Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт имени академика С.П.Королева

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Утверждено редакционно-издательским
советом института в качестве методических указаний к лабораторной работе

Куйбышев 1984

УДК 519.6

В работе рассматривается математическая формулировка и геометрическая интерпретация задач математического программирования, описывается порядок выполнения индивидуального задания по геометрической интерпретации двухпараметрических задач и приведен соответствующий набор заданий.

Методические указания разработаны на кафедре конструкции и проектирования летательных аппаратов и предназначены для студентов 0535 специальности, изучающих курс "Применение САПР", а также могут быть использованы при обучении студентов других машиностроительных специальностей института, на ФПК ИТР и преподавателей.

Автор-составитель – А.В.С о л о в о в

Рецензенты: В.Я.Щ е г о л е в, А.А.К а л е н т ь е в

Ц е л ь   р а б о т ы: познакомить студентов с формулировкой и геометрической интерпретацией задач математического программирования.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Задачи оптимизации, в которых необходимо выбирать из нескольких возможностей наилучшую, постоянно возникают в различных областях человеческой деятельности. В ряде случаев есть смысл формулировать и решать проблему выбора в виде задачи математического программирования (МП) путем максимизации или минимизации целевой функции, на переменные которой наложены ограничения в форме уравнений и неравенств.

Умение формулировать проектные задачи в терминах математического программирования в настоящее время в определенной мере характеризует математическую культуру инженера. Такая формулировка проектной задачи позволяет сделать ее более четкой, выделить основные элементы, что в значительной мере способствует успешному решению задачи. Для записи задачи МП используют следующие обозначения:

$X = (X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n)$ - вектор проектных переменных;

$f(x)$ - функция цели;

$g_j(x)$ - функция ограничений, $j = \overline{1,m}$;

$\Omega = (x: g_j(x) \leq 0, j = \overline{1,m})$ - область допустимых проектных переменных (допустимая область изменения проектных переменных);

$\bar{X} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_i, \dots \bar{X}_n)$ - искомый вектор (искомое решение) задачи МП.

С использованием этих обозначений задача МП может быть сформулирована следующим образом: найти вектор $\bar{X} \in \Omega$, чтобы $f(\bar{x}) \leq f(x)$ для любого $X \in \Omega$.

Можно встретить и несколько иную формулировку: минимизировать $f(x)$ при ограничениях $g_j(x) \leq 0$, $j = \overline{1,m}$.

Знак неравенства в выражении $g_j(x) \leq 0$ может быть изменен на обратный умножением неравенства на - I, что не меняет физического смысла оптимизационной задачи.

Если задача МП имеет две проектные переменные $X = (X_1, X_2)$ и простой аналитический вид целевой и ограничительных функций, то ее можно изобразить на плоскости и решить графически. Сначала в системе координат $X_1 0 X_2$ провести линии равного уровня цели. Затем нанести графики функций $g_j(x) = 0$. Далее штриховкой выделить границы области допустимых проектных переменных и внутри этой области или на ее границах отыскать экстремальную точку.

Пример. Рассмотрим следующую задачу МП:

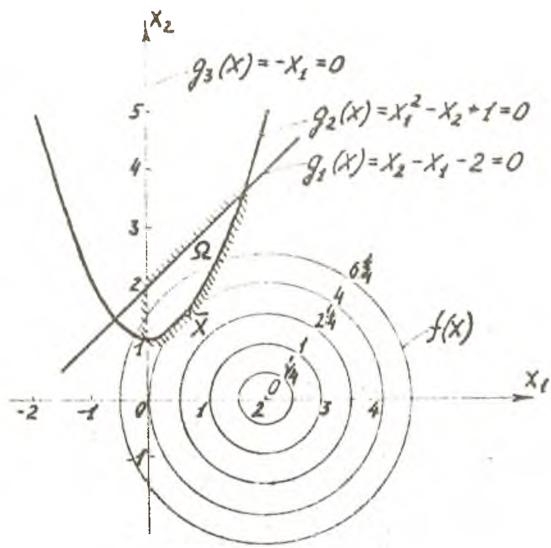
минимизировать $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4$

при ограничениях $g_1(x) = x_2 - x_1 - 2 \leq 0$;

$g_2(x) = x_1^2 - x_2 + 1 \leq 0$;

$g_3(x) = -x_1 \leq 0$

Геометрическая интерпретация этой задачи представлена на рис.I.



