МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Часть 2

Методические указания к практическим занятиям для студентов-заочников

САМАРА 2000

Составитель *Прокофьев Л.Н.*

УДК 510. 2(075)

Линейная алгебра. Методические указания к практическим занятиям для студентов-заочников / Самарский гос. аэрокосмический ун-т; Сост. *Л.Н.Прокофьев*. Самара, 2000. 64 с.

Методические указания по линейной алгебре предназначены для индивидуальной, самостоятельной работы студентов 1 курса факультета заочного обучения университета по специальности 220 200 «Автоматизированные системы обработки информации и управления». Они включают в себя основные типы задач, необходимых для усвоения курса линейной алгебры.

Подготовлены на кафедре прикладной математики факультета информатики.

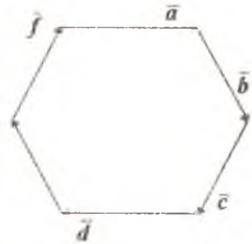
Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П.Королева

Практическое занятие по теме: «ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА»

I. Линейные операции над векторами

Задача № 1.

В правильном 6-угольнике, составленном из 6 векторов одинаковой длины: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\bar{e}$, $\bar{f}$, найти коллинеарные (например, $\bar{a}$ и $\bar{d}$) и противоположные (например, $\bar{a}$ и $\bar{d}$) векторы.
Отметить отсутствие здесь равных векторов. Изменить направление двух коллинеарных векторов так, чтобы они стали равными (например, $\bar{a}=-\bar{d}$).

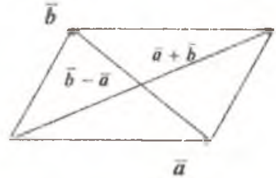


Задача № 2.

По данным вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить каждый из следующих векторов:

1) $\bar{d}=-\bar{a}$;
2) $\bar{b}-\bar{a}$
3) $-\bar{a}-\bar{b}$.

Выполнив построение, подчеркнуть, что вектор $-\bar{a}-\bar{b}$ является противоположным вектору $\bar{a}+\bar{b}$ и что векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{b}-\bar{a}$ (или $\bar{a}-\bar{b}$) служат векторами диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.



Сформулировав правило многоугольника для сложения нескольких векторов, предложить студентам сложить 4 заданных вектора.

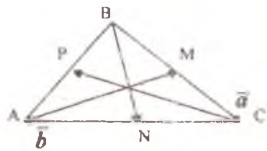
Задача № 3.

Используя правило умножения вектора на число, построить по данным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы:

1) $4\bar{a}$
2) $-\bar{b}/3$
3) $\bar{a}/2-2\bar{b}$

Задача № 4.

Треугольник АВС построен на векторах $\overline{BC}=\bar{a}$, $\overline{CA}=\bar{b}$. Разложить по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы, совпадающие с медианами треугольника: $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$.



Решение:

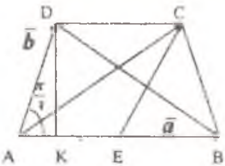
На основании определения линейных операций над векторами имеем:

$\overline{AM}$ =-($\bar{b}$ + $\bar{a}$ /2), $\overline{BN}$ = $\bar{a}$ + $\bar{b}$ /2.

Для определения вектора $\overline{CP}$ лучше достроить треугольник ABC до параллелограмма ADBC.

Получим $\overline{CP}$ =($\bar{b}$ - $\bar{a}$)/2.

Задача № 5.



В равнобедренной трапеции ABCD известны нижнее основание $\overline{AB}$ = $\bar{a}$, боковая сторона $\overline{AD}$ = $\bar{b}$ и угол между ними ∠A=π/3. Разложить по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ все векторы, составляющие остальные стороны и диагонали трапеции.

Решение:

1) $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD} = \bar{a} - \bar{b}$.

2) Для определения $\overline{DC}$ найдем его длину и направление. Проведем DK⊥AB.

$$|\overline{AK}| = |\bar{b}|/2; \ |\overline{DC}| = |\bar{a}| - |\bar{b}|.$$

Направление $\overline{DC}$ совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, значит,

$$\overline{DC} = ((|\bar{a}| - |\bar{b}|)/|\bar{a}|)\bar{a} .$$

Замечание. Вспомнить определение орта $\bar{a}^{\circ}$ и соотношение $\bar{a}^{\circ} = \bar{a}/|\bar{a}|$.

3) Найдем $\overline{CB}$ (т. е. его длину,направление). Проведем CE||AD; $\overline{EC} = \bar{b}$

Вектор $\overline{EB}$ имеет длину $|\bar{b}|$ и направление вектора $\bar{a}$. Значит

$$\overline{EB} = (|\bar{b}|/|\bar{a}|)\bar{a}$$

$$\overline{CB} = \overline{EB} - \overline{EC} = (|\bar{b}|/|\bar{a}|)\bar{a} - \bar{b} .$$

4) $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \bar{b} + ((|\bar{a}| - |\bar{b}|)/|\bar{a}|)\bar{a}$.

Задача № 6.

Зная разложения векторов $\bar{l}, \bar{m}$ и $\bar{n}$ по трем некомпланарным векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, проверить, будут ли векторы $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ компланарны и в случае компланарности дать связывающую их линейную зависимость:

а) $\bar{l} = \bar{c}$, $\bar{m} = \bar{a} - \bar{b} - \bar{c}$, $\bar{n} = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$;

б) $\bar{l} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{m} = \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{n} = -\bar{a} + \bar{c}$.

Решение:

а) Для установления факта компланарности (линейной зависимости) ответим на вопрос: найдутся ли такие числа α, β, γ, не равные одновременно 0, при которых $\alpha\bar{l} + \beta\bar{m} + \gamma\bar{n} = \bar{0}$, т. е. $\alpha\bar{c} + \beta(\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}) + \gamma(\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) = \bar{0}$.

Собирая вместе коэффициенты при векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и учитывая некомпланарность последних,мы получим

$$(\beta+\gamma)\bar{a}+(-\beta-\gamma)\bar{b}+(\alpha-\beta+\gamma)\bar{c}=\bar{0},$$

причем $\begin{cases}\beta+\gamma=0;\\ -\beta-\gamma=0;\\ \alpha-\beta+\gamma=0.\end{cases}$ (1)

Т. к. определитель этой однородной линейной системы относительно β, α, γ

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0, \text{ то}$$

система имеет ∞-ое множество ненулевых решений, а значит, найдутся числа α, β, γ, одновременно не равные 0, такие, что будет выполнено соотношение $\alpha\bar{l}+\beta\bar{m}+\gamma\bar{n}=\bar{0}$. Отсюда следует линейная зависимость (компланарность) векторов $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$.

Для записи линейной зависимости решим систему (1).

Имеем α=2β, γ=-β, где β - произвольно. Значит, взяв, например, β=1, α=2, γ=-1, получим $2\bar{l}+\bar{m}-\bar{n}=\bar{0}$.

В случае b) задача решается аналогично.

Ответ: Система векторов $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ линейно независима.

НА ДОМ:

Задача № 1.

Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, проверить на чертеже справедливость тождества

$$(\bar{a}+\bar{b})+(\bar{a}-\bar{b})=2\bar{a}.$$

Задача № 2.

Каким условием должны быть связаны векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$, чтобы вектор $\bar{p}+\bar{q}$ делил угол между ними пополам?

Предполагается, что все три вектора отнесены к общему началу.

Задача № 3.

Зная векторы, служащие сторонами треугольника $\overline{AB}=\bar{c}$, $\overline{BC}=\bar{a}$ и $\overline{CA}=\bar{b}$, найти векторы,соответственно коллинеарные биссектрисам углов этого треугольника.

Задача № 4.

Зная разложения векторов $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ по трем некомпланарным векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, проверить, являются ли $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ компланарными, и в случае компланарности дать линейную зависимость,их связывающую:

$$\bar{l}=2\bar{a}-\bar{b}-\bar{c},\ \bar{m}=2\bar{b}-\bar{c}-\bar{a},\ \bar{n}=2\bar{c}-\bar{a}-\bar{b}.$$

Задача № 5.

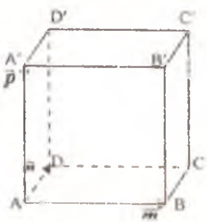
В треугольнике ABC вектор $\overline{AB}=\bar{m}$ и вектор $\overline{AC}=\bar{n}$. Построить каждый из следующих векторов:

1) $(\bar{m}+\bar{n})/2$;
2) $(\bar{m}-\bar{n})/2$;
3) $(\bar{n}-\bar{m})/2$;
4) $-(\bar{m}+\bar{n})/2$.

Применяя в качестве масштабной единицы $|\bar{n}|/2$, построить также векторы

5) $|\bar{n}|\bar{m}+|\bar{m}|\bar{n}$;
6) $|\bar{n}|\bar{m}-|\bar{m}|\bar{n}$.

Задача № 6.



В параллелепипеде ABCDA'B'C'D' заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overline{AB}=\bar{m}$, $\overline{AD}=\bar{n}$, $\overline{AA'}=\bar{p}$. Построить каждый из следующих векторов:

1) $\bar{m}+\bar{n}+\bar{p}$;
2) $\bar{m}+\bar{n}+\bar{p}/2$;
3) $\bar{m}/2+\bar{n}/2+\bar{p}$;
4) $\bar{m}+\bar{n}-\bar{p}$;
5) $-\bar{m}-\bar{n}+\bar{p}/2$.

Задача № 7.

Доказать, что если $\bar{p}$ и $\bar{q}$ – какие угодно неколлинеарные векторы, то всякий вектор, лежащий в их плоскости, может быть представлен в виде $\bar{a}=\alpha\bar{p}+\beta\bar{q}$. Доказать, что числа α и β векторами $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$ определяются однозначно (представление вектора $\bar{a}$ в виде $\bar{a}=\alpha\bar{p}+\beta\bar{q}$ называется разложением по базису $\bar{p}$, $\bar{q}$; числа α и β - коэффициенты этого разложения).

II. Координаты вектора. Скалярное произведение двух векторов

Задача № 1.

Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если известны координаты точек A (1,0,1) и B (-2,1,3). Вычислив $\overline{AB}=(-2-1,1-0,3-1)$, т.е. $\overline{AB}=(-3,1,2)$, выяснить геометрический смысл числа –3, являющегося первой координатой вектора $\overline{AB}$, исходя из определения координаты вектора.

Задача № 2.

Даны два вектора $\bar{a}(3,-2,6)$, $\bar{b}(-2,1,0)$. Определить проекции на координатные оси векторов

1) $\bar{a}+\bar{b}$;
2) $2\bar{a}-3\bar{b}$;
3) $\bar{a}/3+\bar{b}$.

Задача № 3.

Определить, при каких значениях α и β векторы $\bar{a}=-2\bar{i}+3\bar{j}+\beta\bar{k}$ и $\bar{b}=\alpha\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}$ коллинеарны.

Решение:

Из условия коллинеарности данных векторов запишем $-2/\alpha=3/-6=\beta/2$.

Решив эту систему 2-х линейных уравнений, найдем $\alpha=4$ и $\beta=-1$.

Устными рассуждениями доказать, что:

1) для коллинеарных векторов $(\bar{a},\bar{b})=\pm|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$;
2) для единичных векторов $(\bar{a},\bar{b})=\cos\varphi$, где φ- угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
3) для равных векторов $(\bar{a},\bar{a})=|\bar{a}|^2$;
4) $\bar{i}^2=1$.

Задача № 4.

Доказать тождество

$$(\bar{a}+\bar{b})^2+(\bar{a}-\bar{b})^2=2(|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2),$$

дать ему геометрическое истолкование.

Решение:

По определению скалярного квадрата и на основании свойств скалярного умножения получим:

$$(\bar{a}+\bar{b})^2=(\bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}+\bar{b})=|\bar{a}|^2+2(\bar{a},\bar{b})+|\bar{b}|^2$$

(перечислить те свойства скалярного умножения, которые здесь использованы);

$$(\bar{a}-\bar{b})^2=(\bar{a}-\bar{b},\bar{a}-\bar{b})=|\bar{a}|^2-2(\bar{a},\bar{b})+|\bar{b}|^2.$$

Поэтому

$$(\bar{a}+\bar{b})^2+(\bar{a}-\bar{b})^2=2(|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2)$$

(сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон).

Задача № 5.

Доказать, что вектор $\bar{x}=\bar{b}(\bar{a},\bar{c})-\bar{a}(\bar{b},\bar{c})$ перпендикулярен вектору $\bar{c}$.

Решение:

Вспомнив необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов, получим

$(\bar{x}, \bar{c}) = (\bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) - \bar{a}(\bar{b}, \bar{c}), \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c})(\bar{a}, \bar{c}) - (\bar{a}, \bar{c})(\bar{b}, \bar{c}) = 0.$

Значит $(\bar{x}, \bar{c})=0$, и вектор $\bar{x} \perp \bar{c}$.

Напомнить механический смысл скалярного произведения и способ его вычисления в координатной форме.

Задача № 6.

Даны три силы:

$$\bar{f}_1=(3,-4,-2),\ \bar{f}_2=(2,3,-5),\ \bar{f}_3=(-3,-2,4),$$

приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу произведет равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_1(5,3,-7)$ в положение $M_2(4,-1,-4)$.

Решение:

Напомнив студентам, что работа А вектора силы $\bar{f}$, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\bar{S}$, определяется по формуле А=$(\bar{f}, \bar{S})$, найдем координаты равнодействующей $\bar{f}$ сил $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$.

Складывая одноименные координаты векторов $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$, получим $\bar{f}=(2,-3,1)$. Вектор $\overline{M_1M_2}$, вдоль которого происходит перемещение точки приложения силы $\bar{f}$, имеет координаты $\overline{M_1M_2}=(-1,-4,3)$. Значит работа А=$(\bar{f}, \overline{M_1M_2})=-2+12+3=13$.

Напомнить формулы для определения длины (модуля) и направляющих косинусов вектора.

Задача № 7.

Найти длину и направление вектора $\bar{a}=(1,1,1)$.

Решение:

Имеем $|\bar{a}|=\sqrt{3}$.

$\text{Cos}(\alpha)=np_{\bar{i}}\,\bar{a}/|\bar{a}|=a_x/|\bar{a}|=1/\sqrt{3}=\cos(\beta)=\cos(\gamma)$ (здесь $a_x=a_y=a_z=1$).

На этом примере проверить соотношение между направляющими косинусами вектора $\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma)=1$.

Задача № 8.

Найти орт вектора $\bar{a}=(3,4,-12)$.

Решение:

Т. к. координаты орта $\bar{a}^\circ$ направления вектора $\bar{a}$ определяются из тех же формул что и направляющие косинусы вектора

$a^\circ_x=a_x/|\bar{a}|$, $a^\circ_y=a_y/|\bar{a}|$, $a^\circ_z=a_z/|\bar{a}|$, получаем $\bar{a}^\circ=(3/13;\ 4/13;\ -12/13)$.

Дать определение угла между векторами и проекции вектора на вектор, а также формулы для их вычисления.

Задача № 9.

Даны три вектора

$$\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k},\ \bar{b}=\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k},\ \bar{c}=3\bar{i}-4\bar{j}+12\bar{k}.$$

Найти угол φ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и проекцию вектора $\bar{a}+\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$.

Решение: По формуле вычисления угла между векторами найдем

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{1+(-2)+(-8)}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит $\varphi=3\pi/4$.

Находим координаты вектора $\bar{a}+\bar{b}=(2,-1,-2)$. По формуле вычисления проекции вектора на вектор получим

$$np_{\bar{c}}(\bar{a}+\bar{b})=\frac{2\cdot3+(-1)\cdot(-4)+(-2)\cdot12}{\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}}=-\frac{14}{3}.$$

Примечание.

Обратить внимание на геометрический смысл знака «минус» у найденной проекции.

НА ДОМ:

Задача № 8.

Доказать, что скалярное произведение двух векторов не изменится, если к одному из них прибавить вектор, перпендикулярный другому сомножителю.

Задача № 9.

