

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Утверждено
редакционно-издательским
советом института
в качестве методических
указаний по курсу
«Методы и устройства
цифровой обработки сигналов»
для студентов

Даются указания к исследованию дискретного преобразования Фурье (ДПФ) с помощью машинного эксперимента на ЭВМ. Приводятся краткие сведения из теории ДПФ, алгоритмов его вычисления и приложений ДПФ для фильтрации сигналов.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальности 0701 "Радиотехника".

Рецензенты: А.И.М е р к у л о в, С.М.Т о с к и н

1. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

Цель и содержание работы

Настоящая работа имеет целью:

- а) изучение и практическое исследование на ЭВМ алгоритма и свойств дискретного преобразования Фурье (ДПФ);
- б) приобретение студентами навыков работы на ЭВМ.

Выполнению работы предшествует внеаудиторная подготовка, в процессе которой студентам надлежит ознакомиться с основами теории, свойствами и алгоритмами ДПФ.

Работа состоит из трех заданий. В первом из них изучается ДПФ на конкретном примере, во втором – теорема о свертке и в третьем – избирательные свойства ДПФ.

Задание 1. Рассчитывается дискретное преобразование простейшего сигнала-радиопульса прямоугольной формы с гармоническим заполнением и на этом примере изучаются некоторые свойства ДПФ.

Исходными данными для машинного эксперимента являются параметры сигнала: длительность импульса, несущая частота сигнала, верхняя граничная частота рабочего диапазона частот (т.е. диапазона частот, в пределах которого размещается спектр сигнала при возможном изменении его параметров). Некоторые варианты заданий приведены в табл.1.

Т а б л и ц а 1

Параметры сигнала	Номера вариантов						
	1	2	3	4	5	6	7
$T_{им}$, с	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-5}$	10^{-5}	$5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$
$f_{нес}$, Гц	10^3	10^4	$3 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^6$
f_{max} , Гц	$2,5 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^4$	10^4	10^6	$5 \cdot 10^5$	10^4	$5 \cdot 10^6$
Параметры сигнала	Номера вариантов						
	8	9	10	11	12	13	14
$T_{им}$, с	0,4	0,05	$4 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$
$f_{нес}$, Гц	60	450	$6 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^6$
f_{max} , Гц	10^2	10^3	10^4	10^5	$5 \cdot 10^4$	10^7	10^7

Задача вычисления спектра сигнала решается в следующей последовательности. Исходя из верхней граничной частоты рабочего диапазона в соответствии с теоремой отсчетов необходимо выбрать шаг (период) временной дискретизации T . Далее определить ширину спектра сигнала $\Delta f_u = 1/T_u$. Затем выбирается величина шага дискретизации по частоте F . Величину F рекомендуется выбрать так, чтобы получаемая спектрограмма обладала наглядностью. Для этого достаточно, чтобы на интервале частот, равном ширине спектра импульса Δf_u , размещалось $5+10$ отсчетов спектра. Теперь имеется возможность выбора размерности ДПФ: $N = 1/FT$.

Заметим, что величина N не должна превышать 1024 из-за ограничений, заложенных в программе. Кроме того, N должно удовлетворять условию $N = 2^M$, где M - целое число.

В ЭВМ данные вводятся в нормированном виде. Нормирующий множитель - период (или частота) временной дискретизации. Учитывая сказанное, определим нормированную длительность импульса $N_D = T_u/T$ и нормированную несущую частоту $F_T = f_{нес} T$. Здесь число N_D полагается целым (дробное число округляется до целых значений). Размерность ДПФ N определяется через число M в соответствии с выражением $N = 2^M$.

Ясно, что энергия спектра сигнала сосредоточена в ограниченной полосе частот. Поэтому в целях экономии бумаги и машинного времени ЭВМ целесообразно выводить на печать не весь массив чисел ДПФ размерностью N , а только ту его часть, в которой предположительно заключена информация о спектре сигнала. Примем, что ширина полосы частот, в которой спектральная плотность сигнала имеет существенное значение, составляет $f_{нес} - 3\Delta f_u, f_{нес} + 3\Delta f_u$. Тогда искомым фрагмент массива начинается элементом с номером $K_1 = (f_{нес} - 3\Delta f_u)/F$ и заканчивается при $K_2 = (f_{нес} + 3\Delta f_u)/F$. Здесь числа K_1, K_2 также округляются до целых значений. Заметим, что в программе предусматривается вывод на печать еще одной части массива выходных данных с начальным и конечным номерами элементов $N - K_2$ и $N - K_1$ соответственно. При решении задачи на ЭВМ числа N_D, F_T, M включаются в набор входных данных, в то время как числа K_1 и K_2 определяются в самой программе.

В соответствии с задачей машинного эксперимента для исследования выбран сигнал - отрезок гармонического колебания конечной длительности вида

$$S(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N} n k\right), \quad n = 0, 1, \dots, N_D - 1$$

Здесь безразмерная частота K связана с определенной выше частотой F_T соотношением $K = F_T N$.

Как видно, сигнал $s(n)$ представляет собой действительную дискретную последовательность. Вместе с тем, в ДПФ входная и выходная последовательности являются комплексными (см. п. 2.1). Для определения различия спектров действительного и комплексного сигналов в программе предусматривается проведение машинного эксперимента с тремя вариантами входных сигналов:

а) действительный сигнал

$$x_1(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N} nk\right) + j0;$$

б) комплексный (аналитический) сигнал

$$x_2(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N} nk\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{N} nk\right);$$

в) комплексно-сопряженный сигнал

$$x_3(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N} nk\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N} nk\right).$$

В программе с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) рассчитываются комплексный, амплитудный и фазовый спектры всех трех вариантов записи входного сигнала. На печать выводятся только амплитудный и фазовый спектры.

Анализ полученных спектрограмм состоит в следующем. Во-первых, необходимо сравнить амплитудный и фазовый спектры первого варианта сигнала со спектрами прямоугольного радиоимпульса, известными из теории сигналов по форме и структуре, ширине спектра, его местоположению на шкале частот. Далее необходимо сопоставить спектры, соответствующие второму и третьему вариантам сигнала, первому варианту, а также между собой. Учитывая свойства ДПФ, требуется обоснованно объяснить причины различия спектров.

Графики спектров и результаты анализа включаются в отчет по работе.

Задание 2. Изучается косвенный способ вычисления линейной свертки с помощью ДПФ (см. разд. 2.1). Это задание выполняется в два этапа. Сначала требуется вручную (с помощью микрокалькулятора) рассчитать линейную свертку двух последовательностей по формуле (8) (см. рисунок на с. 11). Затем эта же свертка рассчитывается по алгоритму (7) на ЭВМ с помощью БПФ.

Для выполнения этой части работы нужно выбрать длительности свертываемых последовательностей N_1 и N_2 и сами отсчеты последовательностей, а также размерность БПФ N . Все эти величины выбираются произвольно. Однако во избежание большого объема вычислений ре-

рекомендуется выбрать длительности N_1 и N_2 небольшими, так, чтобы требуемая размерность БПФ N составляла 16 или 32, т.е. необходимо выполнить условие $16 < N_1 + N_2 - 1 < 32$.

Расчет свертки по формуле (8) оформляется в виде таблицы. Следует также построить графики свертываемых последовательностей и самой свертки, наподобие рисунка на с. II.

В набор исходных данных для ЭВМ включаются длительности последовательностей N_1 и N_2 , отсчеты свертываемых последовательностей. Получаемая в результате эксперимента свертка выводится на печать. Эту свертку требуется сравнить с ожидаемой (предварительно рассчитанной). При наличии различия этих сверток объяснить причину этого различия.

Соответствующие таблицы данных, графики, полученные в результате предварительного расчета и машинного эксперимента, а также выводы вносятся в отчет.

Задание 3. Исследуются избирательные свойства БПФ. Способ этого исследования описывается в разд. 3. В п.2.4 показывается, что алгоритм БПФ по характеру своего воздействия на входные сигналы эквивалентен многоканальному гребенчатому цифровому фильтру. В процессе машинного эксперимента определяются амплитудно-частотные характеристики одного из каналов такого многоканального гребенчатого фильтра для двух случаев: без взвешивания (при прямоугольном временном окне) и с взвешиванием входной последовательности. В последнем случае в качестве весовой функции выбрано временное окно Кайзера. Функция, описывающая окно Кайзера, и влияние окна на избирательные свойства БПФ рассматриваются в п.2.4.

Как уже отмечалось, в расчетах цифровых систем удобно пользоваться безразмерными (нормированными по частоте дискретизации) величинами для времени и частоты. В таком случае величина шага дискретизации по времени $T=1$. Из соотношения $N=1/FT$ следует величина шага дискретизации спектра по частоте $F=1/N$. Эта величина составляет по сути дела полосу пропускания частотной характеристики эквивалентного полосового фильтра в БПФ.

Ясно, что при измерении частотной характеристики такого фильтра необходимо частоту гармонического тест-сигнала изменять с шагом, значительно меньшим, чем ширина полосы. В программе величина этого шага выбрана $\Delta F = F/10 = 1/(10N)$.

Таким образом, для выполнения рассматриваемого эксперимента необходимо выбрать размерность БПФ $N=2^M$ и номер исследуемого канала. В настоящей части работы нет необходимости в выборе большой размерности БПФ. Поэтому не следует выбирать $N > 128$. Заметим,

что значению $N = 128$ соответствует величина $M = 7$. Номер канала выбирается произвольно.

На печать выводятся по одной реализации входного сигнала без взвешивания и со взвешиванием, а также АЧХ, полученные для этих случаев.

Требуется проанализировать полученные результаты, сравнить их с ожидаемыми из теории, дать оценку избирательным свойствам ВПФ. Результаты анализа поместить в отчет.

