранте, осями  $Ox$  и  $Oy$  относительно оси  $Ox$ ;

21) условие предыдущей задачи, но относительно оси  $Oy$ ;

22) кривой  $\rho = a \cos \varphi$ , лучом  $\varphi = 0$  относительно полярной оси для  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ;

23) кривой  $\rho = 1 + \sin \varphi$ , лучами  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  относительно полярной оси;

24) петлей  $x = 2t + 1$ ,  $y = t^2 - 1$  и осью  $Ox$  относительно оси  $Ox$ ;

25) кривой  $\rho = a \sin \varphi$  и дугой  $\varphi = 0$  относительно полярной оси для  $0 < \varphi < \frac{\pi}{6}$ ;

26) петлей  $x = at^2$ ,  $y = a(t - \frac{t^3}{3})$  относительно оси  $Ox$ ;

27)  $y = \sqrt{x} e^x$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  относительно оси  $Ox$ ;

28) полуаркой циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  и осью  $Oy$  относительно оси  $Oy$ ;

29) параболой  $y^2 = 4ax$  и прямой  $x = a$  относительно прямой  $y = -2a (a > 0)$ ;

30) кривыми  $y = tgx$ ,  $y = ctgx$  и прямой  $y = \sqrt{3}$  относительно оси  $Oy$ .

З а д а н и е 15. Вычисление длины пути плоской кривой

Вычислить длину дуги заданной линии:

1)  $y = \ln \sin x$ ,  $x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ ;

2)  $y = \ln \cos x$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ;

3)  $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$  между точками  $A(\frac{1}{4}, 1)$  и  $B(2 - \frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{2})$ ;

4)  $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ ,  $x \in [a, b]$ ;

5) кривой  $y^2 = 2x^5$ , врезанной кривой  $x^2 + y^2 = 3$ ;

6) кривой  $3y^2 = x(x-1)^2$  между точками пересечения ее с осью  $Ox$ ;

7) кривой  $2y = x^2 - 3$  между точками пересечения ее с осью  $Ox$ ;

8) цепной линии  $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ , отсекаемой прямыми  $x = 0$  и  $x = 4$ ;

9) кривой  $y = \frac{2}{5}x\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$  между точками пересечения ее с осью  $Ox$ ;

10) одной арки циклоиды  $x = 4(t - \sin t)$ ,  $y = 4(1 - \cos t)$ ;

11)  $x = e^t \cos 2t$ ,  $y = e^t \sin 2t$ ,  $t \in [0, \ln 3]$ ;

12)  $x = 8 \sin t + 6 \cos t$ ,  $y = 6 \sin t - 8 \cos t$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ;

13) астроиды  $x = 2 \cos^3 t$ ,  $y = 2 \sin^3 t$ ;

14) карданоиды  $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$ ,  $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$ ;

15) кривой  $x = t^2, y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$  между точками пересечения ее с осью  $Ox$ ;

16) замкнутой кривой  $x = 2a \sin^2 t, y = a \sin 2t (a > 0)$ ;

17) кривой  $x = \frac{t^6}{6}, y = 2 - \frac{t^4}{4}$  между точками пересечения ее с осями координат;

18) первого витка спирали Архимеда  $\rho = a\varphi$ ;

19) логарифмической спирали  $\rho = ae^{m\varphi}, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] (a > 0, m > 0)$ ;

20) всей кривой  $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3} (a > 0)$ ;

21) всей кривой  $\rho = a \sin^4 \frac{\varphi}{4} (a > 0)$ ;

22) логарифмической спирали  $\rho\varphi = 1, \varphi \in [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}]$ ;

23) всей кривой  $\rho = 4 \cos \frac{2\varphi}{2}$ ;

24) замкнутой кривой  $\rho = 2(\sin \varphi + \cos \varphi)$ ,

25) всей кривой  $\rho = 1 + \cos \varphi$ ;

26) кривой  $\varphi = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho}), \rho \in [2, 4]$ ;

27) кривой  $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \cos \frac{t}{2}$  между двумя точками ее пересечения с плоскостью  $Oxz$ ;

28)  $y = a \ln(a^2 - x^2) (a > 1)$  (выше оси  $Ox$ ),  
\* \* \*

29. На циклоиде  $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$  найти точку, которая делит ее первую арку по длине в отношении 1:3.

30. Выразить длину дуги кривой  $x = at \cos t, y = a\sqrt{t} \sin t, z = at$  как некоторую функцию параметра  $t$ .

З а д а н и е № 16. Физические и механические приложения  
определенного интеграла

1. Вычислить массу кривого стержня, представляющего собой полукольцо радиусом  $z$ , если его линейная плотность изменяется по закону  $\rho = \alpha + \beta \cos^2 \varphi$ , где  $\alpha, \beta - const$ ,  $\varphi$  - полярный угол.

2. Площадь сечения прямолинейного стержня длиной  $l$  изменяется по закону  $f = f_0 - f_1 \frac{x}{l}$  ( $f_0 > f_1$ ), а удельная плотность  $\rho$  постоянна. Найти массу стержня.

