

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра общей и теоретической физики

## АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

Методические указания  
для студентов 3 курса

Самара  
Издательство "Самарский университет",  
1996

**Составители:**

доцент, канд. физ.-мат. наук А.П.Мартыненко;

доцент, канд. физ.-мат. наук А.Г.Пузырный;

ст. преп., канд. физ.-мат. наук В.А.Салеев

**Ответственный редактор** доцент, канд. физ.-мат. наук А.А.Бирюков

**Рецензент** доцент, канд. физ.-мат. наук С.В.Талалов

© А.П.Мартыненко, А.Г.Пузырный, В.А.Салеев, 1996

# Содержание

1	ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. ФОРМУЛА ПЛАНКА	4
2	КОРПУСКУЛЯРНЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ	9
3	МОДЕЛЬ АТОМА РЕЗЕРФОРДА-БОРА	13
4	ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ	19
5	УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА	24
6	ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ ПОЛЕ. АТОМ ВОДОРОДА	32
7	СПЕКТРЫ. ЭЛЕКТРОННАЯ ОБОЛОЧКА АТОМА	38
8	АТОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ	44
9	ЯДЕРНЫЕ МОДЕЛИ	53
10	ЗАКОНЫ РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА	65
11	АЛЬФА- и БЕТА-РАСПАДЫ	71
12	ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЕ ЯДЕР. ВНУТРЕННЯЯ КОНВЕРСИЯ. ЭФФЕКТ МЕССБАУЭРА	77
13	ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ	82
14	ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ	88

# 1 ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. ФОРМУЛА ПЛАНКА

## СЕМИНАР 1

### ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. ФОРМУЛА ПЛАНКА

#### Литература

1. Шпольский Э. В. Атомная физика. Т.1. М.: Наука, 1984.
2. Матвеев А. Н. Атомная физика. М.: Наука, 1989.
3. Сивухин Д. В. Атомная и ядерная физика. Часть 1. М.: Наука, 1986.

1. Медный шарик радиуса  $r=10,0$  мм с абсолютно черной поверхностью поместили в откачанный сосуд, температура стенок которого поддерживается близкой к абсолютному нулю. Начальная температура шарика  $T_0 = 300$  К. Через какое время его температура уменьшится в  $n=1,50$  раза? Удельная теплоемкость меди  $c = 0,38$  Дж/(г · К).

#### Решение

Потери энергии шарика на излучение в единицу времени определим через энергетическую светимость абсолютно черного тела:

$$P = MS,$$

где  $M$ -энергетическая светимость,  $S$ -площадь поверхности шарика.

Из определения теплоемкости  $dQ/dT = cm$ . Учитывая, что  $dQ = -Pdt$  (знак минус соответствует потери энергии шариком на излучение), получаем  $-MSdt = cmdT$ . Так как стенки сосуда имеют температуру, близкую к абсолютному нулю, шарик не получает энергию из окружающей среды.

По закону Стефана-Больцмана  $M = \sigma T^4$ . После подстановки и интегрирования с учетом начальных условий окончательно имеем:

$$t = cpr(n^3 - 1)/9\sigma T_0^3,$$

где  $\rho$  - плотность меди. Подстановка численных значений дает ответ задачи  $t=1,6$  ч.

2. Тепловое излучение в полости можно представить как совокупность осцилляторов (собственных колебаний) с различными частотами. Полагая, что распределение осцилляторов по энергиям  $E$  подчиняется закону Больцмана, найти при температуре  $T$  среднюю энергию осциллятора с частотой  $\omega$ , если энергия каждого осциллятора может иметь:

- любые значения (непрерывный спектр);
- только дискретные значения  $n\hbar\omega$ , где  $n$ -целое число.

### Решение

Вычисляем среднее значение энергии по стандартным формулам теории вероятностей. В случае непрерывного распределения

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{\infty} E e^{-E/kT} dE}{\int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE} = kT,$$

в случае дискретного спектра

$$\langle E \rangle = \frac{\sum n\hbar\omega e^{-n\hbar\omega/kT}}{\sum e^{-n\hbar\omega/kT}} = \frac{\sum n\hbar\omega e^{-\alpha n\hbar\omega}}{\sum e^{-\alpha n\hbar\omega}},$$

где  $\alpha = 1/kT$ . Здесь суммирование проводится по  $n$  от 0 до  $\infty$ . Последнее выражение можно преобразовать к более простому виду следующим образом:

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \alpha} (\ln \sum e^{-\alpha n\hbar\omega}) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(1/(1 - e^{-\alpha\hbar\omega})) = \hbar\omega / (e^{-\hbar\omega/kT} - 1).$$

### Аудиторные задачи

- Воспользовавшись формулой Вина ( $u_{\omega} = \omega^3 f(\omega/T)$ ), показать, что:
  - наиболее вероятная частота теплового излучения  $\omega_m \sim T$ ;
  - энергетическая светимость  $M \sim T^4$ .

2. В результате расширения Вселенной после Гигантского Взрыва возникшее электромагнитное излучение начало остывать. В настоящее время это излучение (его называют реликтовым) имеет вид теплового

излучения с максимумом испускательной способности при длине волны  $\lambda_m = 1,07$  мм. Какова температура этого излучения?

Ответ:  $T = b/\lambda_m = 2,7$  К, где  $b$  — постоянная в законе смещения Вина.

3. При переходе от одной температуры к другой площадь под кривой функции  $u_\lambda = f(\lambda)$  уменьшилась в  $n=13$  раз. Как и во сколько раз изменилась при этом длина волны, соответствующая максимуму функции  $f(\lambda)$ ?

Ответ: увеличилась в  $n^{1/4} = 1,9$  раза.

4. Солнечный спектр достаточно близок к спектру теплового излучения с наиболее вероятной длиной волны  $\lambda_m = 0,48$  мкм. Найти мощность теплового излучения Солнца. Оценить время, за которое его масса уменьшится на один процент за счет теплового излучения. Масса Солнца  $2,0 \cdot 10^{30}$  кг, его радиус  $7,0 \cdot 10^8$  м.

5. Зная, что давление теплового излучения  $p = u/3$ , где  $u$  — плотность энергии излучения, найти:

а) давление теплового излучения во внутренних областях Солнца, где температура  $T = 1,6 \cdot 10^7$  К;

б) температуру  $T$  полностью ионизированной водородной плазмы плотностью  $\rho = 0,10$  г/см<sup>3</sup>, при которой давление теплового излучения равно кинетическому давлению частиц плазмы (при высоких температурах вещество подчиняется уравнению состояния для идеальных газов).

Ответ: а)  $p = 4\sigma T^4/3c = 1,6 \cdot 10^4$  ГПа;

б)  $T = (3\rho k/2\sigma m)^{1/3} = 1,9 \cdot 10^7$  К, где  $m$  — масса атома водорода.

6. Вин предложил следующую формулу для распределения энергии в спектре теплового излучения  $u_\omega = A\omega^3 e^{-a\omega/T}$ , где  $a = 7,64 \cdot 10^{-12}$  К · с. Найти с помощью этой формулы при  $T = 2000$  К:

а) наиболее вероятную частоту излучения;

б) среднюю частоту излучения.

7. Определить число собственных поперечных колебаний струны длиной  $l$  в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$ , если скорость распространения колебаний равна  $v$ . Считать, что колебания происходят в одной плоскости.

Ответ:  $dZ = (l/\pi v)d\omega$ .

8. Вычислить с помощью формулы Планка числовое значение постоянной  $b$  в законе смещения Вина.

Ответ:  $b = 2\pi c^2 h/x_0 k = 0,29 \text{ см}\cdot\text{К}$ , где  $x_0$  — корень уравнения  $1 - x/5 = e^{-x}$ ,  $x_0 \approx 5$ .

### Домашние задачи

1. Показать с помощью формулы Вина, что в спектре распределения энергии теплового излучения по длинам волн:

а) наиболее вероятная длина волны  $\lambda_m \sim 1/T$ ;

б) максимальная спектральная плотность энергии пропорциональна  $T^5$ .

2. Найти наиболее вероятную длину волны в спектре теплового излучения с энергетической светимостью  $M=5,7 \text{ Вт/см}^2$ .

Ответ:  $\lambda_m = b(\sigma/M)^{1/4} = 2,9 \text{ мкм}$ .

3. Имеются две полости 1 и 2 с малыми отверстиями одинакового радиуса  $r=5,0 \text{ мм}$  и абсолютно отражающими наружными поверхностями. Полости отверстиями обращены друг к другу, причем расстояние между этими отверстиями  $l=100 \text{ мм}$ . В полости 1 поддерживают температуру  $T_1 = 1250 \text{ К}$ . Найти установившуюся температуру в полости 2 имея в виду, что абсолютно черное тело является ламбертовским излучателем ( $L=M/\pi$ , где  $L$  — яркость отверстия полости).

Ответ:  $T_2 = T_1 \sqrt{r/l} = 2,8 \cdot 10^2 \text{ К}$ .