1.1. Подготовка набора данных для ЭВМ

Ввод исходных данных в программу осуществляется с помощью операторов ввода *READ* и связанных с ними операторов *FORMAT*. Операторы ввода данных находятся в начале программы (см. приложение). Они содержат ссылочный номер оператора *FORMAT* и следующий за ним список вводимых переменных. Операторами *FORMAT* регламентируется формат записи исходных данных.

Операторы ввода данных имеют следующий вид:

- READ 1, NVAR, GRUPPA, FAM*
 1. *FORMAT (I2, 2X, I4, 2X, I2A1)*
READ 3, M, ND, FT
 3. *FORMAT (I2, 2X, I3, 2X, F6.4)*
READ 4, N1, N2
 4. *FORMAT (I2, 2X, I2)*
READ 5, (X(I), I=1, N1)
 5. *FORMAT (10 F5.2)*
READ 5, (H(I), I=1, N2)
READ 6, M, NKAN
 6. *FORMAT (I1, 2X, I3)*

Смысловое содержание идентификаторов приведено в табл.2

Т а б л и ц а 2

Идентификатор	Смысловое содержание	Формат	Примечание
<i>NVAR</i>	Номер варианта задания	I2	Длина записи не более 12 букв русского алфав.
<i>GRUPPA</i>	Номер академической группы	I4	
<i>FAM</i>	Фамилия студента	I2A1	

Идентификатор	Смысловое содержание	Формат	Примечание
<i>M</i>	Параметр БПФ	I2 или I1	
<i>ND</i>	Длительность импульса сигнала	I3	
<i>FT</i>	Несущая частота	F6.4	
<i>N1</i>	Число элементов в последовательности X	I2	
<i>N2</i>	Число элементов в последовательности H	I2	
<i>X</i>	Массив отсчетов последовательности X	F 5.2	Не более 16 чисел
<i>H</i>	Массив отсчетов последовательности H	F 5.3	Не более 16 чисел
<i>NKAN</i>	Номер канала БПФ, выбранного для исследования	I3	

Оператор *READ3, M, ND, FT* предназначен для ввода исходных данных первого задания работы: параметра БПФ-*M*, длительности импульса сигнала *ND* и несущей частоты *FT*.

С помощью операторов *READ4, N1, N2; READ 5(X(I), I = 1, N1); READ 5, (H(I), I=1, N2)* производится ввод исходных данных для второго задания. Первым из этих операторов задаются длительности свертываемых последовательностей, а вторым и третьим операторами - сами последовательности.

Оператор *READ6, M, NKAN* предназначен для ввода исходных данных третьего задания работы: параметра БПФ и номера канала, выбранного для исследования избирательных свойств БПФ.

Рассмотрим пример подготовки набора данных. Пусть исходными данными будут:

Задание 1: $M = 9, ND = 75, FT = 0,25.$

Задание 2: $N1 = 12, N2 = 8.$

Последовательность X:

1,0; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0; 6,0; 7,0; 8,0; 9,0; 10,0; 11,0; 12,0.

Последовательность H:

1,0; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3.

Задание 3: $M = 7, NKAN = 20.$

кроме того, возьмем $NVAR = 21, GRUPPA = 551, FAM =$ ИВАНОВ. Тогда набор данных будет иметь вид:

// GO SYSIN DD *

2I 055I ИВАНОВ

09 075 0.25

I2 08

01.00 02.00 03.00 04.00 05.00 06.00 07.00 08.00 09.00

10.00 11.00 12.00

01.00 00.90 00.80 00.70 00.60 00.50 00.40 00.30

7 020

/ ж

2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

2.1. Дискретное преобразование Фурье и его свойства

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) чрезвычайно полезно во многих применениях. Оно составляет основу алгоритмов фильтрации сигналов в частотной области, спектрального анализа, цифровой обработки изображений и т.д.

По своей сути ДПФ является способом численного вычисления на ЭВМ обычного интегрального преобразования Фурье и в этом смысле является его дискретным эквивалентом. В отличие от интегрального преобразования, в ДПФ как функция времени, так и соответствующая ей спектральная функция могут быть заданы или определены только в дискретных точках соответственно временной или частотной шкалы. Кроме того, число отсчетов (область определения) сигнала и спектра должны быть конечными, так как любая ЭВМ имеет ограниченный объем памяти. Этими обстоятельствами определяются некоторые специфические свойства ДПФ, которые необходимо учитывать при его практическом использовании.

Как известно /1,2,3,4/, ДПФ определяется парой формул:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad (1)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

где $x(n)$ - дискретная функция времени (сигнал);

$X(k)$ - ДПФ этой функции. Заметим, что отсчеты в последовательностях $x(n)$ и $X(k)$ полагаются комплексными числами.

В формулах (1), (2) принято обозначение $W_N = e^{-j2\pi/N}$. Из (1), (2) видно, что дискретный сигнал $x(n)$ и его ДПФ $X(k)$ содержат

ровно по N отсчетов. Можно показать, что величина N связана с шагом дискретизации по времени T и шагом дискретизации по частоте F соотношением $N = 1/FT$.

Формулами дискретного преобразования Фурье (1), (2) определяется связь между конечными множествами $x(n)$ и $X(k)$. Вместе с тем из теории сигналов известно, что дискретный сигнал имеет бесконечный периодический спектр. Кроме того, в теории сигналов линейчатому (дискретному) спектру соответствует бесконечный периодический сигнал. Кажущееся противоречие между отмеченными положениями теории сигналов и ДПФ нетрудно разрешить, если предположить, что в (1) и (2) как сигнал $x(n)$, так и его спектр $X(k)$ суть бесконечные периодические последовательности с периодами по N отсчетов. Тогда формулы (1) и (2) связывают между собой один период последовательности $x(n)$ с одним периодом последовательности $X(k)$. Поэтому применительно к ДПФ последовательностей, определенных на конечных интервалах, говорят о его подразумеваемой периодичности. Именно этим свойством периодичности ДПФ обусловлены многие его особенности. Перечислим основные свойства ДПФ.

Линейность. ДПФ суммы двух последовательностей равно сумме ДПФ слагаемых. Иначе, если

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n),$$

то

$$X(k) = aX_1(k) + bX_2(k).$$

Сдвиг последовательности. Если $\text{ДПФ}\{x(n)\} = X(k)$, то

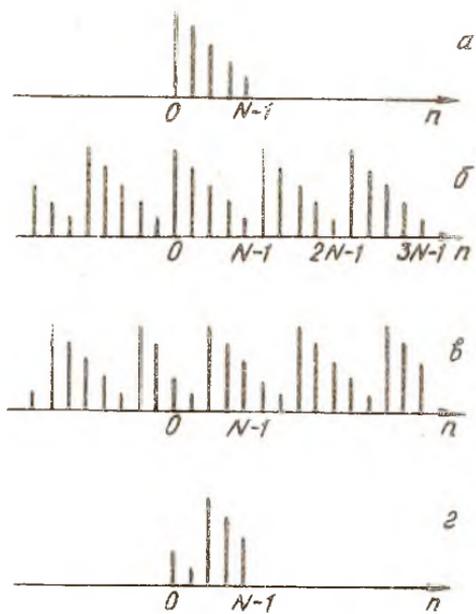
$$\text{ДПФ}\{x(n-n_0)\} = X(k)e^{-j(2\pi/N)kn_0}.$$

Это свойство означает, что умножению ДПФ в частотной области на комплексную экспоненту $e^{-j(2\pi/N)kn_0}$ во временной области соответствует

сдвиг на n_0 тактов. Применительно к конечной последовательности из N отсчетов такой сдвиг оказывается циклическим, при нем в зависимости от направления сдвига отсчеты из конца последовательности переставляются в ее начало или наоборот.

Свойство циклическости сдвига, которое вытекает из подразумеваемой периодичности, наиболее просто показать на примере. На рис.1, а показана последовательность $x(n)$ конечной длины $n = 0, 1, \dots, N-1$. Из этой последовательности периодическим повторением образована бесконечная циклическая последовательность $\tilde{x}(n)$ (здесь и далее тильда \sim - знак периодичности последовательности). Эта последовательность показана на рис.1, б. Ясно, что ДПФ последовательностей $x(n)$ и $\tilde{x}(n)$ совпадают. Умножение этого ДПФ на $e^{-j(2\pi/N)kn_0}$ (на рис.1 $n_0 = 2$) приводит к новому ДПФ, которому соответствует новая

последовательность $\tilde{x}_1(n)$, отличающаяся от исходной последовательности сдвигом на n_0 тактов: $\tilde{x}_1(n) = \tilde{x}(n - n_0)$. Последовательность $x_1(n)$ изображена на рис. 1, в. Один период этой последовательности на интервале $n = 0, 1, \dots, N-1$, образующий конечную последовательность $x_1(n)$, представлен на рис. 1, г. Нетрудно видеть, что последовательность $x_1(n)$ отличается от исходной последовательности $x(n)$ круговым сдвигом на n_0 тактов, при котором, в зависимости от знака n_0 , отсчеты переставляются из начала последовательности в ее конец или, наоборот, из конца в начало.



Р и с. 1.

Симметрия. Если последовательность $x(n)$ является действительной, то ее ДПФ имеет четную действительную и нечетную мнимую части:

$$Re X(\lambda) = Re X(-\lambda) = Re X(N-\lambda);$$

$$Im X(\lambda) = -Im X(-\lambda) = -Im X(N-\lambda). \quad (3)$$

Если $x(n)$ является чисто мнимой последовательностью, то ДПФ имеет нечетную действительную и четную мнимую части:

$$Re X(\lambda) = -Re X(-\lambda) = -Re X(N-\lambda);$$

$$Im X(\lambda) = Im X(-\lambda) = Im X(N-\lambda). \quad (4)$$

На практике последовательности во временной области обычно являются действительными. В этом случае, при необходимости, две временные последовательности могут быть объединены в одну комплексную последовательность, действительную часть которой составляет первая последовательность, а мнимую – вторая. Используя свойства симметрии (3), (4), ДПФ совокупной комплексной последовательности можно разделить на две также комплексные подпоследовательности, являющиеся

дискретными преобразованиями Фурье исходных действительных временных последовательностей. Таким образом, представляется возможным с помощью одной операции вычисления преобразования получить ДПФ двух последовательностей.

