МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

*Методические указания к практическим занятиям
для студентов-заочников*

Часть 1

САМАРА 1999

Составитель: *Прокофьев Л. Н.*

УДК 510. 2(075)

Линейная алгебра: Методические указания к практическим занятиям для студентов-заочников/ Самарский гос. аэрокосмический ун-т ; Сост. *Л. Н. Прокофьев*. Самара, 1999, 48 с.

Методические указания по линейной алгебре предназначены для индивидуальной, самостоятельной работы студентов I курса факультета заочного обучения университета специальности 220 200 "Автоматизированные системы обработки информации и управления". Они включают в себя основные типы задач, необходимых для усвоения курса линейной алгебры.

Подготовлены на кафедре прикладной математики факультета информатики.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королева

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ ПО ТЕМЕ: “ОПРЕДЕЛИТЕЛИ”

Определители 2-го и 3-го порядков

Определители 2-го и 3-го порядков определяются следующими равенствами:

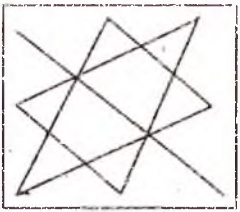
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

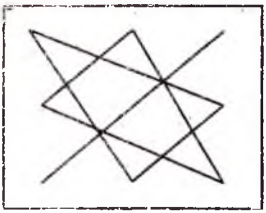
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \qquad (2)$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для вычисления определителя второго порядка надо из произведения чисел, стоящих на его главной диагонали, вычесть произведение чисел, расположенных на побочной диагонали.

При вычислении определителей третьего порядка часто пользуются правилом треугольников в правой части равенства (2) вычисляется по схеме (I). Остальные три слагаемых в правой части (2) вычисляются по схеме (II). При этом произведения, вычисленные по схеме (II), ставятся в формулу (2) со знаком “минус”.





Пример 1. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 15 & 3 \end{vmatrix}$

Решение. Применяя функцию (!), получим

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 15 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 3-(-2)15 = 15+30 = 45.$$

__Пример 2__. При каких значениях a обращается в 0, определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a+3 & 5 \\ -1 & a-3 \end{vmatrix}$?

Решение. Вычислим сначала данный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+3 & 5 \\ -1 & a-3 \end{vmatrix} = (a+3)(a-3)-5(-1) = a^2-4,$$

следовательно, $\Delta = 0$ при ± 2.

__Пример 3__. Вычислить определитель третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение. Пользуясь правилом треугольников, вычисляем входящие в формулу (2) произведения

По схеме (I)
$$1\cdot(-1)\ (-2) = 2,$$
$$4\cdot(-7)\cdot 3 = -84,$$
$$2\cdot 5\cdot 6 = 60.$$

По схеме (II)
$$6\cdot(-1)\cdot 3 = -18,$$
$$4\cdot 2\cdot(-2) = -16,$$
$$(-7)\cdot 5\cdot 1 = -35.$$

Произведения, вычисленные по схеме (II), входят в разложение определителя (2) со знаком "минус", поэтому

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2-84+60+18+16+35 = 47.$$

Пример 4. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & a & -2 \\ -3 & 3 & a \end{vmatrix}$.

Решение. Применим правило треугольников, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & a & -2 \\ -3 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2 + 6 - 6 + 3a + 2a + 6a = a^3 + 11a.$$

<u>**Используя свойства определителей, решить следующие задачи.**</u>

Пример 5. Вычислить определитель с помощью разложения по элементам первого столбца.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Элементы первого столбца: $a_{11} = 3, a_{21} = 2, a_{31} = 3$. Их алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8+2) = -10,\ A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0.$$

Поэтому $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 1 \cdot 5 + 2(-10) + 3 \cdot 0 = -15$.

Пример 6. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Замечаем, что первый столбец имеет общий множитель 2, а первая строка - 3. Поэтому

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

В первой строке один элемент равен 0. Чтобы сделать в ней два 0, достаточно из элементов 1-го столбца вычесть соответствующие элементы 2-го столбца. Определитель от этого не изменится, поэтому:

$$\Delta = 6\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Так как в первой строке отличен от 0 только один элемент a_{12}, а его алгебраическое дополнение

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8,$$

то $\Delta = 6 \cdot 1 \cdot (-8) = -48$.

Пример 7. Вычислить определитель Вандермонда .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

Выяснить,при каких значениях x,y,z этот определитель равен 0.

Решение. Вычтем первый столбец из второго и третьего:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-y^2 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по элементам первой строки

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ (y-x)(y+x) & (z-x)(z+x) \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y).$$

Отсюда видно, что данный определитель может обращаться в 0 только при равенстве двух каких- либо чисел из x, y, z.

2. *Определитель высших порядков с числовыми элементами*

Пример 7. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение: В данном случае удобно из 4-ой строки вычесть 3-ю, тогда в ней получается сразу три 0:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Разлагая теперь этот определитель по четвертой строке, получим

$$\Delta = 2\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 14 = 28.$$

<u>**Пример 8.**</u> Вычислить определитель 5-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение: Возьмем 1-ую строку и, используя 1, которая в ней находится, сделаем 0 на остальных местах. Для этого ко 2-му и 4-му столбцам прибавим последний, из 1-го вычтем утроенный, из 3- го - удвоенный пятый столбец. После этого разложением по элементам первой строки сведем вычисление к определителю 4-го порядка:

$$\Delta = 1(-1)^{1+5}\begin{vmatrix} -1 & 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & 7 \\ -6 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

В полученном определителе выносим общий множитель 3 из 2-го столбца и затем первую строку вычитаем из всех остальных:

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 & 3 \\ -3 & 1 & -7 & 7 \\ -6 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

Раскладывая определитель по элементам 2-го столбца, получаем

$$\Delta = 3\cdot 1\cdot\left(-1\right)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -5 & 6 & -1 \\ 3 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -3(-155) = 465.$$

3. ***Задачи на определение определителя и его свойства***

__Пример 9.__ Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

а) $a_{41}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$,

б) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$,

в) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$.