4. Воспользовавшись условием аудиторной задачи 6, найти:

а) наиболее вероятную длину волны излучения;

б) среднюю длину волны излучения.

Ответ: а)  $\lambda_m = 2\pi ca/5T = 1,44$  мкм;

б)  $\langle \lambda \rangle = 2\pi ca/3T = 2,40$  мкм.

5. Найти число собственных поперечных колебаний прямоугольной мембраны площадью  $S$  в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$ , если скорость распространения колебаний  $v$ .

Ответ:  $dZ = (S/2\pi v^2)\omega d\omega$ .

6. Вычислить с помощью формулы Планка мощность излучения единицы поверхности абсолютно черного тела в интервале длин волн, отличающихся не более чем на  $\pi=0,50\%$  от наиболее вероятной длины волны при  $T=2000$  К.

Ответ:  $P = \{8\pi^2 c^2 \hbar T^4 n\} / \{b^4 (e^{2\pi c \hbar / kb} - 1)\} = 0,60$  Вт/см<sup>2</sup>.

7. Определить с помощью формулы Планка числовое значение постоянной Стефана-Больцмана.

Ответ:  $\sigma = (\pi^2/60)k^4/c^2\hbar^3 = 5,66 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>).

8. Определить с помощью формулы Планка температуру теплового излучения, средняя длина волны которого  $\langle \lambda \rangle = 2,67$  мкм.

Ответ:  $T = 2,33c\hbar/k \langle \lambda \rangle = 2000$  К.



# 2 КОРПУСКУЛЯРНЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

## СЕМИНАР 2

### КОРПУСКУЛЯРНЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

#### Литература

1. Матвеев А. Н. Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989.
2. Шпольский Э. В. Атомная физика. М.: Наука, 1984.
3. Сивухин Д. В. Атомная и ядерная физика. Часть 1. М.: Наука, 1986.

1. Лазер излучает в импульсе длительностью  $t=0,13$  мс узкий пучок света энергией  $E=10$  Дж. Найти среднее за время  $t$  давление такого пучка света, если его сфокусировать в пятнышко диаметром  $d=10$  мкм на поверхности, перпендикулярной пучку, с коэффициентом отражения  $\rho = 0,50$ .

#### Решение

Пусть энергия одного фотона  $\varepsilon = \hbar\omega$ , тогда число фотонов в импульсе  $N = E/\hbar\omega$ , число отраженных фотонов  $N_1 = \rho N$ , поглощенных  $N_2 = N - N_1 = N(1 - \rho)$ . Изменение импульса отраженного фотона  $\Delta p_1 = 2\hbar\omega/c$ , поглощенного  $\Delta p_2 = \hbar\omega/c$ . Изменение импульса всех фотонов в пучке  $\Delta P = \Delta p_1 N_1 + \Delta p_2 N_2 = E(1 + \rho)$ . По второму закону Ньютона средняя сила, действующая на поверхность,  $\langle F \rangle = \Delta P/t$ , а среднее давление  $\langle P \rangle = \langle F \rangle/S$ , где  $S$ —площадь пятнышка. После подстановки и упрощения получаем ответ задачи:

$$\langle P \rangle = 4E(1 + \rho)/\pi d^2 ct = 5 \text{ МПа.}$$

2. Фотон с энергией превышающей энергию покоя электрона в  $n=1,5$  раза испытал лобовое столкновение с покоящимся электроном, который находится в однородном магнитном поле. В результате электрон отдачи стал двигаться по окружности радиуса  $r=2,9$  см. Найти напряженность магнитного поля  $H$ .

## Решение

Столкновение фотона со свободным покоящимся электроном приводит к изменению длины волны рассеянного фотона  $(\lambda - \lambda_0) = 2\lambda_c \sin^2(\theta/2)$  (эффект Комптона  $\lambda_c = 2\pi\hbar/mc$  — комптоновская длина волны частицы). При лобовом столкновении  $\theta = \pi$ . Используя соотношение де Бройля для импульса частицы  $p = 2\pi\hbar/\lambda$ , найдем импульс фотона после столкновения  $p = 2\pi\hbar/(\lambda_0 + 2\lambda_c)$ . Импульс фотона до взаимодействия найдем из начальной энергии  $p_0 = m\tau c$ , где  $m$  — масса электрона. Импульс электрона найдем из соответствующего закона сохранения, учитывая то, что здесь рассматривается случай лобового соударения  $p_e = p + p_0 = 2m\tau c(1+n)/(1+2n)$ . Для того, чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо записать условие движения частицы с импульсом  $p$  по окружности в магнитном поле  $p/r = eH/c$ , откуда и находим напряженность магнитного поля:

$$H = \frac{2m\tau^2 c^2 n(1+n)}{er(1+2n)} = 1,1 \text{ кЭ},$$

где  $e$  — заряд электрона.

### Аудиторные задачи

1. Показать, исходя из корпускулярных представлений, что импульс, переносимый плоским световым потоком  $\Phi$ , не зависит от его спектрального состава.

2. Короткий импульс света с энергией  $E=7,5$  Дж падает в виде узкого пучка на зеркальную пластинку с коэффициентом отражения  $\rho = 0,60$ . Угол падения  $\theta = 30^\circ$ . Найти импульс, переданный пластинке.

Ответ:  $p = E(1 + \rho^2 + 2\rho \cos(2\theta))^{1/2}/c = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ г} \cdot \text{см}/\text{с}$ .

3. Объяснить наличие коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра. Вычислить значение константы  $C$  в соотношении  $\lambda_{\min} = C/V$ , если  $\lambda$  — в  $\text{Å}$ ;  $V$  — в кВ.

4. При некотором максимальном значении задерживающей разности потенциалов фототок с поверхности лития, освещаемого светом с длиной волны  $\lambda_0$ , прекращается. Изменив длину волны света в  $n=1,5$  раза, установили, что для прекращения тока необходимо увеличить задерживающую разность потенциалов  $m=2,0$  раза. Вычислить  $\lambda_0$ .

Ответ:  $\lambda_0 = (2\pi\hbar c/A)(m - n)/(m - 1) = 0,26$  мкм, где  $A$ -работа выхода электронов из лития.

5. Показать с помощью законов сохранения, что свободный электрон не может поглотить фотон.

6. При облучении вещества жестким монохроматическим рентгеновским излучением обнаружено, что максимальная кинетическая энергия комтоновских электронов  $T_{max} = 0,44$  Мэв. Определить длину волны падающего излучения.

Ответ:  $\lambda = 2\pi\hbar((1 + 2mc^2/T_{max})^{1/2} - 1)/mc = 0,020$  Å.

7. Найти энергию налетающего фотона, если известно, что при рассеянии под углом  $\theta = 60^\circ$  на покоящемся свободном электроне последний приобрёл кинетическую энергию  $T = 0,450$  Мэв.

Ответ:  $\hbar\omega = (T/2)\{1 + [1 + 2mc^2/T \sin^2(\theta/2)]^{1/2}\} = 0,94$  Мэв.

### Домашние задачи

1. Над центром круглой абсолютно зеркальной пластинки радиусом  $r = 10$  см находится точечный источник света мощностью  $N = 60$  Вт. Расстояние между источником и пластинкой  $l = 10$  см. Найти с помощью корпускулярных представлений силу светового давления, которую испытывает пластинка. Рассмотреть случаи  $r \ll l$  и  $r \gg l$ .

Ответ:  $F = N/2c(1 + l^2/r^2) = 5 \cdot 10^{-3}$  дин.

2. Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если известно, что после увеличения напряжения на рентгеновской трубке в 2,0 раза она изменилась на  $0,50 \text{ \AA}$ .

Ответ:  $1,0 \text{ \AA}$ .

3. Медный шарик, удаленный от других тел, облучают светом с длиной волны  $0,20 \text{ мкм}$ . До какого максимального потенциала зарядится шарик?

Ответ:  $1,7 \text{ В}$ .

4. Найти максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов, вырванных с поверхности лития электромагнитным излучением, напряженность электрической составляющей которого меняется во времени по закону  $E = a(1 + \cos \omega t) \cos \omega_0 t$ , где  $a$  - постоянная,  $\omega = 6,0 \cdot 10^{14} \text{ рад/с}$ ,  $\omega_0 = 3,60 \cdot 10^{15} \text{ рад/с}$ .

Ответ:  $T_{\max} = \hbar(\omega + \omega_0) - A = 0,38 \text{ эВ}$       $A$  - работа выхода.

5. Фотон с импульсом  $60 \text{ кэВ/с}$ , испытав комптоновское рассеяние под углом  $120^\circ$  на покоящемся свободном электроне, вырвал затем из атома молибдена электрон, энергия связи которого  $20,0 \text{ кэВ}$ . Найти кинетическую энергию фотоэлектрона.

Ответ:  $T = pc/[1 + 2(p/mc)\sin^2(\theta/2)] - E_{\text{св}} = 31 \text{ кэВ}$ .

