Государственный комитет Российской Федерации
по высшему образованию

Самарский государственный аэрокосмический
университет им. С. П. Королева

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

*Методические указания
к практическим занятиям*

САМАРА 1994

Составители: Зубрина Л. Г.,
Коломиец Л. В.,
Файницкий Ю. Л.

УДК 517.2(075)

Дидактические задания по дифференциальным уравнениям: Метод. указания к практическим занятиям /Самар. гос. аэрокосм. ун-т; Сост.: Л. Г. Зубрина, Л. В. Коломиец, Ю. Л. Файницкий. Самара, 1994. 32 с.

Методические указания содержат дидактические задания по теме «Дифференциальные уравнения».

* * *

Данные методические указания содержат дидактические материалы по разделу «Дифференциальные уравнения».

В каждом задании предлагается три равносильных варианта, состоящих из нескольких частей разных уровней сложности. Первая часть содержит наиболее простые задачи, вторая — задачи средней трудности, третья — более сложные задачи.

Одна часть варианта рассчитана, как правило, на 40—45 мин самостоятельной работы студентов. Однако структура задания такова, что его можно использовать и в течение больших или меньших временных промежутков.

Размещение упражнений в задании носит спиралеобразный характер. Решив несколько первых задач, студент закрепляет знания основных моментов изучаемой темы. В следующих задачах повторяются те же понятия, формулы и приемы, но в слегка усложненной форме и так далее.

В конце методических указаний приводятся ответы к заданиям, что позволяет организовать самопроверку и оперативно выявить пробелы в усвоении материала.

З а д а н и е 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Вариант 1

Часть 1. Решить уравнения:

1. $y' = e^{3x} \cdot \sin^2 y$.

2. $y' = \dfrac{y+1}{x}$.

3. $\sin x\, dy - (2y+1) \cos x\, dx = 0$.

4. $\sqrt{4-x^2} \cdot y' + x(y^2+1) = 0; \quad y\big|_{x=2} = 0$.

Часть 2. Решить уравнения:

1. $y' = \dfrac{y^2+3}{y \cdot \sqrt{4-x^2}}$.

2. $(e^x+3)\, dy + y e^x\, dx = 0; \; y(0) = 1$.

3. $e^{\frac{x}{2}} \cdot \cos^2 3y\, dx - 3\, dy = 0$.

4. $2y \cdot \sin 2x \cdot y' - y^2 - 1 = 0; \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

Часть 3. Решить уравнения:

1. $y' = \dfrac{(xy^2 + 2xy)e^{-x^2}}{y+1}$.

2. $y' \cdot \sin 2x + y \ln y = 0$.

3. $(x^2+1)\,dy+(xy^2+2xy)\,dx=0;\ \ y(2)=-1$.

4. $x^2\,dy+\sqrt{4-y^2}\,\ln x\,dx=0$.

5. Применяя подстановку $xy=u$, решить уравнение

$$2y'+y^2+\frac{1}{x^2}=0.$$

Вариант 2

Часть 1. Решить уравнения:

1. $y'=3^x\cdot\cos^2 y$.

2. $y'=\dfrac{2xy}{1+x^2}$.

3. $2y(x^2+1)\,dy-x(y^2+1)\,dx=0$.

4. $x^2y'+y^2+1=0;\ \ y(1)=0$.

Часть 2. Решить уравнения:

1. $y'=\dfrac{x(y^2+9)}{\sqrt{x^2+2}}$.

2. $\operatorname{tg}x\,dy+(y+2)\,dx=0;\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

3. $e^y\,dx+\cos 2x\,dy=0$.

4. $(x^2+1)\,y'-2x(y^2-1)=0;\ \ y(0)=2$.

Вариант 3

Часть 1. Решить уравнения:

1. $y'=\dfrac{e^{2x}}{\cos y}$.

2. $y'=\dfrac{1+y^2}{2xy}$.

3. $4xy\,dy+(1+y^2)\,dx=0$.

4. $\sqrt{1-x^2}\cdot y\cdot y'+\sqrt{3+y^2}=0;\ \ y(0)=1$.

Часть 2. Решить уравнения:

1. $y' = \dfrac{x(y^2-4)}{\sqrt{x^2-3}}$.

2. $\cos y \cdot \sin x\, d\, y + \sin y \cdot \cos x\, d\, x = 0;$ $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

3. $e^{\frac{x}{3}} \cdot \sin^2 2y\, dx + 2\, dy = 0$.

4. $(x^2+1)\, y' - x\sqrt{y^2+3} = 0;$ $\; y(0) = 1$.

З а д а н и е 2. ОДНОРОДНЫЕ И ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Вариант 1

Часть 1. Решить уравнения:

1. $x\, y' - y = x\, \mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$.
2. $x\, y' = 2x + y$.
3. $x\, y' - 2y = 2x^4;$ $\; y(1) = 2$.

Часть 2. Решить уравнения:

1. $(y^2 - 2xy)\, d\, x + x^2\, d\, y = 0;$ $\; y(1) = 2$.