Периодическая (круговая) свертка. Пусть заданы две последовательности $x(n)$ и $h(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Свертку этих последовательностей можно получить косвенным способом с помощью ДПФ. В самом деле, определим ДПФ

$$X(\kappa) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n\kappa}, \quad \kappa = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$H(\kappa) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) W_N^{n\kappa}, \quad \kappa = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5, a)$$

вычислим произведение $Y(\kappa) = H(\kappa)X(\kappa)$, $\kappa = 0, 1, \dots, N-1$. Тогда обратное дискретное преобразование Фурье

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{\kappa=0}^{N-1} Y(\kappa) W_N^{-n\kappa}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5, b)$$

тождественно совпадает со сверткой вида [1, 2, 3, 4]

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m)h(m). \quad (6)$$

Свертке (6) присуща та особенность, что она является периодической (циклической, круговой). На этой особенности остановимся ниже, а пока отметим, что вычисление свертки с помощью ДПФ производится по схеме:

операция 1	$x(n) \rightarrow X(\kappa);$	
	$h(n) \rightarrow H(\kappa);$	
операция 2	$Y(\kappa) = X(\kappa)H(\kappa);$	(7)
операция 3	$Y(\kappa) \rightarrow y(n).$	

Поясним получение свертки на примере

На рис. 2, а и б показаны свертываемые последовательности $x(n)$ и $h(n)$ с длительностью по N отсчетов каждая. Так как свойства ДПФ исходят из подразумеваемой периодичности последовательностей, на рис. 2, в и г показаны периодические последовательности $\tilde{x}(n)$ и $\tilde{h}(n)$, сформированные из исходных $x(n)$ и $h(n)$. Далее получена свертка по формуле (6), которую для периодических последовательностей $\tilde{x}(n)$, $\tilde{h}(n)$ можно переписать в виде

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m)\tilde{h}(n-m).$$

Эта свертка показана на рис. 2, д. Как видно, свертка $\tilde{y}(n)$ пред-

ставляет собой бесконечную периодическую последовательность, период которой составляет N отсчетов и определен на интервале $n=0, 1, \dots, N-1$. На этом интервале из бесконечной последовательности $\tilde{y}(n)$ выделена конечная подпоследовательность $y(n)$, которая и является сверткой, получаемой по (5) или (7) (рис.2,е).

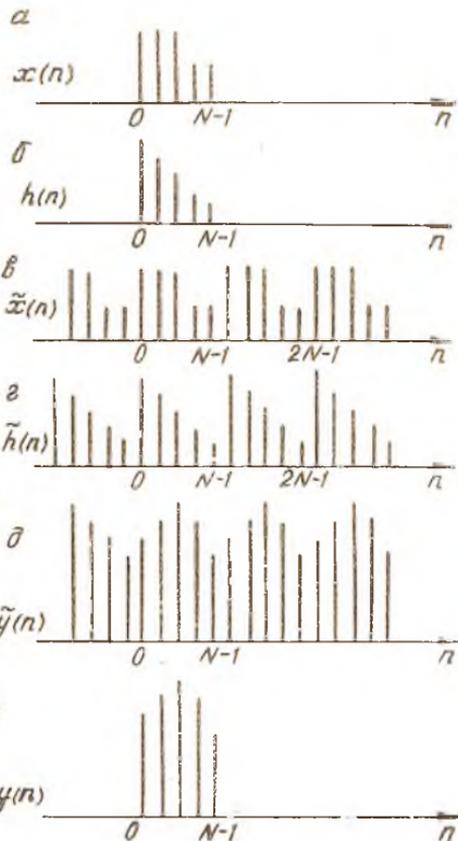
Суть периодичности свертки (6) ясна из примера. Заметим, что в большинстве практических задач интерес представляет не циклическая, а линейная или аperiodическая свертка.

Линейная свертка $y_{ЛН}(n)$ определяется выражением /1,2,3,4/

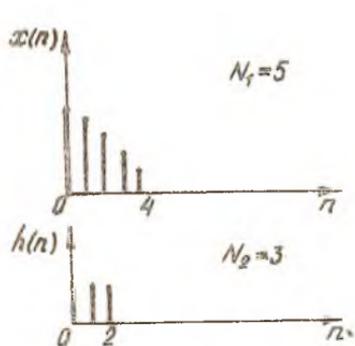
$$y_{ЛН}(n) = \sum_{m=0}^n x(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^n x(n-m)h(m). \quad (8)$$

Пример линейной свертки двух конечных последовательностей, из которых одна имеет длительность N_1 , а вторая - N_2 отсчетов, показана на рис.3. Как видно, длительность линейной свертки составляет $N_1 + N_2 - 1$ отсчетов.

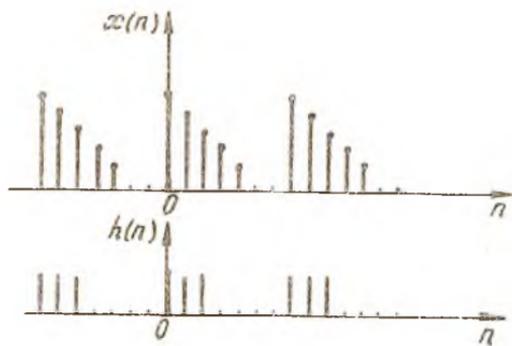
Линейная и круговая свертки одних и тех же последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ в общем случае не совпадают. Однако существует прием, с помощью которого можно обеспечить тождественное равенство круговой свертки (на одном периоде) с линейной сверткой. Для этого необходимо каждую из свертываемых последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ дополнить нулевыми отсчетами до длины $N = N_1 + N_2 - 1$ отсчетов. При этом образуются две последовательности одинаковой длины, которая равна длине линейной свертки. Далее эти последовательности свертываются в соответствии с алгоритмом (5), (7) рассмотренным выше способом. Пример такой свертки показан на рис.4.



Р и с. 2.



Р и с. 3.



Р и с. 4.

Существуют алгоритмы вычисления ДПФ (которые рассматриваются ниже), обладающие высокой эффективностью. Благодаря этому при большой длине свертываемых последовательностей косвенный алгоритм (5), (7) обладает преимуществом перед прямой сверткой (8), а посему имеет широкое практическое применение.

Заметим, что алгоритм свертки (8) выражает существо операций, выполняемых в нерекурсивных (трансверсальных) цифровых фильтрах над сигналами. Поэтому алгоритм (7) можно рассматривать как алгоритм фильтрации сигналов в частотной области. В такой интерпретации косвенной свертки (7) функции $X(k)$, $Y(k)$ имеют смысл дискретных спектров входного и выходного сигналов фильтра соответственно, а $H(k)$ — суть дискретная выборка из частотной характеристики цифрового фильтра.

2.2. Алгоритмы вычисления ДПФ

Быстрое преобразование Фурье

ДПФ, как уже отмечалось, находит применение для решения широкого класса задач. Поэтому отыскание экономных алгоритмов ДПФ, требующих наименьших вычислительных затрат, имеет чрезвычайно большое значение в цифровой обработке сигналов.

В зависимости от характера решаемой задачи может потребоваться вычисление ДПФ в одной точке (нескольких точках) частотного интервала или на всем множестве дискретных частот (т.е. всех спектральных компонент).

Для вычисления ДПФ на всем множестве дискретных частот $k=0,1,\dots,N-1$ предложен класс высокоэффективных алгоритмов, имеющих общее наименование – быстрое преобразование Фурье (БПФ). Алгоритмы БПФ позволяют существенно уменьшить, особенно при больших N , количество наиболее сложных арифметических операций (умножений) по сравнению с прямым вычислением ДПФ по формуле (1). Экономия в количестве операций умножения достигается за счет свойства периодичности и симметрии комплексной экспоненты

$$W_N^{nk} = W_N^{n(n+N)k} = W_N^{(n+N)k} ; W_N^{k(N-n)} = (W_N^{nk})^*$$

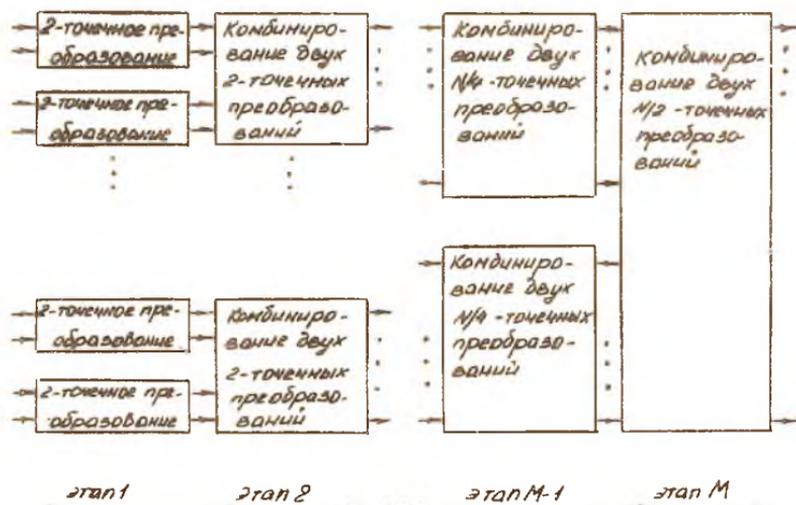
и упорядочению вычислений. Здесь $*$ – знак комплексно-сопряженной величины.

Обоснование и свойства БПФ изложены во многих руководствах /1,2,3,4/. Поэтому здесь, опустив обоснование, мы опишем один из алгоритмов БПФ, известный как алгоритм с прореживанием по времени по основанию 2. Заметим, что алгоритмы БПФ другого класса, "с прореживанием по частоте", которые мы здесь не рассматриваем, обладают свойствами, аналогичными свойствам БПФ с прореживанием по времени. В алгоритмах по основанию 2 размерность ДПФ выбирается в соответствии с условием $N=2^M$, где M – целое число.