6. На какой угол рассеялся  $\gamma$ -квант с энергией  $0,80 \text{ МэВ}$  в результате столкновения с покоящимся свободным электроном, если скорость электрона отдачи оказалась равной  $0,60 \text{ с}$ ?

Ответ:  $29^\circ$ .

7. При столкновении с релятивистским электроном фотон рассеялся под углом  $60^\circ$ , а электрон остановился. Найти:

а) комптоновское смещение длины волны рассеянного электрона;

б) кинетическую энергию электрона до столкновения, если энергия налетающего фотона равна энергии покоя электрона.

Ответ: а)  $\lambda_0 - \lambda = (4\pi\hbar/mc)\sin^2(\theta/2) = 0,012 \text{ \AA}$ ; б)  $0,17 \text{ МэВ}$ .

# 3 МОДЕЛЬ АТОМА РЕЗЕРФОРДА-БОРА

## СЕМИНАР 3

### МОДЕЛЬ АТОМА РЕЗЕРФОРДА-БОРА

#### Литература

1. Матвеев А.Н. Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989.
2. Гольдин Л.Д., Новикова Г.И. Введение в квантовую физику. М.: Наука, 1988.
3. Сивухин Д.В. Атомная и ядерная физика. Часть 1. М.: Наука, 1986.
4. Иродов И.Е. Задачи по квантовой физике. М.: Высшая школа, 1991.

1. Найти вероятность того, что  $\alpha$ -частица с кинетической энергией  $T_\alpha = 3.0$  МэВ при прохождении свинцовой фольги толщиной  $d = 1.5$  мкм рассеется в интервале углов  $60^\circ - 90^\circ$ .

#### Решение

Воспользуемся формулой Резерфорда, которая задает относительное число частиц, рассеянных в элементарном телесном угле  $d\Omega$  под углом  $\theta$  к первоначальному направлению их движения:

$$\frac{dN}{N} = n \left( \frac{q_1 q_2}{4T_\alpha} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Здесь  $n$  — число ядер мишени на единицу площади ее поверхности,  $q_1 = 2e$  — заряд  $\alpha$ -частицы,  $q_2 = Ze$  — заряд ядра свинца. Величину  $n$  легко найти из условий задачи:  $n = N_A \rho d / \mu$ , где  $N_A$  — число Авагадро,  $\mu$  — молярная масса свинца,  $\rho$  — плотность свинца.  $dP(\Omega) = dN/N$  есть вероятность рассеяния в элементарный телесный угол. Чтобы найти вероятность рассеяния в конечный интервал углов, необходимо проинтегрировать дифференциальную вероятность по  $d\Omega = d\phi \sin(\theta) d\theta$ . Учитывая, что

$$\int \frac{\sin(\theta) d\theta}{\sin^4(\theta/2)} = -\frac{2}{\sin^2(\theta/2)},$$

получили

$$P = \pi n \left( \frac{Ze^2}{T_\alpha} \right)^2 \left( \frac{1}{\sin^2(\theta_1/2)} - \frac{1}{\sin^2(\theta_2/2)} \right) = 5 \cdot 10^{-4}.$$

2. Найти для водородоподобных ионов радиус  $n$ -ой боровской орбиты и скорость электрона на ней, кинетическую энергию электрона  $T_e$  и его энергию связи  $\mathcal{E}$  в основном состоянии, а также потенциал ионизации  $\phi_i$ .

Решение

Электрон движется в плоскости, его движение определяется координатами  $r$  и  $\phi$ . Функция Лагранжа электрона имеет вид:

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{e^2 Z}{r}.$$

При движении по окружности постоянного радиуса  $\dot{r} = 0$  и  $p_\phi = \partial L / \partial \dot{\phi} = mvr$ , где  $v = r\dot{\phi}$ . Используем правило квантования Бора для круговых орбит:

$$p_\phi = pr = n\hbar, \quad \text{где } n = 1, 2, \dots$$

Полная энергия электрона в водородоподобном ионе равна

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2 Z}{r}.$$

Из второго закона Ньютона следует, что импульс и радиус орбиты электрона связаны соотношением

$$\frac{e^2 Z}{r^2} = ma_{\text{цс}} = m \frac{v^2}{r} = \frac{p^2}{mr}.$$

Используя правило квантования Бора, получаем:

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{me^2 Z}, \quad v_n = \frac{e^2 Z}{\hbar n} \quad \text{и} \quad T_n = \frac{me^4 Z^2}{2\hbar n^2}.$$

Энергия связи электрона в основном состоянии  $\mathcal{E} = |E_1| = T_1$ , а потенциал ионизации  $\phi_i = \mathcal{E}/e$ .

3. С какой минимальной скоростью должен двигаться атом водорода, чтобы в результате неупругого лобового соударения с другим, покоящимся атомом водорода, один из них испустил фотон? До соударения оба атома находились в основном состоянии.

### Решение

Запишем законы сохранения энергии и импульса при неупругом соударении движущегося атома с покоящимся:

$$\vec{P} = \vec{P}', \quad \frac{\vec{P}^2}{2M} = \frac{\vec{P}'^2}{2M} + \Delta E,$$

где  $\vec{P}$  - импульс налетающего атома,  $\vec{P}'$  - суммарный импульс атомов после неупругого удара,  $\Delta E$  - энергия возбуждения одного из атомов,  $M \gg \Delta E$  - масса атома водорода. Отсюда нетрудно найти связь между скоростью налетающего атома и энергией возбуждения:

$$v = \frac{P}{M} = \sqrt{\frac{4\Delta E}{M}}.$$

Минимальная энергия возбуждения, достаточная для излучения фотона, равна

$$\Delta E_{min} = \hbar\omega_{min} = \hbar R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} \hbar R,$$

где  $R$  - постоянная Ридберга. Таким образом, минимальная скорость атома, достаточная для того, чтобы при соударении излучился фотон, есть

$$v_{min} = \sqrt{\frac{3\hbar R}{M}}.$$

4. Согласно постулату Бора-Зоммерфельда, при периодическом движении частицы в потенциальном поле должно выполняться следующее правило квантования:

$$\oint p dq = 2\pi\hbar n,$$

где  $q$  и  $p$  – обобщенные координата и импульс,  $n$  – целые числа. Найти с помощью этого правила разрешенные значения энергии  $E$  частицы массы  $m$ , которая движется:

- а) в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$  с бесконечно высокими стенками,  
 б) по окружности радиуса  $r$ .

Решение

а)  $\oint p dq = 2\pi\hbar n$ , но с другой стороны  $\oint p dq = 2 \int_{-l/2}^{l/2} p dq = 2p \int_{-l/2}^{l/2} dq = 2pl$   
 следовательно,  $p_n = \frac{\pi\hbar n}{l}$  и  $E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ml^2}$ .

б) При движении по окружности постоянного радиуса обобщенная координата  $q = \phi$ , обобщенный импульс  $p = p_\phi = pr$ , где  $p$  – модуль импульса частицы:

$$\oint p_\phi d\phi = pr \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi pr, \text{ т.е. } p_n = \frac{\hbar n}{r} \text{ и } E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2mr^2}.$$

### Аудиторные задачи

1. Найти минимальное расстояние, на которое протон с кинетической энергией  $T_p = 0.87$  МэВ приблизится к покоящемуся ядру атома ртути при рассеянии на угол  $\theta = 90^\circ$ . Сравнить это расстояние с соответствующим значением прицельного параметра  $b$ .

Ответ:  $r_{\min} = b(1 + \sin(\theta/2)) / \cos(\theta/2) = 2.4 \cdot b = 0.16$  нм.

2. В спектре некоторых водородоподобных ионов известны длины волн трех линий, принадлежащих одной и той же серии: 99.2, 108.5 и 121.5 нм. Какие спектральные линии можно предсказать с помощью этих линий?

Ответ: 541, 1014 и 1157 нм.



3. Энергия связи электрона в атоме гелия равна  $\mathcal{E} = 24.6$  эВ. Найти энергию, необходимую для удаления обоих электронов из этого атома.

Ответ:  $E = \mathcal{E} + 4\hbar R = 79$  эВ.

4. Найти с помощью постулата Бора-Зоммерфельда разрешенные значения энергии  $E$  частицы массы  $m$ , которая движется по круговой орбите в центральном поле, где потенциальная энергия частицы  $U(r) = -\alpha/r$ , где  $\alpha > 0$ .

Ответ:  $E_n = -m\alpha^2/2\hbar^2 n^2$ .

### Домашние задачи

1. Узкий пучок  $\alpha$ -частиц с кинетической энергией  $T_\alpha = 1.0$  МэВ падает нормально на золотую фольгу толщиной  $d = 1$  мкм. Поток частиц  $I = 3.6 \cdot 10^4$  сек $^{-1}$ . Найти число  $\alpha$ -частиц, рассеянных фольгой в течение  $t = 2.0$  мин под углами, превышающими  $\theta_0 = 60^\circ$ .