В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Вычислить угол между ними.

Задача № 10.

Зная векторы, образующие треугольник $\overline{AB}=2\bar{a}-6\bar{b}$, $\overline{BC}==\bar{a}+7\bar{b}$, $\overline{CA}=-3\bar{a}-\bar{b}$, где $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - взаимно перпендикулярные орты, определить углы этого треугольника.

Задача № 11.

Зная разложение вектора $\bar{Q}=6\bar{m}-2\bar{n}+3\bar{p}$ по трем перпендикулярным ортам, вычислить длину вектора $\bar{Q}$ и углы, которые он образует с каждым из ортов $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$.

Задача № 12.

Проверить, что векторы $\bar{p}=\bar{a}(\bar{b},\bar{c})-\bar{b}(\bar{a},\bar{c})$ и $\bar{c}$ перпендикулярны друг другу.

Задача № 13.

Даны точки A(-1,5,-10), B(5,-7,8), C(2, 2,-7) и D(5,-4,2). Проверить, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны, установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены - в одну или в противоположные стороны.

Задача № 14.

Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы вектор $\bar{a}+\bar{b}$ был перпендикулярен вектору $\bar{a}-\bar{b}$.

Задача № 15.

Даны векторы $\overline{AB}=\bar{b}$ и $\overline{AC}=\bar{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC. Найти разложение по базису $\bar{b}$, $\bar{c}$ вектора, приложенного к вершине B этого треугольника и совпадающего с высотой BD.

Задача № 16.

Вычислить, какую работу производит сила $\bar{f}=(3,-5,2)$, когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора $\bar{S}=(2,-5,-7)$.

Задача № 17.

Даны три вектора $\bar{a}=(1,-3,4)$, $\bar{b}=(3,-4,2)$ и $\bar{c}=(-1,1,4)$. Вычислить $np_{\bar{b}+\bar{c}}\,\bar{a}$.

III. Векторное произведение двух векторов. Смешанное произведение трех векторов

По этому разделу студенты должны усвоить:

1) определение векторного произведения двух векторов;
2) нахождение координат вектора векторного произведения;
3) необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов;
4) способы вычисления с помощью векторного произведения площадей параллелограмма и треугольника, угла между ребром и гранью в пирамиде и двугранного угла;
5) определение смешанного произведения 3-х векторов и его геометрический смысл;
6) понятия правой и левой тройки векторов;
7) вычисление смешанного произведения векторов в координатной форме;
8) необходимое и достаточное условие компланарности векторов;
9) способы вычисления объемов параллелепипеда и пирамиды с помощью смешанного произведения.

Устными рассуждениями доказать, что:

1) для перпендикулярных векторов $|[\bar{a}, \bar{b}]| = |\bar{a}||\bar{b}|$;
2) для коллинеарных векторов $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$ (подчеркнуть необходимость и достаточность условия $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$ для коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$);
3) для равных векторов $[\bar{a}, \bar{a}] = \bar{0}$;
4) $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$.

Задача № 1.

При каком значении коэффициента α векторы $\bar{p} = \alpha\bar{a} + 5\bar{b}$ и $\bar{q} = 3\bar{a} - \bar{b}$ окажутся коллинеарными, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарны?

Решение:

Исходя из условия коллинеарности $[\bar{p}, \bar{q}] = \bar{0}$ и используя свойства векторного произведения,получим

$$[\bar{p}, \bar{q}] = [\alpha\bar{a} + 5\bar{b}, 3\bar{a} - \bar{b}] = 3\alpha[\bar{a}, \bar{a}] + 15[\bar{b}, \bar{a}] - \alpha[\bar{a}, \bar{b}] - 5[\bar{b}, \bar{b}] =$$

$$= 15[\bar{b}, \bar{a}] - \alpha[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$$

(перечислить те свойства векторного произведения, которые здесь использованы). Значит $(15+\alpha)[\bar{b}, \bar{a}] = \bar{0}$, и так как $[\bar{b}, \bar{a}] \neq \bar{0}$ по условию, то $\alpha = -15$.

Задача № 2.

Доказать тождество

$$[\bar{a}, \bar{b}]^2 + (\bar{a}, \bar{b})^2 = \bar{a}^2\bar{b}^2.$$

Решение:

Т. к. 1-ое слагаемое в левой части есть скалярный квадрат вектора $[\bar{a}, \bar{b}]$, то $[\bar{a}, \bar{b}]^2 = |[\bar{a}, \bar{b}]|^2$, и по определению модуля векторного произведения получим

$$|[\bar{a}, \bar{b}]|^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \sin^2\varphi.$$

По определению скалярного произведения второе слагаемое в левой части равно:

$$(\bar{a}, \bar{b})^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \cos^2\varphi.$$

Значит, левая часть доказываемого тождества преобразуется к виду

$$[\bar{a}, \bar{b}]^2 + (\bar{a}, \bar{b})^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 = \bar{a}^2 \bar{b}^2.$$

Напомнив способ отыскания координат вектора векторного произведения и механический смысл векторного произведения, решить следующую задачу.

Задача № 3.

Показать что момент силы $\bar{f} = 2\bar{i} + 3\bar{i} - \bar{k}$, приложенной к точке A(4,2,-3), относительно точки B(7,3,-1) является вектором, перпендикулярным вектору $\bar{c} = (1,5,-4)$.

Решение:

Вспомнив, что моментом $\overline{M}$ силы $\bar{f}$, приложенной к точке A относительно точки B, служит векторное произведение $\overline{M} = [\bar{f}, \overline{AB}]$, найдем координаты вектора $\overline{AB} = (3,1,2)$, а затем запишем разложение векторного произведения $[\bar{f}, \overline{AB}]$ по базису

$$\overline{M} = [\bar{f}, \overline{AB}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \bar{k} = 7\bar{i} - 7\bar{j} - 7\bar{k}.$$

Проверим условие перпендикулярности векторов $\overline{M}$ и $\bar{c}$: $7 + (-35) + 28 = 0$.

Следовательно, векторы $\overline{M}$ и $\bar{c}$ перпендикулярны.

Задача № 4.

С помощью векторного произведения вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах

$$\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k} \quad \text{и} \quad \bar{b} = \bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}.$$

Решение:

Найдем координаты векторов диагоналей параллелограмма:

$$\bar{a} + \bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{j}; \ \bar{a} - \bar{b} = \bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}.$$

Разложение по базису вектора $[\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} - \bar{b}]$ есть

$$[\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} - \bar{b}] = 2[\bar{b}, \bar{a}] = 2(2\bar{i} + 3\bar{j} + 7\bar{k}).$$

Модуль $|[\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} - \bar{b}]| = 2\sqrt{2^2 + 3^2 + 7^2} = 2\sqrt{62}$.

Из формулы, определяющей модуль векторного произведения, находим

$$\sin\varphi = \frac{\left|\left[\bar a + \bar b, \bar a - \bar b\right]\right|}{\left|\bar a + \bar b\right| \cdot \left|\bar a - \bar b\right|} = \frac{2\sqrt{62}}{\sqrt{3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \sqrt{\frac{248}{273}}.$$

Задача № 5.

Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках A(3,4,-1), B(2,0,3), C(-3,5,3).

Решение:

Используя геометрический смысл модуля векторного произведения, получим

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right|.$$

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $\overline{AB}$=(-1, -4,4); $\overline{AC}$=(-6,1,4).

Отсюда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}^2} = \frac{\sqrt{1425}}{2} \text{ кв. ед.} = \frac{5\sqrt{57}}{2} \text{ кв. ед}.$$

Задача № 6.

В треугольнике ABC предыдущей задачи найти длину высоты, опущенной из вершины B (h_B).

Решение:

В предыдущей задаче найдена площадь $S_{ABC}=5\sqrt{57}/2$ кв. ед.

Длина стороны $\overline{AB}$: $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{33}$ ед.

Отсюда $h_B=2S/|\overline{AB}|=5\sqrt{57}/\sqrt{33}=5\sqrt{\frac{19}{11}}$ ед.

Задача № 7.

Найти угол,образованный прямой, на которой лежит вектор $\bar m = \bar i - 3\bar j + \bar k$, и плоскостью векторов $\bar b = 2\bar i - \bar j + 3\bar k$, $\bar c = \bar i + \bar k$.

Решение:

Найдем вектор $[\bar b, \bar c]$, который перпендикулярен плоскости векторов $\bar b$ и $\bar c$:

$$[\bar b, \bar c] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\bar i + \bar j + \bar k.$$

Вычислим острый угол φ между вектором $\bar m$ и прямой, на которой лежит вектор $[\bar b, \bar c]$:

$$\cos\varphi = \frac{\left|(\bar m, [\bar b, \bar c])\right|}{|\bar m| \cdot \left|[\bar b, \bar c]\right|} = \frac{|-1-3+1|}{\sqrt{1+9+1} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{33}}.$$

Искомый угол между прямой, на которой лежит вектор m, и плоскостью векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$ составляет

$$\pi/2-\varphi=\pi/2-\arccos(3/\sqrt{33}).$$

Примечание.

Задачу можно было поставить и в такой форме: на данных векторах $\bar{m}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ построена пирамида. Вычислить угол между ребром $\bar{m}$ и гранью, в которой лежат векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Задача № 8.

Найти двугранный угол между плоскостями векторов

$$\bar{m}=\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k},\ \bar{n}=\bar{j}+2\bar{k} \text{ и } \bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k},\ \bar{c}=\bar{i}+\bar{k}.$$

Решение:

Очевидно, достаточно вычислить углы между векторами $[\bar{m},\bar{n}]$ и $[\bar{b},\bar{c}]$. Найдем координаты вектора $[\bar{m},\bar{n}]$:

$$[\bar{m},\bar{n}]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-7\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}.$$

Координаты вектора $[\bar{b},\bar{c}]$ найдены в предыдущей задаче: $[\bar{b},\bar{c}]=-\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$.

Итак, $\cos\varphi=\sqrt{2}/3$.

Задача № 9.

Определить ориентации троек векторов

а) $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j},\ \bar{b}=\bar{i}-\bar{j},\ \bar{c}=\bar{j}$;

б) $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j},\ \bar{b}=\bar{i}-\bar{j},\ \bar{c}=\bar{k}$.

Решение:

Построив вектор суммы $\bar{i}+\bar{j}$, вектор разности $\bar{i}-\bar{j}$ и вектор $\bar{j}\,(\bar{k})$, убедиться, что согласно определению мы имеем дело в случае «а» с компланарной тройкой векторов, а в случае «б» - с левой тройкой векторов.

Подтвердить полученные результаты в случае «а» равенством 0, в случае «б» - отрицательным знаком смешанного произведения векторов $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$.

Задача № 10.

Вычислить смешанное произведение $([\bar{i},\bar{j}],\ \bar{i}+\bar{j}+\bar{k})$, используя свойства смешанного произведения 3-х векторов.

Решение:

$$([\bar{i},\bar{j}],\ \bar{i}+\bar{j}+\bar{k})=(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{i})+(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{j})+(\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k})=0+0+1=1.$$

Подчеркнуть, какие свойства смешанного произведения здесь использованы.

Задача № 11.

Доказать, что точки O(0,0,0), B(3,4,-1), C(2, 3, 5), D(6,0,3) не лежат в одной плоскости, и, взяв их за вершины пирамиды, найти объем этой пирамиды.

Решение:

Вычислив координаты векторов $\overline{OB}$=(3,4,-1); $\overline{OC}$=(2,3,5) и $\overline{OD}$=(6, 0, -3), докажем их некомпланарность

$$(\overline{OB},\overline{OC},\overline{OD})=\begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\ 2 & 3 & 5\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}=135\neq 0.$$

Поэтому $V_{пир}$=135/6 куб. ед.=22,5 куб. ед., т.к.

$V_{пир}=|(\overline{OB},\overline{OC}.\overline{OD})|/6$ куб.ед.

Задача № 12.

Найти длину высоты, опущенной из точки D (h_D) в пирамиде, вершины которой даны в задаче 11.

Решение:

Зная $V_{пир}$=22,5 куб.ед., и вычислив

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}^2}=\frac{3}{2}\sqrt{91}\ кв\ ед,$$

получим $h_D=3V/S_{ABC}=45/\sqrt{91}$ ед.

НА ДОМ:

Задача № 18.

Доказать, что векторное произведение не изменится, если к одному из сомножителей прибавить вектор, коллинеарный другому сомножителю.

Задача № 19.

Зная две стороны треугольника $\overline{AB}=3\bar{p}-4\bar{q}$ и $\overline{BC}=\bar{p}+5\bar{q}$, вычислить длину его высоты $\overline{CD}$ при условии, что $\bar{p}$ и $\bar{q}$ -перпендикулярные орты.

Задача № 20.

Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на данных векторах $\bar{a}=2\bar{m}+\bar{n}-\bar{p}$; $\bar{b}=\bar{m}-3\bar{n}+\bar{p}$ где $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$ взаимно перпендикулярные орты.

Задача № 21.

Доказать, что смешанное произведение трех векторов, из которых два коллинеарны, равно 0.

Задача № 22.

Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на трех векторах $\bar{a} = 3\bar{p} + 2\bar{q} - 5\bar{r}$; $\bar{b} = \bar{p} - \bar{q} + 4\bar{r}$; $\bar{c} = \bar{p} - 3\bar{q} + \bar{r}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на $\bar{a}$ и $\bar{b}$, кроме того известно, что $\bar{p}$, $\bar{q}$ и $\bar{r}$ взаимно перпендикулярные орты.

Задача № 23.

Зная векторы, совпадающие с двумя сторонами треугольника $\overline{AB} = (2, 1, -2)$; $\overline{BC} = (3, 2, 6)$, вычислить углы этого треугольника.

Задача № 24.

Вычислить объем параллелепипеда, построенного на трех данных векторах $\bar{p} = (3, 1, -2)$; $\bar{q} = (-4, 0, 3)$; $\bar{r} = (1, 5, -1)$, и исследовать, образуют ли векторы левую или правую тройку.

Задача № 25.

Проверить, будут ли компланарны данные три вектора:

1) $\bar{a} = (2,-1,3)$; $\bar{b} = (1,4,2)$; $\bar{c} = (3,1,-1)$;

2) $\bar{l} = (1,6,5)$; $\bar{m} = (3,-2,4)$; $\bar{n} = (7,-18,2)$.

Задача № 26.

Даны $|\bar{a}| = 3$; $|\bar{b}| = 26$; $|[\bar{a}, \bar{b}]| = 72$.

Вычислить $\bar{a}\,\bar{b}$.

Задача № 27.

Доказать тождество

$\bar{a}\ \bar{b}\ (\bar{c} + \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}) = \bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$, где λ и μ - какие угодно числа.

Задача № 28.

Даны вершины тетраэдра A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7), D(-5,-4,8).

Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Задача № 29.

Доказать, что четыре точки A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1), D(2,1,3) лежат в одной плоскости.

Задача № 30.

Даны вершины треугольника A(1,-1,2), B(5,-6,2), C(1,3,-1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Практическое занятие по теме: «ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ»

I. Плоскость

Строить плоскости можно, например, следующими двумя способами:

1) по отрезкам, которые плоскость отсекает на координатных осях;

2) по следам, которые определяются как линии пересечения рассматриваемой плоскости с координатными плоскостями.

Задача № 1. Построить плоскости, заданные уравнениями: а) $4x+2z-8=0$; б) $2y-4=0$; в) $3x+4y+6z=0$; г) $3y-2z=0$; д) $5z=0$.

Решение. Отметить особенности расположения каждой из указанных плоскостей в пространстве. Например, плоскость б), в уравнении которой A=0 и C=0, параллельна координатной плоскости XOZ, а плоскость г), в уравнении которой A=0 и D=0 содержит ось OX.

Строить заданные плоскости можно по следам, так как все они определяются неполными уравнениями. Сделать чертежи. На этих примерах показать студентам, что неполные уравнения первой степени в плоской и пространственной системах координат имеют разные геометрические образы.