3. Удельная плотность полукольца радиусом  $z$  изменяется по закону  $\rho = e^{\frac{\varphi}{2}}$ , а площадь его поперечного сечения  $f = \beta \cos \frac{\varphi}{2}$  ( $\beta - const$ ). Определить массу полукольца.

4. Поперечное сечение балки представляет собой прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$ . Вычислить момент инерции площади поперечного сечения балки относительно каждой из ее осей симметрии.

5. Найти полярный момент инерции площади поперечного сечения трубопровода относительно оси симметрии, если внешний диаметр равен  $R$ , а внутренний -  $z$ .

6. Реактивный самолет за 10 с полета увеличил свою скорость с 720 до 1080 км/ч. Считая его движение равноускоренным, определить расстояние, которое он пролетел за это время.

7. Автомобиль, движущийся со скоростью 54 км/ч, начинает тормозить и останавливается через 3 с. Найти путь, пройденный автомобилем до полной остановки (движение автомобиля после торможения считать равнозамедленным).

8. Расстояние между пунктами  $A$  и  $B$  самолет пролетел за 20 с. Найти расстояние между пунктами, если известно, что в течение первых десяти секунд самолет летел с равномерной скоростью и пролетел за это время третью часть дистанции. В дальнейшем движение самолета было равноускоренным и над пунктом  $B$  его скорость равнялась 1410 км/ч.

9. Парашютист покинул самолет на высоте 550 м с начальной вертикальной скоростью 2 м/с. Сколько секунд он находился в свободном

падении, если парашют раскрылся на высоте 358 м (сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение силы тяжести принять равным  $10 \text{ м/с}^2$ ).

10. Топливный отсек фюзеляжа самолета представляет собой круговой цилиндр диаметром  $d$  с плоскими днищами. Определить силу давления жидкости на одно днище, если ее плотность равна  $\rho$ , а отсек заполнен жидкостью полностью.

11. Топливный бак-кессон, расположенный в крыле самолета, имеет эллиптическое поперечное сечение. Найти силу давления топлива на днище бака, если большая ось эллипса равна  $2a$ , а малая (высота бака) -  $2b$ . Топливо с удельной плотностью занимает: 1) весь объем; 2) половину объема.

12. Найти силу давления на треугольный щит с основанием  $a$  и высотой  $h$ , погруженный вертикально так, что вершина щита лежит на поверхности воды.

13. Найти силу давления на треугольный щит с основанием  $a$  и высотой  $h$ , погруженный вертикально так, что основание щита лежит на поверхности воды.

14. Высота остроугольного треугольника  $ABC$  равна  $h$ , а длина основания  $AC$  равна  $b$ . Найти момент инерции площади данного треугольника относительно оси, совпадающей с основанием  $AC$ .

15. Какую работу нужно затратить, чтобы выкачать жидкость с удельной плотностью  $\rho$  из резервуара, имеющего форму полушара радиусом  $R$ ?

16. Определить работу, затраченную на перекачивание жидкости из резервуара, имеющего форму кругового усеченного конуса высотой  $H$  и радиусами нижнего и верхнего оснований  $R$  и  $r$  соответственно ( $R > r$ ). Плотность жидкости -  $\rho$ .

17. Вычислить момент инерции фигуры, ограниченной параболой  $y^2 = 4ax$  и прямой  $x = a$ , относительно оси  $Oy$  ( $a > 0$ ).

18. Найти момент инерции относительно оси  $Ox$  треугольника, ограниченного линиями:  $x = 0$ ,  $y = 0$  и прямой, проходящей через точки  $A(a, 0)$  и  $B(0, b)$  ( $a > 0, b > 0$ ).

19. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривой  $x^2 + y^2 = z^2$  и прямой  $y = 0$  ( $y > 0$ ).

20. Найти координаты центра тяжести дуги одной арки циклоиды  
 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ .

21. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривыми  $x^2 + y^2 = 9, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  и прямыми  $x = 0, y = 0$  ( $x > 0, y > 0$ ).

22. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{2x}{\pi}, y = \sin x$  ( $x > 0$ ).

23. Найти статические моменты относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  параболы  $y^2 = 2x$  от  $x = 0$  по  $x = 2$  ( $y > 0$ ).

24. Найти статические моменты относительно осей координат отрезка прямой, проходящей через точки  $A(a, 0), B(0, b)$ , заключенного между осями координат.

25. Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$  от точки  $A(0, 1)$  до точки  $B(a, \operatorname{ch} a)$ .

26. Какую работу нужно затратить, чтобы тело массой  $m$  поднять с поверхности Земли, радиус которой  $R$ , на высоту  $h$ ? Чему равна эта работа, если тело должно быть удалено в бесконечность?

27. Ракета стартует вертикально вверх. Ускорение ракеты за счет уменьшения ее веса растет по закону  $g = \frac{A}{a - bt}$  ( $a - bt > 0$ ). Найти закон изменения скорости ракеты по времени  $t$ , если ее начальная скорость равна нулю, а сила тяги постоянна. Определить высоту, на которую поднимается ракета за время  $t$ .