2. $y = x(y' - x\cos x);$ $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

3. $2x^3\, y' = y(2x^2 - y^2);$ $\; y(1) = 1$.

4. $(x + y^2)\, d\, y = y\, d\, x$.

Часть 3. Решить уравнения:

1. $x\, y' = y \cdot \cos\left(\ln\dfrac{y}{x}\right);$ $\; y(1) = e^{\pi/2}$.

2. $(2e^y - x)\, y' = 1;$ $\; y(2) = 0$.

3. $(1-y+2x)\,dx+(2y-x-1)\,dy=0$ (свести к однородному уравнению).

4. $(x+1)(yy'-1)=y^2$ (подстановкой свести к линейному уравнению).

Вариант 2

Часть 1. Решить уравнения:

1. $y'=\dfrac{y}{x}+\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

2. $xy'-x=2y$; $y(1)=0$.

3. $y'+y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$.

Часть 2. Решить уравнения:

1. $y'=\dfrac{y^2}{xy-x^2}$.

2. $xy'=xy+e^x$; $y(1)=e$.

3. $(y+\sqrt{xy})\,dx-x\,a\,y=0$; $y(1)=1$.

4. $2x(x^2+y)\,dx=dy$.

Вариант 3.

Часть 1. Решить уравнения:

1. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$.

2. $(x+1)y'-y=x+1$.

3. $y'=\dfrac{3y+2x}{x}$; $y=(2)=0$.

Часть 2. Решить уравнения:

1. $(x-y)\,dx+(x+y)\,dy=0$.

2. $(xy+e^x)\,dx=x\,dy$; $y(1)=0$.

3. $y'(x^2+y^2)=2xy$; $y(1)=2$.

4. $(xy' - 1)\ln x = 2y$.

Задание 3. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ. УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Вариант 1

Часть 1. Решить уравнения:

1. $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}$.

2. $(x+y-1)\,dx + (e^y + x)\,dy = 0$.

3. $xy' - 4y = 2x^2\sqrt{y}$; $y(1) = 0$.

Часть 2. Решить уравнения:

1. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = \dfrac{4\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \operatorname{arc\,tg} x$.

2. $\left(e^x + y + \sin y\right)dx + \left(e^y + x + x\cos y\right)dy = 0$.

3. $y' + y = e^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{y}$; $y(0) = \dfrac{9}{4}$.

4. $(x^2 \ln y - x)\,y' = y$.

Часть 3. Решить уравнения:

1. $y' = y^4 \cos x + y \cdot \operatorname{tg} x$; $y(0) = -1$.

2. $y\,dx + (x + y^2 x^2)\,dy = 0$.

3. $(y^2 + 2y + x^2) \cdot y' + 2x = 0$; $y(1) = 0$.

4. $(3x^2 y - 4xy^2)\,dx + (x^3 - 4x^2 y + 12y^3)\,dy = 0$.

5. $3x^2(1 + \ln y)\,dx = \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy$.

Вариант 2

Часть 1. Решить уравнения:

1. $y' + \dfrac{y}{x} = -x y^2.$

2. $e^{-y} dx + (1 - x e^{-y}) dy = 0.$

3. $y' + 2y = y^2 \cdot e^x; \quad y(0) = -\dfrac{1}{2}.$

Часть 2. Решить уравнения:

1. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$

2. $(x^2 + y^2 + xy) dx + (2xy + x + e^y) dy = 0.$

3. $xy' + 2\sqrt{xy} = y; \quad y(1) = 1.$

4. $xy = (x^2 + y) \cdot y'.$

Вариант 3

Часть 1. Решить уравнения:

1. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{y}.$

2. $(2x + 3x^2 y) dx + (x^3 - 3y^2) dy = 0.$

3. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{x^2}; \quad y(-1) = 1.$

Часть 2. Решить уравнения:

1. $y' + xy = xy^3.$

2. $2x \cos^2 y \, dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0.$

3. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4; \quad y\left(\dfrac{1}{e^3}\right) = e^3.$

4. $y^2 = (x^2 - yx) y'.$

Задание 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Вариант 1

Часть 1. Решить уравнения:

1. $y'' = x + \sin x$.
2. $y''(x^2+1) = 2xy'$; $y(0)=1$; $y'(0)=3$.
3. $2(y')^2 = (y-1)y''$.

Часть 2. Решить уравнения:

1. $y'' = x \cdot \sin x$; $y(0)=3$; $y'(0)=2$.
2. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.
3. $2y \cdot y'' = 1 + (y')^2$; $y(3)=1$; $y'(3)=0$.

Часть 3. Решить уравнения:

1. $(1+x^2)y'' - 1 = 0$; $y(0) = -2$; $y'(0)=3$.
2. $xy'' - y' = x^2 e^x$.

3. Из общего интеграла уравнения $(y')^2 - y \cdot y'' = y^2 \cdot y'$ выделить интегральную кривую, проходящую через точку (–3; 1) и касающуюся прямой $X + Y + 2 = 0$.