Например, уравнение г), содержащее только две переменные, на плоскости YOZ изображает прямую, проходящую через начало координат, а в трехмерном пространстве XYZ- плоскость, содержащую ось OX.

Выяснить, что принимается за угол между двумя плоскостями, выписать формулу для определения угла между плоскостями, сформулировать условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Задача № 2. Найти косинусы углов между плоскостями:

а) $2x + y - \sqrt{5}z-7=0$,

$3x - y=0$.

Решение. Используя формулу для определения косинуса угла между плоскостями, получим

$$\cos\varphi= \frac{2\cdot 3+1\cdot(-1)+(-\sqrt{5})\cdot 0}{\sqrt{2^2+1^2+(-\sqrt{5})^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+0^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \frac{5}{10}=\frac{1}{2},$$ откуда

$\varphi=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$. Другой угол между данными плоскостями равен $\pi - \varphi=\frac{2\pi}{3}$. Любой из этих углов можно брать за угол между данными плоскостями.

б) $x+3y-4z+5=0$,

$2x+2y+2z-7=0$.

Решение. При определении косинуса угла между плоскостями получим

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 2+3\cdot 2+(-4)\cdot 2}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+(-4)^2}} = 0,$$ т.е., плоскости взаимно перпендикулярны.

Задача № 3. Через точку M(-5,16,12) проведены две плоскости. Одна из них содержит ось OX, другая – ось OY. Найти угол между плоскостями.

Решение. Плоскость P_1 содержит ось OX, следовательно, в общем уравнении этой плоскости A=0 и D=0 и уравнение плоскости P_1 имеет вид By+Cz=0.

Точка M лежит в плоскости P_1, следовательно, 16B+12C=0, откуда $\frac{B}{C}=-\frac{3}{4}$ и уравнение плоскости P_1 примет вид $-3y+4z=0$.

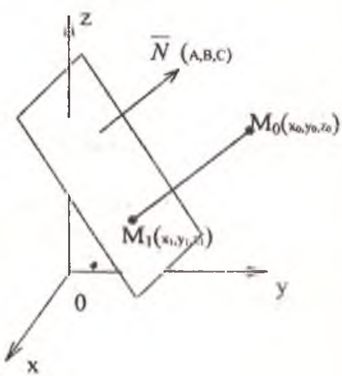
Рассуждая аналогично, найдем уравнение плоскости P_2, содержащей ось OY, в виде 12x+5z=0.

Определим угол между плоскостями.

Ответ: $\varphi=\arccos(\pm\frac{4}{\sqrt{13}})$.

Пусть требуется найти расстояние точки $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ от плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{1}$$



Опустим из точки $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ перпендикуляр M_0M_1 на плоскость. Искомое расстояние $d=|\overline{M_0M_1}|$. Так как нормальный вектор $\overline{N}$(A, B, C) плоскости и вектор $\overline{M_1M_0}$ коллинеарны, то $(\overline{N},\overline{M_1M_0})=\pm|\overline{N}|.d$. (2)

Обозначим через x_1, y_1, z_1 координаты точки M_1; тогда вектор $\overline{M_1M_0}$ будет иметь координаты (x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1) и равенство (2) в координатной форме примет вид

$A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)=\pm|\overline{N}|.d$.

В левой части полученного равенства раскроем скобки и прибавим и вычтем D.

Получим

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D-(Ax_1+By_1+Cz_1+D)=\pm|\overline{N}|.d. \tag{3}$$

Но точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит на плоскости (1) и поэтому $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$. Равенство (3) принимает вид $Ax_0+By_0+Cz_0+D=\pm|\overline{N}|.d$,

откуда
$$d=\pm\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{|\overline{N}|} \tag{4}$$

или
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{5}$$

Замечание. Плоскость Ax+By+Cz+D=0 делит пространство на две части (полупространства). В формулах (2) и (4) нужно брать знак "+" тогда, когда $\overline{N}\uparrow\uparrow\overline{M_1M_0}$, то есть когда точка M_0 находится в той части пространства, в которую направлен от плоскости нормальный вектор $\overline{N}$. Следовательно, в точках этой части пространства $Ax+By+Cz+D>0$, а в точках другой части $Ax+By+Cz+D<0$.

Задача № 4. Найти расстояния точек $M_1(2, 0, 8)$, $M_2(2, 0, 2)$ и $O(0, 0, 0)$ от плоскости $2x-2y+z-6=0$.

Решение.

$$d_1=\frac{|2\cdot 2-0+1\cdot 8-6|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|+6|}{3}=2;\ d_2=\frac{|2\cdot 2-0+1\cdot 2-6|}{3}=0;\ d_3=\frac{|-6|}{3}=2.$$

Отсюда имеем: точки M_1 и O лежат в разных полупространствах, точка M_2 лежит на самой плоскости.

Задача № 5. На оси OY найти точку, равноудаленную от двух плоскостей: $4x-2y+3z-3=0$ и $2x+5y+11=0$.

Решение. Обозначим искомую точку $A(0, y_0, 0)$. Расстояние от точки A до первой плоскости:

$$d_1=\frac{|-2y_0-3|}{\sqrt{29}},$$

расстояние от точки A до второй плоскости $d_2=\dfrac{|5y_0+11|}{\sqrt{29}}$.

По условию $d_1=d_2$, то есть $\dfrac{-2y_0-3}{\sqrt{29}}=\pm\dfrac{5y_0+11}{\sqrt{29}}$.

Следовательно, возможны два равенства

$-2y_0-3=5y_0+11$, откуда $y_0=-2$, и

$-2y_0-3=-5y_0-11$, откуда $y_0=-\dfrac{8}{3}$.

Итак, на оси OY лежат две точки: $A_1(0, -2, 0)$ и $A_2(0, -\frac{8}{3}, 0)$, равноудаленные от двух данных плоскостей.

Задача № 6. Найти расстояние между параллельными плоскостями $4x+3y-5z-8=0$ и $4x+3y-5z+12=0$.

План решения. 1. Взять произвольную точку на одной из плоскостей.

2. Найти расстояние от этой точки до другой плоскости.

Ответ: $d=2\sqrt{2}$.

Указать студентам и второй способ решения, при котором сначала определяется расстояние каждой плоскости от начала координат, а затем расстояние между плоскостями.

Задача № 7. Составить уравнение плоскости P, параллельной плоскостям P_1: $2x-3y+6z+7=0$ и P_2: $2x-3y+6z+28=0$, так,чтобы расстояния d_1 и d_2 от плоскости P до заданных плоскостей P_1 и P_2 соответственно находились бы в отношении 1 : 2.

Решение. $d_1=\dfrac{|D-7|}{7}$, $d_2=\dfrac{|D-28|}{7}$, $\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{|D-7|}{|D-28|}=\dfrac{1}{2}$, откуда $D_1=-14$; $D_2=14$.

Ответ: две плоскости $2x-3y+6z-14=0$ и $2x-3y+6z+14=0$ удовлетворяют условиям задачи.

Задача № 8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2, -1, 3)$ и $M_2(4, 1, 5)$ и параллельной оси OX.

Решение.

Первый способ. Уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (*) есть уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной вектору $\overline{N}(A, B, C)$. При всевозможных A, B, C уравнение (*) определяет совокупность всех плоскостей, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, и поэтому называется уравнением связки плоскостей, проходящих через данную точку M_0.

Запишем уравнение связки плоскостей, проходящих через точку M_1,

$$A(x-2)+B(y+1)+C(z-3)=0.$$

Так как искомая плоскость параллельна OX, то для нее A= 0 и ее уравнение примет вид $B(y+1)+C(z-3)=0$.

Подставим сюда координаты второй данной точки $M_2(4, 1, 5)$. Получим: $2B+2C=0$, откуда $C=-B$ и уравнение искомой плоскости будет

$y+1-(z-3)=0$ или $y-z+4=0$.

Второй способ. Вектор $\overline{N}=[\overline{M_1M_2}, \overline{i}]$ является нормальным для искомой плоскости

$$\overline{N}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0\overline{i}+2\overline{j}-2\overline{k}.$$

Уравнение искомой плоскости имеет вид $2(y+1)-2(z-3)=0$ или $y-z+4=0$, что и требовалось найти.

Задача № 9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1, -1, 2)$ и перпендикулярной плоскостям $x-2y+z-4=0$ и $x+2y-2z+4=0$.

Решение.

Первый способ. Векторы $\overline{N_1}(1, -2, 1)$ и $\overline{N_2}(1, 2, -2)$ есть нормальные векторы к данным плоскостям. Вектор $\overline{N}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}$ будет нормальным к искомой плоскости.

$$\overline{N}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=2\overline{i}+3\overline{j}+4\overline{k}.$$

Уравнение искомой плоскости имеет вид

$$2(x+1)+3(y+1)+4(z-2)=0 \text{ или } 2x+3y+4z-3=0.$$

Второй способ. Составим уравнение связки плоскостей, проходящих через точку $M(-1, -1, 2)$. Оно имеет вид

$$A(x+1)+B(y+1)+C(z-2)=0.$$

Используя условия перпендикулярности искомой плоскости двум заданным плоскостям, получим для определения коэффициентов A, B, C систему:

$$\begin{cases} A-2B+C=0, \\ A+2B-2C=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим A= 2, B= 3, C= 4.

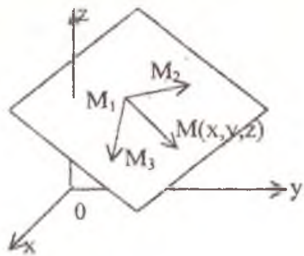
Уравнение искомой плоскости пишется в виде

$$2(x+1)+3(y+1)+4(z-2)=0 \text{ или}$$

$$2x+3y+4z-3=0, \text{ что и требовалось найти.}$$

Задача № 10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2, -1, 3)$, $M_2(4, 1, 5)$, $M_3(1, 2, -4)$.

Решение. Пусть произвольная точка M(x, y, z) лежит на искомой плоскости. Для этого необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ были компланарными или, чтобы



$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -7 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрыв определитель по элементам первой строки, получим

$$-20(x-2)+12(y+1)+8(z-3)=0.$$

После упрощения искомое уравнение примет вид $5x-3y-2z-7=0$, что требовалось найти.

Задача № 11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(2, -3, 4) и отсекающей от осей координат отрезки равной **величины.**

Решение. Уравнение вида $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ называется уравнением плоскости в отрезках. Числа ***a*, *в*, *c*** являются величинами отрезков, которые плоскость отсекает соответственно от осей координат OX, OY, OZ.

Уравнение искомой плоскости в отрезках имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$, откуда $x+y+z=a$. Так как плоскость проходит через точку M(2, -3, 4), то $2-3+4=a$, то есть $a=3$.

Таким образом, искомое уравнение имеет вид $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$, что и требовалось найти.

Замечание. Величиной направленного отрезка $\bar{a}$ на оси L называется число, равное $|\bar{a}|$, если $\bar{a}\uparrow\uparrow L$ и $-|\bar{a}|$, если $\bar{a}\uparrow\downarrow L$, например,

$\text{вел}_L\,\bar{a}=|\bar{a}|$, $\text{вел}_L\,\bar{b}=-|\bar{b}|$.

II. Прямая линия в трехмерном пространстве

Задача № 12. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} 5x + y - 3z - 10 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем какую–нибудь точку, лежащую на прямой. Полагая, например, $z_0=0$, получим систему для определения координат x_0 и y_0

$$\begin{cases} 5x_0 + y_0 - 10 = 0, \\ 2x_0 + y_0 - 1 = 0, \end{cases}$$

решив которую, найдем $x_0=3$, $y_0= - 5$.

Таким образом, прямая проходит через точку $M_0(3, -5, 0)$. В качестве направляющего вектора прямой возьмем вектор $\bar{S}=[\overline{N_1}, \overline{N_2}]$, где $\overline{N_1}=(5, 1, -3)$, $\overline{N_2}=(2, 1, -3)$.

$$\bar{S}=[\overline{N_1}, \overline{N_2}]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0\bar{i}+9\bar{j}+3\bar{k}\ .$$

Ясно, что вектор $\bar{l}=\frac{1}{3}\bar{S}$ также является направляющим; $\bar{l}=(0, 3, 1)$.

Канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x-3}{0}=\frac{y+5}{3}=\frac{z}{1}$.

Отметим, что нуль в знаменателе означает, что прямая перпендикулярна оси OX.

Задача № 13. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки A(-1, 2, 3) и B(-2, 6, -2).

Решение. Напомнив студентам уравнение прямой, проходящей через две точки пространства, запишем уравнение искомой прямой в виде

$$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{6-2}=\frac{z-3}{-2-3} \quad \text{или} \quad \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}.$$

Задача № 14. Определить угол между двумя прямыми

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Угол между прямыми (точнее один из углов между прямыми) есть угол между направляющими векторами этих прямых.

Направляющий вектор первой прямой

$$\overline{S_1}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(10, 2, 11).$$

Направляющий вектор второй прямой

$$\overline{S_2}=\begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(3,\ 12,\ 4).$$

Косинус угла между прямыми вычисляется по формуле .

$$\mathrm{Cos}\theta=\frac{\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}}{|\overline{S_1}|\cdot|\overline{S_2}|}=\frac{10\cdot 3+2\cdot 12+11\cdot 4}{\sqrt{10^2+2^2+11^2}\cdot\sqrt{3^2+12^2+4^2}}=\frac{98}{125}.$$

$$\theta=\arccos(\frac{98}{125}).$$

Отметим, что второй угол между данными прямыми есть $\pi-\theta$, что и требовалось найти.

Задача № 15. Доказать, что прямая

$$\begin{cases} 2x+y-z+3=0, \\ x+y+3z-2=0 \end{cases}$$

перпендикулярна прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z+5}{-2}$.

Решение. Направляющий вектор первой прямой

$$\overline{S_1}=\begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=4\bar i-7\bar j+\bar k.$$

Направляющий вектор второй прямой

$$\overline{S_2}=(4,\ 2,\ -2).$$

$\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}=4\cdot 4-7\cdot 2-1\cdot 2=0$, т .е. $\overline{S_1}\perp\overline{S_2}$ и, следовательно, прямые перпендикулярны, что и требовалось найти.

Задача № 16. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M(-4, 3, 0) параллельно прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{4}$.

Ответ: $\frac{x+4}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{4}$.

III. Прямая и плоскость

Задача № 17. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M(1, 2, 3) перпендикулярно плоскости 2x-3y+z-5= 0.

Решение. В качестве направляющего вектора прямой можно взять нормальный вектор плоскости. Искомое уравнение будет иметь вид

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{1}.$$

Задача № 18. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(3, 4, 5) перпендикулярно прямой $\frac{x-11}{2}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z-1}{5}$.

Решение. В качестве нормального вектора плоскости можно взять направляющий вектор данной прямой.

Уравнение искомой плоскости примет вид $2(x-3)-4(y-4)+5(z-5)=0$ или $2x-4y+5z-15=0$.

Задача № 19. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x-y+2z-5=0$.

Решение. Для определения координат точки пресечения необходимо решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Проще всего это сделать, приводя уравнение заданной прямой к параметрической форме:

$$\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}=t, \text{ откуда } \begin{cases} x=5t+7, \\ y=t+4, \\ z=4t+5. \end{cases}$$

Подставим значения x, y, z, выраженные через параметр t, в уравнение данной плоскости $3(5t+7)-(t+4)+2(4t+5)-5=0$ и найдем, что $t=-1$.

Следовательно, точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты $x_0=2$, $y_0=3$, $z_0=1$.

На основании последних трех задач решаются следующие задачи:

1. Определение проекции заданной точки на плоскость и нахождение точки, симметричной данной относительно плоскости.
2. Определение проекции заданной точки на прямую и нахождение точки, симметричной данной относительно прямой.
3. Определение расстояния от точки до прямой.

Задача № 20. Найти проекцию точки M(4, -3, 1) на плоскость $x+2y-z-3=0$.

Решение. Проекцией точки M на плоскость является основание перпендикуляра опущенного из этой точки на данную плоскость.