Алгоритм БПФ выполняется за $M=\log_2 N$ этапов.

Рассмотрим сначала общую структуру алгоритма, не касаясь пока сути выполняемых арифметических операций. В БПФ множество отсчетов входной последовательности $x(n)$ /см.(1)/ предварительно упорядочивается. Такое упорядочение состоит в перестановке отсчетов $x(n)$ по некоторому правилу, на котором остановимся ниже. Упорядоченное множество из N отсчетов входной последовательности $x(n)$ разбивается на $N/2$ подпоследовательностей, каждая из которых содержит всего по два отсчета.

На первом этапе алгоритма БПФ (рис.5) над отсчетами всех таких подпоследовательностей выполняется двухточечное ДПФ. На следующем этапе БПФ комбинированием двухточечных преобразований образуются четырехточечные преобразования. Далее подобным образом осуществляется наращивание размерности парциальных преобразований. В результате на последнем M -м этапе образуется N -точечное преобразование как комбинация двух $N/2$ -точечных.



Р и с. 5.

В алгоритме БПФ как вычисление двухточечных ДПФ, так и комбинирование преобразований низкого порядка в преобразования более высокого порядка выполняются с помощью однотипной так называемой базовой операции.

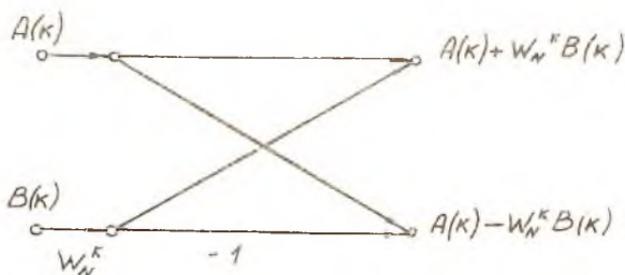
Базовая операция в алгоритме с прореживанием по времени имеет вид

$$A_2(k) = A_1(k) + W_N^k B_1(k);$$

$$B_2(k) = A_1(k) - W_N^k B_1(k).$$

(9)

Удобное графическое представление базовой операции и всего алгоритма в целом можно получить с помощью направленных графов. Направленный граф базовой операции (9) изображен на рис.6. Граф состоит



Р и с. 6.

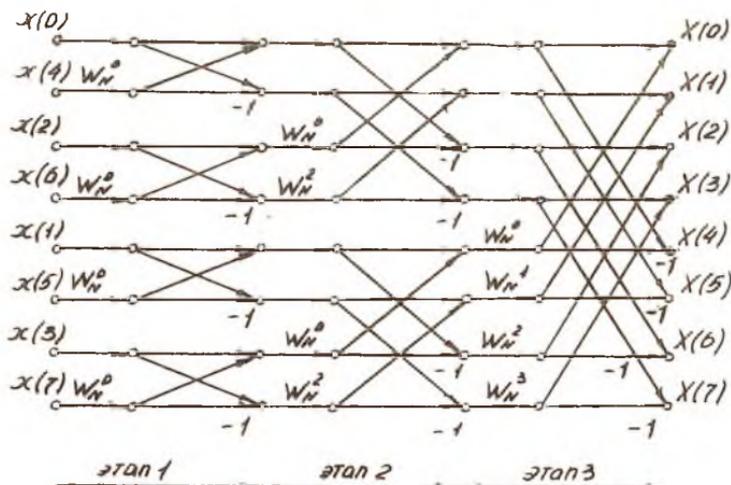
из ветвей (стрелок) и узлов (кружков). Ветвь означает перенос от узла к узлу. Несколько ветвей, исходящих из одного узла, передают равные числа. Поступление в один узел нескольких ветвей означает суммирование в узле поступающих по ветвям чисел. Надпись рядом с ветвью символизирует множитель, на который умножается передаваемое по ветви число. Надпись рядом с узлом характеризует имеющуюся в этом узле величину.

Как видно из графа, для выполнения базовой операции требуются два сложения комплексных чисел и одно комплексное умножение. (Напомним, что все величины, входящие в (9) — комплексные). Умножение на "−1" не учитываем, так как это, по сути дела, не умножение, а инверсия знака числа. Операция инверсии знака на ЭВМ выполняется достаточно просто.

Теперь рассмотрим граф алгоритма БПФ с прореживанием по времени. Такой граф для $N=2^3=8$ представлен на рис. 7. Алгоритм, как видно, состоит из $\log_2 8=3$ этапов. На каждом из этапов выполняется $N/2=4$ базовых операций. На первом этапе — это четыре двухточечных преобразования; на втором этапе четыре двухточечных преобразования комбинируются в два четырехточечных; на третьем этапе два четырехточечных — одно восьмиточечное.

Покажем справедливость алгоритма БПФ на конкретном примере. Сначала убедимся во взаимном соответствии базовой операции и двухточечного преобразования Фурье. Пусть дана последовательность $f(n)$, $n = 0, \dots, N-1$ при $N = 2$, т.е. состоящая из двух отсчетов $f(0)$ и $f(1)$. Требуется определить ДПФ этой последовательности. В соответствии с (1) имеем

$$F(k) = \sum_{n=0}^1 f(n) W_2^{nk}, \quad k = 0, 1,$$



Р и с. 7.

или то же самое в развернутом виде:

$$F(0) = f(0) + W_2^0 f(1) = f(0) + f(1);$$

$$F(1) = f(0) + W_2^1 f(1) = f(0) - f(1),$$

(10)

где $W_2 = e^{-j\pi} = -1$.

Как видно из (10), для двухточечного преобразования требуются только два комплексных сложения, а операция умножения вообще отсутствует. Обратимся далее к графу двухточечных преобразований, выполняющихся на первом этапе БПФ (рис.7). Если учесть, что $W_N^0 = 1$, то взаимосоответствие графа и формул (10) становится очевидным. Теперь убедимся в идентичности результатов прямого вычисления ДПФ по формуле (1) и по алгоритму БПФ. Для этого вычислим сначала значение 8-точечного ДПФ в некоторой произвольной точке прямым способом, например при $K = 3$. Полагая в (1) $K = 3$ и $N = 8$, получим

$$X(3) = x(0)W_8^0 + x(1)W_8^3 + x(2)W_8^6 + x(3)W_8^9 + x(4)W_8^{12} + x(5)W_8^{15} + x(6)W_8^{18} + x(7)W_8^{21}.$$

Учтем, что $W_8^{m8} = 1$, $W_8^{m8+4} = -1$ при $m = 0, 1, \dots$

Тогда

$$X(3) = x(0) + x(1)W_8^3 - x(2)W_8^2 + x(3)W_8 - x(4) - x(5)W_8^3 + x(6)W_8^2 - x(7)W_8 \quad (11)$$

Далее определим $X(3)$ по графу БПФ (рис.7). Для этого проследим все пути, ведущие от входных точек $x(0), x(1), \dots, x(7)$ в точку $X(3)$ и учтем все множители, представленные около ветвей графа на каждом таком пути. Получим

$$X(3) = x(0) + x(1)W_8^3 - x(2)W_8^2 - x(3)W_8^5 - \\ - x(4) - x(5)W_8^3 + x(6)W_8^2 + x(7)W_8^5.$$

Так как $W_8^5 = -W_8$, то эту формулу перепишем в виде

$$X(3) = x(0) + x(1)W_8^3 - x(2)W_8^2 + x(3)W_8 - \\ - x(4) - x(5)W_8^3 + x(6)W_8^2 - x(7)W_8. \quad (12)$$

Как и следовало ожидать, выражения (11) и (12) совпадают. Таким образом, прямое вычисление ДПФ и вычисление БПФ приводят к одинаковым результатам, что мы и хотели показать. Отметим некоторые свойства и особенности БПФ.

Количество арифметических операций. Как отмечалось, алгоритм БПФ выполняется в $\log_2 N$ этапов. Каждый этап содержит $N/2$ базовых операций. В свою очередь, каждая базовая операция требует выполнения одного комплексного умножения и двух комплексных сложений. Итого, для выполнения алгоритма БПФ требуется приблизительно $(N/2)\log_2 N$ комплексных умножений и $N\log_2 N$ комплексных сложений или $2N\log_2 N$ действительных умножений и $2N\log_2 N$ действительных сложений. Оговорку "приблизительно" нужно понимать в том смысле, что на первом этапе БПФ вообще не требуются умножения. Кроме того, при значениях поворачивающих множителей $W_N^0 = 1, W_N^{N/2} = -1$ также отсутствует необходимость в операциях умножения.

Нетрудно видеть, что для вычисления ДПФ прямым способом по (1) требуется N комплексных умножений и $N-1$ комплексных сложений. Вычисление ДПФ на всем множестве частот приводит к необходимости выполнения N^2 комплексных умножений и $N(N-1)$ комплексных сложений.

Проведем сравнение вычислительных затрат БПФ и прямого способа вычисления ДПФ. В качестве критерия выберем операции умножения как наиболее сложные. Сравнение дает коэффициент экономии $\epsilon = N^2 / (\frac{N}{2} \log_2 N) = 2N / \log_2 N$.

При больших N алгоритм БПФ существенно экономнее прямого метода. Так, при $N = 1024$ объем вычисления сокращается примерно на два порядка. Это позволяет выполнять обработку сигналов, включающую вычисление ДПФ в случаях, в которых до появления БПФ она считалась практически неосуществимой.

Экономия объема памяти ЗУ ЭВМ. Алгоритм БИФ позволяет выполнять вычисления с замещением, суть которого состоит в следующем. Из направленного графа (рис.7) видно, что на всех этапах БИФ в каждой базовой операции для вычисления двух элементов выходных данных необходимы только два элемента данных входного массива. Эти (входные) элементы в последующих вычислениях больше не используются. Поэтому вновь вычисленные данные могут заноситься в ячейки памяти ЭВМ, в которых хранились исходные данные. При таком замещении экономится требуемая память ЭВМ.