4. На движущееся тело единичной массы действует сила, направленная противоположно перемещению S и пропорциональная величине этого перемещения (коэффициент пропорциональности ω^2).

Начальные условия $S\big|_{t=0} = 0$; $V\big|_{t=0} = V_0$.

Найти закон движения тела.

Вариант 2

Часть 1. Решить уравнения:

1. $y''' = \dfrac{6}{x^3}$.
2. $tg\, x \cdot y'' = 2y'$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$; $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.
3. $2y \cdot y'' = (y')^2$.

Часть 2. Решить уравнения:

1. $\sin^4 x\cdot y'''=\sin 2x;\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{5\pi^2}{4};\ \ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2};\ \ y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.
2. $x\,y''+y'-x-1=0$.
3. $2\,(y')^2=y''\,(y-1);\ \ y(1)=2;\ \ y'(1)=-1$.

Вариант 3

Часть 1. Решить уравнения:

1. $y'''=3\,x^2$.
2. $y''\,x\ln x=y'$.
3. $y''=32\sin^3 y\cdot\cos y;\ \ y(1)=\dfrac{\pi}{2};\ \ y'(1)=4$.

Часть 2. Решить уравнения:

1. $y'''=\dfrac{1}{x^2};\ \ y(1)=5;\ \ y'(1)=3;\ \ y''(1)=1$.
2. $y''+y'\cdot\operatorname{tg}x=\sin 2x$.
3. $y\cdot y''-2\,y\cdot y'\cdot\ln y=(y')^2;\ \ y(2)=1;\ \ y'(2)=1$.

Задание 5. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Вариант 1

Часть 1. Решить уравнения:

1. $y''-4\,y=0;\ \ y(0)=0;\ \ y'(0)=4$.
2. $y''-6\,y'+9\,y=0$.
3. $4\,y''-4\,y'+5\,y=0$.
4. $y'''+4\,y'=0$.

5. Решить уравнение $(x^2+1)\,y''-2\,x\,y'+2\,y=0$,
   зная его частное решение $y_1(x)=x$.

Часть 2. Решить уравнения:

1. $y''+y'-6y=0$.

2. $9y'' - 12y' + 4y = 0$.

3. $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 6$.

4. $y''' + 8y = 0$.

5. Решить уравнение $y'' - \mathrm{ctg}x \cdot y' + \sin^2 x \cdot y = 0$, знаная его частное решение $y_1(x) = \cos(\cos x)$.

Часть 3. Решить уравнения:

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 1$.

2. $y^{IV} - y = 0$.

3. $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$; $y''(0) = -2$.

4. Найти интегральную кривую уравнения $y''' - y'' - 2y' = 0$, проходящую через точку (0; —3), имеющую в этой точке касательную, наклоненную под углом arc tg 6 к оси 0x, и кривизну, равную 0.

5. Найти общее решение уравнения $y'' - \mathrm{tg}x \cdot y' + 2y = 0$, подобрав одно ненулевое частное решение.

6. Материальная точка массы m движется по прямой, притягиваемая к неподвижному центру силой F, прямо пропорциональной расстоянию точки от центра притяжения. Сила сопротивления среды прямо пропорциональна первой степени скорости.

Начальные условия $x(0) = x_0$; $v(0) = v_0$. Определить закон движения.

Вариант 2

Часть 1. Решить уравнения:

1. $y'' + y' - 2y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 4$.

2. $y'' - 2y' + 1 = 0$.

3. $y'' + y = 0$.

4. $y''' + 9y' = 0$.

5. Решить уравнение $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$, зная его частное решение $y_1(x) = \sin x / x$.

Часть 2. Решить уравнения:

1. $y'' + 9y = 0$; $y(0) = 3$; $y'(0) = -3$.

2. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

3. $y'' + 4y' + 29y = 0$.

4. $y''' - y = 0$.

5. Решить уравнение $y'' + \operatorname{tg} x \cdot y' + \cos^2 x \cdot y = 0$, зная его частное решение $y_1(x) = \cos(\sin x)$.

Вариант 3

Часть 1. Решить уравнения:

1. $y'' - 4y' + 3y = 0;\ \ y(0) = 6;\ \ y'(0) = 10$.

2. $y'' + 6y' + 9y = 0$.

3. $y'' + 16y = 0$.

4. $y''' + 25y' = 0$.

5. Решить уравнение $y'' + \dfrac{1}{x} y' - \dfrac{9}{x^2} y = 0$, зная его частное решение $y_1(x) = x^3$.

Часть 2. Решить уравнения:

1. $y'' - 25y = 0;\ \ y(0) = 0;\ \ y'(0) = 10$.

2. $16y'' + 8y' + y = 0$.

3. $y'' - 2y' + 5y = 0$.

4. $y''' - 8y = 0$.

5. Решить уравнение $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, зная его частное решение $y_1(x) = x$.

Задание 6. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Вариант 1

Часть 1. 1. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$.