Ответ:  $\Delta N = Itn\pi(Ze^2/T_\alpha)^2 \text{ctg}^2(\theta_0/2)$ .

2. Атомарный водород возбуждают на  $n$ -ый энергетический уровень. Определить, сколько линий испускает водород, если  $n = 10$ .

Ответ:  $N = n(n-1)/2 = 45$ .

3. Вычислить скорость электронов, вырываемых электромагнитным излучением с длиной волны  $\lambda = 18.0$  нм из ионов гелия  $He^+$ , находящихся в основном состоянии.

Ответ:  $v = \sqrt{(2\hbar/m)(2\pi/\lambda - RZ^2)} = 2.6 \cdot 10^6$  м/сек.

4. С какой минимальной скоростью должны сближаться ион  $He^+$  и атом водорода, чтобы испущенный ионом гелия фотон, соответствующий головной линии серии Бальмера, смог возбудить атом водорода из основного состояния? Использовать точную формулу доплеровского эффекта.

Ответ:  $\omega'/\omega = 27/20$  и  $v = 0.29c$ .

5. Найти для позитрония (система из электрона и позитрона, вращающаяся вокруг общего центра масс): а) расстояние между частицами в основном состоянии; б) потенциал ионизации и первый потенциал возбуждения; в) постоянную Ридберга и длину волны резонансной линии.

Ответ: а)  $1.06 \cdot 10^{-8}$  см, б) 6.8 и 5.1 В, в)  $1.034 \cdot 10^{16}$  сек<sup>-1</sup>, 243 нм.

6. Найти с помощью постулата Бора-Зоммерфельда разрешенные значения энергии  $E$  частицы массы  $m$ , которая движется в одномерном потенциальном поле  $U(x) = kx^2/2$ , где  $k > 0$ .

Ответ:  $E_n = n\hbar\sqrt{k/m}$ .

# ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

## СЕМИНАР 4

### ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

#### Литература

1. Шпольский Э. В. Атомная физика. Т.1. М.: Наука, 1984.
2. Матвеев А. Н. Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989.
3. Гольдин Л. Д., Новикова Г. И. Введение в квантовую физику. М.: Наука, 1988.

1. Узкий пучок моноэнергетических электронов падает под углом скольжения  $\theta = 30^\circ$  на естественную грань монокристалла алюминия. Расстояние между соседними кристаллическими плоскостями, параллельными этой грани монокристалла,  $d = 2,0 \text{ \AA}$ . При некотором ускоряющем напряжении  $V_0$  наблюдали максимум зеркального отражения. Найти  $V_0$ , если известно, что следующий максимум зеркального отражения возник при увеличении ускоряющего напряжения в  $n=2,25$  раза.

#### Решение

Согласно гипотезе де Бройля электронный пучок обладает волновыми свойствами и испытывает дифракционное отражение от кристаллической решетки. Угловое положение максимума дифракционного отражения определяется условием Вульфа-Бреггов:  $2d\sin(\theta) = i\lambda$ , где  $i$  - целое число,  $\lambda$  - длина волны де Бройля. Ее найдем, воспользовавшись соотношениями де Бройля и выражением для энергии электрона:

$$p = \hbar k; \quad E = \hbar\omega; \quad k = 2\pi/\lambda; \quad E = p^2/2m.$$

Откуда  $\lambda = 2\pi\hbar/(2meV_0)^{1/2}$ . Здесь учтено, что электрон получает энергию за счет ускорения в электрическом поле напряжения  $V_0$  ( $E = eV_0$ , где  $e$  - заряд электрона). Запишем условие Вульфа-Бреггов для двух случаев, описанных в условии задачи:

$$d\sin(\theta) = i\pi\hbar/(2meV_0)^{1/2}; \quad d\sin(\theta) = (i+1)\pi\hbar/(2mneV_0)^{1/2}.$$

После преобразований находим:

$$V_0 = \pi^2 \hbar^2 / 2med^2 (n^{1/2} - 1)^2 \sin^2(\theta) = 0,15 \text{ кэВ.}$$

2. Исходя из соотношения неопределенностей, оценить энергию связи электрона в основном состоянии атома водорода и соответствующее расстояние электрона от ядра.

### Решение

Для оценки, исходя из соотношения неопределенности Гейзенберга, воспользуемся следующей связью между радиусом и импульсом:  $rp = \hbar$  ( $\Delta r \sim r$ ;  $\Delta p \sim p$ ). Энергия электрона в атоме  $E = p^2/2m - e^2/r = \hbar^2/2mr^2 - e^2/r$ . Из условия минимума энергии  $dE/dr = 0$  находим  $r = \hbar/me^2 = 0,5 \cdot 10^{-8}$  см и  $E = me^4/2\hbar^2 = 13,6$  эВ.

### Аудиторные задачи

1. Определить кинетическую энергию электронов, падающих на диафрагму с двумя узкими щелями, если известно, что на экране, отстоящем от диафрагмы на расстоянии  $l=75$  см, расстояния между соседними максимумами  $\Delta x$  и между щелями  $d$  равны соответственно 7,5 и 25 мкм.

Ответ:  $T = (2/m)(\pi\hbar l/d\Delta x)^2 = 24$  эВ.

2. Пучок электронов с кинетической энергией  $T=10$  кэВ проходит через тонкую поликристаллическую фольгу и образует систему дифракционных колец на экране, отстоящем от фольги на  $l=10,0$  см. Найти межплоскостное расстояние, для которого максимум отражения третьего порядка соответствует кольцу с радиусом  $r = 1,6$  см.

Ответ:  $d = \pi\hbar k/(2mT)^{1/2} \sin\theta = 2,3 \text{ \AA}$ , причем  $\text{tg}2\theta = r/l$ ,  $k$ -волновое число.

3. Показать, что измерение  $x$ -координаты частицы с помощью узкой щели шириной  $b$  вносит неопределенность в их импульсы  $\Delta p_x$  такую, что  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$ .

4. Оценить неопределенность скорости электрона в атоме водорода, полагая размер атома порядка  $10^{-8}$  см. Сравнить полученную величину со скоростью электрона на первой боровской орбите.

Ответ:  $\Delta v \sim 10^6$  м/с;  $v = 2,2 \cdot 10^6$  м/с.

5. Частица с массой  $m$  движется в одномерном потенциальном поле  $U(x) = kx^2/2$  (гармонический осциллятор с частотой  $\omega = (k/m)^{1/2}$ ). Оценить минимально возможную энергию частицы.

Ответ:  $E_{\min} \approx \hbar\omega$ .

6. Свободный электрон в начальный момент был локализован в области размером  $l = 10^{-8}$  см. Оценить промежуток времени, за который ширина соответствующего волнового пакета увеличится в  $n = 10^2$  раз.

Ответ:  $t \approx m(nl)^2/2\hbar = 10^{-12}$  с.

7. Частица с массой  $m$  движется в прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками. Ширина ямы  $l$ . Найти значения энергии частицы, имея в виду, что возможны лишь такие состояния, для которых в яме укладывается целое число дебройлевских полуволин (образуется система стоячих волн).

Ответ:  $E_n = n\pi^2\hbar^2/2ml^2$ , где  $n=1,2, \dots$

### Домашние задачи

1. Найти с помощью распределения Максвелла функцию распределения молекул по дебройлевским длинам волн, а также наиболее вероятную длину волны молекул водорода при  $T = 300^0$  К.

Ответ:  $f(\lambda) \sim \lambda^{-4} \exp(-2\lambda_m^2/\lambda^2)$ ,  $\lambda_m = \pi\hbar/(mkT)^{1/2} = 0.90 \text{ \AA}$ .

2. Пучок электронов с кинетической энергией  $T=180$  эВ падает нормально на поверхность монокристалла никеля. В направлении, составляющем угол  $\alpha = 55^\circ$  с нормалью к поверхности, наблюдается максимум отражения четвертого порядка. Найти межплоскостное расстояние, соответствующее этому отражению.

Ответ:  $d = \pi \hbar k / (2mT)^{1/2} \cos(\alpha/2) = 2,1 \text{ \AA}$ .

3. С учетом преломления электронных волн в кристалле формула Вульфа-Бреггов имеет вид:  $2d(n^2 - \cos^2\theta)^{1/2} = k\lambda$ , где  $d$  - межплоскостное расстояние,  $n$  - показатель преломления,  $\theta$  - угол скольжения,  $k$  - порядок отражения,  $\lambda$  - длина волны де Бройля.

а). Вывести эту формулу, считая, что отражающие плоскости параллельны поверхности монокристалла.

б). Найти внутренний потенциал монокристалла серебра, если пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов  $V=85$  эВ, образует максимум второго порядка при зеркальном отражении от кристаллических плоскостей с  $d = 2,04 \text{ \AA}$  под углом скольжения  $\theta = 30^\circ$ .

Ответ: б)  $V_i = (\pi \hbar k)^2 / 2med^2 - V \sin^2\theta = 15$  эВ.