Необходимость упорядочения последовательностей. Выше упоминалось об упорядочении (перестановке) элементов входного массива БИФ. Приведем сначала правило такой перестановки.

Порядок, в котором задаются номера элементов упорядоченной последовательности, могут быть определены с помощью процедуры двоичной инверсии. Такая процедура состоит в преобразовании десятичных номеров исходной последовательности в двоичные числа (здесь имеются в виду целые двоичные числа без знака), инверсии двоичного кода и обратного преобразования двоично-инвертированных чисел в десятичные. Пример метода двоичной инверсии для восьмиточечного БИФ приведен в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Исходный номер	Двоичный код	Инверсия	Номер упорядоченной последовательности
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Необходимость двоично-инверсной перестановки элементов массива чисел свойственна всем алгоритмам БИФ с замещением. Особенность описанного выше алгоритма состоит в том, что входная последовательность имеет двоично-инверсный порядок, а выходная – естественную нумерацию элементов. Существуют алгоритмы, в которых наоборот, входная последовательность нумеруется естественным образом, в то время как элементы выходного массива получают двоично-инверсные номера.

При цифровой обработке сигналов в случаях, когда отсчеты сигнала поступают на вход БПФ-процессора последовательно во времени, вследствие рассмотренного свойства алгоритма БПФ не представляется возможным вовлечь в обработку каждый вновь поступивший отсчет. Для выполнения БПФ нужно предварительно накопить весь массив входного сигнала объемом в N отсчетов. Такое накопление приводит к задержке в выдаче результата обработки и к необходимости использования буферных запоминающих устройств. Все это создает трудности при работе в реальном масштабе времени, которые, однако, в большинстве практических ситуаций оказываются разрешимыми.

2.3. Вычисление обратного ДПФ с помощью алгоритма прямого ДПФ

Ясно, что идеи, положенные в основу быстрых алгоритмов прямого ДПФ, в равной степени приложимы и к обратному ДПФ. Однако практически нет необходимости хранить в памяти ЭВМ два разных алгоритма преобразования Фурье, так как для вычисления обратного ДПФ можно использовать алгоритм прямого БПФ.

Как уже отмечалось, обратное ДПФ N -точечной последовательности $X(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ описывается формулой

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n=0, 1, \dots, N-1. \quad (13)$$

Умножим (13) на N и возьмем от левой и правой частей комплексно-сопряженные выражения:

$$Nx^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk}. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что сумма в правой части (14) по своей форме является прямым дискретным преобразованием Фурье для последовательности $X^*(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$, а поэтому может быть вычислена с помощью алгоритма БПФ. Для получения искомой последовательности $x(n)$ результат этой операции необходимо почленно разделить на N и взять от него комплексно-сопряженное выражение

$$x(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right]^*.$$

2.4. Связь между БПФ и цифровой фильтрацией сигналов

Можно показать, что между ДПФ и цифровой фильтрацией сигналов имеется глубокая связь. По сути дела алгоритм БПФ эквивалентен многополосному гребенчатому фильтру. Чтобы уяснить существование этой эквивалентности, обратимся сначала к обычному интегральному преобразованию Фурье.

Рассмотрим интегральное преобразование Фурье ограниченного по длительности аналогового процесса $x_a(t)$, $0 \leq t \leq T_c$:

$$X_a(jf) = \int_0^{T_c} x_a(t) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (15)$$

Частота f в (15) может принимать любые произвольные значения. Выберем из всего множества частот некоторое значение, согласованное с длительностью сигнала T_c , а именно $f_c = k/T_c$, где k - произвольное целое число. Тогда для спектра (15) сигнала $x_a(t)$ на частоте f_c можно написать

$$X_a(jf_c) = \int_0^{T_c} x_a(t) e^{j2\pi f_c(T_c - t)} dt.$$

Нетрудно видеть, что правая часть (14) представляет собой свертку функции $e^{j2\pi f_c t}$ и $x_a(t)$. Следовательно, $X_a(jf_c)$ может быть получено путем фильтрации процесса $x_a(t)$ с помощью фильтра с импульсной характеристикой $h_a(t) = e^{j2\pi f_c t} u(t)$, где $u(t)$ - функция единичного скачка, $u(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $u(t) = 0$ при $t < 0$. Физически такую импульсную характеристику имеет полосовой фильтр без потерь с центральной частотой f_c .

Подобным образом дискретное преобразование Фурье

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)nk}$$

можно получить с помощью КИХ цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h_k(n) = e^{j(2\pi/N)nk}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Алгоритм БПФ позволяет получить сразу N спектральных составляющих $X(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Поэтому этот алгоритм эквивалентен гребенке из N цифровых фильтров, "настроенных" встык на частоты $f_k = k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Передаточная функция k -го фильтра гребенки имеет вид

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)nk} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1} e^{j(2\pi/N)k}}. \quad (16)$$

Полагая в (16) $Z = e^{j\omega T}$, для АЧХ эквивалентного фильтра получим

$$|H(e^{j\omega T})| = \frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2 - \pi K/N)}$$

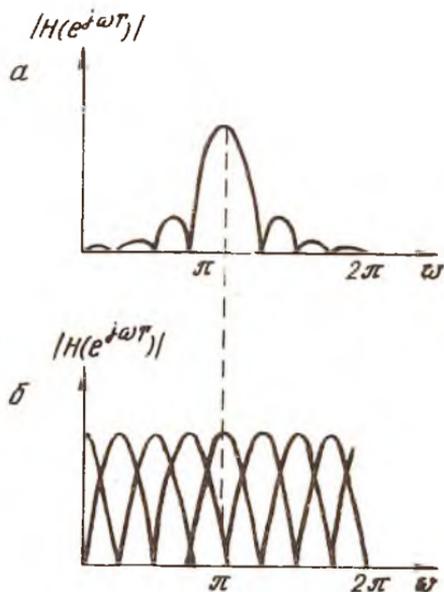
На рис. 8, а представлен график АЧХ одного фильтра для $K = 4$ при $N = 8$, а на рис. 8, б – графики АЧХ всей гребенки. Как видно, АЧХ фильтров такой гребенки имеют большие боковые лепестки, благодаря чему возможна "утечка" энергии спектра в полосу частот соседних каналов.

В самом деле, сигнал, спектр которого лежит в полосе некоторого канала БПФ, благодаря лепестковости характеристик будет "просачиваться" также в соседние каналы. Поэтому отсчеты выходной последовательности БПФ, соответствующие этим каналам, будут отличны от нуля, хотя спектр сигнала в частотные полосы этих каналов не попадает.

Такого рода нежелательное явление можно ослабить путем взвешивания входной последовательности, т.е. почленного умножения на весовую последовательность, именуемую временным окном.

Рассмотрим характер влияния окна на показатели гармонического анализа [5]. С методической точки зрения нам проще оперировать с непрерывными спектрами дискретных последовательностей. Поэтому временно отвлечемся от дискретного преобразования Фурье.

Предположим, что входная последовательность $x(n)$ бесконечна во времени и имеет спектр $X(e^{j\omega T})$. Последовательность входного сигнала конечной длины получим как результат почленного умножения бесконечной последовательности на временное окно $W(n)$ конечной длины. Ясно, что окно выделяет отсчеты последовательности $x(n)$ на интервале, на котором $W(n) \neq 0$, и обращает в нуль отсчеты в области, где $W(n) = 0$.



Р и с. 8.

Учитывая сказанное, для спектра взвешенной последовательности можно написать

$$X_W(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(n)x(n)e^{-j\omega nT}, \quad (17)$$

где $W(n) = 0$ при $|n| > N/2$, N четное, $W(n) = W(-n)$. Посмотрим, как влияет окно на спектральную оценку $X(e^{j\omega T})$. Из уравнения (17) видно, что преобразование $X_W(e^{j\omega T})$ - это преобразование произведения. Из теории сигналов известно [1], что преобразование Фурье произведения эквивалентно свертке двух Фурье-преобразований:

$$X_W(e^{j\omega T}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega T}) W(e^{j(\omega T - \Omega T)}) d\Omega, \quad (18)$$

где $W(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} W(n)e^{-j\omega nT}$ - преобразование Фурье (спектр) окна.

Во избежание недоразумений обратим внимание на сходство обозначений спектра временного окна $W(e^{j\omega T})$ и поворачивающих множителей $W_N = e^{j2\pi f/N}$ в ДПФ /см. (I)/. Ясно, что это совершенно различные функции.

Уравнение (18) является ключом к пониманию влияния конечной длины последовательности данных на результат их обработки. Легче всего пояснить это влияние на конкретном примере. Возьмем дискретное прямоугольное окно $W(n) = 1$. Это случай ограниченной по длительности последовательности, который мы рассматривали выше, в начале настоящего раздела. Известно, что спектр прямоугольного окна имеет вид [1/

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{\sin N\omega T/2}{\sin \omega T/2} e^{j\omega T/2}.$$

Преобразование $W(e^{j\omega T})$ является периодической функцией частоты.

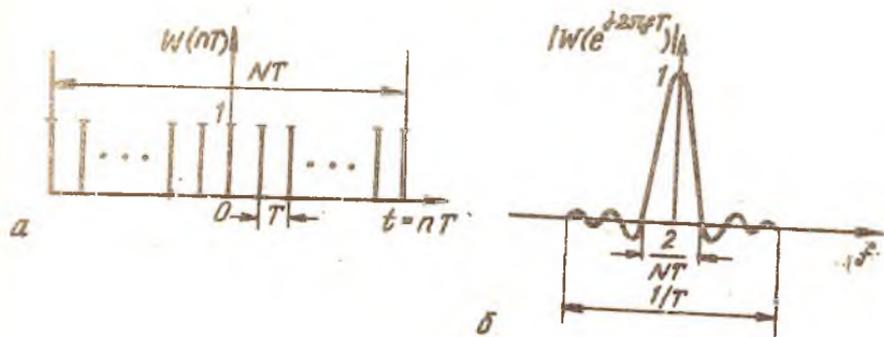
Прямоугольное временное окно $W(n)$ и один период модуля функции $W(e^{j\omega T})$ показаны на рис. 9, а и б соответственно.