Решение:

а) В этом произведении в качестве сомножителя присутствует один и только один элемент из каждой строки и каждого столбца матрицы определителя. Поэтому данное произведение является членом определителя.

Определим теперь знак данного произведения в составе определителя. Для этого выпишем сомножители в таком порядке, что первые индексы образовали главную перестановку. Тогда вторые индексы образуют перестановку:

2,1,5,3,4 (*) чисел 1,2,3,4,5.

Число инверсий в перестановке (*) S(2,1,5,3,4)=3- нечетное число.

Следовательно, данное произведение входит в состав определителя со знаком «-«.

Б) Рассуждая аналогично, получим следующий результат: данное произведение входит в состав определителя 6-го порядка со знаком +.

В) Данное произведение не входит в состав определителя, так как в этом определителе в качестве сомножителей присутствуют два элемента из второй строки.

Пример 10. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение $a_{52}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ входило в определитель 6-го порядка со знаком +.

Решение: Ясно, что i и k должны принимать соответственно значения 1 и 5 или 5 и 1, т. к. в противном случае данное произведение не будет членом определителя. Если i=1 k=5, то произведение будет входить в состав определителя со знаком *+ или -* в зависимости от того, будет ли сумма инверсий в перестановке индексов строк и столбцов четной или нечетной. Произведем необходимые вычисления:

S(6,1,3,5,4,2)+S(2,5,3,4,6,1)=9+7=16 .

Т.о.. данное произведение в составе определителя имеет знак +.

Ответ: i=5, k=1.

Пример 11. *Пользуясь только определением, вычислить определитель*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

в котором все элементы по одну сторону от главной диагонали равны 0.

Ответ: $a_{11}a_{22}...a_{nn}$ (обосновать).

Пример 12. *Только определением, вычислить определитель:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ответ: 0 (обосновать).

Пример 13. *Решить уравнение*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix}$$

Ответ: x=0,1,2,3...n-1 (обосновать).

Пример 14. *вычислить определитель, не развертывая его:*

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

Ответ: 0 (обосновать).

4. Некоторые методы вычисления определителей n- го порядка.

а) Метод приведения к треугольному виду:

Этот метод заключается в преобразовании определителя к такому виду, где все элементы, лежащие по одну сторону от одной из диагоналей, равны 0. Случай побочной диагонали путем изменения порядка строк или столбцов на обратный сводится на случай главной диагонали. Полученный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Пример 15. Вычислить определитель n- го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Решение: Вычтем первую строку из всех остальных:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\0&-1&0&\dots&0\\0&0&-1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}.$$

б) Метод выделения линейных множителей:

Определитель рассматривается как многочлен от одной из входящих в него букв. Преобразуя его, обнаруживают, что он делится на ряд линейных множителей, а значит (если эти множители взаимно просты), и на их произведение. Сравнивая отдельные члены определителя с членами произведения линейных множителей, находят частное от деления определителя на это произведение и тем самым находят выражение определителя.

Пример 16. Вычислить определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&x&y&z\\x&0&z&y\\y&z&0&x\\z&y&x&0\end{vmatrix}$$

Решение: Если к 1-му столбцу прибавить остальные, то обнаружиться, что определитель делится на x+y+z, если к первому столбцу прибавить второй и вычесть третий и четвертый, то выделится множитель y+z-x; если к первому столбцу прибавить третий и вычесть второй и четвертый, то выделится множитель x-y+z; наконец, если к 1-му столбцу прибавить четвертый и вычесть второй и третий, то выделится множитель x+y-z. Считая x,y,z независимыми неизвестными, заключаем, что все эти четыре множителя попарно взаимно просты, и, значит, определитель делится на их произведение. Это произведение содержит член z с коэффициентом -1, а сам определитель этот член с коэффициентом +1. Значит:

$$\Delta=-(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z)=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2.$$

в) Метод рекуррентных соотношений:

Этот метод заключается в том, что данный определитель выражают, преобразуя и разлагая его по строке или столбцу, через определители того же вида, но более низкого порядка. Полученное равенство называется рекуррентным соотношением.

Затем вычисляют непосредственно по общему виду определителя столько определителей низших порядков, сколько их было в правой части рекуррентного соотношения.

Определители более высокого порядка вычисляются последовательно из рекуррентного соотношения. Если надо получить выражение для определителя любого порядка n, то, вычислив из рекуррентного соотношения несколько определителей низших порядков, стараются заметить общий вид искомого выражения при любом n с помощью рекуррентного соотношения и метода индукции по n.

Общее выражение можно получить и другим путем. Для этого в рекуррентное соотношение, выражающее определитель n-го порядка, подставляют выражение определителя n-1-го порядка из того же рекуррентного соотношения с заменой n на n-1, далее подставляют аналитическое выражение определителя n-2-го порядка и т. д., пока не выяснится вид искомого общего выражения определителя.

Пример 17. Вычислить определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Решение: Добавляя к последней строке первую и раскладывая определитель по последней строке, придем к формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = n(-1)^{n+n} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ -1 & 0 & \dots & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & \dots & 0 \end{vmatrix} = n\,\Delta_{n-1},$$

где Δ_{n-1} определитель n-1-го порядка того же типа, что и данный определитель.

Т.к. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, то применяя полученную рекуррентную формулу n-2 раз, найдем, что:

$$\Delta = n\,\Delta_{n-1} = n(n-1)\,\Delta_{n-2} = n(n-1)(n-2)\,\Delta_{n-3} = \ldots = n$$

г) Метод представления определителя в виде суммы опрделителей:

Пример 18: Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

Решение: Этот определитель относительно первой строки раскладывается на 2 определителя, каждый из которых относительно второй строки раскладывается на два определителя и т.д. Дойдя до последней строки, получим 2^n определителей.

Если при каждом разбиении за первое слагаемое принимать числа a, а за второе b, то строки полученных определителей будут либо вида $a_i, a_i, \dots, a_i$, либо вида $b_1, b_2, \dots, b_n$. Две строки первого типа равны. При n>2 в каждый получившийся определитель попадет, по крайней мере, две строки одного типа, и он обратится в 0.