Уравнение перпендикуляра $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

Уравнение перпендикуляра в параметрической форме $\begin{cases} x=t+4, \\ y=2t-3, \\ z=-t+1. \end{cases}$

Параметр $t=1$ определен из уравнения $1(t+4)+2(2t-3)-1(1-t)-3=0$. Координаты проекции точки M есть $x_0=5$, $y_0=-1$, $z_0=0$.

Задача № 21. Найти точку, симметричную точке M(4, -3, 1) относительно плоскости $x+2y-z-3=0$.

Решение. Проекция точки M на плоскость есть точка $M_1(5, -1, 0)$. Точку M_2, симметричную точке M относительно плоскости, найдем, используя формулу деления отрезка пополам: $X_{M_1}=\frac{X_M+X_{M_2}}{2}$, $Y_{M_1}=\frac{Y_M+Y_{M_2}}{2}$,

$Z_{M_1}=\frac{Z_M+Z_{M_2}}{2}$, откуда $X_{M_2}=6$, $Y_{M_2}=1$, $Z_{M_2}=-1$. Итак, $M_2(6, 1, -1)$.

Задача № 22. Найти проекцию точки M(3, 2, 1) на прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{2}$.

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно данной прямой: $1(x-3)+1(y-2)+2(z-1)=0$ или $x+y+2z-7=0$.

Найдем точку пересечения полученной плоскости и заданной прямой (задача №19).

Значение $t=\frac{4}{3}$, координаты проекции точки M: $x=\frac{10}{3}$, $y=-\frac{5}{3}$, $z=\frac{8}{3}$.

Подчеркнуть, что при решении данной задачи необходимо через точку M провести плоскость, перпендикулярную данной прямой, а не прямую.

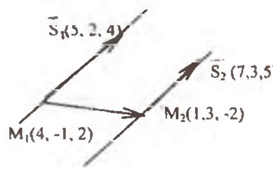
Примечание. Задача определения точки, симметричной данной точке относительно прямой, после нахождения проекции точки на прямую оказывается аналогичной задаче №21.

Задача № 23. Определить расстояние от точки M(3, 2, 1) до прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{2}$.

Решение. Используя результаты предыдущей задачи, получаем проекцию точки M на данную прямую: $M_1(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$. Искомое расстояние находится как расстояние между двумя точками в пространстве: $d=\sqrt{(3-\frac{10}{3})^2+(2+\frac{5}{3})^2+(1-\frac{8}{3})^2}=\frac{\sqrt{147}}{3}$.

Задача № 24. Доказать, что прямые $\frac{x-4}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4}$ и $\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{5}$ скрещиваются и найти кратчайшее расстояние между ними.

Решение. Данные прямые не параллельны, так как направляющие векторы не коллинеарны. Значит эти прямые либо пересекаются,либо скрещиваются. Данные прямые пересекаются только тогда, когда векторы $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, $\overline{M_1M_2}$ компланарны, то есть когда $\overline{M_1M_2}\cdot\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}=0$.



$$\overline{M_1M_2}\cdot\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}=\begin{vmatrix}-3 & 4 & -4\\ 5 & 2 & 4\\ 7 & 3 & 5\end{vmatrix}\neq 0.$$

Таким образом, прямые не параллельны и не пересекаются. Значит, прямые скрещиваются.

Через вторую прямую проведем плоскость, параллельную первой прямой. В качестве нормального вектора этой плоскости возьмем вектор

$$n = \overline{S_1} \times \overline{S_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + 1\bar{k}.$$

Тогда уравнение плоскости примет вид: $-2(x-1)+3(y-3)+1(z+2)=0$ или $2x-3y-z+5=0$.

Теперь найдем расстояние от точки (4, -1, 2), лежащей на первой прямой, до плоскости $2x-3y-z+5=0$:

$$d = \frac{|2\cdot 4 - 3\cdot(-1) - 1\cdot 2 + 5|}{\sqrt{4+9+1}} = \sqrt{14}.$$

Это и есть искомое расстояние между скрещивающимися прямыми.

Задача № 25. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(1, -2, 3) и прямую

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0, \\ x - y + 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $9x-16y-8z-17=0$.

Задача №26. Найти проекцию прямой $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на плоскость $x-y+3z+8=0$.

Ответ: $\begin{cases} x - 2y - z + 7 = 0, \\ x - y + 3z + 8 = 0. \end{cases}$

IV. Прямая на плоскости

Задача № 27. По данным уравнениям построить прямые, найти их угловые коэффициенты и отрезки, отсекаемые ими на осях координат:
а) $2x-y+3=0$; б) $5x+2y-8=0$; в) $3x+8y+16=0$; г) $3x-y=0$.

Задача № 28. Записать уравнения прямых, на которых лежат стороны равнобедренной трапеции, зная, что основания ее равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с большим основанием угол 60^0. Большее основание лежит на оси абсцисс, а ось симметрии трапеции – на оси ординат.

Ответ: $y=0$, $y=2\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$.

Задача № 29. Записать уравнения прямых, которые проходят через точку A(3, -1) и параллельны: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) биссектрисе первого координатного угла; г) прямой $y=3x+9$.

Ответ: а) $y=-1$; б) $x=3$; в) $y=x-4$; г) $y=3x-10$.

Задача № 30. Записать уравнение прямой, проходящей через точки A(-1, 3) и B(4, 5).

Ответ: $2x-5y+17=0$.

Задача № 31. Точка A(-2,3) лежит на прямой, перпендикулярной к прямой $2x-3y+8=0$. Записать уравнение этой прямой.

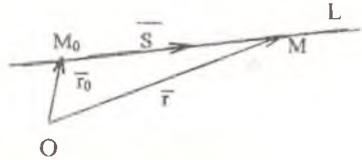
Ответ: $3x+2y=0$.

Задача № 32. Точка A (2, -5) является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y-7=0$. Вычислить площадь этого квадрата .

Решение. Точка M лежит на прямой L тогда и только тогда, когда

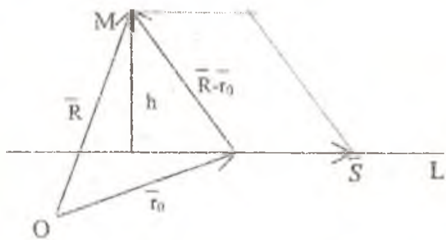
$$[\bar{r}-\bar{r}_0, \bar{s}]=\bar{O}. \qquad (*)$$

Уравнение (*) называется векторным уравнением прямой L.



Найдем расстояние h от точки M с радиусом – вектором $\bar{R}$ до прямой L, заданной уравнением (*):

$$h=\frac{\left|[\bar{R}-\bar{r}_0,\bar{S}]\right|}{|\bar{S}|}. \qquad (**)$$



Рассмотрим прямую на плоскости, заданной в декартовой прямоугольной системе координат уравнением $Ax+By+C=0$.

В качестве направляющего вектора возьмем вектор $\bar{S}=(-B, A)$. Из (**) получаем

$$h=\frac{|(x-x_0)A-(y-y_0)(-B)|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

где $M_0(x_0, y_0)$ – некоторая точка прямой L; x, y – координаты вектора $\bar{R}$. Учитывая, что $C=-Ax_0-By_0$, находим

$$h=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Пользуясь выведенной формулой, найдем расстояние от точки A до данной прямой

$$h=\frac{|1\cdot 2-2\cdot(-5)-7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}.$$

Тогда искомая площадь $S=(\sqrt{5})^2=5$.

<u>НА ДОМ:</u>

<u>Задача № 1.</u> Через ось OZ провести плоскость, образующую с плоскостью $2x+y-z\sqrt{5}-7=0$ угол $\pi/3$.

<u>Задача № 2.</u> Составить уравнение плоскости:

а) проходящей через точку (-2, 7, 3) параллельно плоскости $x-4y+5z-1=0$.

б) проходящей через начало координат перпендикулярно двум плоскостям $2x-y+5z+3=0$ и $x+3y-z-7=0$.

<u>Задача № 3.</u> Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(4, 0, -2)$ и $M_2(5, 1, 7)$ параллельно оси OX.

<u>Задача № 4.</u> Какие отрезки отсекает плоскость $x-2y-3z-6=0$ от осей координат. Вычислить объем пирамиды, ограниченной этой плоскостью и координатными плоскостями.

<u>Задача № 5.</u> Найти расстояние от точки (3, 1, -1) до плоскости $22x+4y-20z-45=0$.

<u>Задача № 6.</u> Составить уравнение геометрического места точек, расстояния от которых до плоскости $6x+3y-2z-10=0$ равно 3.

<u>Задача № 7.</u> Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(1, -5, 3) и образующей с осями координат углы 60^0, 45^0, 120^0.

<u>Задача № 8.</u> Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку M(2, 0, -3) параллельно: а) вектору $\bar{a}=(2, -3, 5)$; б) прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$; в) оси OX; г) оси OY; д) оси OZ.

<u>Задача № 9.</u> Даны вершины треугольника A(3, -1, -1), B(1, 2, -7) и C(-5, 14, -3). Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

<u>Задача № 10.</u> Найти угол между прямыми:

а) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=3t-2 \\ y=0 \\ z=-t+3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=0 \\ z=t-3 \end{cases}$

в) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=4, \\ y=6. \end{cases}$

<u>Задача № 11.</u> При каком значении l прямые $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$ пересекаются?

Задача № 12. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M_1(-1, 2, -3)$ перпендикулярно вектору $\bar{a}=(6, -2, -3)$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$.

Задача № 13. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ и плоскости $3x+5y-z-2=0$ и угол между ними.

Задача № 14. При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+6z-7=0$ перпендикулярна прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$.

Задача № 15. Из точки A(3, -2, 4) опустить перпендикуляр на плоскость $5x+3y-7z+1=0$.

Задача № 16. Проверить лежат ли прямые на плоскости:

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ на плоскости $4x+3y-z+3=0$;

б) $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{3}$ на плоскости $5x-8y-2z-1=0$.

Задача № 17. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку M(3, 1, -2) и прямую $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$.

Задача № 18. Написать уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x}{7}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{5}$ и $\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{5}$.

Задача № 19. Найти проекцию точки A(2, 3, 1) на прямую $x=y=z$.

Задача № 20. Вычислить расстояние от точки P(2, 3, -1) до прямой

$$\begin{cases} 2x-2y+z+3=0, \\ 3x-2y+2z+17=0. \end{cases}$$

Задача № 21. Через точку M(1, 2, -3) провести плоскость параллельно прямым

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}.$$

Задача № 22. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ перпендикулярно плоскости $3x+2y-z-5=0$.

Задача № 23. Через точку $M_0(1, -2)$ провести прямые параллельно и перпендикулярно к прямой $2x+3y-3=0$.

Задача № 24. Даны вершина C(-1, 3) прямого угла равнобедренного прямоугольного треугольника и его гипотенуза $3x-4y-12=0$. Найти уравнение катетов.

Задача № 25. Даны стороны треугольника $x+y-1=0$, $2x-y+3=0$, $5x-y-5=0$.

Найти величины его внутренних углов.

Задача № 26. Найти прямую, проходящую через точку $M(-2, 2)$ и отсекающую от одного из координатных углов треугольник площадью $S=4,5$.

Задача № 27. Найти точку B, симметричную точке $A(-2, 4)$ относительно прямой $3x+y-8=0$.

Задача № 28. Найти прямую, пересекающую прямые $x+y+3=0$ и $2x-y-5=0$ в точках A и B так, что серединой отрезка AB является данная точка $M(1, 1)$.

Задача № 29. Уравнение одной из сторон угла $2x-9y-3=0$, а уравнение биссектрисы $4x-y+11=0$. Найти уравнение второй стороны угла.

Задача № 30. На прямой $2x-y-5=0$ найти точку P, сумма расстояний которой до точек $A(-7, 1)$ и $B(-5, 5)$ была бы наименьшей.

Практическое занятие по теме:
«КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА»

I. Кривые второго порядка (КВП)

1) Окружность.

Задача № 1. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки A(1;5), B(-4;0) и C(4;-4). Написать ее уравнение.

Ответ: $(x-1)^2 + y^2 = 25$.

Задача № 2. Исследовать уравнение

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

Задача № 3. Среди прямых, параллельных прямой $2x + y = 0$, выделить касательные к окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Решение: Уравнение всякой прямой, параллельной данной, можно записать в виде

$$2x + y + C = 0.$$

Касательная к окружности имеет с ней одну общую точку, поэтому совместное решение уравнений прямой и окружности должно дать только один ответ. Значение y из уравнения прямой подставляем в уравнение окружности:

$$y = -2x - C, \qquad x^2 + (-2x - C)^2 = 1,$$

$$\text{т.е.} \quad 5x^2 + 4Cx + C^2 - 1 = 0.$$

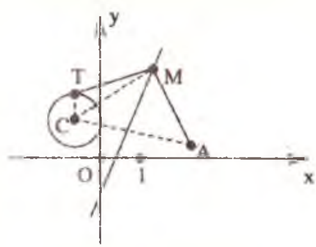
Одно решение (совпавшие корни) это уравнение будет иметь, если:

$$(4C)^2 - 4 \cdot 5\,(C^2 - 1) = 0, \qquad C^2 - 5 = 0, \quad \text{откуда} \quad C = \pm\sqrt{5}.$$

Итак, искомые касательные имеют уравнения

$$2x + y + \sqrt{5} = 0 \qquad \text{и} \qquad 2x + y - \sqrt{5} = 0.$$

Задача № 4. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых расстояние до точки A(3;1) равно длине касательной MT к окружности $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$. (рис.)



Решение: Пусть M(x, y) – текущая точка искомой линии. По условию, MA = MT или, что то же, $MA^2 = MT^2$. Из $\triangle$ MTC по теореме Пифагора находим $MT^2 = MC^2 - CT^2 = MC^2 - R^2 = MC^2 - 1$. Следовательно, точка M удовлетворяет условию $MA^2 = MC^2 - 1$, из которого получаем

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 1$ или после преобразований : $4x - y - 3 = 0$. Т.о., искомое геометрическое место точек есть прямая.

2) Эллипс.

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости (г.м.т.), сумма расстояний каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) той же плоскости есть величина постоянная. Эту постоянную обозначают 2а, расстояние между фокусами обозначают 2с, при этом а>с. Если выбрать систему координат так, чтобы ось ОХ проходила через фокусы, а начало координат лежало посредине между ними, то уравнение эллипса примет (канонический) вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b^2=a^2-c^2,\ a>b).$$

В этом случае фокусы эллипса имеют координаты $F_1(-C, 0)$, $F_2(C, 0)$.

Начало координат О – центр симметрии эллипса, а оси координат – оси симметрии эллипса.

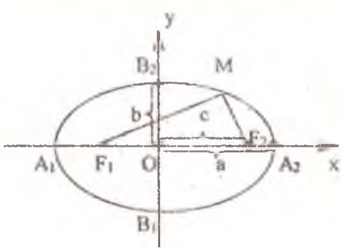
Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ называются вершинами эллипса, а длины отрезков $a = OA_2$ и $b = OB_2$ большой и малой полуосями. Величина

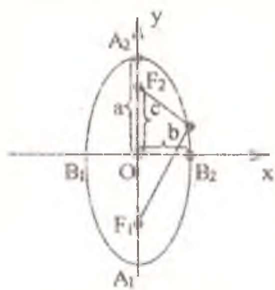
$$\varepsilon=\frac{c}{a}<1$$

называется эксцентриситетом эллипса. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса, т.к. выражается через отношение его полуосей:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Окружность можно считать частным случаем эллипса, у которого a = b,





т.е. $\varepsilon=0$.

Если фокусы эллипса лежат на оси ОУ, то его уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad (a>b).$$

В этом случае координаты вершин $A_1(0, -a)$, $A_2(0, a)$, $B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$ и фокусов $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ (см. рис.).

Задача № 5. Найти координаты фокусов и эксцентриситет эллипса:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Ответ: $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$, $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

Задача № 6. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $9x^2+4y^2=36$.

Ответ: $F_1(0;-\sqrt{5})$, $F_2(0,\sqrt{5})$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Задача № 7. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что его большая полуось а = 12, а эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}5$. Найти расстояние между фокусами эллипса.