Известно, что корни характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения $r_{1,2} = 2 \pm 3i$.

Записать частное решение с неоднородными коэффициентами данного уравнения, используя вид правой части уравнения:

а) $f(x)=(x+3)e^{2x}$;

б) $f(x)=3e^{2x}(\cos 3x+\sin 3x)$;

в) $f(x)=x^2+4$.

Проинтегрировать данные дифференциальные уравнения:

2. $y''-y=e^x$ и найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $\begin{cases} y(0)=1; \\ y'(0)=2. \end{cases}$

3. $y''+9y=\dfrac{9}{\sin 3x}$. Можно ли по данной правой части методом подбора найти частное решение $\bar{y}$?

4. $y''-2y'+5y=x^2+6$.

Часть 2. 1. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$.

Известно, что корни характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения $r_1=r_2=3$.

Записать частное решение с неопределенными коэффициентами данного уравнения, используя вид правой части уравнения:

а) $f(x)=(x^2+1)e^{3x}$;

б) $f(x)=4e^{3x}\cos 2x$;

в) $f(x)=7e^x$.

Проинтегрировать данные дифференциальные уравнения:

2. $y''+y'=4e^{-2x}(\sin x+\cos x)$ и найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $\begin{cases} y(0)=0; \\ y'(0)=1. \end{cases}$

3. $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$. Можно ли по данной правой части методом подбора найти частное решение $\bar{y}$?

4. $y''-5y'+4y=xe^x$.

Часть 3. 1. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{V}+a_1 y^{IV}+a_2 y'''+a_3 y''+a_4 y'+a_5 y=f(x).$$

Известно, что корни характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения $r_1=r_2=r_3=1;\ r_{4,5}=5\pm 4i$.

Указать вид частного решения данного дифференциального уравнения по виду данной правой части:

а) $f(x)=3x^2 e^x$;

б) $f(x)=2e^{5x}\sin 4x$;

в) $f(x)=x\cos x+2\sin x$.

Проинтегрировать данные дифференциальные уравнения:

2. $y''-2y'+10y=10x^2+18x+6$, если $\begin{cases} y(0)=1; \\ y'(0)=3,2. \end{cases}$

3. $y''-y'=\dfrac{e^x}{1+e^x}$. Можно ли методом подбора указать вид частного решения по виду правой части данного уравнения?

4. $5y''-6y'+5y=e^{\frac{3}{5}x}\sin\dfrac{4}{5}x$.

<u>Вариант 2</u>

Часть 1. 1. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $y''+a_1 y'+a_2 y=f(x)$.

Известно, что корни характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения $r_1=2;\ r_2=3$.

Записать частное решение с неопределенными коэффициентами данного уравнения, используя вид правой части уравнения:

а) $f(x)=5e^{3x}$;

б) $f(x)=2e^{2x}\sin 3x$;

в) $f(x)=3x^3+2x+1$.

Проинтегрировать данные дифференциальные уравнения:

2. $y''+4y=\sin x$ и найти частное решение, удовлетворяющее

начальным условиям $\begin{cases} y(0)=1; \\ y'(0)=1. \end{cases}$

3. $y''+9y=\dfrac{9}{\cos 3x}$. Можно ли по данной правой части методом подбора найти частное решение $\bar{y}$?

4. $y''-8y'+7y=x^2$.

Часть 2. 1. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$. Известно, что корни характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения $r_{1,2}=2\pm i$.

Записать частное решение с неопределенными коэффициентами данного уравнения, используя вид правой части уравнения:

а) $f(x)=e^{2x}(3x^3+2)$;

б) $f(x)=xe^{2x}\cos x$;

в) $f(x)=2x^2+x$.

Проинтегрировать данные дифференциальные уравнения:

2. $y''-4y=x^2e^{2x}$ и найти частное решение, удовлетворяющее

начальным условиям $\begin{cases} y(0)=1; \\ y'(0)=-2. \end{cases}$

3. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$. Можно ли по данной правой части методом подбора найти частное решение $\bar{y}$?

4. $y''-4y'+8y=e^x(5\sin x-3\cos x)$.

Вариант 3

Часть 1. 1. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$.

Известно, что корни характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения $r_1=r_2=-1$.

Записать частное решение с неопределенными коэффициентами данного уравнения, используя вид правой части уравнения:

а) $f(x)=e^{-x}(3\cos x+2\sin x)$;

б) $f(x)=xe^{-x}$;

в) $f(x)=3x^3+1$.

Проинтегрировать данные дифференциальные уравнения:

2. $2y''-y'-y=4xe^{2x}$ и найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $\begin{cases} y(0)=0; \\ y'(0)=0. \end{cases}$

3. $y''+4y=\dfrac{4}{\sin 2x}$. Можно ли по данной правой части методом подбора найти частное решение $\overline{y}$?

4. $y''-4y'+4y=(x-1)e^x$.

Часть 2. 1. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$.