Итак, $\Delta_n = 0$ при n>2.

Далее, $\Delta_1 = a_1 + b_1; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1)$.

На дом:

Задача № 1

Вычислить определитель третьего порядка:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}\ 2)\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}\ 3)\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 6 \end{vmatrix}\ 4)\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}\ 5)\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}\ 6)\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$$

Задача № 2

Не развертывая определитель, доказать следующие тождества:

$$1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$2)\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Задача № 3

С каким знаком входит в определитель порядка n произведение элементов побочной диагонали?

Задача № 4

Пользуясь только определением, вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Задача № 15

Чему равен определитель, у которого сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами?

Задача № 16

Вычислить определители

1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 71 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$

Задача № 7

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Задача № 8

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$$

Задача № 9

Вычислить определитель n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

Задача 10

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix}$$

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания для практических занятий

для студентов-заочников

МАТРИЦЫ

I. Алгебра матриц

Пример 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицы $A + B$, $3A - 2B + E$, AB, BA, A^2, B^{-1}.

Решение.

$$1)A+B=\begin{pmatrix} 1+5 & 0+1 & 3+1 \\ 5+0 & -1+2 & 2+1 \\ 4+1 & 3-1 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2)\ 3A-2B+E=3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 15 & -3 & 6 \\ 12 & 9 & 3 \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} -10 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -2 & 7 \\ 15 & -6 & 4 \\ 10 & 11 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$3)AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15+0\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot2+3\cdot(-1) & 1\cdot1+0\cdot1+3\cdot0 \\ 5\cdot5-1\cdot0+2\cdot1 & 5\cdot1-1\cdot2+2\cdot(-1) & 5\cdot1-1\cdot1+2\cdot0 \\ 4\cdot5+3\cdot0+1\cdot1 & 4\cdot1+3\cdot2+1\cdot(-1) & 4\cdot1+3\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ 27 & 1 & 4 \\ 21 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$4)BA=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 51+1\cdot5+1\cdot4 & 5\cdot0+1\cdot(-1)+1\cdot3 & 5\cdot3+1\cdot2+1\cdot1 \\ 0\cdot1+2\cdot5+1\cdot4 & 0\cdot0+2\cdot(-1)+1\cdot3 & 0\cdot3+2\cdot2+1\cdot1 \\ 1\cdot1-1\cdot5+0\cdot4 & 1\cdot0-1\cdot(-1)+0\cdot3 & 1\cdot3-1\cdot2+0\cdot1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 14 & 2 & 18 \\ 14 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что AB=BA.

5)$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 5 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 5 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 9 & 6\\ 8 & 7 & 15\\ 23 & 0 & 19\end{pmatrix}$.

6)Чтобы найти матрицу B^{-1}, обратную для B,

а) найдем определитель матрицы B:

$$|B|=\begin{vmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 0 & 1\\ -5 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4.$$

б) транспонируем матрицу B:

$$B'=\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix};$$

в) заменим элементы матрицы B' их алгебраическими дополнениями, получим матрицу

$$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -5\\ -2 & 6 & 10\end{pmatrix};$$

г) разделим элементы матрицы C на определитель $|B|$. Получим обратную матрицу

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку. Если перемножить матрицы B и B^{-1}, должна получиться единичная матрица E.

$$B\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -5\\ -2 & 6 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Вычислить $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}^n$.

Решение. Положим $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = A$. Тогда $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = A$; $A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^5 = A^4 \cdot A = A^2 \cdot A = A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Вообще, при $n = 2k$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, при $n = 2k-1$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{2k-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Вычислить $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

Решение. Положим $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = A$. Тогда $A^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$;

$$A^3 = A^2 \cdot A = \lambda \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} \lambda & 3 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Предположим, что

$$A^n = \lambda^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & n \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad (A)$$

тогда

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \lambda^{n-1} \begin{pmatrix} \lambda & n \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^{n-1} \begin{pmatrix} \lambda^2 & (n+1)\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda^n \begin{pmatrix} \lambda & n+1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что из справедливости формулы (A) для n-ой степени матрицы A следует справедливость такой же формулы для (n+1)-ой степени матрицы A. Следовательно, по принципу математической индукции формула (A) справедлива при любом n.

Пример 4. Даны матрицы $A = (3 \quad 2)$ и $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицы AB и BA.

Решение. Матрицы AB должны иметь столько строк, сколько A, и столько столбцов, сколько у B. Следовательно, в ответе должна получиться одноэлементная матрица:

$$AB = (3 \quad 2)\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = (7).$$

Аналогично найдем $BA = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cdot(3 \quad 2) = \begin{pmatrix}1\cdot3 & 1\cdot2\\3\cdot3 & 3\cdot2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\9 & 6\end{pmatrix}$.

Пример 5. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\3 & -1 & 2\end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\3 & 0 & 1 & 2\\2 & 4 & 5 & 0\end{pmatrix}$. Найти AB и BA.

Решение. $AB = \begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\3 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\3 & 0 & 1 & 2\\2 & 4 & 5 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 4 & 1 & 2\\4 & 11 & 9 & -2\end{pmatrix}$

Произведение BA не определено, т.к. число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

Пример 6. Дана матрица $A = \begin{pmatrix}5 & 2\\3 & 2\end{pmatrix}$. Найти матрицу A^{-1}.

Решение. 1 способ:

а) Найдем определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix}5 & 2\\3 & 2\end{vmatrix} = 4.$$

б) Составим транспонированную матрицу: $A' = \begin{pmatrix}5 & 3\\2 & 2\end{pmatrix}$.