Ответ: $F_1F_2 = 2c = 12$.

3) Гипербола. Гиперболой называется г.м.т. плоскости, абсолютное значение разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, обозначаемая $2a(a\neq 0)$.

Расстояние F_1F_2 обозначается 2с, причем c>a.

Если ось ОХ проходит через фокусы гиперболы, а начало координат находится посередине отрезка F_1F_2, то уравнение (каноническое) гиперболы примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (b^2=c^2-a^2).$$

Фокусы имеют координаты $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$.

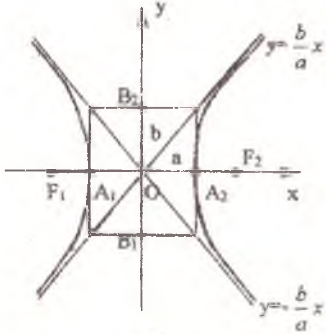
Оси координат являются осями симметрии гиперболы, а точка О – ее центром симметрии. Гипербола пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$, которые называются ее действительными вершинами, а величина $a = OA_2$ – действительной полуосью гиперболы. Точки $B_1(0,-b)$ и $B_2(0,b)$ называются мнимыми вершинами гиперболы, а величина $b = OB_2$ – мнимой полуосью.

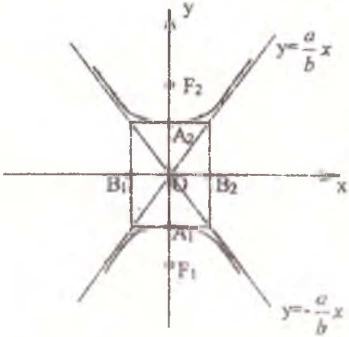
Прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям и проходящими через вершины гиперболы, называется основным прямоугольником гиперболы. Его диагонали

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

являются асимптотами гиперболы, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$.





Его можно выразить через полуоси гиперболы: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$, поэтому эксцентриситет характеризует вытянутость основного прямоугольника гиперболы. Если a = b, то гипербола называется равносторонней. В этом случае основной прямоугольник становится квадратом, а $\varepsilon=\sqrt{2}$. Если фокусы гиперболы расположены на оси OY, то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1.$$

В этом случае асимптоты гиперболы

$$x=\pm\frac{b}{a}y \quad \text{или} \quad y=\pm\frac{a}{b}x,$$ где

a и b, как и выше, соответственно действительная и мнимая полуоси. Вершины гиперболы:

$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$, $B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$;

фокусы:

$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$, где $c^2=a^2+b^2$.

Задача № 8. Начертить гиперболу $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$. Определить ее фокусы, вершины, эксцентриситет, асимптоты.

Ответ: $F_1(-\sqrt{13},0)$, $F_2(\sqrt{13},0)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{2}$, $y=\pm\frac{3}{2}x$.

Задача № 9. Определить вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1.$$

Сделать чертеж.

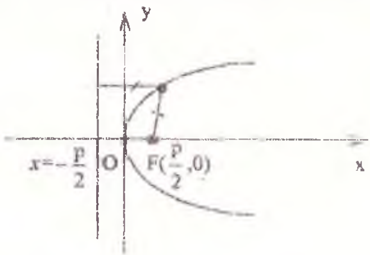
Ответ: $A_1(0,-3)$, $A_2(0,3)$, $B_1(-4,0)$, $B_2(4,0)$;

$F_1(0,-5)$, $F_2(0,5)$; $\varepsilon=\frac{5}{3}$; $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Задача № 10. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $4y\pm 3x=0$, а расстояние между фокусами равно 20. Написать ее каноническое уравнение.

Ответ: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

4) Парабола. Парабола есть г.м.т. плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и от данной прямой, не проходящей через эту точку (директрисы), расположенных в той же плоскости.



Каноническое уравнение параболы имеет вид

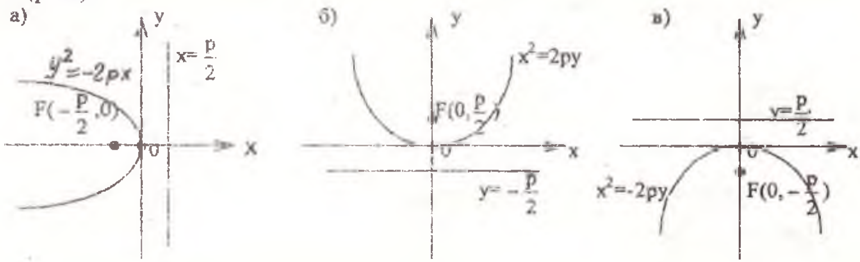
$$y^2 = 2px \quad (p>0),$$

где p – расстояние от фокус до директрисы. При этом система координат выбрана так, что ось OX проходит перпендикулярно директрисе через фокус, положительное ее направление выбрано от директрисы в сторону фокуса. Ось ординат проходит параллельно директрисе, посередине между директрисой и фокусом, откуда уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$, координаты фокуса $F(\frac{p}{2}, 0)$.

Начало координат является вершиной параболы, а ось абсцисс – ее осью симметрии. Могут рассматриваться параболы, заданные уравнениями:

а) $y^2 = -2px$, б) $x^2 = 2py$, в) $x^2 = -2py$ (для всех случаев $p>0$).

В случае а) парабола симметрична относительно оси OX и направлена в отрицательную сторону (рис.). В случаях б) и в) осью симметрии является ось OY (рис.).



Координаты фокусов для этих случаев:

а) $F(-\frac{p}{2}, 0)$, б) $F(0, \frac{p}{2})$, в) $F(0, -\frac{p}{2})$.

Уравнения директрис: а) $x = \frac{p}{2}$; б) $y = -\frac{p}{2}$, в) $y = \frac{p}{2}$.

Задача № 11. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку A (2, 4) и симметрична относительно оси OX. Написать ее уравнение.

Ответ: $y^2 = 8x$; $F(2, 0)$; уравнение директрисы $x = -2$.

Задача № 12. Вывести уравнение параболы, директриса которой имеет уравнение x + y + 1 = 0, а фокус расположен в точке F (2, 3).

Решение: Пусть M (x, y) – произвольная точка параболы. Ее расстояние d до данной директрисы определяется по формуле

$$d = \frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}}.$$

По определению параболы это расстояние равно $MF = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$. Приравнивая эти расстояния, возводя в квадрат и делая необходимые алгебраические преобразования, получим искомое уравнение:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|x+y+1| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2},$$

$$(x+y+1)^2 = 2\left[(x-2)^2+(y-3)^2\right],$$

$$x^2+y^2+1+2xy+2x+2y = 2\left(x^2-4x+4+y^2-6y+9\right),$$

$$x^2-2xy+y^2-10x-14y+25=0.$$

II. Поверхность второго порядка (ПВП)

Задача № 13. Методом параллельных сечений исследовать форму поверхности, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{16}=1.$$

Решение: Рассмотрим сечения данной поверхности координатными плоскостями.

Получим:

а) в плоскости XOY (z = 0) линию, уравнение которой $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$. Это гипербола с действительной осью OX и полуосями 2 и 6;

б) в плоскости XOZ (y = 0) линию, уравнение которой $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$. Это эллипс с полуосями 2 и 4;

в) в плоскости YOZ (x = 0) линию, уравнение которой $\frac{z^2}{16}-\frac{y^2}{36}=1$. Это гипербола с действительной осью OZ и полуосями 4 и 6.

Рассмотрим сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостями.

В плоскости y = h получаем линию, уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1+\frac{h^2}{36}.$$

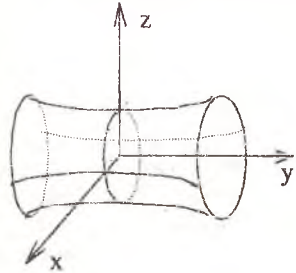
Сумма, стоящая в правой части, всегда положительна, следовательно, уравнение можно привести к виду

$$\frac{x^2}{4\left(1+\frac{h^2}{36}\right)}+\frac{z^2}{16\left(1+\frac{h^2}{36}\right)}=1 .$$

Это уравнение эллипса с полуосями

$$\frac{2\sqrt{36+h^2}}{6} \quad \text{и} \quad \frac{4\sqrt{36+h^2}}{6} .$$

С увеличением h, т.е. с удалением плоскости сечения от плоскости XOZ полуоси эллипса увеличиваются.



Проведенных исследований достаточно, чтобы представить форму поверхности. Для полноты исследования можно определить уравнения линий в сечении поверхности плоскостями z =h и x = h. Поверхность называется однополостным гиперболоидом (рис.)

Напомнить студентам каноническое уравнение эллипсоида, сферы, однополостного и двухполостного гиперболоидов, эллиптического и гиперболического параболоидов и конуса, подчеркнуть, что форма каждой поверхности может быть определена методом параллельных сечений.

Обратить внимание студентов, что уравнение xy = z является уравнением гиперболического параболоида, об этом шла речь на соответствующей лекции.

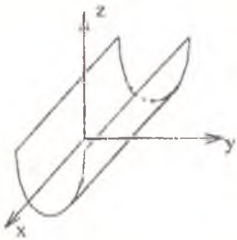
Напомнить студентам, что неполные уравнения f (x, y) = 0, φ (x, z) = 0, ψ (y, z) = 0, рассматриваемые в пространстве, являются уравнениями цилиндрических поверхностей с образующими параллельными той из координатных осей, которая соответствует отсутствующей переменной. Например, уравнение f (x, y) = 0 есть уравнение цилиндрической поверхности с образующей параллельной оси OZ. Уравнение f (x, y) = 0, рассматриваемое в плоскости XOY, есть уравнение линии, в которую проектируется на плоскость цилиндрическая поверхность. Уравнения $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$, рассматриваемые в трехмерном пространстве OXYZ, являются уравнениями направляющей цилиндрической поверхности.

<u>**Задача № 14.**</u> Исследовать форму поверхности, заданной уравнением

$$y^2 = 3z.$$

<u>**Решение:**</u> В исходном уравнении отсутствует координата x, значит это уравнение цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна оси OX. В сечении поверхности координатной плоскости YOZ (x = 0) получим параболу, уравнение которой в плоскости YOZ $y^2 = 3z$. Те же самые кривые мы

имеем в сечении поверхности плоскостями $x = \pm h$. Найденные линии пересечения позволяют изобразить рассматриваемую поверхность. Это параболический цилиндр (рис.)



Напомнить канонические уравнения эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров и обратить внимание на случаи вырождения цилиндрической поверхности, как, например:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ уравнение цилиндрической поверхности, направляющей которой является окружность, выродившаяся в точку, следовательно, сама поверхность выродилась в прямую – ось OZ;

б) $x^2 - y^2 = 0$ – уравнение цилиндрической поверхности, выродившейся в пару пересекающихся плоскостей, содержащих ось OZ;

в) $(x + y)^2 = 0$ - уравнение цилиндрической поверхности, выродившейся в две слившиеся плоскости.

Напомнить студентам формулы параллельного переноса осей декартовой прямоугольной системы координат, указать, что с помощью параллельного переноса осей уравнения поверхностей второго порядка, не содержащие членов с произведениями неизвестных, приводятся к каноническому виду.

Задача № 15. Уравнение $x^2 - 4y^2 - z^2 - 4x - 24y - 8z - 48 = 0$ привести к канонической форме и установить вид поверхности, заданной этим уравнением.

Решение: Приводим уравнение к каноническому виду

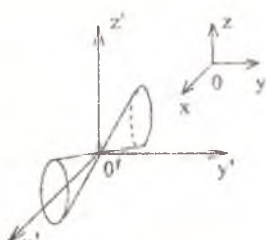
$(x^2 - 4x + 4) - 4 - 4(y^2 + 6y + 9) + 36 - (z^2 + 8z + 16) + 16 - 48 = 0$ или

$(x - 2)^2 - 4(y + 3)^2 - (z + 4)^2 = 0.$

Введем новые переменные: $x' = x - 2$, $y' = y + 3$, $z' = z + 4$. В новой системе координат $O'X'Y'Z'$ с центром в точке O' (2, -3, -4) уравнение поверхности имеет вид

$$x'^2 - 4y'^2 - z'^2 = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{y'^2}{1} + \frac{z'^2}{4} = \frac{x'^2}{4}$$ Это каноническое уравнение конуса,осью которого служит $O'X$ (см.рис.).

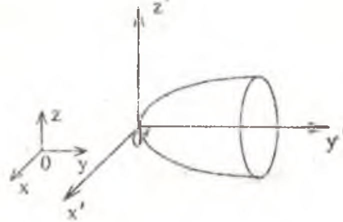


Задача № 16. Уравнение $3x^2 + 2z^2 + 6x - y - 8z + 15 = 0$ привести к каноническому виду и установить вид поверхности, заданной этим уравнением.

Решение: Аналогично предыдущей задаче, получим в новой системе координат с центром в точке $O'(-1, 4, 2)$ уравнение

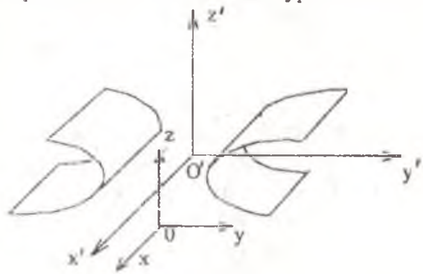
$$3x'^2 + 2z'^2 = y' \quad \text{или} \quad \frac{x'^2}{2} + \frac{z'^2}{3} = \frac{y'}{6}.$$

Это каноническое уравнение эллиптического параболоида с осью $O'Y'$ (рис.).



Задача № 17. Уравнение $y^2 - 2z^2 - 4y + 12z + 10 = 0$ привести к каноническому виду и установить вид поверхности, заданной этим уравнением.

Решение: Приведем уравнение к каноническому виду. Получим в новой системе координат с центром в точке $O'(0, 2, 3)$, каноническое уравнение гиперболического цилиндра $y'^2 - 2z'^2 - 24 = 0$. Образующая цилиндра параллельна оси $O'X'$ (см.рис.).



Поверхности вращения.

Если линия лежит в плоскости OYZ и имеет уравнение $F(y, z) = 0$, то при вращении ее вокруг оси OZ получаем поверхность вращения, уравнение которой имеет вид $F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$;

если вращение совершать вокруг оси OY, то уравнение поверхности вращения (другой!) запишется в виде $F\left(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0$.

Задача № 18. Записать уравнение поверхности вращения, полученной при вращении гиперболы $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$,

а) вокруг оси OZ; б) вокруг оси OY.

Решение: а)Согласно изложенному выше правилу, в уравнении гиперболы заменяем y на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ и получаем уравнение поверхности вращения :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Это однополостный гиперболоид вращения.

б) При вращении данной гиперболы вокруг оси OY следует в ее уравнении заменить z на $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$. Тогда имеем $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2 + z^2}{b^2} = 1$ или

$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = -1$. Это двуполостный гиперболоид вращения, вытянутый вдоль оси ОУ.

НА ДОМ:

Задача № 1: Составить канонические уравнения: а) эллипса, большая полуось которого равна 3, а фокус находится в точке F ($\sqrt{5}$, 0),

б) гиперболы с мнимой полуосью, равной 2, и фокусом F (- $\sqrt{13}$, 0),

в) параболы, имеющей директрису x = - 3.

Задача № 2: Записать уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$ и имеющей центр в его верхней вершине.

Задача № 3: Составить уравнение линии, каждая точка М которой отстоит от точки А (3, 2) на расстоянии в три раза большем, чем от точки В (-1, 0).

Задача № 4: Методом параллельных сечений исследовать форму поверхностей, заданных уравнениями:

1. $3x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 6 = 0$;
2. $-2x^2 + 3y^2 - z^2 = 6$;
3. $2x^2 + 3y^2 = z$.