Рассмотрим сначала случай, когда сигнал $x(n)$ - гармонического колебания частоты ω_0 : $x(n) = e^{j\omega_0 n}$. Ясно, что спектр такого сигнала состоит из одной спектральной линии и имеет вид $\delta(\omega - \omega_0)$ где $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака.

Напомним, что δ - функция Дирака имеет значения

$$\delta(\omega - \omega_0) = \begin{cases} \infty & \text{при } \omega = \omega_0; \\ 0 & \text{при } \omega \neq \omega_0. \end{cases}$$

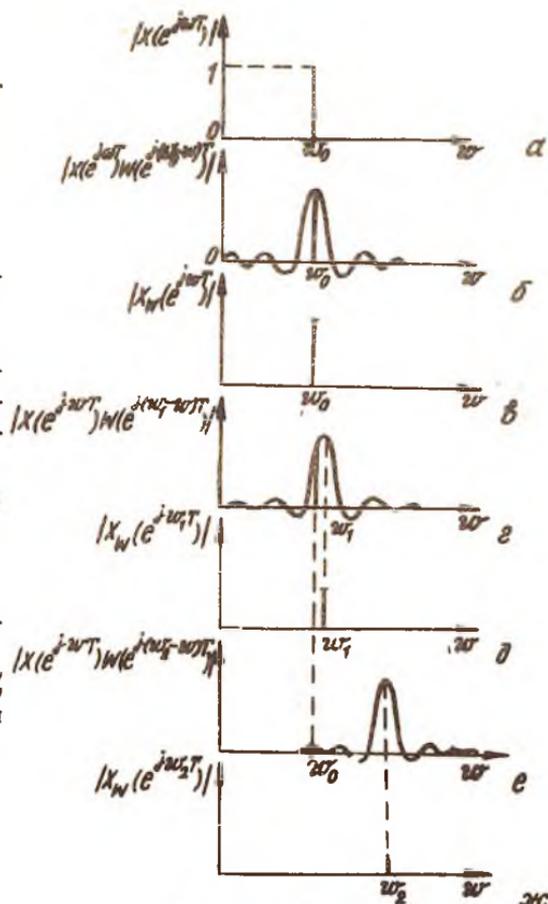
Площадь δ - функции равна единице: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) d\omega = 1.$



Р и с. 9.

Модуль спектра сигнала $|X(e^{j\omega T})|$ приведен на рис.10, а. На этом рисунке условно показана площадь спектральной линии, равная единице в соответствии с вышеуказанным свойством δ -функции.

Теперь определим значения спектра сигнала, ограниченного по длительности временным окном $W(n)$ на частотах $\omega_0, \omega_1, \omega_2$, которые получаются по формуле (18). Для случая, когда $\omega = \omega_0$, подынтегральная функция в (18) показана на рис.10, б, а оценка спектра $|X_W(e^{j\omega_0 T})|$, равная площади δ -функции (подынтегральной функции), — на рис.10, в. Ясно, что на частоте ω_0 оценка спектра и спектр гармонического сигнала взаимно соответствуют.

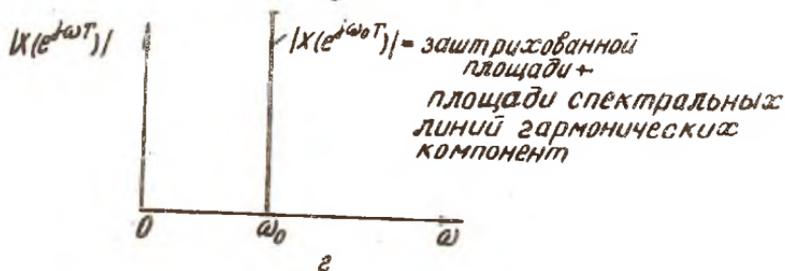
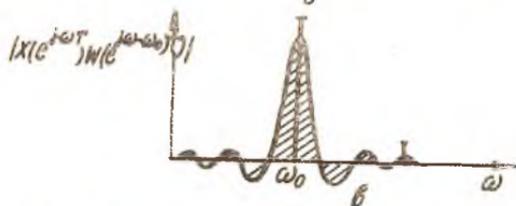
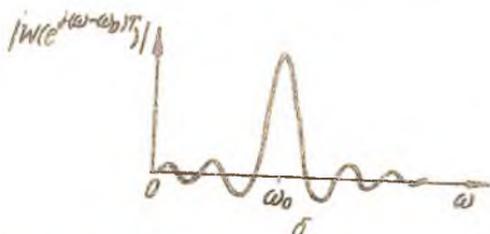
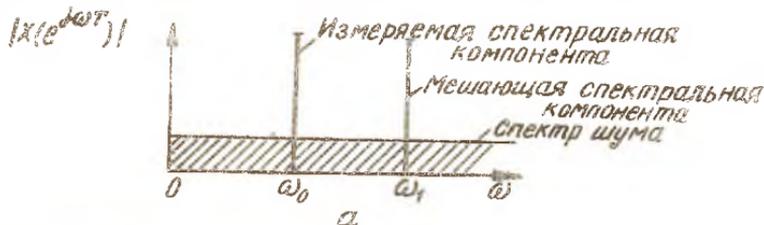


Р и с. 10.

Подобным образом для частот ω_1 и ω_2 графики подынтегральных функций приведены на рис.10, г и е, а оценки спектров – на рис.10, д и ж соответственно.

Нетрудно видеть, что на частотах ω_1 и ω_2 получаемые оценки отличны от нуля, в то время как спектр сигнала на этих частотах имеет нулевое значение.

Для уяснения сути рассматриваемого явления рассмотрим еще один пример, в котором предположим, что наряду с гармоническим сигналом на частоте ω_0 существуют одновременно побочный сигнал со спектральной компонентой на частоте ω_1 и некоторый шум (рис.11, а).



Р и с. 11.

Определим оценку спектра, которую дает формула (18) на частоте ω_0 . Спектр временного окна для этого случая (спектральное окно) $1/W(e^{j(\omega_0 - \omega)T})$ / показан на рис. II, б. На рис. II, в приведены значения произведения спектрального окна на спектральные компоненты соответствующих частот, составляющие график подынтегрального выражения в формуле (18). Определенный интеграл (18), как известно, равен площади подынтегральной функции на интервале, заданном пределами интегрирования. Эту площадь на рис. II, в составляют заштрихованная область и площади δ -функций, соответствующих спектральным линиям гармонических компонент сигнала. На рис. II, г обозначена величина площади, которая и представляет измеренное значение спектра на частоте $\omega = \omega_0$. Нетрудно видеть, что эта величина отличается от спектральной компоненты сигнала на частоте $\omega = \omega_0$ (см. рис. II, а) и зависит от спектральных составляющих других сигналов. Подобным образом можно определить спектральные оценки на других частотах $\omega \neq \omega_0$.

Из приведенных примеров можно сделать некоторые выводы о характере влияния окна на спектральную оценку сигнала.

Во-первых, эта оценка оказывается искаженной вследствие просачивания спектральных компонент других сигналов и помехи.

Во-вторых, в отсутствие других сигналов и помехи спектральная оценка сигнала $x(n)$ будет искажаться. Применительно к приведенному на рис. 10 примеру эти искажения состоят в том, что взвешенная оценка $X_w(e^{j\omega T})$ оказывается не равной нулю на частотах $\omega \neq \omega_0$, в то время как спектральная линия $X(e^{j\omega T})$ существует только на частоте $\omega = \omega_0$. Иначе, спектральная линия сигнала размывается, спектр сигнала "растекается" по диапазону частот в соответствии с весом спектрального окна на соответствующей частоте.

Отсюда становится ясным, какие требования следует предъявить к временному окну $W(n)$. Нетрудно видеть, что спектр окна $W(e^{j\omega T})$ должен иметь, по возможности, узкий главный лепесток, а боковые лепестки в нем должны отсутствовать. Сужение главного лепестка можно обеспечить только за счет увеличения длительности окна $W(n)$. При бесконечно узком главном лепестке входная последовательность становится неограниченной по длительности. Ясно, что практически получение узкого главного лепестка функции $W(e^{j\omega T})$ ограничено допустимой длительностью реализации сигнала $x(n)$. Нетрудно видеть, что увеличение длительности прямоугольного окна не приводит к уменьшению амплитуд боковых лепестков его спектра.

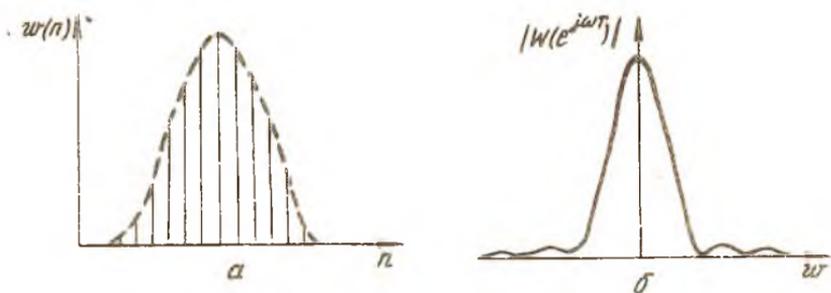
Для подавления боковых лепестков функции $W(e^{j\omega T})$ имеются большие возможности. Ослабление этих лепестков можно достигнуть путем выбора рациональной формы окна $W(n)$. Общая закономерность здесь такова: окна, плавно нарастающие в начале и плавно ниспадающие

в конце, имеют меньшие боковые лепестки по сравнению с прямоугольным окном. Заметим, что при таком "сглаживании" формы окна несколько расширяется главный лепесток.