в) Заменим элементы матрицы A' их алгебраическими дополнениями:

$$C = \begin{pmatrix}2 & -2\\-3 & 5\end{pmatrix}$$

г) Запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\-\frac{3}{4} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}.$$

2 способ: Пусть $A^{-1} = \begin{pmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{pmatrix}$. Т.к. $A\cdot A^{-1} = E$, то есть, $\begin{pmatrix}5 & 2\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, то для определения неизвестных x_1, x_2, y_1, y_2 получаем системы:

$$\begin{cases}5x_1+2x_2=1,\\3x_1+2x_2=0,\end{cases}\quad \begin{cases}5y_1+2y_2=0,\\3y_1+2y_2=1.\end{cases}$$

Решая их,найдем: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{3}{4}$, $y_1=-\frac{1}{2}$, $y_2=\frac{5}{4}$.

Следовательно, $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}$.

<u>Пример 7.</u> Найти матрицу, обратную для $A=\begin{pmatrix}0&1&1&\dots&1\\1&0&1&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&1&1&\dots&0\end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u> Применим второй способ нахождения обратной матрицы.

Пусть $A^{-1}=\begin{pmatrix}x_1&y_1&\dots&t_1\\x_2&y_2&\dots&t_2\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_n&y_n&\dots&t_n\end{pmatrix}$. Тогда $\begin{pmatrix}0&1&\dots&1\\1&0&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&\dots\\1&1&\dots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&y_1&\dots&t_1\\x_2&y_2&\dots&t_2\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_n&y_n&\dots&t_n\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}$. Для определения неизвестных $x_k, y_k, \dots, t_k$ $(k=1,2,\dots,n)$ получаем системы уравнений:

$$\begin{cases}x_2+x_3+\dots+x_n=1\\x_1+x_3+\dots+x_n=0\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\x_1+x_2+\dots+x_{n-1}=0\end{cases},\quad \begin{cases}y_2+y_3+\dots+y_n=0\\y_1+y_3+\dots+y_n=1\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\y_1+y_2+\dots+y_{n-1}=0\end{cases},\dots,\quad \begin{cases}t_2+t_3+\dots+t_n=0\\t_1+t_3+\dots+t_n=0\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\t_1+t_2+\dots+t_{n-1}=1\end{cases}$$

Для решения 1-ой системы сложим все ее уравнения. Получим $(n-1)\cdot(x_1+x_2+\dots+x_n)=1$, откуда $x_1+x_2+\dots+x_n=\frac{1}{n-1}$. Вычитая из этого уравнения поочередно все уравнения системы, найдем:

$$x_1=\frac{1}{n-1}-1=\frac{2-n}{n-1};\ x_2=x_3=\dots=x_n=\frac{1}{n-1}.$$

Аналогично решаются остальные системы. Для второй системы имеем

$$y_2=\frac{2-n}{n-1},\ y_1=y_3=\dots=y_n=\frac{1}{n-1}.$$

Для последней системы

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_{n-1} = \frac{1}{n-1},\ t_n = \frac{2-n}{n-1}.$$

Остается записать обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2-n & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 2-n \end{pmatrix}.$$

Пример 8. Найти значение многочлена $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $P(A) = 2A^2 - 3A + 4E = 2\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 & 33 \\ 33 & 24 \end{pmatrix}$.

Пример 9. Доказать, что $(A+B)C = AC + BC$, где A, B и C – квадратные матрицы одного порядка.

Доказательство. Положим $A=(a_{ij})$, $B=(в_{ij})$, $C=(c_{ij})$. Тогда

$(A+B)C = ((a_{ij}) + (в_{ij})) \cdot (c_{ij}) = (a_{ij} + в_{ij}) \cdot (c_{ij}) = ((a_{i1} + в_{i1}) \cdot (c_{1j}) + (a_{i2} + в_{i2}) \cdot (c_{2j}) + \ldots + (a_{in} + в_{in}) \cdot (c_{nj})) = ((a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \ldots + a_{in}c_{nj}) + (в_{i1}c_{1j} + в_{i2}c_{2j} + \ldots + в_{in}c_{nj})) = (a_{ij}) \cdot (c_{ij}) + (в_{ij}) \cdot (c_{ij}) = AC + BC$, что и тр.

Пример 10. Доказать, что, если $AB \neq BA$, то $(A-B)^3 \neq A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$, а если $AB = BA$, то $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$.

Доказательство. Т.к. для операции умножения матриц имеет место свойство дистрибутивности, то матричные многочлены перемножаются по тем же правилам, что и обычные многочлены. Следовательно,

$(A-B)^3 = (A-B)^2(A-B) = (A^2-AB-BA+B^2) \cdot (A-B) = A^3 - ABA - BA^2 + B^2A - A^2B + AB^2 + BAB - B^3 \neq A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$.

Если же $AB = BA$, то $ABA = A^2B = BA^2$, $BAB = B^2A = AB^2$ и тогда, после приведения подобных членов, получим

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3.$$

Пример 11. Найти все матрицы, перестановочные с $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Пусть матрица $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ перестановочна с матрицей А. Тогда $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, а следовательно,

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 = 7x_1 + 5y_1 \\ 7y_1 - 3y_2 = -3x_1 - 2y_2 \\ 5x_1 - 2x_2 = 7x_2 + 5y_2 \\ 5y_1 - 2y_2 = -3x_2 - 2y_2 \end{cases}$$

Нужно найти все решения этой системы. Т.к. первое уравнение этой системы совпадает с 4-м, то она равносильна системе:

$$\begin{cases} 3x_2 = -5y_1 \\ x_1 + 3y_1 - y_2 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 - 5y_2 = 0 \end{cases}$$

Если из 1-го уравнения значение $x_2 = -\frac{5}{3}y_1$ подставить в 3- е уравнение системы, то получится 2-ое уравнение. Следовательно, последняя система равносильна следующей системе

$$\begin{cases} 3x_2 = -5y_1 \\ x_1 + 3y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$$

Из этой системы: $y_1 = -\frac{3}{5}x_2$ $y_2 = x_1 - \frac{9}{5}x_2$.

Положим $x_1 = u$, $x_2 = -5v$, $y_1 = 3v$, $y_2 = u + 9v$, где u и v-произвольные числа.