4. Оценить наименьшие ошибки, с которыми можно определить скорости электрона, протона и атома урана, локализованных в области размером 1 мкм.

Ответ:  $v_1 \sim 2 \cdot 10^4$  см/с;  $v_2 \sim 10$  см/с;  $v_3 \sim 5 \cdot 10^{-2}$  см/с.

5. Частица находится в одномерном потенциальном ящике размером  $l$  с бесконечно высокими стенками. Оценить силу давления частицы на стенки при минимально возможном значении энергии  $E_{min}$ .

Ответ:  $F \sim 2E_{min}/l$ .

6. Параллельный пучок атомов водорода со скоростью  $v = 1,2 \cdot 10^3$  м/с падает нормально на диафрагму с узкой щелью, за которой на расстоянии  $l=1,0$  м расположен экран. Исходя из соотношения неопределенностей,

оценить ширину щели, при которой эффективная ширина изображения на экране будет минимальной.

Ответ:  $d \approx (2\hbar l/mv)^{1/2} = 10^{-3}$  см.

7. Свободно движущаяся нерелятивистская частица имеет относительную неопределенность кинетической энергии порядка  $1,6 \cdot 10^{-4}$ . Оценить, во сколько раз неопределенность координаты частицы больше ее дебройлевской длины волны.

Ответ:  $2 \cdot 10^3$ .

# 5 УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

## СЕМИНАР 5

### УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

#### Литература

1. Матвеев А.Н. Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989.
2. Гольдин Л.Д., Новикова Г.И. Введение в квантовую физику. М.: Наука, 1988.
3. Сивухин Д.В. Атомная и ядерная физика. Часть 1. М.: Наука, 1986.
4. Иродов И.Е. Задачи по квантовой физике. М.: Высшая школа, 1991.

1. Частица с массой  $m$  находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ( $0 < x < l$ ). Найти:

- а) собственные значения энергии и нормированные собственные функции частицы,
- б) вероятность нахождения частицы с наименьшей энергией в области  $l/3 < x < 2l/3$ ,
- в) число энергетических уровней в интервале  $(E, E + dE)$ .

#### Решение

Одномерное стационарное уравнение Шредингера для частицы в потенциале  $U(x)$  имеет вид:

$$\Psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(x))\Psi(x) = 0.$$

Внутри ямы ( $0 < x < l$ )  $U(x) = 0$ , тогда уравнение Шредингера можно записать как

$$\Psi''(x) + k^2\Psi(x) = 0,$$

где  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ . Общее решение последнего уравнения хорошо известно:

$$\Psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx).$$



В силу того, что стенки потенциальной ямы абсолютно непроницаемые

$$\Psi(0) = \Psi(l) = 0.$$

Отсюда сразу находим:

$$B = 0, \quad A \sin(kl) = 0.$$

Так как  $A \neq 0$  (иначе имеем только тривиальное решение  $\Psi(x) = 0$ ),

$$\sin(kl) = 0.$$

Из последнего уравнения получаем условие квантования волнового вектора:

$$k_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, собственные значения энергии частицы квантуются:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} n^2.$$

Из условия нормировки квадрата модуля волновой функции нетрудно найти нормировочную константу  $A$ :

$$\int_0^l |\Psi(x)|^2 dx = 1 \quad \Rightarrow \quad A^2 = 1 / \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi x n}{l}\right) dx,$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Волновая функция основного состояния ( $n = 1$ ) имеет вид:

$$\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

Вероятность найти частицу в области  $l/3 < x < 2l/3$  дается выражением

$$P(l/3 < x < 2l/3) = \int_{l/3}^{2l/3} |\Psi(x)|^2 dx = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx,$$

$$P(l/3 < x < 2l/3) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0.609.$$

Если уровни расположены достаточно плотно, мы можем считать, что  $n$  принимает непрерывный ряд значений и

$$E(n) = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ml^2}.$$

Отсюда следует:

$$dE = \frac{\hbar^2 \pi^2}{ml^2} n dn,$$

и

$$\frac{dn}{dE} = \frac{l}{\hbar \pi} \sqrt{\frac{m}{2E}}.$$

2. Найти с помощью уравнения Шредингера энергию гармонического осциллятора с частотой  $\omega$  в стационарном состоянии:

$$\Psi(x) = Bx \exp(-\alpha^2 x^2),$$

где  $B$ ,  $\alpha$  — постоянные.

#### Решение

Одномерное стационарное уравнение Шредингера для частицы в потенциале  $U(x) = m\omega^2 x^2/2$  (гармонический осциллятор) имеет вид:

$$\Psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) \Psi(x) = 0.$$

Если  $\Psi(x) = Bx \exp(-\alpha^2 x^2)$ , то

$$\Psi''(x) = (-6\alpha^2 + 4\alpha^4 x^2) \Psi(x).$$

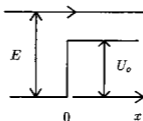
Подставляя  $\Psi''(x)$  в уравнение Шредингера и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  к нулю, получаем систему из двух уравнений:

$$-6\alpha^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0,$$

$$4\alpha^4 - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} = 0.$$

Решение данной системы дает  $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ .

3. Частица массы  $m$  падает на прямоугольный потенциальный барьер высотой  $U_0$  (см. рисунок). Энергия частицы равна  $E$ , причем  $E > U_0$ . Найти коэффициент отражения барьера  $R$  и коэффициент прозрачности  $D$ . Убедиться, что значения этих коэффициентов не зависят от направления движения падающей частицы.



Решение

Одномерное стационарное уравнение Шредингера для частицы в потенциале  $U(x)$  имеет вид:

$$\Psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(x))\Psi(x) = 0.$$

Если  $U(x) = U_0 = \text{Const}$ , тогда уравнение Шредингера можно записать как

$$\Psi''(x) + k^2\Psi(x) = 0,$$

где  $k^2 = 2m(E - U_0)/\hbar^2$ . В нашем случае решение уравнения Шредингера имеет вид:

$$x \leq 0, \quad \Psi_1(x) = a_1 \exp(ik_1x) + b_1 \exp(-ik_1x), \quad k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar,$$

$$x \geq 0, \quad \Psi_2(x) = a_2 \exp(ik_2x) + b_2 \exp(-ik_2x), \quad k_2 = \sqrt{2m(E - U_0)}/\hbar.$$

Пусть падающая слева направо волна характеризуется амплитудой  $a_1$ , тогда  $b_2 = 0$ . Коэффициенты  $D$  и  $R$  определяются через отношения плотностей потоков падающих, прошедших и отраженных от барьера частиц:

$$D = \frac{J_{\text{прош}}}{J_{\text{над}}}, \quad R = \frac{J_{\text{отр}}}{J_{\text{над}}}.$$

Поскольку  $J_k = \frac{\hbar k}{m} |a_k|^2$ , то

$$R = \frac{|b_1|^2}{|a_1|^2}, \quad D = \frac{k_2^2 |a_2|^2}{k_1^2 |a_1|^2}.$$

В силу условия непрерывности волновой функции и ее производной ( $\Psi_1(0) = \Psi_2(0)$ ,  $\Psi_1'(0) = \Psi_2'(0)$ ) получаем систему из двух уравнений, связывающих амплитуды  $a_1, a_2, b_1$ :

$$a_1 + b_1 = a_2,$$

$$k_1 a_1 - k_1 b_1 = k_2 a_2.$$

Решение системы дает:

$$a_2 = \frac{2 a_1 k_1}{k_1 + k_2}, \quad b_1 = -a_1 + \frac{2 a_1 k_1}{k_1 + k_2},$$

$$D = \frac{4 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}, \quad R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

Нетрудно проверить, что  $R + D = 1$ . Поскольку после замены  $k_1 \rightarrow -k_1$ ,  $k_2 \rightarrow -k_2$  выражения для  $R$  и  $D$  не меняются, то их величина не зависит от направления движения падающей волны.