28. Вычислить статический момент площади фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$  и  $y = \sqrt{x}$  относительно оси  $Ox$ .

29. Найти статический момент окружности  $\rho = 2a \sin \varphi$  относительно полярной оси.

30. Вычислить кинетическую энергию плоского диска толщиной  $\delta$  и радиусом  $R$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  относительно оси, проходящей через центр симметрии перпендикулярно к его плоскости. Удельная плотность материала диска равна  $\rho$ .

## Библиографический список

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1971.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высш. шк., 1980.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов /Под ред. Б.П.Демидовича. М.: Наука, 1970.
4. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Харьков.: Изд-во гос. ун-та, 1965.
5. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. М.: Высш. шк., 1983.
6. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. М.: Наука, 1973.
7. Подольский В.А., Суходский А.М. Сборник задач по математике. М.: Высш. шк., 1980.
8. Сборник задач по курсу высшей математики /Под ред. П.Е.Дзюбика, Г.И.Кручкова. М.: Высш. шк., 1965.
9. Сборник задач по математике для вузов /Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. М.: Наука, 1981.

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Краткие теоретические сведения .....	3
Неопределенный интеграл.....	4
З а д а н и е № 1. Непосредственное интегрирование ..	4
З а д а н и е № 2. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен .....	5
З а д а н и е № 3. Интегрирование по частям .....	6
З а д а н и е № 4. Интегрирование рациональных дробей .....	7
З а д а н и е № 5. Интегрирование некоторых иррациональных функций .....	8
З а д а н и е № 6. Интегрирование тригонометрических функций .....	10
Определенный интеграл.....	11
З а д а н и е № 7. Замена переменной в определенном интеграле .....	11
З а д а н и е № 8. Интегрирование по частям в определенном интеграле .....	12
З а д а н и е № 9. Несобственные интегралы .....	13
З а д а н и е № 10. Приближенное вычисление определенного интеграла .....	14
З а д а н и е № 11. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат .....	16
З а д а н и е № 12. Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат .....	18
З а д а н и е № 13. Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными в пара- метрической форме .....	20
З а д а н и е № 14. Вычисление объема тела вращения..	22
З а д а н и е № 15. Вычисление длины дуги плоской кривой .....	24
З а д а н и е № 16. Физические и механические приложения определенного интеграла .....	26
Б и б л и о г р а ф и ч е с к и й   с п и с о к .....	29



## Библиографический список

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1971.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высш. шк., 1980.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов /Под ред. Б.П.Демидовича. М.: Наука, 1970.
4. Капран И.А. Практические занятия по высшей математике. Харьков.: Изд-во гос. ун-та, 1965.
5. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. М.: Высш. шк., 1983.
6. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. М.: Наука, 1973.
7. Пскольский В.А., Суходский А.М. Сборник задач по математике. М.: Высш. шк., 1980.
8. Сборник задач по курсу высшей математики /Под ред. П.Е.Давыдка, Г.И.Кручковича. М.: Высш. шк., 1965.
9. Сборник задач по математике для вузов /Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. М.: Наука, 1981.

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Краткие теоретические сведения .....	3
Неопределенный интеграл.....	4
З а д а н и е № 1. Непосредственное интегрирование ..	4
З а д а н и е № 2. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен .....	5
З а д а н и е № 3. Интегрирование по частям .....	6
З а д а н и е № 4. Интегрирование рациональных дробей .....	7
З а д а н и е № 5. Интегрирование некоторых иррациональных функций .....	8
З а д а н и е № 6. Интегрирование тригонометрических функций .....	10
Определенный интеграл.....	11
З а д а н и е № 7. Замена переменной в определенном интеграле .....	11
З а д а н и е № 8. Интегрирование по частям в определенном интеграле .....	12
З а д а н и е № 9. Несобственные интегралы .....	13
З а д а н и е № 10. Приближенное вычисление определенного интеграла .....	14
З а д а н и е № 11. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат .....	16
З а д а н и е № 12. Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат .....	18
З а д а н и е № 13. Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными в пара- метрической форме .....	20
З а д а н и е № 14. Вычисление объема тела вращения..	22
З а д а н и е № 15. Вычисление длины дуги плоской кривой .....	24
З а д а н и е № 16. Физические и механические приложения определенного интеграла .....	26
Библиографически й список .....	29

## **ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

**Составители: Логунов Валентин Яковлевич  
Рыбакова Инна Геннадьевна  
Синицын Виктор Павлович  
Храмова Юлия Николаевна**

Редактор Н. Д. Чайникова  
Техн. редактор Г. А. Усачева  
Корректор Т. П. Жбанникова

Подписано в печать 5.03.92. Формат 60×84 1/16.  
Бумага оберточная белая. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 1,6. Усл. кр.-отт. 1,7. Уч.-изд. л. 1,65.  
Тираж 200 экз. Заказ 74. Бесплатно.

Самарский ордена Трудового Красного Знамени  
авиационный институт имени академика С. П. Королева,  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Участок оперативной полиграфии  
Самарского авиационного института,  
443001 Самара, ул. Ульяновская, 18.