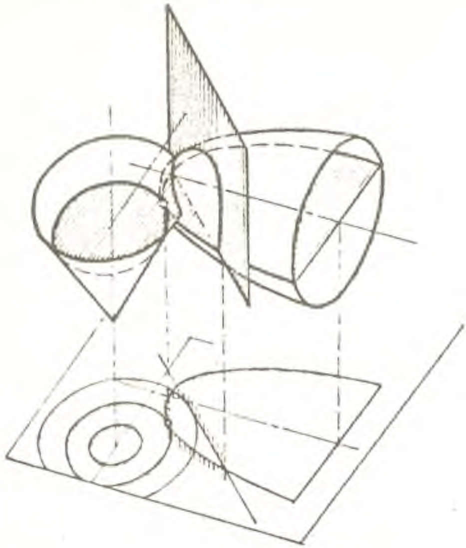
Р и с. I

Границы допустимой области выделены штриховкой. Трехмерная иллюстрация задачи показана на рис.2.

Проанализировав характер изменения $f(x)$ внутри области (см. рис.I), находим экстремальную точку $\bar{X}$ = (0,58; I,34), в которой $f(\bar{x})$ = 3,8.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Студенты предварительно, во внеаудиторное время изучают теоретическую часть работы и выполняют индивидуальное задание в следующей последовательности.



Р и с. 2

1. Выписывают задание (приложение) в рабочую тетрадь.

2. Проводят линии равного уровня функции цели.

3. Строят графики ограничительных функций.

4. Выделяют штриховкой границы допустимой области.

5. Находят экстремальную точку и определяют компоненты вектора $\bar{X}$ и значение функции цели $f(\bar{X})$.

На аудиторном занятии студенты заканчивают выполнение индивидуального задания, оформляют отчет и сдают его преподавателю. При приеме отчета преподаватель контролирует правильность и самостоятельность выполнения задания.

Примечания. 1. Неаккуратно оформленные отчеты не рассматриваются. 2. После каждой контрольной точки (4,8,12,16 недели) к несданному заданию добавляется еще одно дополнительное задание.

Литература

1. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование: Перевод с англ.-М.:Мир, 1975.-533с.

2. Лазарев И.Б. Математические методы оптимального проектирования конструкций: Учебное пособие. Новосибирск:Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта, 1974.-190с.

Приложение

Индивидуальные задания

N задания	Проектные переменные	Функция цели	Ограничения
1	$x=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_1^2+x_2^2+4x_2^2+4$	$g_1(x)=2-x_1\le 0$ $g_2(x)=x_1-5\le 0$ $g_3(x)=1-x_2\le 0$ $g_4(x)=x_2-4\le 0$
2	$x=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_1^2+x_2^2-8x_2+16$	$g_1(x)=2-x_1\le 0$ $g_2(x)=x_1-5\le 0$ $g_3(x)=1-x_2\le 0$ $g_4(x)=x_2-4\le 0$ $g_5(x)=x_1-x_2\le 0$
3	$x=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_1^2+x_2^2-2x_1+1$	$g_1(x)=-x_1-5\le 0$ $g_2(x)=x_1+2\le 0$ $g_3(x)=-x_2-4\le 0$ $g_4(x)=x_2+1\le 0$ $g_5(x)=x_1-x_2\le 0$
4	$x=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_1^2+x_2^2$	$g_1(x)=-x_1-4\le 0$ $g_2(x)=x_1\le 0$ $g_3(x)=2-x_2\le 0$ $g_4(x)=x_2-6\le 0$ $g_5(x)=x_1+x_2\le 0$
5	$x=(x_1, x_2)$	$f(x)=-x_1^2-x_2^2-2x_1-1$	$g_1(x)=x_2-2x_1\le 0$ $g_2(x)=x_2\le 5$ $g_3(x)=x_1\le 3$
6	$x=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_1^2+x_2^2$	$g_1(x)=1-x_1\le 0$ $g_2(x)=x_1-5\le 0$ $g_3(x)=-x_2-3\le 0$ $g_4(x)=x_2+1\le 0$ $g_5(x)=x_1+x_2\le 0$