В настоящее время разработано весьма большое количество окон различных видов [5]. В настоящей работе используется окно Кайзера, в котором максимизируется энергия в полосе частот главного лепестка его АЧХ. Окно Кайзера описывается выражениями

$$W(n) = I_0 \left[\pi \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{n}{N/2} \right)^2} \right] / I_0(\pi \alpha), \quad 0 \leq n \leq N/2,$$

где $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [(x/2)^k / k!]^2$ - модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Здесь параметр $\pi \alpha$ равен половине произведения длительности окна на полосу частот. Графики окна Кайзера и модуля его преобразования Фурье приведены на рис. 12, а и б.



Р и с. 12.

3. ОПИСАНИЕ МАШИННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА И ПРОГРАММЫ

Существо машинного эксперимента по первому заданию работы явствует из постановки задачи. Комплексные массивы чисел дискретного преобразования Фурье заданных сигналов получаются с помощью алгоритма БПФ. Далее производится вычисление модуля и аргумента ДПФ. Полученные таким образом амплитудные и фазовые спектры сигналов выводятся на печать.

Машинный эксперимент по второму заданию также не требует особых пояснений (см. п. 1, 3).

В третьем задании определяется АЧХ эквивалентного фильтра БПФ. Для уяснения существа этой части работы напомним способ экспериментального измерения АЧХ обычных аналоговых фильтров с помощью радиоизмерительной аппаратуры.

Типовая установка для измерения АЧХ состоит из генератора стандартных сигналов ГСС, аналогового устройства АУ, частотная характеристика которого измеряется, амплитудного детектора АД и измерителя выхода ИВ (рис.13). Частотная характеристика измеряется путем сопоставления показаний ИВ с уровнем сигнала ГСС на различных частотах рабочего диапазона. Подобный по своему принципу способ используется в настоящей работе.



Р и с. 13.

Граф БПФ (см.рис.7), как отмечалось выше, эквивалентен многоканальной системе и имеет N выходов, которые можно пронумеровать в пределах от 0 до $N-1$. Каждый из этих выходов символизирует выходной сигнал некоторого эквивалентного фильтра из этой многоканальной системы.

Для наблюдения выбирается выход канала определенного номера.

В эксперименте на вход блока БПФ подаются конечные реализации цифрового гармонического колебания, имеющие длину N отсчетов. Применительно к формуле ДПФ (I) каждая такая реализация есть не что иное, как массив чисел сигнала $x(n)$.

Первоначально частота гармонического колебания выбирается равной номинальной частоте выбранного канала $f_m = mF$. Затем частоте гармонического колебания дается некоторое малое приращение и вновь формируется массив чисел $x(n)$. Величина приращения в программе выбрана равной $1/10$ от полосы канала. На каждом таком шаге вычисляется массив чисел $X(k)$ в соответствии с (I), но с помощью алгоритма БПФ. Из всего этого массива берется одно комплексное число

$X(k) / X_m = X(m)$, а остальные числа отбрасываются. Ясно, что это число характеризует выход выбранного нами m -го канала БПФ. Как нетрудно видеть, модулем этого комплексного числа определяется значение АЧХ канала на соответствующей частоте.

Описанная процедура многократно продолжается до тех пор, пока амплитуда выхода не примет малые, по сравнению с первым отсчетом, значения. Таким образом получается одна ветвь АЧХ. Так как АЧХ симметрична относительно своего максимума, то снимать вторую ее ветвь нет необходимости.

Программа, с помощью которой реализуется машинный эксперимент, написана на алгоритмическом языке ФОРТРАН. По своей структуре программа состоит из основной программы и семи подпрограмм типа *SUBROUTINE*. Наименования подпрограмм и выполняемые ими функции приведены в табл.4.

Т а б л и ц а 4

Имя подпрограммы	Назначение
ZADAN 1	Расчет дискретного преобразования Фурье сигналов в соответствии с заданием 1
ZADAN 2	Вычисление линейной свертки сигналов в соответствии с заданием 2
ZADAN 3	Исследование избирательных свойств БПФ
SPKTR	Вычисление амплитудного и фазового спектров сигналов по комплексному спектру
FFT	Вычисление БПФ
KAISER	Вычисление временного окна Кайзера
INO	Вычисление функции Бесселя первого рода нулевого порядка

Машинные эксперименты всех трех заданий настоящей работы выполняются в подпрограммах с соответствующими именами. Основная программа объединяет эти подпрограммы в единое целое. В основной программе также сосредоточены операторы ввода исходных данных. В распечатке программы введены комментарии, позволяющие установить соответствие между текстом программы и запрограммированными алгоритмами.

Контрольные вопросы

1. Напишите на память пару формул дискретного преобразования Фурье. В чем состоит смысл ДПФ и его основные особенности?
2. Перечислите и сформулируйте основные свойства ДПФ.
3. Расскажите о периодической свертке, об ее алгоритме и особенностях.
4. Что такое "линейная дискретная свертка"? Какие алгоритмы вычисления этой свертки Вы знаете? Поясните способ вычисления линейной свертки в частотной области с помощью БПФ.
5. Опишите алгоритм БПФ с прореживанием по времени по основанию 2.

6. В чем состоит существо базовой операции БПФ? Какова роль этой операции в алгоритме БПФ?
7. Нарисуйте граф 8-точечного БПФ. Покажите адекватность графического и аналитического представления БПФ.
8. Какими свойствами и особенностями обладает БПФ и в чем состоит их существо?
9. Покажите возможность вычисления обратного ДПФ с помощью алгоритма БПФ.
10. Покажите связь между БПФ и цифровой фильтрацией сигналов. Оцените избирательные свойства БПФ.
11. Что такое "временное окно" и каково его применение? В чем состоит влияние взвешивания с помощью временного окна на характеристики БПФ? Какие требования предъявляются к весовой функции?
12. Каким образом можно экспериментально определить частотные характеристики эквивалентных фильтров БПФ?
13. Какие различия в спектрах действительного и комплексного сигналов следует ожидать? На основе свойств ДПФ показать закономерность этого различия.
14. В чем состоит процедура вычисления линейной свертки?
15. Каким образом подготавливается задание на работу для ЭВМ? Каким образом оформляется соответствующий набор данных?

Библиографический список

1. Рабинер Л., Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ.-М.:Мир, 1978. - 848 с.
2. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов: Пер.с англ.-М.:Связь, 1979. - 416 с.
3. Антонью А. Цифровые фильтры: анализ и проектирование: Пер. с англ.-М.:Радио и связь, 1983. - 320 с.
4. Кузнецов В.Д. Методы цифровой обработки сигналов: Учебное пособие.-Куйбышев; 1983. - 93 с.
5. Харрис Ф. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье.- ТИИЭР, т.68, № I, 1978, с.60-96.