### Аудиторные задачи

- Частица массы  $m$  находится в основном состоянии в одномерной потенциальной яме шириной  $l$  с бесконечно высокими стенками. Найти:
  - силу давления, которую оказывает частица на стенку;

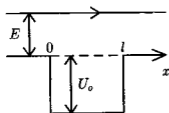
б) работу, которую необходимо совершить, чтобы медленно сжать яму в  $\eta$  раз.

$$\text{Ответ: } F = \pi^2 \hbar^2 / ml^3, \quad A = (\eta^2 - 1) \pi^2 \hbar^2 / 2ml^3.$$

2. Частица массы  $m$  находится в трехмерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Длина ребер ямы равна  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Найти собственные значения энергии частицы.

$$\text{Ответ: } E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right).$$

3. Частица массы  $m$  падает на прямоугольную потенциальную яму шириной  $l$  и глубиной  $U_0$  (см. рисунок). Энергия частицы вне ямы равна  $E$ . Найти коэффициент прозрачности ямы  $D$ .



$$\text{Ответ: } D = \frac{|a_3|^2}{|a_1|^2} = \left( 1 + \frac{U_0 \sin^2(k_0 l)}{4E(E + U_0)} \right)^{-1}.$$

4. С помощью формулы для коэффициента прозрачности  $D$  потенциального барьера  $U(x)$

$$D \approx \exp \left( -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U - E)} dx \right),$$

где  $x_1$  и  $x_2$  - координаты точек, между которыми  $U > E$ , найти вероятность прохождения частицы массы  $m$  и энергии  $E$  сквозь потенциальный барьер  $U(x) = U_0(1 - x^2/l^2)$ .

$$\text{Ответ: } D = \exp \left( -(\pi l / \hbar) \sqrt{2m/U_0} (U_0 - E) \right).$$

### Домашние задачи

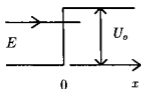
1. Частица массы  $m$  находится в одномерной потенциальной яме  $U(x) = U_0$  при  $|x| > a$ ,  $U(x) = 0$  при  $|x| \leq a$ . Найти энергию основного состояния, если на краях ямы  $\Psi$ -функция вдвое меньше, чем в середине ямы:  $\Psi(-a) = \Psi(a) = 0.5 \cdot \Psi(0)$ .

Ответ:  $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 18ma^2$ .

2. Зная собственные функции и собственные значения энергии квантового гармонического осциллятора, найти собственные значения энергии частицы массы  $m$ , движущейся в одномерном потенциальном поле  $U(x) = \kappa x^2/2$  при  $x > 0$  и  $U(x) = \infty$  при  $x \leq 0$ .

Ответ: волновые функции совпадают с волновыми функциями гармонического осциллятора для нечетных  $n$  и  $E_{n'} = \hbar\omega(2n' + 3/2)$ , где  $n' = 0, 1, 2, \dots$

3. Частица массы  $m$  падает слева на прямоугольный потенциальный барьер высотой  $U_0$  (см. рисунок). Энергия частицы  $E < U_0$ . Найти эффективную глубину проникновения частицы под барьер, т.е. расстояния от границы барьера до той точки, в которой плотность вероятности нахождения частицы уменьшается в  $e = 2.73$  раз.



Ответ:  $x_{eff} = 1/2k$ ,  $k = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$ .

4. С помощью формулы для коэффициента прозрачности  $D$  потенциального барьера  $U(x)$

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U - E)} dx\right),$$

где  $x_1$  и  $x_2$  - координаты точек, между которыми  $U > E$ , найти вероятность прохождения частицы массы  $m$  и энергии  $E$  сквозь потенциальный барьер  $U(x) = 0$  при  $x < 0$  и  $x > l$ ,  $U(x) = U_0(1 - x/l)$  при  $0 \leq x \leq l$ .

Ответ:  $D = \exp\left(-\frac{4l\sqrt{2m}(U_0 - E)^{3/2}}{3\hbar}\right)$ .

5. Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора с частотой  $\omega$  может быть приведено к виду

$$\Psi''(\xi) + (\lambda - \xi^2)\Psi(\xi) = 0,$$

где  $\xi = \alpha x$ ,  $\alpha$  - постоянная,  $\lambda$  - параметр. Имея в виду, что собственные значения параметра  $\lambda$  равны  $(2n + 1)$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , найти собственные значения энергии осциллятора.

Ответ:  $E = \hbar\omega(n + 1/2)$ .

6. Частица находится в основном состоянии в одномерном потенциальном поле  $U(x) \sim x^2$ . Какова вероятность пребывания ее вне классических границ поля?

Ответ:  $P = 0.157$

# 6 ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ ПОЛЕ. АТОМ ВОДОРОДА

## СЕМИНАР 6

### ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ ПОЛЕ. АТОМ ВОДОРОДА

#### Литература

1. Шпольский Э.В. Атомная физика. Т.1. М.: Наука, 1984.

2. Матвеев А.Н. Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989.

3. Собельман И.И. Введение в теорию атомных спектров. М.: Физматгиз, 1963.

4. Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике. М.: Наука, 1992.

1. Написать в сферических координатах уравнение Шредингера для электрона, движущегося в кулоновском поле неподвижного ядра  $Z$  (водородоподобная система).

1). Провести разделение данного уравнения на радиальную и угловую части.

2). Найти в явном виде зависимость волновой функции  $\psi$  от азимутального угла  $\phi$ .

#### Решение

Запишем уравнение Шредингера для электрона, движущегося в водородоподобном атоме:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 - \frac{Ze^2}{r} \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}),$$

где  $Ze$ -заряд ядра атома,  $\nabla^2$ -оператор Лапласа, который имеет следующий вид в сферических координатах:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \nabla_{\theta, \phi}^2;$$
$$\nabla_{\theta, \phi}^2 = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$



где  $\nabla_{\theta, \phi}^2$  - угловая часть оператора Лапласа.

Разделить переменные  $r, \theta, \phi$  можно, положив

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot Y(\theta, \phi). \quad (1)$$

Подставив данное выражение в уравнение Шредингера и обозначив постоянную разделения  $\lambda$ , найдем выражение для радиальной и угловой частей:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{r} \right) - \frac{\lambda}{r^2} \right] R = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0. \quad (3)$$

В угловом уравнении также можно разделить переменные  $\theta, \phi$ , положив:  $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ . Обозначив постоянную разделения в этом случае через  $m^2$ , получим уравнение, определяющее  $\Phi(\phi)$ :

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0, \quad (4)$$

откуда находим

$$\Phi(\phi) = A e^{im\phi}. \quad (5)$$

Из требования однозначности  $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$  следует, что  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Из условия нормировки  $(\Phi_l, \Phi_n) = \delta_{ln}$  получаем, что  $A = 1/\sqrt{2\pi}$ . В заключение приведем выражения нормированных волновых функций, описывающих движение электрона в атоме водорода:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta), \quad (6)$$

$$R_{nl}(r) = \left( \frac{Z}{na_0} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{4}{(n-l-1)!(n+l)!}} e^{-\rho/2} \rho^l Q_{n-l-1}^{(2l+1)}(\rho), \quad (7)$$

где  $\rho = 2Zr/na_0$ ,  $a_0$  - первый боровский радиус,

$$Q_k^{(2l+1)}(\rho) = e^\rho \rho^{-2l-1} \frac{d^k}{d\rho^k} (e^{-\rho} \rho^{2l+1+k}), \quad (8)$$

$$P_l^m(\xi) = \frac{1}{2^l l!} (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} (\xi^2 - 1)^l. \quad (9)$$

2. Найти поправку к уровням энергии водородоподобного атома за счет релятивистской зависимости массы частицы от скорости в первом порядке теории возмущений.

### Решение

Релятивистская поправка к функции Гамильтона заряженной частицы в электростатическом поле в классической теории согласно формуле

$$H = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} - e\phi(r) - mc^2 \approx \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{p}^4}{8m^3 c^2} - e\phi(r) \quad (10)$$

равна  $-\vec{p}^4/8m^3 c^2$ . Квантово-механическим обобщением этой поправки является оператор  $\hat{V} = -\hat{p}^4/8m^3 c^2$ , рассматриваемый как возмущение гамильтониана, который коммутирует с операторами  $\hat{L}^2, L_z$ . Поправка к уровням энергии, обусловленная взаимодействием  $\hat{V}$ , определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{n,l}^{(1)} &= \int \psi_{n,l,m}^{(0)*} \hat{V} \psi_{n,l,m}^{(0)} d^3r = \\ &= -\frac{1}{2mc^2} \langle n,l,m | \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} \right)^2 | n,l,m \rangle = -\frac{1}{2mc^2} \langle n,l,m | \hat{H}_0^2 + \hat{H}_0 \frac{Ze^2}{r} + \\ &\quad + \frac{Ze^2}{r} \hat{H}_0 + \left( \frac{Ze^2}{r} \right)^2 | n,l,m \rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $H_0$  - невозмущенный гамильтониан водородоподобного атома, а  $\psi_{n,l,m}^{(0)}$  его собственные функции:

$$\hat{H}_0 \psi_{n,l,m}^{(0)} = E_n^{(0)} \psi_{n,l,m}^{(0)}, \quad E_n^{(0)} = -\frac{m(Ze^2)^2}{2\hbar^2 n^2}. \quad (12)$$

После этого расчет поправки первого порядка сводится к вычислению двух матричных элементов:

$$\langle n,l,m | \frac{Ze^2}{r} | n,l,m \rangle = -2E_n^{(0)}, \quad \langle n,l,m | \frac{1}{r^2} | n,l,m \rangle = -\frac{4mE_n^{(0)}}{(2l+1)\hbar^3 n}. \quad (13)$$

Для расчета первого матричного элемента можно использовать теорему вириала, а для вычисления второго - следующую формулу:

$$\frac{\partial f_n(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle \psi_{f_n}(\lambda) | \frac{\partial \hat{f}}{\partial \lambda} | \psi_{f_n}(\lambda) \rangle. \quad (14)$$

где эрмитов оператор  $\hat{f}(\lambda)$  зависит от некоторого вещественного параметра  $\lambda$ , а  $f_n(\lambda)$  - собственное значение этого оператора (в качестве параметра необходимо выбрать  $l$ ).