N задания	Проектные переменные	Функция цели	Ограничения
7	$X=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_1^2+4x_2^2$	$g_1(x)=1-x_1\le 0$; $g_2(x)=x_1-3\le 0$; $g_3(x)=2-x_2\le 0$; $g_4(x)=x_2-4\le 0$; $g_5(x)=x_2-x_1\le 0$
8	$X=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_1^2-4x_2^2$	$g_1(x)=1-x_1\le 0$; $g_2(x)=x_1-4\le 0$; $g_3(x)=2-x_2\le 0$; $g_4(x)=x_2-5\le 0$; $g_5(x)=4x_2-x_1\le 0$
9	$X=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_1^2-x_2$	$g_1(x)=-x_1-1\le 0$; $g_2(x)=x_1-2\le 0$; $g_3(x)=1-x_2\le 0$; $g_4(x)=x_2-4\le 0$; $g_5(x)=x_1+x_2-2\le 0$
10	$X=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_2^2-x_1$	$g_1(x)=1-x_1\le 0$; $g_2(x)=x_1-4\le 0$; $g_3(x)=-x_2-1\le 0$; $g_4(x)=x_2-2\le 0$; $g_5(x)=x_1+x_2-2\le 0$
11	$X=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_1^2+x_2^2+2x_1-2x_2+2$	$g_1(x)=-5-x_1\le 0$; $g_2(x)=x_1\le 0$; $g_3(x)=x_2-4\le 0$; $g_4(x)=x_1-x_2-2\le 0$
12	$X=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_1^2+x_2^2$	$g_1(x)=-2-x_1\le 0$; $g_2(x)=-x_2\le 0$; $g_3(x)=x_2-4\le 0$; $g_4(x)=x_1-2\le 0$, $g_5(x)=x_1+x_2-1\le 0$
13	$X=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_1^2+x_2^2+2x_1-4x^2+5$	$g_1(x)=-2-x_1\le 0$; $g_2(x)=x_1-2\le 0$; $g_3(x)=-2-x_2\le 0$; $g_4(x)=x_2-3\le 0$; $g_5(x)=x_1+x_2+1\le 0$
14	$X=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_1^2+x_2^2-2x_2+1$	$-2\le x_1\le 4$; $x_2-2\le 0$
15	$X=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_1^2+x_2^2-2x_1+1$	$1\le x_1\le 5$; $x_2+3\le 0$
16	$X=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_1^2+x_2^2-4x_1+4$	$g_1(x)=-x_1\le 0$; $g_2(x)=x_1-4\le 0$; $g_3(x)=x_2-5\le 0$; $g_4(x)=x_1-2x_2\le 0$
17	$X=(x_1, x_2)$	$f(x)=x_1^2+x_2^2+4x_1-4x_2+8$	$g_1(x)=x_1-x_2-1\le 0$; $g_2(x)=-5-x_1\le 0$; $g_3(x)=x_1-2\le 0$; $g_4(x)=x_2-3\le 0$