Приложение

 * РАСПЕЧАТКА РАЗДЕЛА DPFS ИЗ БИБЛИОТЕКИ PRONIVAR НА ЛДМЕ ~~МЭМММ~~
 *

```
//DPFS JOB (S13X1-RTJ), 'КУЗЕНКОВ', MSGLEVEL=(2,3), REGION=00K
// EXEC FORTGCLG, PARM='CJXREF,NOSOURCE'
//FORT.SYSIN DD *
```

```
C ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА: ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ
C NVAR-НОМЕР ВЫПОЛНЯЕМОГО ВАРИАНТА
C GRUPPA-НОМЕР ГРУППЫ
C FAM(12)- ФАМИЛИЯ СТУДЕНТА
```

```
INTEGER GRUPPA, FAM
DIMENSION H(128), X(128), FAM(12)
READ 7, NST
7 FORMAT(11)
DO 8 JJ=1, NST
  READ 1, NVAR, GRUPPA, FAM
1 FORMAT(12, 2X, I4, 2X, 12A1)
  PRINT 2, NVAR, GRUPPA, FAM
2 FORMAT(12X, 52(' ') / 12X, 'КАТЕГОРИЯ РАБОТЫ: ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ' / 12X, 52(' ') / 12X, 'ВАРИАНТ ', I2, 2X, 'ГРУППА ', I5, 2X,
  * 12A1 /)
  READ 3, M, ND, FT
3 FORMAT(12, 2X, I3, 2X, F5.4)
  CALL ZADAN1('M', ND, FT)
  READ 4, N1, N2
4 FORMAT(12, 2X, I2)
  READ 5, (X(I), I=1, N1)
5 FORMAT(10F5.2)
  READ 5, (H(I), I=1, N2)
  CALL ZADAN2('N1, N2, X, H)
  READ 6, M, NKKAN
6 FORMAT(11, 2X, I3)
  CALL ZADAN3('M, NKKAN)
8 CONTINUE
STOP
END
```

```

SUBROUTINE ZADANI(M,ND,FT)
C   ПОДПРОГРАММА РАСЧЕТА ДТФ
C   M-ВЕЛИЧИНА, ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ РАЗМЕРНОСТЬ БТФ
C   ND-НОРМИРОВАННАЯ ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ИМПУЛЬСА
C   FT-НОРМИРОВАННАЯ ЧИСЛОВАЯ ЧАСТОТА

REAL X(1024),Y(1024)
COMPLEX XC(1024)
C   ЗАДАНИЕ 1
PRINT 10,M,ND,FT
10  FORMAT (1X/10X,'ЗАДАНИЕ 1:РАСЧЕТ ДТФ, '"/10X,21('"/10X,'ИХОДНЫЕ
  *ДАННЫЕ: M='12.3X,'ND='13.3X,'FT='16.4/10X,15('"/)
  PI=3.14159265
  N=2**M
C   ФОРМИРОВАНИЕ ВХОДНОГО СИГНАЛА
  OMEGA=2.*PI*FT
  DO 20 I=1,N
  X(I)=0
  Y(I)=0
  IF(1.GT.ND) GOTO 20
  X(I)=COS(OMEGA*(I-1))
  Y(I)=SIN(OMEGA*(I-1))
20  CONTINUE
  K1=FT*N-3./ND
  K2=FT*N+3./ND
  DO 40 J=1,3
  DO 30 I=1,N
  IF(0.EQ.1) XC(I)=CMPLX(X(I),0.)
  IF(0.EQ.2) XC(I)=CMPLX(X(I),Y(I))
30  IF(0.EQ.3) XC(I)=CMPLX(X(I),-Y(I))
  CALL FFT(XC,M,N)
  CALL SPKTR(XC,N,J,K1,K2)
40  CONTINUE
  RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SPKTR(XC(N),J,K1,K2)
ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ АМПЛИТУДНОГО И ФАЗОВОГО СПЕКТРОВ И ВЫВОДА
РЕЗУЛЬТАТОВ НА ПЕЧАТЬ
REAL AMPL(1024),FAZ(1024)
COMPLEX XC(1024)
DO 10 I=1,N
  AMPL(I)=CABS(XC(I))
  ARG=AIMAG(XC(I))/REAL(XC(I))
10  FAZ(I)=ATAN(ARG)
  L1=K1
  L2=K2
  DO 50 I=1,2
    PRINT 20,J,L1,L2
20  FORMAT(1X/9X,'ВАРИАНТ ЗАДАЧИ',I1,3X,'АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР.ОТЧЕТЫ ОТ
  *I4,'-ГО ДС',I4,'-ГО')
    PRINT 30,(AMPL(K),K=L1,L2)
30  FORMAT(1X,17F7.3)
    PRINT 40,J,L1,L2
40  FORMAT(1X/9X,'ВАРИАНТ ЗАДАЧИ',I1,3X,'ФАЗОВЫЙ СПЕКТР.ОТЧЕТЫ ОТ',
  *I4,'-ГО ДС',I4,'-ГО')
    PRINT 30,(FAZ(K),K=L1,L2)
  L1=N-K2
  L2=N-K1
50  CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE FFT(A,M,N)
ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ДПФ
COMPLEX A(N),U,M,T
N=2**M
NV2=N/2
NM1=N-1
J=1
DO 7 I=1,NM1
  IF(I.GE.J) GOTO 5
  T=A(I)
  A(J)=A(I)
  A(I)=T
5  K=NV2
6  IF(K.GE.J) GOTO 7
  J=J-K
  K=K/2
  GOTO 6
7  J=J+K
  PI=3.14159265
  UC 20 L=1,M
  LE=2**L
  LE1=LE/2
  U=(1.,0.)
  *COMPLX(COS(PI/LE1),-SIN(PI/LE1))
  DO 20 J=1,LE1
  DO 10 I=J,N-LE
  IP=I+LE1
  T=A(IP)*J
  A(IP)=A(I)-T
10  A(I)=A(IP)+T
20  U=J**M
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ZADR2(4, N2, X, N)
  *ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ С ПОМОЩЬЮ ДФФ
  *X(N1), N1(N2) - СВЕРТЫВАЕМЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
  *N2 - РАЗМЕРНОСТЬ СВЕРТЫВАЕМЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, ВКЛЮЧАЯ
  *ДОПОЛНИТЕЛЬНО ВВЕДЕННЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ЭТЮЖЕТЫ
  *N - РАЗМЕРНОСТЬ ДФФ

  ЗАДАНИЕ 2
  DIMENSION X(32), N(32), Y(32)
  COMPLEX XC(32), HC(32), YC(32)
  K1=N1+1
  DO 2 I=K1, 32
    X(I)=0.
    K2=N2+1
    DO 3 I=K2, 32
      N(I)=0.
    DO 10 I=1, 32
      Y(I)=0.
      XC(I)=(0., 0.)
      HC(I)=(0., 0.)
10    YC(I)=(0., 0.)
    PRINT 25, N1, N2
25  FORMAT (1X/10X, 'ЗАДАНИЕ 2: ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ С ПОМОЩЬЮ ДФФ
  *//10X, 52 ('-' )/10X, 'ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ: ' /10X, 16 ('-' )/10X, 'ДЛИНА РЕЗУЛЬ
  *ТЕЛЬНОСТИ СВЕРТЫВАЕМЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ N1=' , I2, 2X, 'N2=' , I2)
    PRINT 35, (X(I), I=1, N1)
35  FORMAT (10X, 'ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ X°//10(2X, F5, 2))
    PRINT 37, (N(I), I=1, N2)
37  FORMAT (10X, 'ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ N°//10(2X, F5, 2))
    DO 40 I=1, 32
      XC(I)=CMPLX(X(I), 0.)
40    HC(I)=CMPLX(N(I), 0.)
    N3=N1+N2-1
    DC 50 M=1., 5
    N=2**M
    IF (N.GE. N3) GOTO 50
50  CONTINUE
60  CONTINUE
    CALL FFT(XC, M, N)
    CALL FFT(HC, M, N)
    DO 70 I=1, N
      YC(I)=XC(I)*HC(I)
70  YC(I)=CONJG(YC(I))
    CALL FFT(YC, M, N)
    DO 80 I=1, N
      YC(I)=1./N*CONJG(YC(I))
80  Y(I)=REAL(YC(I))
    PRINT 85, Y
85  FORMAT (10X, 35X, 'ЛИНЕЙНАЯ СВЕРТКА'//10(2X, F5, 3))
    RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ZADAN3 (M, N, KAN)
C   ПОДПРОГРАММА ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗБИРАТЕЛЬНЫХ СВЯСТВ БПФ
C   N-ВЕЛИЧИНА, ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ РАЗМЕРНОСТЬ БПФ
C   KAN-НОМЕР КАНАЛА
REAL PA(128), W(128)
REAL XAP1(32), XAP2(32)
COMPLEX B(128), A(128)
PRINT 3, M, N, KAN
3  FORMAT(1X, '1 X, ЗАДАНИЕ 3: ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗБИРАТЕЛЬНЫХ СВЯСТВ БПФ. /
  * 12X, 49( ' / 10X, * ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ: N= ', I1, 2X, ' NKAN= ', I3 / 10X, 16( '
  * )
  PI=3.14159265
  N=2**M
  FT=1./N**KAN
  OF=1./N/12.
  ALFA=2.5
C   ВЫЧИСЛЕНИЕ ОКНА КАЙЗЕРА
CALL KAISER(A, N, M, ALFA)
PRINT 10
12 FORMAT(14E, '10X, ВРЕМЕННОЕ ОКНО КАЙЗЕРА')
PRINT 15, (W(J), J=1, N)
15 FORMAT(14E, '13X, E11.4)
C   ЦИКЛ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОТСЧЕТОВ АЧХ
DO 72 K=1, 3
C   ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТРЕЗКА КОМПЛЕКСНОГО СИГУСИВЬ
DO 25 I=1, N
  ARG=2.*PI*I**K
  AR=COS(ARG)
  XI=SIN(ARG)
  B(I)=CMPLX(W(I)*AR, XI)
C   ВВЕЩЕНИЕ ОТСЧЕТОВ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ
  A(I)=P(I)*B(I)
25 CONTINUE
  IF (K.EQ.1) GOTO 42
  DO 32 I=1, N
32 RA(I)=AIMAG(B(I))
  PRINT 36
36 FORMAT(14E, '10X, ВХОДНОЙ СИГНАЛ')
  PRINT 15, (RA(J), J=1, N)
  DO 42 I=1, N
42 RA(I)=AIMAG(A(I))
  PRINT 47
47 FORMAT(14E, '10X, ВВЕЩЕННЫЙ ВХОДНОЙ СИГНАЛ')
  PRINT 15, (RA(J), J=1, N)
48 CONTINUE
  CALL FFT(A, M, N)
  CALL FFT(B, M, N)
C   ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ТЕСТ-СИГНАЛОВ
  IF (K.EQ.1) GOTO 52
  IF (K.EQ.3) GOTO 58
  GOTO 72

```

```

50 CONTINUE
DO 52 I=1,N
BR=REAL(B(I))
BI=AIMAG(B(I))
52 RA(I)=SQRT(BR*BR+BI*BI)
PRINT 55,FT
55 FORMAT(1H0,10X,'АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР СИГНАЛА. FT=',E9.4)
PRINT 15,(RA(J),J=1,N)
DO 60 I=1,N
AR=REAL(A(I))
AI=AIMAG(A(I))
60 RA(I)=SQRT(AR*AR+AI*AI)
PRINT 62,FT
62 FORMAT(1H0,10X,'АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР ВЗВЕШЕННОГО СИГНАЛА. FT=',E9.4)
70 CONTINUE
С
ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТЧЕТОВ АЧХ
BR=REAL(B(NKAN+1))
BI=AIMAG(B(NKAN+1))
XAP1(K)=SQRT(BR*BR+BI*BI)
AR=REAL(A(NKAN+1))
AI=AIMAG(A(NKAN+1))
XAP2(K)=SQRT(AR*AR+AI*AI)
72 FT=FT+DF
DO 73 K=2,30
XAP1(K)=XAP1(K)/XAP1(1)
XAP2(K)=XAP2(K)/XAP2(1)
73 CONTINUE
XAP1(1)=1.
XAP2(1)=1.
PRINT 75
75 FORMAT(1H0,10X,'АЧХ КАНАЛА БЕЗ ВЗВЕШИВАНИЯ')
PRINT 76,XAP1
75 FORMAT(1H0,10X,'АЧХ КАНАЛА ПРИ ВЗВЕШИВАНИИ СИГНАЛА')
PRINT 76,XAP2
100 CONTINUE
RETURN
END)
SUBROUTINE KAISER(N,N1,ALFA)
D=DFLOAT(N)
PI=3.14159265
Y=PI*ALFA
CALL BND(Y,N)
N1=N/2
N=N
DO 40 I=1,N1
X=PI*ALFA*SQRT(1.-4*(I/N)**2)
CALL BND(X,N1)
40 A(I)=X/Y
N2=N1

```