В результате получаем

$$E_{n,l}^{(1)} = \left( \frac{Ze^2}{\hbar c} \right)^2 \left\{ -\frac{3}{4n^2} + \frac{2}{(2l+1)n} \right\} E_n^{(0)}. \quad (15)$$

Отсюда видно, что учет релятивистской поправки полностью снимает случайное вырождение уровней в кулоновском поле: уровень с данным  $n$  расщепляется на  $n$  компонент в соответствии с возможными значениями момента  $l=0,1,\dots, (n-1)$  для невозмущенного уровня.

### Аудиторные задачи

1. Электрон в атоме водорода находится в стационарном состоянии, описываемом сферически-симметричной волновой функцией  $\psi(r) = A(1+ar)e^{\alpha r}$ , где  $A, a, \alpha$  - постоянные. Найти:

а) постоянные  $a, \alpha$  и энергию электрона (с помощью уравнения Шредингера);

б) нормировочный коэффициент  $A$ .

Ответ: а)  $a = \alpha = -\frac{1}{2}r_1 = -\frac{me^2}{2\hbar^2}$ ,  $E = -\frac{me^4}{8\hbar^2}$ ;

б)  $A = (8\pi r_1^3)^{-1/2}$ ,  $r_1$  - первый боровский радиус.

2. Определить возможные собственные значения оператора  $L_x$  и их вероятности для системы, находящейся в состоянии  $\psi(\phi) = A \cdot \sin^2 \phi$ .

Ответ:  $0, +2\hbar, -2\hbar; \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ .

3. Возможные значения проекции момента импульса на произвольную ось равны  $m\hbar$ , где  $m=1, 1-1, \dots, -1$ . Имея в виду, что эти проекции равновероятны, а оси равноправны, показать, что в состоянии с

определенным значением  $l$  среднее значение квадрата момента импульса  $\langle L^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1)$ .

4. Вычислить расстояния, на которых радиальная часть вероятности местоположения электрона в атоме водорода имеет максимум в 2P- и 3D-состояниях, если известны радиальные части волновых функций в данных состояниях:

$$R_{2P}(r) = a_2 r e^{-\frac{r}{2r_1}}, \quad R_{3D}(r) = a_3 r^2 e^{-\frac{r}{3r_1}}, \quad (16)$$

где  $r_1$  — первый боровский радиус.

Ответ:  $r_{2P} = 4r_1$ ,  $r_{3D} = 9r_1$ .

5. Рассмотреть сверхтонкую структуру S-уровней водородоподобного атома, связанную с взаимодействием магнитных моментов электрона и ядра. Ядро имеет спин  $I$  и магнитный момент  $\mu_0$ , так что для него  $\hat{\mu} = \mu_0 \hat{I}/I$  (я рассматривается как точечная частица).

### Домашние задачи

1. Определить возможные собственные значения оператора  $L_z$  и их вероятности для системы, находящейся в состоянии  $\psi(\phi) = A(1 + \cos\phi)^2$ .

Ответ:  $0, \pm\hbar, \pm 2\hbar$ ;  $\frac{36}{70}, \frac{16}{70}, \frac{1}{70}$ .

2. Вычислить среднее значение квадрата момента импульса в состоянии  $\psi(\theta, \phi) = A \cdot \sin\theta \cos\phi$ .

Ответ:  $2\hbar^2$ .

3. Найти для 1S-электрона в атоме водорода

а) наиболее вероятное расстояние от ядра  $r_{\text{вер}}$  и вероятность нахождения электрона в области  $r < r_{\text{вер}}$ ;

б) вероятность нахождения его вне классических границ поля.

Ответ: а)  $r = r_1$  — первый боровский радиус; 32,3%; б) 23,8%.

4. Найти средний электростатический потенциал, создаваемый 1S-электроном в центре атома водорода.

Ответ:  $-\frac{e}{r_1}$ , где  $r_1$  - первый боровский радиус.

5. Вычислить в первом порядке теории возмущений сдвиг S-уровней водородоподобных атомов, обусловленные неточечностью ядра. Распределение заряда в ядре считать сферически симметричным. Оценить значение поправки, рассматривая ядро как равномерно заряженный шар радиуса  $R \approx 1.2 \times 10^{-13} A^{1/3}$  см,  $A \approx 2Z$ ,  $A$  - массовое число ядра.

# 7 СПЕКТРЫ. ЭЛЕКТРОННАЯ ОБОЛОЧКА АТОМА

## СЕМИНАР 7

### СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В АТОМЕ

#### Литература

1. Шпольский Э.В. Атомная физика. Т.1. М.: Наука, 1984.
2. Матвеев А.Н. Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989.
3. Собельман И.И. Введение в теорию атомных спектров. М.: Физматгиз, 1963.
4. Иродов И.Е. Сборник задач по атомной и ядерной физике. М.: Энергоатомиздат, 1984.

1. Выписать электронные конфигурации и с помощью правила Хунда найти основной терм атомов углерода С и азота N. Электронные конфигурации этих атомов соответствуют застройке электронных оболочек в нормальном порядке.

#### Решение

При заданном значении  $l$  состояния частицы в порядке возрастания ее энергии принято нумеровать главным квантовым числом  $n$ , принимающим значения  $l+1, l+2, \dots$ . Надо отметить, что последовательность возрастания уровней энергии у сложных атомов иная, чем у водорода. У водорода  $E$  зависит только от  $n$  и не зависит от  $l$ , причем всегда  $E_{n+1} > E_n$ . У сложных атомов часто имеет место другая последовательность уровней — энергия электрона в состоянии  $n, l+2$  больше, чем в состоянии  $n+1, l$ . Как правило, энергия электрона тем больше, чем больше сумма  $n+l$ .

О распределении электронов в атоме по состояниям с различными значениями  $n, l$  говорят как об электронной конфигурации. Задание электронной конфигурации, таким образом, требует перечисления значений  $n, l$  для всех электронов атома. Если имеется несколько электронов с одинаковыми значениями  $n, l$ , то это обозначают как  $(nl)^k$ , например,  $(3s)^2, (3p)^3$  и т.д. или просто  $3s^2, 3p^3$ .

Для частицы с отличным от нуля спином состояния с одинаковыми значениями  $E, l, m_l$  могут отличаться еще значениями  $z$ -компоненты спина  $m_s$ . Полная характеристика состояний электрона осуществляется заданием четырех чисел  $n, l, m_l, m_s$ , причем энергия определяется лишь первыми двумя. Всего имеется  $2(2l+1)$  состояний с одинаковыми значениями  $n, l$ , но различными  $m_l, m_s$ . Состояния с одинаковыми значениями  $n, l$  называются эквивалентными. Обычно говорят об эквивалентных электронах, подразумевая электроны, находящиеся в эквивалентных состояниях. Согласно принципу Паули, в каждом  $n, l, m_l, m_s$  состоянии не может находиться больше, чем один электрон. Таким образом, в атоме могут иметь одинаковые значения  $n, l$  не более  $2(2l+1)$  электронов. Совокупность  $2(2l+1)$  эквивалентных электронов называется замкнутой или заполненной оболочкой.

l	Оболочка	$N=2(2l+1)$
0	s-оболочка	2
1	p-оболочка	6
2	d-оболочка	10
3	f-оболочка	14

Иногда пользуются несколько другим определением оболочек:  $n=1$  K-оболочка (состояния 1s),  $n=2$  L-оболочка (состояния 2s, 2p),  $n=3$  M-оболочка (состояния 3s, 3p, 3d). Оболочки с  $n=4,5,6$  обозначаются N, O, P.

В приближении центрального поля энергия атома полностью определяется заданием электронной конфигурации, т.е. заданием значений  $n, l$  для всех электронов. Каждой электронной конфигурации  $n_1, l_1, n_2, l_2, \dots$  соответствуют  $2(2l_1 + 1), 2(2l_2 + 1), \dots$  состояний, отличающихся значениями квантовых чисел  $m_l, m_s$ , то есть взаимной ориентацией орбитальных моментов и спинов электронов. Отнесение всех этих состояний к одному и тому же энергетическому уровню атома возможно до тех пор, пока мы пренебрегаем той частью электростатического взаимодействия между электронами, которая не учитывается в приближении центрального поля, а также спин-орбитальным взаимодействием. Энергия взаимодействия электронов с ядром и энергия взаимодействия электронов друг с другом

имеют разные знаки, поэтому электростатические взаимодействия электронов приводят к сдвигу уровней энергии вверх. Эмпирически было установлено, что для основных конфигураций, содержащих эквивалентные электроны, электростатическое расщепление подчиняется правилам Хунда:

1) наименьшей энергией обладает уровень с наибольшим возможным для данной электронной конфигурации значением  $S$  и наибольшим (возможным при данном  $S$ ) значением  $L$ ;

2) для основного (нормального) уровня  $J = |L - S|$ , если подоболочка заполнена менее чем наполовину, и  $J = L + S$  в остальных случаях.