Подставляя x_1, x_2, y_1, y_2 в искомую матрицу X, получим общий вид матриц, перестановочных с А:

$$X = \begin{pmatrix} u & 3v \\ -5v & u+9v \end{pmatrix}.$$

Пример 12. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Обе части данного уравнения умножим слева на матрицу $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$. В результате получим

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Пример 13. Матричным методом решить систему

$$\begin{cases} 3x+2y-z=6 \\ x-y+3z=2 \\ 2x-3y+4z=0 \end{cases}$$

Решение. Положим $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Тогда данная система будет равносильна одному матричному уравнению AX = B. Его решение есть матрица $X = A^{-1}B$. В нашем случае

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 20.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ 2 & 14 & -10 \\ -1 & 13 & -5 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ 2 & 14 & -10 \\ -1 & 13 & -5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $X = A^{-1}B = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ 2 & 14 & -10 \\ -1 & 13 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Матрица X, состоящая из неизвестных, найдена. Отсюда x = 1, y = 2, z = 1.

II. Ранг матрицы

Пример 1. Вычислить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 10 & 2 & 7 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 23 & -18 & 2 \end{pmatrix}$$

методом окаймляющих миноров.

Решение. Т.к. матрица имеет отличные от 0 элементы, а также 3 строки и 5 столбцов, то ее ранг не меньше 1 и не больше 3.

1) Находим минор 2-го порядка, $\neq 0$; нетрудно видеть, что

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \neq 0.$$

2) Вычисляем окаймляющие его миноры 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 10 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 13 \\ 5 & 1 & 23 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & -3 \\ 1 & 23 & -18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 13 & -11 \\ 0 & 26 & -22 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 23 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & 1 \\ 1 & 26 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, все окаймляющие минор $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ миноры 3-го порядка равны 0. Следовательно, ранг данной матрицы r = 2.

Пример 2. Вычислить методом элементарных преобразований ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \\ 13 & 3 & -1 & 9 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Очевидно, что ранг данной матрицы не меньше 1 и не больше 4. Будем приводить данную матрицу к ступенчатой путем элементарных преобразований. Для этого, в первую очередь, от элементов 4-ой строки отнимем элементы 2-ой:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \\ 13 & 3 & -1 & 9 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

(после того, как получены одинаковые 4-я и 5-я строки, мы вычли из 5-ой строки 4-ю.) Отнимем теперь из элементов 4-ой строки соответствующие элементы 1-ой и 3-ей строк:

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -1 & 11 \\ 12 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

(здесь к элементам 1-го и 4-го столбцов прибавлены элементы 2-го столбца, умноженные соответственно на 2 и 3).

Теперь к элементам 1-го, 2-го, 4-го столбцов прибавим элементы 3-го столбца, умноженные соответственно на 7, 2 и 11; будем иметь:

$$\to\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to$$

Умножив 1-й столбец полученной матрицы на $\frac{1}{12}$, 4-й – на $\frac{1}{7}$ и вычитая затем из 1-го столбца последний, получим

$$\to\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to$$

Переставляя 1-й столбец на последнее место, прибавляя затем к1-му столбцу новой матрицы 3-й, умноженный на –2, и умножая затем 1-ю и 2-ю строки на –1, получим ступенчатую матрицу

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to$$

Ранг этой матрицы, а следовательно, и исходной, очевидно, равен 3.

Замечание. Нулевые строки и столбцы можно отбрасывать сразу по мере их появления в результате применения элементарных преобразований.

На дом:

Задача №1.

Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) A+B, б) A+B-C, с) 3A-4B+5C, г) $\alpha A+\beta B+\gamma C$.

№2.

Перемножить данные матрицы

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$,

2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

4) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

6) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача №3.

Выполнить над матрицами действия:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^2$, 2) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$, 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$,

4) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$

Задача №4.

Найти $f(A)$, если а) $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$; б) $f(x) = x^2 - x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача №5.

Доказать, что каждая матрица 2-го порядка $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению $x^2 - (a + d) + (ad - bc) = 0$.

Задача №6.

Найти все матрицы, перестановочные с матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача №7.

Найти все матрицы 2-го порядка,

а) квадраты которых равны нулевой матрице,

б) квадраты которых равны единичной матрице.

Задача №8.

Пользуясь теоремой об определителе произведения двух матриц, перемножить определители:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Задача №9.

Для следующих матриц найти обратные:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Задача №10.

Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, б) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

в) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$,

е) $\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 18 & 12 & 9\\ 23 & 15 & 11\end{pmatrix}$

Задача №11.

Матричным методом решить следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases}5x-2y=4\\ 2x+3y=13\end{cases}$, б) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1\\ 2x_1-x_2+2x_3=-4\\ 4x_1+x_2+4x_3=-2\end{cases}$,

в) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6\\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4\end{cases}$

Задача №12.

Указать ранги следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$; б) (7); в) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

Задача №13.

Как может измениться ранг матрицы, если приписать к ней

а) один столбец;

б) две строки?

Задача №14.

Вычислить ранги следующих матриц методом окаймляющих миноров:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 10 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Задача №15.</u>

Вычислить ранг следующих матриц при помощи элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.

<u>Задача №16.</u>

Найти значения λ, при которых матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет наименьший ранг. Чему равен ранг при найденных λ и чему он равен при других значениях λ?

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания для практических занятий

для студентов-заочников

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = b_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Чтобы решить систему (1), следует:

1)Выяснить, совместна данная система или нет. С этой целью нужно вычислить ранг r_1 матрицы данной системы и r_2 ее расширенной матрицы. Если $r_1 = r_2$, то система совместна; если $r_1 \neq r_2$, то система решений не имеет (т.е. несовместна). В последнем случае вопрос о решении системы отпадает.

Совместная система линейных уравнений имеет единственное решение, т.е. является определенной, если ранг r_1 матрицы А этой системы равен числу n неизвестных. Если $r_1 < n$, то система имеет бесконечно много решений (и называется неопределенной).