Известно, что корни характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения $r_1=1$; $r_2=3$.

Записать частное решение с неопределенными коэффициентами данного уравнения, используя вид первой части уравнения:

а) $f(x)=3e^{3x}\cos 3x$;

б) $f(x)=(4x^2+1)e^x$;

в) $f(x)=x\cos x+x^2\sin x$.

Проинтегрировать данные дифференциальные уравнения:

2. $y''-2y'+y=2e^x$; $y(0)=1$; $y'(0)=-1$.

3. $y''-y'=e^{2x}\cos e^x$. Можно ли по данной правой части методом подбора найти частное решение $\overline{y}$?

4. $2y''+2y'+5y=4\cos 2x$.

Задание 7. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вариант 1

Часть 1. 1. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

2. Найти частное решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y, \end{cases}$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1;\ y(0) = 3$.

3. Решить матричным способом систему $\begin{cases} x_1' = -2x_2, \\ x_2' = -2x_1. \end{cases}$

Часть 2. 1. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y + t. \end{cases}$

2. Найти частное решение системы $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = x + 3y, \end{cases}$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = y(0) = 1$.

3. Решить матричным способом систему $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$

Часть 3. 1. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

2. Найти частное решение системы $\begin{cases} x' + 3x + 4y = 2t, \\ y' - x - y = t, \end{cases}$ удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0;\ y(0) = 0$.

3. Решить матричным способом систему $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$

Вариант 2

Часть 1. 1. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$

2. Найти частное решение системы $\begin{cases} x' = -3x - y, \\ y' = x - y, \end{cases}$
удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1;\ y(0) = -1$.

3. Решить матричным способом систему $\begin{cases} x_1' = 7x_1 + 3x_2, \\ x_2' = 6x_1 + 4x_2. \end{cases}$

Часть 2. 1. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$

2. Найти частное решение системы $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = t + x + y, \end{cases}$ удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0;\ y(0) = -\dfrac{9}{4}$.

3. Решить матричным способом систему $\begin{cases} x_1' = 8x_2 - x_1, \\ x_2' = x_1 + x_2. \end{cases}$

Вариант 3

Часть 1. 1. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$

2. Найти частное решение системы $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x, \end{cases}$ удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1;\ y(0) = 2$.

3. Решить матричным способом систему $\begin{cases} x' = 3x + 5y, \\ y' = -2x - 8y. \end{cases}$

Часть 2. 1. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y. \end{cases}$

2. Найти частное решение системы $\begin{cases} x' = 3 - 2y, \\ y' = 2x - 2t, \end{cases}$ удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 3;\ y(0) = 0$.

3. Решить матричным способом систему $\begin{cases} x_1' = -x_1 - 2x_2, \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ

Задание 1

Вариант 1

Часть 1 1. $-\operatorname{ctg} y = \frac{1}{3}e^{3x} + C$.

2. $y + 1 = Cx$.

3. $\sqrt{|2y+1|} = C \cdot \sin x$.

4. $\operatorname{arc\,tg} y = \sqrt{4 - x^2}$.

Часть 2 1. $\frac{1}{2}\ln\left(y^2 + 3\right) = \arcsin\frac{x}{2} + C$.

2. $y = \frac{4}{e^x + 3}$.

3. $\operatorname{tg} 3y = 2e^{\frac{x}{2}} + C$.

4. $y^2 + 1 = \sqrt{|\operatorname{tg} x|}$.

Часть 3 1. $\ln\left|y^2 + 2y\right| = C - e^{-x^2}$; $y = 0$; $y = 2$..

2. $\ln y = \frac{C}{\sqrt{|\operatorname{tg} x|}}$.

3. $\frac{y}{y+2} = -\frac{5}{x^2 + 1}$.

4. $\arcsin\frac{y}{2}=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C;\; y=\pm 2$.

5. $\frac{2}{xy-1}=\ln|Cx|$.

Вариант 2

Часть 1 1. $\operatorname{tg} y=\frac{3^x}{\ln 3}+C$.

2. $y=C\left(1+x^2\right)$.

3. $y^2+1=C\sqrt{x^2+1}$.

4. $\operatorname{arc\,tg} y=\frac{1}{x}-1$.

Часть 2 1. $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{3}=\sqrt{x^2+2}+C$.

2. $y=\frac{3}{\sin x}-2$.

3. $e^{-y}=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right|+C$.

4. $\sqrt{\left|\frac{y-1}{y+1}\right|}=\frac{x^2+1}{\sqrt{3}}$.

Вариант 3

Часть 1 1. $\sin y=\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

2. $\left(1+y^2\right)^2=\frac{C}{x}$.

3. $1+y^2=Cx$.

4. $\sqrt{3+y^2}=-\arcsin x+2$.

Часть 2 1. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|=\sqrt{x^2-3}+C$.

2. $\sin y=\frac{1}{\sin x}$.

3. $\operatorname{ctg}2y=3e^{\frac{x}{2}}+C$.