Задача № 5: Установить вид поверхности, приведя ее уравнения к каноническому виду:

1. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x - 3y + 4z - 1 = 0$;
2. $x^2 + z^2 = x + z$;
3. $2x^2 + 3y^2 - z^2 - 4 = 0$;
4. $x + 2y^2 + 4z^2 = 0$;
5. $2x^2 - y^2 + 4z^2 - 4x + 6y + 16z - 1 = 0$.

Задача № 6: Составить уравнение поверхности, образованной вращением линий:

1. $x^2 + 3y^2 - 1 = 0$ вокруг оси ОХ;
2. $x^2 - x - y^2 = 0$ вокруг оси ОХ;
3. $x - 3z^2 + 1 = 0$ вокруг оси OZ;
4. $x^2 - y^2 - 4 = 0$ вокруг осей ОХ, ОУ.

Практическое занятие по теме:
«ЛИНЕЙНЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА»

I. Понятия линейного пространства

Для элементов многих множеств вводятся операции сложения элементов и умножения элементов на числа (принадлежащие некоторому числовому полю). Так, например, операции сложения и умножения на числа вводятся во множестве векторов, изучаемых в курсе аналитической геометрии, во множестве матриц, во множестве функций, заданных на некотором отрезке. Указанные операции обладают рядом общих свойств для всех перечисленных выше множеств и могут быть изучены независимо от природы элементов, составляющих множества.

Различные теоремы, выражающие одно и то же свойство упомянутых. операций в различных множествах, могут составить лишь одну теорему в общей теории.

Чтобы осуществить общий подход к изучению операций сложения элементов и умножения элементов на числа, вводят понятие линейного пространства. Определение линейного пространства и все необходимые для решения задач сведения из теории даны в соответствующей лекции.

Пример 1. Множество квадратных матриц второго порядка с обычными определениями сложения и умножения на действительные числа образуют действительное линейное пространство (т.е. линейное пространство над полем R вещественных чисел).(Обосновать).

Другие примеры линейных пространств даны в лекции.

Из определения линейного пространства над полем P немедленно вытекает справедливость следующих утверждений:

1) В линейном пространстве существует единственный нулевой элемент.

2) В линейном пространстве каждый вектор имеет единственный противоположный элемент.

3) $\forall\ x \in V$ имеет место равенство $0 \cdot x = \theta$.

4) $\forall\ \alpha \in P$ имеет место равенство $\alpha \cdot \theta = \theta$.

5) Если $\alpha x = \theta$, то или $\alpha = 0$ или $x = \theta$.

6) $\forall x \in V$ имеет место равенство $(-1)x = -x$.

7) Существует и единственна разность $a - b$, т.е. существует единственный вектор x, который удовлетворяет условиям $b + x = a$.

8) а) $(-\alpha)a = -(\alpha a)$,

б) $\alpha(-a) = -(\alpha a)$.

9) а) $\alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b$,

б) $(\alpha - \beta)a = \alpha a - \beta a$.

Здесь всюду x, a, b - произвольные векторы линейного пространства; α,β- произвольные числа поля P.

Пример 2. Доказать, что в линейном пространстве существует единственный нулевой элемент (т.е. утверждение 1)).

Решение. От противного.

Пусть существует два нулевых элемента θ_1 и θ_2.

Тогда $\left.\begin{matrix}\theta_1+\theta_2=\theta_1\\ \theta_1+\theta_2=\theta_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\theta_1=\theta_2$, что и тр.

Пример 3. Доказать, что $\forall x\in V$ имеет место равенство $0\cdot x=\theta$ (т.е. утверждение3)).

Решение. $x=(1+0)x=1\cdot x+0\cdot x=x+0\cdot x \Rightarrow 0\cdot x=\theta$, что и тр.

Пример 4. Доказать, что $\forall x\in V$ имеет место равенство $(-1)x=-x$ (т.е. утверждение 6)).

Решение. $x+(-1)x=1\cdot x+(-1)x=(1-1)x=0\cdot x=\theta\Rightarrow(-1)x=-x$, что и тр.

Пример 5. Доказать теорему: для того чтобы из вектора x вычесть вектор y, достаточно к вектору x прибавить противоположный вектору y вектор -y, т.е. $x-y=x+(-y)$.

Доказательство. Положим $x+(-y)=z$ и покажем, что $z+y=x$. Действительно, $z+y=[x+(-y)]+y=x+[(-y)+y]=x+\theta=x$,что и тр.

Как следствие доказанной теоремы получаем утверждение: если $x+y=\theta$, то $x=-y$. Обратно, если $x=-y$, то $x+y=\theta$.

II. Линейная зависимость и независимость векторов

Пример 1. В пространстве V_3 векторы $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}-\bar{j}$, $\bar{c}=-5\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$ линейно зависимы, т.к. существуют отличные от нуля числа, например, $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=1$ такие, что $\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}=\bar{0}$. Действительно, $2\bar{a}+3\bar{b}+\bar{c}=2(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})+3(\bar{i}-\bar{j})+(-5\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k})=\bar{0}$.

Напротив, векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ - линейно независимы, т.к. равенство $\alpha\bar{i}+\beta\bar{j}+\gamma\bar{k}=\bar{0}$ возможно только при $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Пример 2. В пространстве непрерывных в промежутке $(-\infty,+\infty)$ функций функции $y=\sin^2x$, $y=5\cos^2x$, $y=1$ линейно зависимы. Действительно, равенству $\alpha\sin^2x+\beta5\cos^2x+\gamma1=0$ можно удовлетворить, положив $\alpha=1$, $\beta=\frac{1}{5}$, $\gamma=-1$

Напротив, функции sinx и cosx линейно независимы, т.к. из справедливости равенства $\alpha\sin x+\beta\cos x=0$ (при всяком x !) следует $\alpha=\beta=0$.

Пример 3. В пространстве $R_n(t)$ многочленов степени не выше n векторы (многочлены) $1, t, t^2, \ldots, t^n$ являются линейно-независимыми.

Действительно, на основании теоремы о тождественном равенстве многочлена нулю равенство $\alpha 1+\beta t+\gamma t^2+\ldots+\lambda t^n \equiv 0$ возможно только при $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=\lambda=0$.

Пример 4. Доказать, что если векторы x, y, ..., v линейно зависимы, то хотя бы один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Доказательство. Т.к. векторы $x, y, \ldots, v$ по условию линейно зависимы, то найдутся числа $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, среди которых хоть одно отлично от нуля, и такие, что $\alpha x+\beta y+\ldots+\lambda v=0$.

Пусть для определенности $\alpha \neq 0$. Тогда $\alpha x=-\beta y-\ldots-\lambda v$ и, следовательно, $x=-\frac{\beta}{\alpha}y-\ldots-\frac{\lambda}{\alpha}v$, т.е. вектор x представлен в виде линейной комбинации векторов $y, \ldots, v$, что и тр.

III. Размерность линейного пространства. Базис. Координаты. Подпространство линейного пространства

Пример 1. Множество многочленов $R_n(t)$ степени не выше n образуют линейное пространство размерности n+1.

Действительно, многочлены $e_1=1$, $e_2=t$, $e_3=t^2, \ldots$, $e_{n+1}=t^n$в этом пространстве линейно независимы, т.к. тождество $\alpha_0 \cdot 1+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\ldots+\alpha_n t^n \equiv 0$ имеет место только при $\alpha_0=\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$.

Большего числа линейно независимых многочленов в этом пространстве нет, т.к. всякий (n+2)- ой многочлен $a_0+a_1 t+\ldots+a_n t^n$ может быть представлен в виде линейной комбинации многочленов $1, t, t^2, \ldots, t^n$ с коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$. (Теорема 3 в соответствующей лекции).

В качестве базиса в этом пространстве можно взять многочлены $1, t, t^2, \ldots, t^n$, т.е. $\dim R_n(t)=n+1$, что и тр.

Пример 2. Множества непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $f(t)$ образуют ∞ - номерное пространство, т.к. в нем существует любое число линейно независимых функций. Например, при любом, сколь угодно большом n, функции $1, t, t^2, \ldots, t^n$ линейно независимы.

Пример 3. Множества всех квадратных матриц 2-го порядка образуют 4-мерное линейное пространство.

Доказательство. Матрицы $e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ являются линейно независимыми, т.к. равенство $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3+\alpha_4e_4=\theta$, где $\theta=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ выполняются лишь при $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$.

С другой стороны, всякую матрицу $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ можно представить в виде линейной комбинации матриц e_1,e_2,e_3,e_4:

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=ae_1+be_2+ce_3+de_4$,

поэтому матрицы e_1,e_2,e_3,e_4 образуют базис пространства матриц 2-го порядка, а значит, это пространство 4-мерно, что и тр.

Пример 4. В линейном пространстве матриц 2-го порядка с обычными определениями сложения и умножения на числа даны матрицы $e_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$,

$e_2=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}3&2\\4&5\end{pmatrix}$.

Показать, что матрицы e_1,e_2,e_3,e_4 образуют базис; найти в этом базисе координаты матрицы X.

Решение. Выясним, при каких $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ возможно равенство $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3+\alpha_4e_4=\theta$. (*)

Подставив сюда значения e_1,e_2,e_3,e_4,получим равенство

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}=\theta.$$

Откуда $\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_1\\\alpha_1&\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\alpha_2\\0&\alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\\alpha_3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\alpha_4&0\\0&\alpha_4\end{pmatrix}=\theta$,

или $\begin{pmatrix}\alpha_1-2\alpha_4&\alpha_1+2\alpha_2\\\alpha_1+\alpha_3&\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Приравнивая соответствующие элементы матриц, для определения чисел $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ получим систему
$$\begin{cases}\alpha_1-2\alpha_4=0;\\\alpha_1+2\alpha_2=0;\\\alpha_1+\alpha_3=0;\\\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=0.\end{cases}$$

Из первого и второго уравнений имеем $\alpha_4=\frac{1}{2}\alpha_1$, $\alpha_2=-\frac{1}{2}\alpha_1$;

затем эти значения подставляем в четвертое уравнение системы:

$\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_1 = 0$, откуда $\alpha_1 = 0$. Но тогда и $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Итак, равенство (*) имеет место только при нулевых коэффициентах.

Следовательно, матрицы (векторы) e_1, e_2, e_3, e_4 линейно независимы и их можно принять за базис.

Найдем координаты матрицы $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

Для этого положим $X = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4$,

т.е. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \xi_4 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Отсюда $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 - 2\xi_4 & \xi_1 + 2\xi_2 \\ \xi_1 + \xi_3 & \xi_1 + \xi_2 + \xi_4 \end{pmatrix}$, и, следовательно, для определения координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 и ξ_4 получаем систему $\begin{cases} \xi_1 - 2\xi_4 = 3; \\ \xi_1 + 2\xi_2 = 2; \\ \xi_1 + \xi_3 = 4; \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_4 = 5. \end{cases}$

Решая ее, найдем $\xi_1 = \frac{11}{2}$, $\xi_2 = -\frac{7}{4}$, $\xi_3 = -\frac{3}{2}$, $\xi_4 = \frac{5}{4}$.

Итак, координатами матрицы X в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 являются числа $\frac{11}{2}$, $-\frac{7}{4}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$. Задача решена.

Рассмотрим теперь пример линейного пространства с «необычными» определениями сложения и умножения на числа.

Пример 5. Пусть R^+- множество всех положительных чисел. Будем обозначать их буквами a, b, c... Сумма двух чисел a и b в этом множестве будем обозначать через $a \oplus b$ и определим равенством $a \oplus b = a \cdot b$, где $a \cdot b$- обычное произведение чисел a и b. Произведение любого действительного числа λ на число $a \in R^+$ обозначим через $\lambda(\cdot)a$ и определим равенством $\lambda(\cdot)a = a^{\lambda}$. Покажем, что R^+ - линейное (действительное) пространство размерности 1.

Для этого прежде всего заметим, что если $a \in R^+$, $b \in R^+$, то $a \oplus b \in R^+$ (как произведение положительных чисел) и $\lambda(\cdot)a \in R^+$(т.к. значения показательной функции $a^{\lambda} > 0$).

Проверим справедливость аксиом 1^0 -8^0.

1^0. $a \oplus b = b \oplus a$ (т.к. $a \cdot b = b \cdot a$).

2^0. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (т.к. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$).

3^0. В R^+ существует нулевой элемент, обозначаемый в R^+ через 1, такой, что $a \oplus 1 = a$ (т.к. $a \oplus 1 = a \cdot 1 = a$).

4^0. Для каждого элемента $a \in R^+$ существует противоположный элемент, обозначаемый в R^+ через $\frac{1}{a}$, такой, что $a \oplus \frac{1}{a} = 1$ (т.к. $a \oplus \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a}, = 1$, где 1 нулевой элемент).

5^0. $\alpha(\cdot)(a \oplus b) = (\alpha(\cdot)a) \oplus (\alpha(\cdot)b)$

(т.к. $\alpha(\cdot)(a \oplus b) = (a \oplus b)^\alpha = (a \cdot b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha = a^\alpha \oplus b^\alpha = (\alpha(\cdot)a) \oplus (\alpha(\cdot)b)$.

6^0. $(\alpha+\beta)(\cdot)a = (\alpha(\cdot)a) \oplus (\beta(\cdot)a)$ (т.к. $(\alpha+\beta)(\cdot)a = a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta = (\alpha(\cdot)a) \oplus (\beta(\cdot)a)$).

7^0. $\alpha(\cdot)(\beta(\cdot)a) = (\alpha\beta)(\cdot)a$ (т.к. $\alpha(\cdot)(\beta(\cdot)a) = (\beta(\cdot)a)^\alpha = (a^\beta)^\alpha = a^{\alpha\beta} = (\alpha\beta)(\cdot)a$).

8^0. $1(\cdot)a = a$ (т.к. $1(\cdot)a = a^1 = a$).

Т.к. аксиомы 1^0-8^0 выполнены, то R^+ - линейное пространство.

В этом пространстве имеются ненулевые элементы (т.е. числа,отличные от 1). Поэтому его размерность больше нуля. Однако любые два его элемента уже зависимы, т.к. равенству $(\alpha(\cdot)a) \oplus (\beta(\cdot)b) = 1$ можно удовлетворить при одном из коэффициентов α и β, не равном 0. Покажите это.

Следовательно, любые два числа a и b из R^+ линейно зависимы.

Это означает, что размерность пространства R^+ равна 1. Задача решена.

Пример 6. Определить размерность и указать какой-либо базис линейной оболочки векторов $x_1=(3,2,0)$; $x_2=(-1,4,5)$; $x_3=(7,0,-5)$.

Решение. Легко показать, что векторы x_1,x_2,x_3 - линейно зависимы. Однако векторы x_1 и x_2 линейно независимы, т.к. равенство $\alpha(-1,4,5)+\beta(3,2,0)=\theta$ возможно лишь при $\alpha=\beta=0$ (проверьте это). Следовательно $\dim L(x_1,x_2,x_3)=2$. В качестве базиса можно взять векторы x_1 и x_2.

Пример 7. Пусть R^n- линейное пространство упорядоченных наборов по n действительных чисел. Показать, что множество R' наборов вида$(0, x_2,\dots,x_{n-1}, 0)$ является линейным подпространством пространства R^n и определить его.

Решение.

Заметим, что если $x=(0,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},0) \in R'$, $y=(0,y_2,y_3,\dots,y_{n-1},0) \in R'$, то $x+y=(0,x_2+y_2,x_3+y_3,\dots,x_{n-1}+y_{n-1},0) \in R'$ и $\alpha \cdot x=(0,\alpha x_2,\alpha x_3,\dots,\alpha x_{n-1},0) \in R'$. Справедливость аксиом 1^0-8^0 очевидна. Следовательно, R'- линейное подпространство пространства R^n. В R' n-2 линейно независимых вектора $e_1=(0,1,0,\dots,0,0)$; $e_2=(0,0,1,\dots,0,0)$;... $e_{n-2}=(0,0,\dots,0,1,0)$ и нет большего числа линейно независимых векторов (проверьте это). Следовательно $\dim R'=n-2$, что и тр.