2)Если система совместна, то находят один из миноров М порядка r_1 матрицы А, $\neq 0$. Затем берут те r_1 уравнений системы (1), в которых находится минор М, а остальные отбрасывают (они будут следствиями взятых r_1 уравнений). Те r_1 неизвестных, коэффициенты которых входят в минор М, называют главными и оставляют слева; остальные называют свободными и переносят в главную часть. Т.о., получается система r_1 уравнений с r_1 главными неизвестными, решения которой однозначно выражаются через остальные неизвестные.

3)Из составленной системы r_1 уравнений выражают r_1 главных неизвестных через свободные неизвестные. Совокупность полученных равенств называют общим решением системы. Придавая свободным неизвестным произвольные числовые значения, можно найти сколь угодно много конкретных решений, называемых частными решениями. Система (1) считается решенной, если найдено ее общее решение.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

<u>Решение 1.</u> Выясним, совместна ли данная система. С этой целью вычислим ранги матрицы данной системы и ее расширенной матрицы методом элементарных преобразований. Для матрицы А имеем:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

(здесь к элементам последней строки прибавлены элементы первой, умноженные на –2, и элементы второй, умноженные на -1)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(к элементам второй строки прибавлены элементы первой, умноженные на –3, и элементы третьей строки). Поскольку у полученной мятрицы имеется минор второго порядка, не равный нулю, и две чисто нулевые строки, то ясно, что ранг r_1 матрицы А равен 2; $r_1=2$.

Вычислим теперь ранг r_2 расширенной матрицы $\bar{A}$. Так как

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то $r_2 = 2$ (элементарные преобразования матрицы $\tilde{A}$ выполняются точно так же, как и матрицы А).

Итак $r_1 = r_2 = 2$. Система совместна

2. Составляем систему относительно главных неизвестных. Замечаем, что минор $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2 первого и третьего уравнений, отличен от нуля. Поэтому отбрасываем второе и четвертое уравнения (как следствия остальных) и оставляем первое и третье уравнения, в которых члены с неизвестными x_3, x_4, x_5 переносим в правую часть:

$$x_1 + x_2 = 7 - x_3 - x_4 - x_5\,;$$

$$x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5\,.$$

Неизвестные x_1 и x_2 у нас главные; неизвестные x_3, x_4, x_5 – свободные.

3. Разрешим последнюю систему относительно x_1 и x_2. Второе уравнение сразу дает искомое выражение x_2 через x_3, x_4, x_5. Подставляя x_2 из второго уравнения в первое, найдем x_1. Т.о., общее решение данной системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5. \end{cases}$$

Придавая неизвестным x_3, x_4, x_5 произвольные числовые значения, можно получить сколь угодно частных решений системы. Так, например, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ $x_1 = 16$, $x_2 = 23$ является частным.

Пример 2. При каких значениях параметра λ система

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение,

б) неопределенна (т.е. имеет бесконечно много решений),

в) противоречива (несовместна)?

Решение. 1 способ.

Определим ранг $r(\lambda)$ матрицы $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ системы в зависимости от λ.

Заметим, что при $\lambda=0$ матрица A имеет вид $A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и приводится элементарными преобразованиями к матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Следовательно, ее ранг при $\lambda=0$ $r(0)=3$.

Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & 1 \\ 1-\lambda^2 & 1-\lambda & \lambda \end{pmatrix} \to$$

(к элементам первого и второго столбцов прибавлены элементы третьего столбца, умноженные соответственно на $-\lambda$ и -1).

При $\lambda \neq 1$ элементы первого и второго столбцов можно умножить на $\frac{1}{1-\lambda}$, что приведет к следующему результату:

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1+\lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2+\lambda & 0 & 2+\lambda \\ 1+\lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix} \to (*)$$

(к элементам второй строки прибавлены элементы первой и третьей строк). Предполагая $\lambda \neq -2$ и умножая элементы второй строки на $\frac{1}{2+\lambda}$, получим

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1+\lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1+\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

(к элементам третьего столбца прибавлены элементы первого, умноженные на -1). Прибавляя теперь к элементам первого столбца соответственно элементы второго, умноженные на -(1 + λ), будем иметь:

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, при $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -2$ матрица A(λ) имеет ранг r(λ) = 3.

При $\lambda = 1$ матрица A(λ) принимает вид:

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, ранг матрицы A(1) равен 1.

При λ=-2 матрица A(-2) → матрица (*). при λ=-2, т.е.

$$A(-2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы равен 2.

$$\text{Т.о., r(}\lambda\text{)} = \begin{cases} 3 \text{ если } \lambda \neq 1, \lambda \neq 2, \\ 2 \text{ если } \lambda = -2, \\ 1 \text{ если } \lambda = 1. \end{cases}$$

Определим ранг R(λ) расширенной матрицы $\tilde{A}(\lambda)$ этой системы в зависимости от λ. Имеем

$$\widetilde{A}(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1-\lambda^2 & 0 & 1-\lambda & \lambda \\ 1-\lambda^3 & 1-\lambda^2 & \lambda-\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}\to$$

(к элементам первого, второго и третьего столбцов прибавили элементы четвертого столбца, умноженные соответственно на $-\lambda$, -1 и -1). Рассматривая случай $\lambda\neq 1$ и умножая элементы первого, второго и третьего столбцов на $\frac{1}{1-\lambda}$, получим матрицу

$$\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1+\lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 1+\lambda+\lambda^2 & 1+\lambda & 1-\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1+\lambda & -\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}\to$$

(здесь мы к элементам первого столбца прибавили элементы второго и четвертого столбцов, умноженные на -1). Прибавим теперь к элементам третьего столбца элементы первого, умноженные на -1, а затем к элементам второго столбца элементы третьего. Будем иметь

$$\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ранг 3. Значит ранг $\widetilde{A}(\lambda)$ при $\lambda\neq 1$ также равен 3.

При $\lambda=1$ матрица $\widetilde{A}(\lambda)$ принимает вид

$$B(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, имеет ранг, равный 1.