N задания	Проектные переменные	Функция цели	Ограничения
18	$X=(X_1,X_2)$	$f(X)=-X_1^2-X_2^2-2X_1+2X_2-2$	$g_1(X)=-3-X_1\le 0$; $g_2(X)=X_1-3\le 0$; $g_3(X)=-X_2\le 0$; $g_4(X)=X_2-4\le 0$; $g_5(X)=X_2-2X_1\le 0$
19	$X=(X_1,X_2)$	$f(X)=X_1^2+X_2^2-4X_1+2X_2+5$	$g_1(X)=-2-X_1\le 0$; $g_2(X)=X_1-4\le 0$; $g_3(X)=-3-X_2\le 0$; $g_4(X)=X_2-6\le 0$; $g_5(X)=X_1+X_2\le 0$
20	$X=(X_1,X_2)$	$f(X)=X_1^2-4X^2$	$g_1(X)=-X_1-2\le 0$; $g_2(X)=X_1-3\le 0$; $g_3(X)=2-X_2\le 0$; $g_4(X)=X_2-4\le 0$; $g_5(X)=X_1+X_2-2\le 0$
21	$X=(X_1,X_2)$	$f(X)=X_2^2-4X_1$	$g_1(X)=1-X_1\le 0$; $g_2(X)=X_1-4\le 0$; $g_3(X)=-X_2-1\le 0$; $g_4(X)=X_2-2\le 0$; $g_5(X)=X_1+X_2-2\le 0$
22	$X=(X_1,X_2)$	$f(X)=X_1^2+X_2^2+3$	$g_1(X)=-X_1-2\le 0$; $g_2(X)=X_1-3\le 0$; $g_3(X)=2-X_2\le 0$; $g_4(X)=X_2-4\le 0$; $g_5(X)=X_1+X_2-2\le 0$
23	$X=(X_1,X_2)$	$f(X)=X_1^2+X_2^2-4X_1+4$	$g_1(X)=-3-X_1\le 0$; $g_2(X)=X_1-3\le 0$; $g_3(X)=-X_2\le 0$; $g_4(X)=X_2-4\le 0$
24	$X=(X_1,X_2)$	$f(X)=X_1-X_2$	$g_1(X)=-4-X_1\le 0$; $g_2(X)=X_1-5\le 0$; $g_3(X)=-X_2-3\le 0$; $g_4(X)=X_2-4\le 0$; $g_5(X)=X_1+X_2\le 0$
25	$X=(X_1,X_2)$	$f(X)=X_1+X_2$	$g_1(X)=-4-X_1\le 0$; $g_2(X)=X_1-5\le 0$; $g_3(X)=-X_2-3\le 0$; $g_4(X)=X_2-4\le 0$; $g_5(X)=X_1-X_2\le 0$
	Задания повышенной сложности		
26	$X=(X_1,X_2)$	$f(X)=X_1^2+X_2^2+2X_2$	$g_1(X)=X_1^2+X_2^2-1=0$; $g_2(X)=X_1+2X_2-0{,}5\ge 0$; $g_3(X)=X_1\ge 0$; $g_4(X)=X_2\ge 0$

N задания	Проектные переменные	Функция цели	Ограничения
27	$X=(X_1, X_2)$	$f(X)=X_1^2+X_2$	$g_1(X)=X_1^2+X_2^2-9\le 0;$ $g_2(X)=-X_1-X_2+1\geq 0$
28	$X=(X_1, X_2)$	$f(X)=X_1^2+X_2$	$g_1(X)=X_1^2+X_2^2-9=0;$ $g_2(X)=-(X_1+X_2^2)+1\geq 0;$ $g_3(X)=(X_1+X_2)-1\le 0$
29	$X=(X_1, X_2)$	$f(X)=X_1^2+X_2^2-16X_1-10X_2$	$g_1(X)=11-X_1^2+6X_1-4X_2\geq 0;$ $g_2(X)=X_1\geq 0;\ g_3(X)=X_2\geq 0$
30	$X=(X_1, X_2)$	$f(X)=X_1X_2$	$g_1(X)=25-X_1^2-X_2^2\geq 0$
31	$X=(X_1, X_2)$	$f(X)=-X_1-X_2$	$g_1(X)=9-X_1^2-X_2^2\geq 0;$ $g_2(X)=X_1\geq 0;\ g_3(X)=X_2\geq 0$
32	$X=(X_1, X_2)$	$f(X)=4X_1-X_2^2-12$	$g_1(X)=25-X_1^2-X_2^2=0;$ $g_2(X)=10X_1-X_1^2+10X_2-X_2^2-34\geq 0;$ $g_3(X)=X_1\geq 0;\ g_4(X)=X_2\geq 0$

Автор-составитель Александр Васильевич С о л о в о в

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Редактор Е.Д.А н т о н о в а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к

Подписано в печать 20.12.84 г. Формат 60х84/16
Оперативная печать. Бумага оберточная белая.
Усл.п.л. 0,46. Уч.-изд.л. 0,4. Т.500 экз.
Заказ 26 Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт
имени академика С.П.Королева, г.Куйбышев, ул.Молодогвардейская, 151