IV. Евклидовы пространства

Пример 1. Пусть V - действительное линейное пространство квадратных матриц 2-го порядка с обычными определениями сложения и умножения на число. Скалярное произведение матриц

A=$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ определим равенством:

$(A,B)=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2$.

Нетрудно видеть, что

1^0.(A,B)=(B,A).

2^0.(αA,B)=α(A,B).

3^0.(A_1+A_2,B)=(A_1,B)+(A_2,B).

4^0.(A,A)$\geq$0, причем (A,A)=0 только при A=$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и, следовательно V- евклидово пространство.

Пример 2. Пусть V- действительное линейное пространство функций f(x), непрерывных на отрезке [0,1], с обычными определениями сложения и умножения на число. Скалярное произведение функций f(x) и φ(x) определим равенством $(f,\varphi)=\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx$.

Ясно, что:

1^0.(f,φ)=(φ,f).

2^0.(αf,φ)=α(f,φ).

3^0.(f_1+f_2,φ)=(f_1,φ)+(f_2,φ).

4^0.$(f,f)=\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq 0$, причем (f,f)=0 только при f(x)$\equiv$0, а, значит, V- евклидово пространство.

Пример 3. Найти длины векторов $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}$ и $\bar{b}=4\bar{i}+12\bar{j}-3\bar{k}$ и угол между ними (векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $\in V_3$ с обычным определением скалярного произведения).

Решение. $|\bar{a}|=\sqrt{(a,a)}=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=3$;

$$|\bar{b}|=\sqrt{(b,b)}=13;\ \varphi=\widehat{(\bar{a},\bar{b})}=\arccos\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\arccos\frac{2}{39}.$$

Пример 4. Пусть V- евклидово пространство квадратных матриц 2-го порядка, в котором скалярное произведение матриц определено равенством $\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2$.

Найти длину матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ и угол, который она образует с матрицей $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $|A|=\sqrt{(A,A)}=\sqrt{2\cdot 2+3\cdot 3+5\cdot 5+(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{39}$.

$$\varphi=(\widehat{A,B})=\arccos\frac{(A,B)}{|A|\cdot|B|}=\arccos\frac{17}{\sqrt{429}}.$$

Заметим, что символы $|A|$ и $|B|$ никакого отношения к определителям матриц A и B не имеют.

Пример 5. Пусть V- евклидово пространство функций, непрерывных на отрезке [0,1], в котором скалярное произведение функций f(x) и φ(x) определяется равенством $(f(x),\varphi(x))=\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx$. Найти длину функции $y_1=\sin\pi x$ и ее угол с функцией $y_2=x-1$.

Решение. $|y_1|=\sqrt{(\sin\pi x,\sin\pi x)}=\sqrt{\int_0^1 \sin^2\pi x dx}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\varphi=(\widehat{\sin\pi x,x-1})=\arccos\frac{(\sin\pi x, x-1)}{|y_1|\cdot|y_2|}=\arccos\left(-\frac{1}{\pi\sqrt{6}}\right).$$

Заметим, что символами $|y_1|$,$|y_2|$ у нас обозначены не модули функций, а их длины.

Пример 6. В пространстве V_3 с обычным определением скалярного произведения векторы $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ образуют ортонормированный базис.

Пример 7. В евклидовом пространстве R^n векторы $e_1=(1,0,...,0)$, $e_2=(0,1,...,0)$,...,$e_n=(0,0,...,1)$ образуют ортонормированный базис, т.к.

$$(e_i,e_j)=\begin{cases} 0 & \text{при } i\neq j \\ 1 & \text{при } i=j \end{cases}.$$

Пример 8. В 3-мерном евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2-ой, в котором скалярное произведение многочленов P(x) и Q(x) определено равенством

$(P(x),\ Q(x))=\int_{-1}^{1}P(x)Q(x)dx$ многочлены $1,x,x^2$ образуют базис, который не является ортогональным, т.к. $(1,x^2)=\int_{-1}^{1}1\cdot x^2dx=\frac{2}{3}\neq 0$,

а многочлены $1,x,x^2-\frac{1}{3}$ образуют ортогональный базис, т.к.

$$\int_{-1}^{1}(1\cdot x)dx=\int_{-1}^{1}x(x^2-\frac{1}{3})dx=\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})\cdot 1dx=0.$$

Базис $1,x,x^2-\frac{1}{3}$ можно сделать ортонормированным, если каждый из базисных многочленов поделить на его длину.

Пример 9. Найти ортогональный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 3-ей, в котором скалярное произведение многочленов P(x) и Q(x) определено равенством $(P(x),Q(x))=\int_{-1}^{1}P(x)Q(x)dx$.

Решение. Векторы $f_1=1$, $f_2=x$, $f_3=x^2$, $f_4=x^3$ образуют базис данного пространства. Положим $e_1=f_1=1$. Ортогональный к e_1 многочлен e_2 будем искать в виде $e_2=f_2+\alpha e_1$, где α- число, такое, что $e_2\perp e_1$,т.е. $(e_2,e_1)=0,(f_2+\alpha e_1,e_1)=0$, $(f_2,e_1)+\alpha(e_1,e_1)=0$, откуда $\alpha=-\frac{(f_2,e_1)}{(e_1,e_1)}=0$ и, следовательно, $e_2=f_2=x$.

Ортогональный к e_1 и e_2 многочлен e_3, будем искать в виде

$e_3=f_3+\alpha e_1+\beta e_2$.

$(e_3,e_1)=0$, $(f_3+\alpha e_1+\beta e_2,e_1)=0$,

$(f_3,e_1)+\alpha(e_1,e_1)+\beta(e_2,e_1)=0$,

$(f_3,e_1)+\alpha(e_1,e_1)=0$, откуда $\alpha=-\frac{(f_3,e_1)}{(e_1,e_1)}=-\frac{1}{3}$.

$(e_3,e_2)=0$, $(f_3+\alpha e_1+\beta e_2,e_2)=0$, $(f_3,e_2)+\alpha(e_1,e_2)+\beta(e_2,e_2)=0$, $(f_3,e_2)+\beta(e_2,e_2)=0$,

откуда $\beta=-\frac{(f_3,e_2)}{(e_2,e_2)}=0$ и, следовательно, $e_3=x^2-\frac{1}{3}$.

Ортогональный к e_1,e_2,e_3 вектор (многочлен) e_4 ищем в виде $e_4=f_4+\gamma_1e_1+\gamma_2e_2+\gamma_3e_3$. Из условий $(e_4,e_1)=0,(e_4,e_2)=0,(e_4,e_3)=0$,

найдем $\gamma_1=0,\gamma_2=-\frac{3}{5},\gamma_3=0$, следовательно, $e_4=x^3-\frac{3}{5}x$.

Итак, многочлены $1,x,x^2-\frac{1}{3},x^3-\frac{3}{5}x$ образуют ортогональный базис в пространстве $R_3(x)$.

Замечание. Указанный в данном примере процесс построения ортогонального базиса называется процессом ортогонализации.

Пример 10. Переход в линейном пространстве к новому базису. Найти матрицу перехода от базиса e_1,e_2,e_3,e_4,e_5 к базису e_2,e_3,e_1,e_5,e_4.

Решение. $(e_2,e_3,e_1,e_5,e_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5)\cdot\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$

Т.о.,матрицей перехода является матрица $C=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

Задача №1. Является ли множество R всех вещественных чисел:

а) вещественным линейным пространством (т.е. линейным пространством над полем R вещественных чисел).

б) комплексным линейным пространством (т.е. линейным пространством над полем C комплексных чисел).

Задача №2. Выяснить является ли линейно независимой система векторов в пространстве V_2:

а) $x_1=3\bar{i}+\bar{j}$, $x_2=\bar{i}-\bar{j}$;

б) $x_1=2\bar{i}$, $x_2=3\bar{j}$;

в) $x_1=\bar{i}-2\bar{j}$, $x_2=2\bar{j}-\bar{i}$;

г) $x_1=\bar{i}+\bar{j}$, $x_2=2\bar{j}$, $x_3=4\bar{i}-\bar{j}$.

Задача №3. Известно, что любой вектор $x\in V$ линейно выражается через векторы $e_1,e_2,\dots,e_n$ этого пространства. Образуют ли векторы $e_1,e_2,\dots,e_n$ базис пространства V?

Задача №4. Дана матрица $C=\begin{pmatrix}3&-2\\1&2\end{pmatrix}$ перехода от базиса e_1,e_2 к базису e'_1,e'_2. Найти координаты вектора $a=4e_1+e_2$ в базисе e'_1,e'_2.

Задача №5. Доказать, что для любого вектора x евклидова пространства имеет место равенство $(x,\theta)=0$.

Задача №6. Являются ли ортогональными в евклидовом пространстве R^3 следующие системы векторов:

а) (0,1,0),(-6,0,4);

б) (2,1,-4),(3,0,5);

в) (-1,0,0),(0,5,0),(0,0,9);

г) (1,1,3),(-1,-2,1),(7,-4,-1)?

Задача №7. Доказать, что матрицы $A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ можно принять за базис в линейном пространстве квадратных матриц 2-го порядка, и разложить матрицу $X=\begin{pmatrix}16 & 8\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ по базису A,B,C,D.

Задача №8. Даны векторы e_1,e_2,e_3, образующие ортогональный базис. Найти (a,b), $|a|$,$|b|$, если:

а) $a=2e_1-3e_2+e_3$, $b=e_1+4e_2-e_3$, $|e_1|=3$,$|e_2|=2$, $|e_3|=4$;

б) $a=e_1+e_2-e_3$, $b=e_1+e_2+e_3$, $|e_1|=2$,$|e_2|=1$, $|e_3|=3$.

Практическое занятие по теме:«ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ»

I. Основные свойства и алгебра линейных операторов

Определение 1. Будем говорить, что в линейном пространстве V над полем P задан оператор f, если каждому вектору $x \in V$ поставлен в соответствие определенный вектор $y \in V$ и писать $f: V \to V$ или $y=f(x)$. При этом вектор y называют образом вектора x, а вектор x называют прообразом вектора y при преобразовании f.

Оператор f, заданный в линейном пространстве V, называется оператором пространства V или преобразованием пространства V.

Определение 2. Оператор f пространства V называется линейным, если:

1^0. $f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \forall x,y \in V$,

2^0. $f(\lambda x)=\lambda f(x) \quad \forall x \in V$ и $\forall \lambda \in P$.

Определение 3. Множество всех векторов $f(x)$, где $x \in V$, называется множеством значений оператора f или образом оператора f и символически обозначается $\mathrm{im} f$.

Образ линейного оператора f является линейным подпространством линейного пространства V.

Определение 4. Множество всех векторов $x \in V$, для которых $f(x)=\theta$, называется ядром линейного оператора f и символически обозначается $\ker f$.

Ядро линейного оператора f является линейным подпространством линейного пространства V.

Определение 5. Размерность образа линейного оператора f называется рангом оператора и обозначается rang f. Т.о.,

$\mathrm{rang}\, f=\dim \mathrm{im}\, f$.

Определение 6. Размерность ядра линейного оператора f называется дефектом оператора и обозначается defekt f. Т.о.,

$\mathrm{defekt}\, f=\dim \ker f$.

Для линейного преобразования справедливо равенство

$\mathrm{rang}\, f+\mathrm{defekt}\, f=n$, где n- размерность пространства V.

Все остальные, необходимые для решения задач теоретические сведения изложены в соответствующей лекции.

Пример 1. Преобразования пространства R^3 $f(x)=(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_3)$, $\varphi(x)=(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2-1,\alpha_3)$ заданы своим действием на произвольный вектор $x=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

1) Выяснить, какие из преобразований f,φ являются линейными.

2) Для линейных преобразований найти:

а) матрицу линейного преобразования в каноническом базисе;

б) дефект и ранг;

в) образ, ядро, а также базисы ядра и образа.

Решение.

1.) Выясним являются ли линейными преобразования f и φ. Для этого проверим выполнение свойств 1^0 и 2^0 из определения 2.

Очевидно, что если $x_1=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $x_2=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\in R^3$, то

$x_1+x_2=(\beta_1+\gamma_1,\beta_2+\gamma_2,\beta_3+\gamma_3)\in R^3$ и $\lambda x=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\lambda\alpha_3)\in R^3$.

Вычислим:

$$f(x_1+x_2)=((\beta_1+\gamma_1)-(\beta_2+\gamma_2)+(\beta_3+\gamma_3),(\beta_2+\gamma_2)+2(\beta_3+\gamma_3),(\beta_1+\gamma_1)+3(\beta_3+\gamma_3))=$$

$$=(\beta_1-\beta_2+\beta_3,\ \beta_2+2\beta_3,\ \beta_1+3\beta_3)+(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3,\gamma_2+2\gamma_3,\gamma_1+3\gamma_3)=f(x_1)+f(x_2).$$

Свойство 1^0 для преобразования f выполняется.

Вычислим:

$$f(\lambda x)=(\lambda\alpha_1-\lambda\alpha_2+\lambda\alpha_3,\lambda\alpha_2+2\lambda\alpha_3,\lambda\alpha_1+3\lambda\alpha_3)=\lambda(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_3)=\lambda f(x).$$

Свойство 2^0 для преобразования f тоже выполняется и, следовательно, f-линейное преобразование пространства R^3.

Проверим условия 1^0и 2^0для преобразования φ. Вычислим:

$$\varphi(x_1+x_2)=((\beta_1+\gamma_1)+2(\beta_2+\gamma_2),(\beta_1+\gamma_1)-(\beta_2+\gamma_2)-1,(\beta_3+\gamma_3)).$$

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)=(\beta_1+2\beta_2,\beta_1-\beta_2-1,\beta_3)+(\gamma_1+2\gamma_2,\gamma_1-\gamma_2-1,\gamma_3)=$$

$$=((\beta_1+\gamma_1)+2(\beta_2+\gamma_2),(\beta_1+\gamma_1)-(\beta_2+\gamma_2)-2,(\beta_3+\gamma_3)).$$

Из последних равенств получаем, что $\varphi(x_1+x_2)\neq\varphi(x_1)+\varphi(x_2)$ и, следовательно, оператор (преобразование) φ не является линейным.

2а) Найдем матрицу линейного оператора f в каноническом базисе:

$$e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0).e_3=(0,0,1).$$

Для этого нужно найти образы базисных векторов $f(e_1),f(e_2),f(e_3)$.
Используя формулу для задания линейного оператора f, получим

$f(e_1)=(1,0,1)=1e_1+0e_2+1e_3$, $f(e_2)=(-1,1,0)=-1e_1+1e_2+0e_3$,

$$f(e_3)=(1,2,3)=1e_1+2e_2+3e_3.$$

$$(f(e_1),f(e_2),f(e_3))=(e_1,e_2,e_3)\cdot\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}.$$

Из определения матрицы линейного оператора следует, что

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}$$

является матрицей оператора f в каноническом базисе e_1,e_2,e_3.

2б) Из общей теории известно, что

$$\operatorname{rang} f=\operatorname{rang} A.$$

Поэтому для определения ранга линейного преобразования найдем ранг матрицы А. Применим метод элементарных преобразований

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rang} f=2$. Из свойства линейного преобразования $\operatorname{rang} f+\operatorname{defekt} f=3$ получаем, что $\operatorname{defekt} f=3-2=1$.

2в) По определению $y\in\operatorname{im}f$ в том и только в том случае, когда существует вектор $x\in R^3$ такой, что $y=f(x)$, или, обозначив $y=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$, получим

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Это равенство означает, что $\operatorname{im}f$ совпадает с линейной оболочкой системы столбцов матрицы А и, следовательно, за базис $\operatorname{im}f$ может быть выбран любой из базисов линейной оболочки столбцов матрицы А, например

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Обозначаем $a_1=(1,0,1)$, $a_2=(-1,1,0)$, получим, что $\operatorname{im} f=L(a_1,a_2)$.

Аналогично, $x\in\ker f$ в том и только в том случае, когда $f(x)=\theta$ или в координатной форме

$$A\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Отсюда следует, что kern f совпадает с подпространством решений однородной системы (*), и в качестве базиса в kern f может быть выбрана фундаментальная система решений системы (*). Так как rang A=2, то размерность подпространства решений однородной системы равна 1.