4. $y+\sqrt{y^2+3}=3\sqrt{x^2+1}$.

Задание 2

Вариант 1

Часть 1 1. $\sin\frac{y}{x}=Cx$.

2. $y=x(2\ln|x|+C)$.

3. $y=x^4+x^2$.

Часть 2 1. $x(y-x)=\frac{y}{2}$.

2. $y=x(\sin x-1)$.

3. $x=y\sqrt{\ln|x|+1}$.

4. $x=y^2+Cy;\ \ y=0$.

Часть 3 1. $1+\ln x=\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)$.

2. $x=e^y+e^{-y}$.

3. $x^2-xy+y^2+x-y=C$.

4. $y^2=C(x+1)^2-2(x+1)$.

Вариант 2

Часть 1 1. $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}=\ln|Cx|$.

2. $y=x^2-x$.

3. $y=\sin x+C\cos x$.

Часть 2 1. $y=x\ln|Cy|$.

2. $y=e^x\left(1+\ln|x|\right)$.

3. $x(2+\ln x)=2\sqrt{xy}$.

4. $y=Ce^{x^2}-x^2-1$.

Вариант 3

Часть 1 1. $e^{\frac{y}{x}}\cdot\ln|Cx|=1$.

2. $y=(x+1)\ln|Cx+C|$.

3. $y=\dfrac{1}{4}x^3-x$.

Часть 2 1. $\ln\left(x^2+y^2\right)=C-2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

2. $y=e^x\ln|x|$.

3. $y^2-x^2=\dfrac{3}{2}y$.

4. $y=C\ln^2 x-\ln x$.

З а д а н и е 3

Вариант 1

Часть 1 1. $y=-\dfrac{x-1}{x+C}$.

2. $e^y+\dfrac{x^2}{2}+xy-x=C$.

3. $y = x^4 \ln^2 |x|$.

Часть 2 1. $y = \left(1 + x^2\right)\left(\operatorname{arc\,tg}^2 x + C\right)^2$.

2. $e^x + xy + x\sin y + e^y = C$.

3. $y = e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^x + 1\right)^2$.

4. $x\left(\ln|y| + 1 - Cy\right) = 1$.

Часть 3 1. $y = \frac{-1}{\cos x \sqrt[3]{3\operatorname{tg} x + 1}}$.

2. $xy\left(y + C\right) = 1$.

3. $x^2 + y^2 = e^{-y}$.

4. $x^3 y - 2x^2 y^2 + 3y^4 = C$.

5. $x^3 + x^3 \ln y - y^2 = C$.

Вариант 2

Часть 1 1. $y = \frac{1}{x(x+C)}$.

2. $xe^{-y} + y = C$.

3. $y = \frac{e^{-2x}}{e^{-x} - 3}$.

Часть 2 1. $y = \frac{e^{x^2/2}}{\sqrt{C + 2x}}$.

2. $\frac{x^3}{3} + xy^2 + xy + e^y = C$.

3. $y = x(1 - \ln x)^2$.

4. $x = y\sqrt{C - \frac{2}{y}}$.

Вариант 3

Часть 1 1. $y = x\sqrt{C - \dfrac{2}{x}}$.

2. $x^2 + x^3 y - y^3 = C$.

3. $y = \dfrac{2x}{1 - 3x^2}$.

Часть 2 1. $y = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{e^{-x^2} + C}}$.

2. $x^2 \cos^2 y + y^2 = C$.

3. $y = \left(x\sqrt[3]{3\ln\left|\dfrac{1}{x}\right| - 8} \right)^{-1}$.

4. $x = \dfrac{2y}{Cy^2 + 1}$.

Задание 4

Вариант 1

Часть 1 1. $y = \left[\dfrac{x^3}{6} \sin x + C_1 x + C_2 \right]$.

2. $y = x^3 + 3x + 1$.

3. $\dfrac{1}{1 - y} = C_1 x + C_2$.

Часть 2 1. $y = -x\sin x - 2\cos x - 2x + 5$.

2. $y = \dfrac{1}{x} + C_1 \ln|x| + C_2$.

3. $4(y - 1) = (x + 3)^2$.

Часть 3 1. $y = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + 3x - 2$.

2. $y = e^x (x-1) + C_1 x^2 + C_2$.

3. $y(x+4) = 1$.

4. $S = \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t$.

Вариант 2

Часть 1 1. $y = 3\ln|x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

2. $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$.

3. $2\sqrt{y} = C_1 x + C_2$.

Часть 2 1. $y = \ln|\sin x| + x^2 + \pi^2$.

2. $y = \frac{x^2}{4} + x + C_1 \ln|x| + C_2$.

3. $x(y-1) = 1$.

Вариант 3

Часть 1 1. $y = \frac{x^5}{20} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

2. $y = C_1 (x\ln x - x) + C_2$.

3. $\operatorname{ctg} y = 4 - 4x$.

Часть 2 1. $y = -x\ln|x| + x^2 + x + 3$.

2. $y = -x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_1 \sin x + C_2$.