Итак, ранг расширенной матрицы $R(\lambda)=\begin{cases} 3, & если\ \ \lambda\neq 1 \\ 1, & если\ \ \lambda=1 \end{cases}$

Ранги матриц $A(\lambda)$ и $\widetilde{A}(\lambda)$ совпадают при $\lambda\neq -2$. Следовательно, при $\lambda\neq -2$ данная система совместна. При $\lambda\neq -2$ и $\lambda\neq 1$ ранги обеих матриц равны числу неизвестных, а следовательно, в этом случае система имеет единственное решение. При $\lambda = -2$ ранги матриц $A(\lambda)$ и $\widetilde{A}(\lambda)$ не совпадают: система противоречива. При $\lambda = 1$ система совместна (все ее уравнения совпадают с первым) и имеет бесконечно много решений, это будут всевозможные тройки чисел (x, y, 1-x-y), где x и y – любые числа.

2 способ.

Будем решать данную систему методом алгебраического сложения и в процессе решения рассматривать различные случаи для λ. Сложив все три уравнения системы, получим

$$(2+\lambda)(x+y+z) = 1+\lambda+\lambda^2 \; (**).$$

а) Пусть $\lambda \neq -2$. Тогда

$$x+y+z = \frac{1+\lambda+\lambda^2}{2+\lambda} \; (***).$$

Вычитая из полученного уравнения (***) первое уравнение исходной системы, будем иметь

$$(1-\lambda)\cdot x = \frac{1+\lambda+\lambda^2}{2+\lambda} - 1.$$

Если $\lambda \neq 1$, то

$$x = \frac{1+\lambda+\lambda^2}{(2+\lambda)(1-\lambda)} - \frac{1}{1-\lambda} = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}.$$

Аналогично, при $\lambda \neq -2$ и $\lambda \neq 1$ находим y и z:

$$y = \frac{1}{\lambda+2}\,; \quad z = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\,.$$

Т.о., при $\lambda \neq -2$ и $\lambda \neq 1$ система имеет единственное решение. Если $\lambda = 1$, то исходная система вырождается в одно уравнение:

$$x+y+z=1$$

и имеет бесконечно много решений:

$$x = 1-u-v\,, \quad y = u, \quad z = v,$$

от двух произвольных параметров u и v.

б) Пусть $\lambda = -2$. В этом случае уравнение (**) принимает вид

$$0 \cdot (x + y + z) = 3$$

и никакими значениями неизвестных не удовлетворяется. Система противоречива.

Заметим, что второй способ оказался более простым.

Система линейных уравнений (1) называется однородной, если свободные члены всех ее уравнений равны нулю, т.е. если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Т.к. в данной системе число уравнений меньше числа неизвестных, то система имеет ненулевые решения, а значит, бесконечно много решений.

Нетрудно убедиться в том, что ранг матрицы $r=2$. Замечаем, что минор 2-го порядка из коэффициентов 1-го и 2-го уравнений при неизвестных x_3 и x_4 отличен от 0. Действительно,

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отбрасывая 3-е уравнение (как следствие первых двух) и выражая x_3 и x_4 из системы первых двух уравнений через x_1 и x_2 , получим общее решение данной системы:

$$x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2; \qquad x_4 = \frac{7}{2}x_1 - 7x_2.$$

Замечание. Часто для записи общего решения все неизвестные данной системы выражают через некоторые вспомогательные параметры. Так, положив $x_1 = 2u$, $x_2 = v$, общее решение данной системы мы можем записать в целом виде:

$$x_1 = 2u,\ x_2 = v,\ x_3 = -5u + 5v,\ x_4 = 7(u-v),$$

где u и v- произвольные числа.

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное нулевое решение:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Определение. Если $(x_1, x_2, .., x_n)$ и $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ – два любые решения некоторой системы, то суммой этих решений называется система чисел $(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_n + x'_n)$.

Определение. Произведением решения $(x_1, x_2, .., x_n)$ линейной системы на число λ называется система чисел $(\lambda x_1, \lambda x_2, .., \lambda x_n)$.

Определение. Однородная система уравнений называется соответствующей для данной неоднородной системы, если она получена из данной неоднородной системы заменой ее свободных членов нулями.

Оказывается, что решения линейной неоднородной и соответствующей ей однородной системы связаны следующим образом:

1)Сумма любого решения неоднородной линейной системы и любого решения соответствующей ей однородной системы является решением данной неоднородной системы.

2)Разность двух любых решений неоднородной линейной системы является решением соответствующей однородной системы.

Пример 5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} 4x - y + 3z = 6, \\ 3x + 2y - z = 4. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что частным решением данной системы является система чисел x = y = z = 1. Найдем общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} 4x - y + 3z = 0, \\ 3x + 2y - z = 0. \end{cases}$$

Выражая x и y через z, получим

$$x = -\frac{5}{11}z, \quad y = \frac{13}{11}z.$$

Полагая z = 11t, запишем общее решение однородной системы в целом виде:

$$x = -5t, \quad y = 13t, \quad z = 11t,$$

где t – любое число.

Т.к. общее решение неоднородной линейной системы равно сумме любого частного решения этой системы с общим решением соответствующей однородной системы, то для исходной системы

$$x = -5t + 1, \quad y = 13t + 1, \quad z = 11t + 1,$$

где t - произвольное число.

Последние равенства дают общее решение данной неоднородной системы.

Геометрический смысл линейной системы трех уравнений с тремя неизвестными

Пусть решается система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Каждое уравнение этой системы геометрически изображает плоскость в трехмерном пространстве. Решить систему- значит найти координаты общих точек данных плоскостей.

1)Система совместна. В этом случае ранг r_1 матрицы данной системы равен рангу r_2 расширенной матрицы этой системы: $r_1 = r_2$:

а) если $r_1 = r_2 = 3$, то определитель системы $\Delta \neq 0$.Система имеет единственное решение. Плоскости пересекаются в одной точке;

б) если $r_1 = r_2 = 2$, то одно из уравнений системы есть следствие остальных. Пусть для определенности это будет третье уравнение. Тогда первые два уравнения определяют прямую, через которую проходит третья плоскость. Следовательно, в этом случае все три плоскости пересекаются по одной прямой, а координаты каждой точки этой прямой дают нам решение системы;

в) если $r_1 = r_2 = 1$, то система равносильна одному уравнению, а два других есть следствия первого. Следовательно, в этом случае все три уравнения системы изображают одну и ту же плоскость. Координаты любой точки этой плоскости дают нам решение системы.