Найдем решение. За основные неизвестные примем α_1,α_2, за свободное- α_3. Тогда система (*) равносильна следующей

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = -\alpha_3; \\ \alpha_2 = -2\alpha_3. \end{cases}$$

Отсюда имеем фундаментальную систему при $\alpha_3=1$

$b_1=\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, kern f=L(b_1),

а за базис ядра примем вектор $b_1=\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример2. Доказать линейность, найти матрицу в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, образ и ядро оператора зеркального отображения относительно плоскости с нормальным вектором $\bar{e}=(1,2,-2)$ (координаты $\bar{e}$ заданы в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$).

Решение.

Две фигуры называются симметричными относительно плоскости P (плоскости зеркала), если $\forall(\cdot)$E, принадлежащей одной фигуре, соответствует $(\cdot)$E′ другой фигуры такая, что отрезок EE′$\perp$ плоскости P и делится этой плоскостью пополам.

Оператор зеркального отображения переводит любую фигуру пространства в симметричную ей относительно данной плоскости (плоскости зеркала).Поэтому оператор T зеркального отображения относительно плоскости с нормальным вектором $\bar{e}$ определяется равенством

$$T(\bar{x})=\bar{x}-2\text{пр}_{\bar{e}}\,\bar{x}\,\frac{\bar{e}}{|\bar{e}|}=\bar{x}-2(\bar{x},\bar{e})\,\bar{e}\,\frac{1}{|\bar{e}|^2}.$$

Найдем орт $\bar{e}^0$ вектора $\bar{e}$:

$$\bar{e}^0=\frac{\bar{e}}{|\bar{e}|}=\frac{1}{3}(1,2,-2)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right).$$

В этом случае оператор T можно определить равенством

$$T(\bar{x})=\bar{x}-2(\bar{x},\bar{e}^0)\,\bar{e}^0.$$

а) Докажем, что оператор T является линейным. Для этого проверим выполнение условий определения 2:

$$T(x+y) = (\bar{x}+\bar{y}) - 2(\bar{x}+\bar{y},\bar{e}^0)\bar{e}^0 = (\bar{x} - 2(\bar{x},\bar{e}^0)\bar{e}^0) + (\bar{y} - 2(\bar{y},\bar{e}^0)\bar{e}^0) = T(\bar{x}) + T(\bar{y});$$

$$T(\lambda\bar{x}) = \lambda\bar{x} - 2(\lambda\bar{x},\bar{e}^0)\bar{e}^0 = \lambda(\bar{x} - 2(\bar{x},\bar{e}^0)\bar{e}^0) = \lambda T(\bar{x}).$$

Условия определения 2 выполняются. Следовательно, оператор T является линейным.

б) Для отыскания матрицы A оператора T найдем образы базисных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

$$T(\bar{i}) = \bar{i} - 2\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k}\right) = \frac{1}{9}\bar{i} - \frac{4}{9}\bar{j} + \frac{4}{9}\bar{k},$$

$$T(\bar{j}) = \bar{j} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k}\right) = -\frac{2}{9}\bar{i} + \frac{5}{9}\bar{j} + \frac{4}{9}\bar{k},$$

$$T(\bar{k}) = \bar{k} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k}\right) = -\frac{2}{9}\bar{i} - \frac{4}{9}\bar{j} + \frac{13}{9}\bar{k},$$

Из последних равенств следует, что

$$A_T^{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} = \begin{pmatrix} 7/9 & -2/9 & -2/9 \\ -4/9 & 5/9 & -4/9 \\ 4/9 & 4/9 & 13/9 \end{pmatrix}.$$

в) Образом оператора T является само пространство V_3, т.е. $\operatorname{im} T = V_3$.

г) Для отыскания ядра линейного оператора нужно найти те векторы $\bar{x}$, для которых $T(\bar{x}) = \theta$. Для оператора T зеркального отображения относительно плоскости с нормальным вектором $\bar{e}$ $\ker T = \theta$.

Пример 3. Доказать линейность, найти матрицу в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, образ и ядро оператора P_α проектирования на плоскость $\alpha: 2x - y - 2z + 2 = 0$.

Решение. Оператор проектирования на плоскость α определяется равенством

$P_\alpha(\bar{x}) = \bar{x}_\alpha$, где $\bar{x}_\alpha$ - ортогональная проекция вектора $\bar{x}$ на плоскость α.

Имеем $P_\alpha(\bar{x}) = \bar{x} - \text{пр.}_{\bar{n}}\bar{x}\dfrac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \bar{x} - \dfrac{(\bar{n},\bar{x})}{|\bar{n}|^2}\bar{n}$, где $\bar{n}$ - нормальный вектор плоскости α. В данном случае $\bar{n} = 2\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}$.

а) Докажем линейность оператора P_α. Для этого проверим условия определения 2.

$$P_\alpha(\bar{x}+\bar{y}) = (\bar{x}+\bar{y}) - \frac{(\bar{n},\bar{x}+\bar{y})}{|\bar{n}|^2}\cdot\bar{n} = \left(\bar{x} - \frac{(\bar{n},\bar{x})}{|\bar{n}|^2}\cdot\bar{n}\right) + \left(\bar{y} - \frac{(\bar{n},\bar{y})}{|\bar{n}|^2}\bar{n}\right) = P_\alpha(\bar{x}) + P_\alpha(\bar{y}),$$

$P_\alpha(\lambda\bar{x})=\lambda\ \bar{x}-\frac{(\bar{n},\lambda\bar{x})}{|\bar{n}|^2}\cdot\bar{n}=\lambda(\bar{x}-\frac{(\bar{n},\bar{x})}{|\bar{n}|^2}\cdot\bar{n})=\lambda P_\alpha(\bar{x})$.

Т.к. условия определения 2 выполняются, то P_α является линейным.

б) Найдем образы базисных векторов $P_\alpha(\bar{i})$,$P_\alpha(\bar{j})$,$P_\alpha(\bar{k})$.

$$P_\alpha(\bar{i})=\bar{i}-\frac{2}{9}(2\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k})=\frac{5}{9}\bar{i}+\frac{2}{9}\bar{j}+\frac{4}{9}\bar{k},$$

$$P_\alpha(\bar{j})=\bar{j}-\frac{2}{9}(2\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k})=-\frac{4}{9}\bar{i}+\frac{11}{9}\bar{j}+\frac{4}{9}\bar{k},$$

$$P_\alpha(\bar{k})=\bar{k}-\frac{2}{9}(2\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k})=-\frac{4}{9}\bar{i}+\frac{2}{9}\bar{j}+\frac{13}{9}\bar{k}.$$

Отсюда имеем матрицу B оператора P_α в базисе $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$

$$B=\begin{pmatrix} 5/9 & -4/9 & -4/9 \\ 2/9 & 11/9 & 2/9 \\ 4/9 & 4/9 & 13/9 \end{pmatrix}$$

в) Образ оператора - множество всех векторов, компланарных плоскости α.

г) Ядро оператора проектирования P_α- множество всех векторов,$\perp$-х плоскости α.

Пример 4. Линейное преобразование f пространства V_2 в базисе e_1,e_2 имеет матрицу $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а линейное преобразование φ задано своим действием на базисные векторы $a_1=e_1+e_2$, $a_2=2e_1+e_2$ следующим образом: $\varphi(a_1)=a_1+a_2$,$\varphi(a_2)=a_2$.

Найти матрицы линейных преобразований $f\varphi$, $f+2\varphi$ в базисе a_1, a_2.

Решение. Чтобы найти матрицы линейных операторов $f\varphi$, $f+2\varphi$ в базисе a_1, a_2 нужно знать матрицы f и φ в этом базисе. Оператор φ задан своим действием на базисные векторы a_1 и a_2, поэтому из определения матрицы линейного оператора следует, что матрица $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ является матрицей оператора φ в базисе a_1, a_2. Осталось отыскать матрицу f в базисе a_1, a_2. Пусть D- матрица f в базисе a_1, a_2,тогда имеем $D=C^{-1}AC$, где $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$- матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису a_1, a_2. Имеем

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица $f\varphi$ в базисе a_1, a_2 равна DB=$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, а матрица D+2B=$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

II. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Определение. Ненулевой вектор $x\in V$, удовлетворяющий соотношению

$$f(x)=\lambda x, \tag{1}$$

называется собственным вектором, а соответствующее число λ- собственным значением линейного оператора f.

Если А- матрица линейного оператора f в некотором базисе, то равенство (1) можно записать в виде

$Ax=\lambda x$ или

$$(\lambda E-A)x=\theta. \tag{2}$$

Соотношение (2) представляет собой матричную запись однородной системы линейных уравнений, имеющей ненулевое решение лишь при условии

$$|\lambda E-A|=0. \tag{3}$$

Любой ненулевой вектор-решение системы (2) есть собственный вектор, отвечающий собственному значению λ. Значения собственных чисел λ определяются из уравнения (3) как корни характеристического многочлена

$$\varphi(\lambda)=|\lambda E-A|.$$

Пример 5. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей A=$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристический многочлен линейного оператора

$$\varphi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-9 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-10 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-8 \end{vmatrix}=\lambda^3-27\lambda^2+234\lambda-648.$$

Найдем собственные значения линейного оператора, решив характеристическое уравнение

$$\lambda^3-27\lambda^2+234\lambda-648=0.$$

Корнями этого уравнения, т.е. собственными значениями оператора будут числа

$$\lambda_1=9,\ \lambda_2=12,\ \lambda_3=6.$$

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1=9$. При $\lambda=9$ система $(\lambda E-A)x=\theta$ примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений имеет вид

$$C_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1=9$, имеют вид

$$X_{\lambda_1}=\mu_1 C_1, \text{ где } \mu_1\neq 0, \text{ т.е. } X_{\lambda_1}=\mu_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mu_1\neq 0.$$

При $\lambda=\lambda_2=12$ имеем систему

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

фундаментальная система решений

$C_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, а собственные векторы, отвечающие собственному значению $\lambda_2=12$, имеют вид

$$X_{\lambda_2}=\mu_2 C_2,\ \mu_2\neq 0, \text{ т.е. } X_{\lambda_2}=\mu_2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu_2\neq 0.$$

При $\lambda=\lambda_3=6$ имеем систему

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдя фундаментальную систему решений

$C_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, получим собственные векторы, отвечающие собственному значению $\lambda_3=6$.

$$X_{\lambda_3}=\mu_3 C_3,\ \mu_3\neq 0 \ \text{ или } \ X_{\lambda_3}=\mu_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \mu_3\neq 0.$$

III. Линейные операторы в евклидовых пространствах

Оператор f, действующий в евклидовом пространстве V, называется самосопряженным, если

$$(f(x),y)=(x,f(y)) \quad \forall x,y\in V.$$

Самосопряженный оператор в любом ортонормированном базисе имеет симметрическую матрицу. Верно и обратное утверждение: если в некотором ортонормированном базисе матрица линейного оператора симметрическая, то этот линейный оператор является самосопряженным.

Если f- самосопряженный оператор пространства V, то в этом пространстве всегда можно найти ортонормированный базис из собственных векторов оператора f, в котором матрица оператора f будет иметь диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где собственные значения λ_i оператора f расположены в том порядке, в котором соответствующие собственные векторы занимают свое место в базисе.

Пример 6. Диагонализировать матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

линейного оператора переходом к новому базису. Найти этот базис, матрицу перехода C к новому базису и соответствующую ему диагональную форму D матрицы оператора.

Решение. Симметрическую матрицу A можно рассматривать как матрицу самосопряженного оператора f в некотором ортонормированном базисе $e_1,\dots,e_n$. Матрица самосопряженного оператора всегда приводится к диагональному виду, причем

$D=C^{-1}AC$, где $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i (i=1,2,\dots,n)$ - собственные числа оператора f, а C- матрица перехода от исходного ортонормированного базиса к базису из собственных векторов оператора, причем этот последний должен быть ортонормированным.

Решение задачи начнем с составления характеристического многочлена матрицы A.

$$\varphi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-8 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-8 \end{vmatrix}=\lambda^3-21\lambda^2+135\lambda-243.$$

Решив характеристическое уравнение

$$\lambda^3-21\lambda^2+135\lambda-243=0, \text{ получим } \lambda_1=3,\ \lambda_2=\lambda_3=9.$$

Найдем собственные векторы, отвечающие $\lambda_1=3$. Однородная система имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rang } (\lambda_1 E-A)=2.$$

Фундаментальная система решений имеет вид $a_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2=\lambda_3=9$ однородная система имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rang } (\lambda_2 E-A)=1.$$

Фундаментальная система решений имеет вид $a_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Скалярное произведение $(a_2,a_3)=-1\neq 0$, т.е. векторы a_2,a_3 не ортогональны.

Ортогонализируем систему векторов a_2,a_3:

$$b_2=a_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad b_3=a_3+\overset{\alpha}{\lambda} b_2 .$$

Число α выбираем так, чтобы $(b_3,b_2)=0$, т.е. $(a_3+\alpha b_2,b_2)=0$, $(a_3,b_2)+\alpha(b_2,b_2)=0$:

$$\alpha=-\frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}=\frac{1}{5},\quad b_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4/5\\2/5\\2\end{pmatrix}.$$

Векторы b_2,b_3 - собственные ортогональные векторы оператора f.

Рассмотрим базис из векторов

$$c_1=a_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix};\quad c_2=b_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix};\quad c_3=\frac{5}{2}b_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}.$$

Вычислим скалярные произведения

$(c_1,c_1)=6$; $(c_1,c_2)=0$; $(c_1,c_3)=0$; $(c_2,c_2)=5$; $(c_2,c_3)=0$; $(c_3,c_3)=30$.

Базис c_1,c_2,c_3 является ортогональным, но не нормированным. Нормируя базис по формулам $e'_i=\frac{c_i}{|c_i|}$, $i=1,2,3$, будем иметь

$$e'_1=\begin{pmatrix}2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix},\quad e'_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix},\quad e'_3=\begin{pmatrix}2/\sqrt{30}\\1/\sqrt{30}\\5/\sqrt{30}\end{pmatrix}.$$

Т.о., мы получили ортонормированный базис e'_1,e'_2,e'_3 из собственных векторов оператора f. Матрица перехода от исходного ортонормированного базиса e_1,e_2,e_3 к базису e'_1,e'_2,e'_3 имеет вид

$$C=\begin{pmatrix}2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30}\\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30}\\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30}\end{pmatrix};\quad D=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}.$$

НА ДОМ:

Задача №1.

Выяснить, какие из преобразований пространства R^3 являются линейными. Для линейных преобразований найти: а) матрицу в каноническом базисе; б) дефект, ранг, в) образ, ядро, а также построить базисы образа и ядра. Каждое преобразование описывается своим действием на произвольный вектор $x=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$; при этом компоненты векторов $\varphi(x)$, $f(x)$ заданы как функции компонент вектора x.

$f(x)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3+\alpha_1,2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$,

$\varphi(x)=(\alpha^2{}_1,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_1)$.

Задача №2.

Доказать линейность, найти матрицу в базисе $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, область значений (образ) и ядро оператора проектирования на ось с направляющим вектором $\bar{E}=(1,2,-1)$.

Задача №3.

Линейный оператор f пространства V_2 в базисе e_1,e_2 имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, а линейный оператор φ задан своим действием на базисные векторы $\begin{cases}a_1=e_1-e_2,\\ a_2=e_1,\end{cases}$ следующим образом $\begin{cases}\varphi(a_1)=2a_1-a_2,\\ \varphi(a_2)=2a_1+5a_2\end{cases}$. Найти матрицы линейных операторов $f\varphi$, $f+3\varphi$.

Задача №4.

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ -4 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 8\end{pmatrix}$.

Задача №5.

Диагонализировать матрицу $A=\begin{pmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 0\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}$ линейного оператора переходом к новому базису. Найти этот базис, матрицу перехода Ç от исходного базиса к новому базису и соответствующую новому базису диагональную форму D матрицы оператора.

СОДЕРЖАНИЕ