3. $\ln y = \operatorname{tg}(x-2)$.

Задание 5

Вариант 1

Часть 1

1. $y=e^{2x}-e^{-2x}$.
2. $y=e^{3x}(C_1+C_2x)$.
3. $y=e^{\frac{x}{2}}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.
4. $y=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$.
5. $y=C_1x+C_2\left(x^2+1\right)$.

Часть 2

1. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$.
2. $y=e^{\frac{2}{3}x}(C_1+C_2x)$.
3. $y=2\cos 3x+3\sin 2x$.
4. $y=C_1e^{-2x}+e^{x}\left(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x\right)$.
5. $y=C_1\cos(\cos x)+C_2\sin(\cos x)$.

Часть 3

1. $y=e^{-2x}(2+5x)$.
2. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$.
3. $y=\frac{1}{4}e^{x}-\frac{1}{4}e^{-3x}$.
4. $y=-4e^{-x}+e^{2x}$.
5. $y=C_1\sin x+C_2\left(1-\sin x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\right)$.

Вариант 2

Часть 1

1. $y=2e^{x}-e^{-2x}$.
2. $y=e^{x}(C_1+C_2x)$.
3. $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.
4. $y=C_1+C_2\cos 3x+C_3\sin 3x$.

5. $y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$.

Часть 2 1. $y = e^{3x} + 2e^{-3x}$.

2. $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$.

3. $y = e^{-2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$.

4. $y = C_1 e^{x} + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$.

5. $y = C_1 \cos(\sin x) + C_2 \sin(\sin x)$.

Вариант 3

Часть 1 1. $y = 2e^{3x} + 4e^{x}$.

2. $y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$.

3. $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$.

4. $y = C_1 + C_2 \cos 5x + C_3 \sin 5x$.

5. $y = C_1 x^3 + C_2 \frac{1}{x^3}$.

Часть 2 1. $y = e^{5x} - e^{-5x}$.

2. $y = e^{-\frac{x}{4}}(C_1 + C_2 x)$.

3. $y = e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

4. $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}\left(C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x\right)$.

5. $y = C_1 x + C_2 \left(\frac{x}{2} \cdot \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1\right)$.

З а д а н и е 6

Вариант 1

Часть 1 1. а) $\bar{y} = e^{2x}(ax + b)$;

б) $\bar{y} = xe^{2x}(a\cos 3x + b\sin 3x)$;

в) $\bar{y}=ax^2+bx+C$.

2. $y=-\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{1}{4}e^x(2x+5)$.

3. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+3x\cos 3x+\sin 3x\cdot\ln|\sin 3x|$.

4. $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{x^2}{5}+\frac{4}{25}x+\frac{158}{125}$.

Часть 2 1. а) $\bar{y}=(ax^4+bx^3+Cx^2)e^{3x}$;

б) $\bar{y}=e^{3x}(a\cos 2x+b\sin 2x)$;

в) $\bar{y}=ae^x$.

2. $y=-4e^{-x}+2,4+e^{-2x}(1,6\cos x-0,8\sin x)$.

3. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\cdot\ln|\cos x|$.

4. $y=C_1e^x+C_2e^{4x}-\frac{1}{18}x(3x+2)e^x$.

Часть 3 1. а) $\bar{y}=(ax^5+bx^4+Cx^3)e^x$;

б) $\bar{y}=xe^{5x}(a\cos 4x+b\sin 4x)$;

в) $\bar{y}=(ax+b)\cos x+(Cx+d)\sin x$.

2. $y=(0,16\cos 3x+0,28\sin 3x)e^x+x^2+2,2x+0,84$.

3. $y=C_1e^x+C_2+xe^x-(1+e^x)\ln(1+e^x)$.

4. $y=e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\sin\frac{4}{5}x\right)-\frac{1}{8}e^{\frac{3}{5}x}\cos\frac{4}{5}x$.

Вариант 2

Часть 1 1. а) $\bar{y}=axe^{3x}$;

б) $\bar{y}=e^{2x}(a\cos 3x+b\sin 3x)$;

в) $\bar{y}=ax^3+bx^2+Cx+d$.

2. $y=\cos 2x+\frac{1}{3}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin x$.

3. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+3x\sin 3x+\cos 3x\ln|\cos 3x|$.

4. $y=C_1e^x+C_2e^{7x}+\dfrac{1}{343}\left(49x^2+112x+114\right)$.

Часть 2

1. а) $\bar{y}=e^{2x}\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)$;

б) $\bar{y}=xe^{2x}\left((ax+b)\cos x+(Cx+d)\sin x\right)$;

в) $\bar{y}=ax^2+bx+C$.

2. $y=\dfrac{129}{128}e^{-2x}-\dfrac{1}{128}e^{2x}+e^{2x}\left(\dfrac{1}{12}x^3-\dfrac{1}{16}x^2+\dfrac{1}{32}x\right)$.

3. $y=C_1e^x+C_2xe^x+xe^x\ln\left|\dfrac{x}{e}\right|$.