2)Система несовместна. В этом случае $r_1 < r_2$ и не существует ни одной общей точки, принадлежащей всем трем плоскостям этой системы одновременно:

а) Пусть $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Если среди данных плоскостей имеется пара параллельных, то данные три плоскости пересекаются по двум различным параллельным прямым. Если же среди данных плоскостей нет параллельных, то данные три плоскости пересекаются по трем различным параллельным прямым.

б) Заметим, что случай $r_1 = 1$, $r_2 = 3$ невозможен, т.к. при образовании расширенной матрицы к матрице системы добавляется единственный столбец, который может изменить ранг матрицы не больше чем на 1.

Пример 6. Доказать, что плоскости

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ x + y - z = 2 \\ 4x + y + z = 8 \end{cases}$$

пересекаются по одной прямой.

<u>Решение.</u> Вычислив ранги матрицы данной системы и ее расширенной матрицы, убедимся в том, что $r_1 = r_2 = 2$. Отсюда и следует, что данные плоскости пресекаются по одной прямой.

Пример 7. Доказать, что плоскости

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4, \\ x + y - z = 2, \\ 4x + y + z = 0 \end{cases}$$

пересекаются по трем различным параллельным прямым.

<u>Решение.</u> Т.к. определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, а минор $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq$ $\neq 0$, то ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ данной системы $r_1 = 2$.

Т.к. минор 3-го порядка $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -24$ расширенной матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ отличен от нуля, то $r_2 = 3$.

Отсюда следует, что данные плоскости не имеют ни одной общей точки. Заметив, что среди данных плоскостей нет параллельных (коэффициенты при неизвестных не пропорциональны), заключаем, что данные плоскости пересекаются по трем различным параллельным прямым.

О приложениях матричной алгебры

Мы видели, что с помощью матриц можно:

1) установить, совместна ли данная система линейных уравнений,

2) решать линейные системы алгебраических уравнений.

Этим, однако, не исчерпываются различные применения матриц. Например, матричную алгебру можно использовать для решения ряда экономических задач. Следующий пример показывает это.

Пример 8. Пять лабораторий института L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 преобрели электроизмерительные приборы: вольтметры, амперметры, омметры и тесторы. Количество приборов, закупленных лабораториями, задается следующей таблицей (матрицей)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} L_1, & L_2, & L_3, & L_4, & L_5 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 10 \\ 4 & 3 & 2 & 10 & 10 \\ 7 & 5 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{- количество вольтметров} \\ \text{- количество амперметров} \\ \text{- количество омметров} \\ \text{- количество тесторов} \end{array}$$

Цены приборов в рублях определяются матрицей $B = (5 \quad 6 \quad 8 \quad 12)$. Выяснить смысл матриц BA, AC, BAC, где

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение.</u> Перемножим матрицу B на матрицу A:

$$BA = (5 \quad 6 \quad 8 \quad 12) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 10 \\ 4 & 3 & 2 & 10 & 10 \\ 7 & 5 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (259 \quad 142 \quad 43 \quad 136 \quad 214)$$

Поскольку $259 = 5 \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 12 \cdot 7$, то первый элемент матрицы BA дает общую стоимость приборов, приобретенных лабораторией L_1. Вообще k-й элемент матрицы BA дает общую стоимость приборов, приобретенных лабораторией L_k ($k=\overline{1,5}$). Т.о., смысл матрицы BA состоит в том, что ее элементы указывают на стоимость приборов, купленных соответствующей лабораторией.

Найдем теперь произведение AC:

$$AC = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 10 \\ 4 & 3 & 2 & 10 & 10 \\ 7 & 5 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 27 \\ 29 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Ясно, что смысл матрицы AC состоит в том, что ее элементы указывают на количество приборов данного типа, приобретенных институтом.

Найдем произведение BAC:

$$BAC = (BA) \cdot C = (259 \quad 142 \quad 43 \quad 136 \quad 214) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (794).$$

Получилась одноэлементная матрица, единственный элемент 794 которой указывает на общую стоимость в рублях всех электроизмерительных приборов, приобретенных всеми лабораториями института. В этом и состоит смысл матрицы BAC.

<u>На дом:</u>

Задача №1.

Решить следующие системы уравнений или установить их несовместность:

$$1)\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

Задача №2.

Исследовать следующие системы и найти их решения в зависимости от значений параметров:

$$1)\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2. \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

Задача №3.

Найти общие решения следующих однородных систем уравнений:

$$1)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Задача №4.

Найти общие решения систем

$$а)\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 5, \\ 2x - 3y + 5z = 4. \end{cases}$$

$$б)\begin{cases} 4x - y + 3z = 7, \\ 5x + 3y - 7z = -2, \end{cases}$$

как суммы их частных решений с общими решениями соответствующих однородных систем.

Задача №5.

1) Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три точки (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) лежали на одной прямой.

2) Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы 4 точки (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3), (x_4,y_4,z_4) лежали в одной плоскости.

Задача №6.

Что можно сказать о пересечении следующих трех плоскостей?

а) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + 2y + 2z = 3 \\ 6x + 3y + 3z = 5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y - 2z = 4 \\ 2x - 2y - 4z = 8 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + 3y + 4z = 5 \\ x + 4y + 5z = 6 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 5x + y + z = 3. \end{cases}$

Учебное издание

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания

Состовитель *Прокофьев Леонтий Николаевич*

Редактор Н. С. Куприянова

Корректор Т. И. Шелокова

Подписано в печать18.08.99 г. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л 2,79.Усл. кр.- отт2,91 . Уч.- изд. л.3,0.
Тираж 200 экз. Заказ

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королева
443086Самара, Московское шоссе, 34.

ИПО Самарского аэрокосмического университета.
443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151.