4. $y=e^{2x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+$

$+e^x\left(1{,}3\sin x-0{,}1\cos x\right)$.

Вариант 3

Часть 1

1. а) $\bar{y}=e^{-x}\left(a\cos 3x+b\sin 3x\right)$;

б) $\bar{y}=\left(ax^3+bx^2\right)e^{-x}$;

в) $\bar{y}=ax^3+bx^2+Cx+d$.

2. $y=\dfrac{4}{3}e^x-\dfrac{16}{75}e^{-\frac{x}{2}}+e^{2x}\left(\dfrac{4}{5}x-\dfrac{28}{25}\right)$.

3. $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x-2x\cos 2x+\sin 2x\ln|\sin 2x|$.

4. $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+(x+1)e^x$.

Часть 2

1. а) $\bar{y}=e^{3x}\left(a\cos 3x+b\sin 3x\right)$;

б) $\bar{y}=x\left(ax^2+bx+C\right)e^x$;

в) $\bar{y}=\left(ax^2+bx+c\right)\cos x+\left(dx^2+fx+g\right)\sin x$.

2. $y=e^x-2xe^x+x^2e^x$.

3. $y=C_1e^x+C_2-\cos e^x$.

4. $y=e^{-0,5x}\left(C_1\cos 1,5x+C_2\sin 1,5x\right)-$
$-0,48\cos 2x+0,64\sin 2x.$

Задание 7

Вариант 1

Часть 1

1. $x=C_1e^{t\sqrt{2}}+C_2e^{-t\sqrt{2}};$
$y=C_1\left(\sqrt{2}-1\right)e^{t\sqrt{2}}-C_2\left(\sqrt{2}+1\right)e^{-t\sqrt{2}}.$

2. $x=2e^{3t}-e^t;\ \ y=2e^{3t}+e^t.$

3. $x_1=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t};\ \ x_2=-C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}.$

Часть 2

1. $x=C_1+C_2e^{7t}-\frac{3}{49}(7t+2)t;$
$y=-\frac{2}{3}C_1+\frac{1}{2}C_2e^{7t}+\frac{1}{49}\left(14t^2-3t-1\right).$

2. $x=e^{2t}(\cos t-3\sin t);\ \ y=e^{2t}(\cos t+2\sin t).$

3. $x_1=-C_1e^t+C_2e^{9t};\ \ x_2=C_1e^t+C_2e^{9t}.$

Часть 3

1. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t};\ \ y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t};$
$z=C_2e^{2t}-(C_1+C_3)e^{-t}.$

2. $x=-14e^{-t}-8te^{-t}+14-6t;\ \ y=9e^{-t}+4te^{-t}+5t-9.$

3. $x_1=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}+C_3e^{-2t};\ \ x_2=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}-C_3e^{-2t};$
$x_3=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}.$

Вариант 2

Часть 1

1. $x=C_1e^t+C_2e^{-t};\ \ y=C_1e^t-C_2e^{-t}.$

2. $x=e^{-2t};\ \ y=-e^{-2t}.$

3. $x=C_1e^t+C_2e^{10t};\ \ y=-2C_1e^t+C_2e^{10t}.$

Часть 2

1. $x=(C_1\cos t+C_2\sin t)e^{-t};$
$y=\frac{1}{5}\left((C_2-2C_1)\cos t-(C_1+2C_2)\sin t\right)e^{-t}.$

2. $x = 1 - e^{2t} - \frac{1}{4}\left(t^2 + t\right)$; $y = -e^{2t} + \frac{1}{4}\left(t^2 - t - 5\right)$.

3. $x_1 = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}$; $x_2 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$.

Вариант 3

Часть 1

1. $x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$; $y = -\frac{C_1}{2}\sin 2t + \frac{C_2}{2}\cos 2t$.

2. $x = e^t (1 - t)$; $y = e^t (2 - t)$.

3. $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-7t}$; $y = \frac{1}{5} C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-7t}$.

Часть 2

1. $x = e^{-t}(C_1 + C_2 t)$; $y = e^{-t}\left(2C_1 + C_2 (2t - 1)\right)$.

2. $x = 3\cos 2t + \sin 2t + t$; $y = -\cos 2t + 3\sin 2t + 1$.

3. $x_1 = C_1 e^t - 2C_2 e^{2t}$; $x_2 = -C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{2t}$.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Составители: **Зубрина Лилия Григорьевна**
Коломиец Людмила Вадимовна
Файницкий Юрий Львович

Редактор Т. И. Кузнецова
Техн. редактор Г. А. Усачева
Корректор Т. И. Щелокова

Подписано в печать 20.09.94. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,86. Усл. кр.-отт. 2,0. Уч.-изд. л 1,96.
Тираж 200 экз. Заказ 336. Арт. С-53 мр/94.

Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С. П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ИПО Самарского государственного аэрокосмического
университета им. академика С. П. Королева.
443001 Самара, ул. Ульяновская, 18.