Уровни энергии, соответствующие определенным значениям  $L, S$ , называются спектральными термами, или просто термами. Для обозначения термов обычно используются заглавные буквы латинского алфавита:

$L=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	19
S	P	D	F	G	H	I	K	L	M	N

Рассмотрим заполнение электронных оболочек атома углерода, который имеет 6 электронов. На уровне с  $n=1$  могут находиться 2 электрона с нулевым орбитальным моментом, имеющие противоположную ориентацию спинов. Уровень с  $n=2$  включает электроны в состояниях с  $l=0$  и  $l=1$ . Число электронов, заполняющих этот уровень, равно  $2+6=8$ . Следовательно, этот уровень будет заполнен не полностью. Два электрона будут находиться в состоянии с  $n=2, l=0$ , и оставшиеся два электрона находятся в состоянии с  $n=2, l=1$ . При этом для основного состояния атома углерода в соответствии с правилами Хунда последние два электрона имеют полный спин, равный 1. Подоболочка с  $l=1$  заполнена менее чем наполовину, поэтому полный момент электронов равен  $J=0$ . Следовательно, для атома углерода электронная конфигурация имеет вид:  $1s^2, 2s^2, 2p^2$ , а основной терм -  ${}^3P_0$ .

Аналогично, для атома азота получим  $1s^2 2s^2 2p^3 ({}^4S_{3/2})$ .

2. Найти возможные типы термов атома, электронная конфигурация незаполненной подоболочки которого:

а)  $np^2$ ; б)  $nd^2$ .



## Решение

Из условия задачи в пункте а) на незаполненной подоболочке находятся два электрона, каждый из которых имеет орбитальный момент  $l=1$ . Все возможные термы можно получить на основании общего квантово-механического правила сложения моментов. При сложении орбитальных моментов электронов величина результирующего орбитального момента может принимать три значения:  $L=0, 1, 2$ , поэтому возможны три терма S, P, D. Составим таблицу возможных распределений электронов по квантовым состояниям (числам) с учетом принципа Паули.

$m_l$	$m_s$	$M_L$	$M_S$
0,0	1/2,-1/2	0	0
1,0	1/2,1/2		1
0,1	-1/2,-1/2	1	-1
	1/2,-1/2		0
	-1/2,1/2		0
-1,0	1/2,1/2		1
0,-1	-1/2,-1/2	-1	-1
	1/2,-1/2		0
	-1/2,1/2		0
-1,1	1/2,1/2	0	1
	-1/2,-1/2		-1
	1/2,-1/2		0
	-1/2,1/2		0
1,1	1/2,-1/2	2	0
-1,-1	1/2,-1/2	-2	0

Из этой таблицы следует, что в случае орбитального момента  $L=0,2$  (S,D- состояния) полный спин системы  $S=0$ . При  $L=1$  полный спин системы двух эквивалентных электронов  $S=1$ . Поэтому возможны следующие типы термов:  $^1S, ^1D, ^3P$ .

Аналогичные рассуждения в случае электронной конфигурации  $nd^2$  дают  $^1S, ^1D, ^1G, ^3P, ^3F$ .

### Аудиторные задачи

1.) Используя правила Хунда, найти основной терм атома, электронная конфигурация незаполненной подоболочки которого:

а)  $nd^2$  б)  $nd^3$ .

Ответ: а)  ${}^3F_2$ , б)  ${}^4F_{3/2}$ .

2.) Найти кратность вырождения основного состояния атома, электронная конфигурация незаполненной подоболочки которого  $nd^6$ .

Ответ: основной терм  ${}^5D_4$ . Кратность вырождения  $2J+1=9$ .

3. Выписать возможные термы атомов, содержащих, кроме заполненных оболочек:

а) два электрона, s и p;

б) два электрона, p и d.

Ответ: а)  ${}^1P_1$  и  ${}^3P_{0,1,2}$ ; б)  ${}^1P_1, {}^1D_2, {}^1F_3, {}^3P_{0,1,2}, {}^3D_{1,2,3}, {}^3F_{2,3,4}$ .

4. Найти число электронов в атоме, у которого заполнены K- и L-оболочки, 3s-подоболочка и на 50% 3p-подоболочка. Что это за атом?

Ответ: 15.

5. Выписать электронные конфигурации и с помощью правила Хунда найти основной терм атомов серы S и хлора Cl. Электронные конфигурации этих атомов соответствуют застройке электронных оболочек в нормальном порядке.

Ответ: S:  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$  ( ${}^3P_2$ ); Cl:  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$  ( ${}^2P_{3/2}$ ).

### Домашние задачи

1. Выписать возможные термы атомов, содержащих, кроме заполненных оболочек, три электрона s, p, d.

Ответ:  ${}^2P_{1/2,3/2}, {}^2D_{3/2,5/2}, {}^2F_{5/2,7/2}, {}^4P_{1/2,3/2,5/2}, {}^4D_{1/2,3/2,5/2,7/2}, {}^4F_{3/2,5/2,7/2,9/2}$ .

2. Найти число электронов в атоме, у которого заполнены K-, L-, M-оболочки, 4s- и 4p-подоболочки. Что это за атом?

Ответ: 46.

3. Известно, что в P- и D-состояниях двух различных атомов число возможных значений квантового числа J одинаково и равно 3. Определить спиновый механический момент атомов в этих состояниях.

Ответ: соответственно,  $p_s \geq \hbar\sqrt{2}$  и  $p_s = \hbar\sqrt{2}$ .

4. Атом марганца в нормальном состоянии имеет одну незамкнутую подоболочку, заполненную ровно наполовину пятью электронами. Определить электронную конфигурацию данной подоболочки и основной терм атома.

Ответ:  $d^5$ ,  $S = \frac{5}{2}$ ,  $L = 0$ ,  ${}^6S_{5/2}$ .

5. Найти основное состояние атома ванадия, имеющего следующую электронную конфигурацию: оболочка  $Ag+3d^34s^2$ .

Ответ:  ${}^4F_{3/2}$ .

# 8 АТОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

## СЕМИНАР 8

### МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА АТОМА

#### Литература

1. Шюльский Э.В. Атомная физика. Т.1. М.: Наука, 1984.
2. Матвеев А.Н. Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989.
3. Борн М. Атомная физика. М.: Мир, 1970.

1. Убедиться, что магнитные моменты атомов в состояниях  ${}^4D_{1/2}$  и  ${}^6G_{3/2}$  равны нулю. Интерпретировать этот факт на основе векторной модели.

#### Решение

Для расчета магнитных моментов атомов в данных состояниях будем использовать следующую формулу:

$$\mu = g\sqrt{J(J+1)}\mu_B, \quad g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}, \quad (17)$$

где  $\mu_B$  — магнетон Бора,  $g$  — множитель Ланде. Так в случае состояния  ${}^4D_{1/2}$   $S=3/2$ ,  $J=1/2$ ,  $L=2$ , что приводит к нулевому фактору Ланде и нулевому магнитному моменту. С точки зрения векторной модели это означает, что векторы  $\vec{\mu}$  и  $\vec{J}$  ортогональны. Такие же рассуждения справедливы для состояния  ${}^6G_{3/2}$ .

2. Показать с помощью векторной модели и соотношения  $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}$ , где  $\vec{J}$  — момент количества движения атома и  $\vec{M}$  — механический момент внешних сил, что угловая скорость прецессии вектора  $\vec{J}$  в магнитном поле  $B$  равна  $\omega = g\mu_B B/\hbar$ ,  $g$  — множитель Ланде.

## Решение

Пусть  $J$  — момент количества движения атома,  $\mu$  — соответствующий ему магнитный момент, который возникает при движении электрона вокруг ядра. Будем рассматривать атом как замкнутый контур с током  $I$ . На элемент этого контура в магнитном поле  $\vec{B}$  действует сила Ампера

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} I [d\vec{r} \times \vec{B}], \quad (18)$$

которой соответствует механический момент

$$d\vec{M} = [\vec{r} \times d\vec{F}] = \frac{I}{c} [\vec{r} \times [d\vec{r} \times \vec{B}]]. \quad (19)$$

Тогда полный момент вращения, действующий на контур с током, равен

$$\vec{M} = \frac{I}{c} \oint [\vec{r} \times [d\vec{r} \times \vec{B}]] = \frac{I}{c} \oint (\vec{r}\vec{B}) d\vec{r} - \frac{I}{c} \oint \vec{B} (\vec{r} d\vec{r}). \quad (20)$$

Если поле  $\vec{B}$  постоянно в пределах контура, то второй интеграл равен нулю. Заменяя далее

$$(\vec{r}\vec{B}) d\vec{r} = \frac{1}{2} [(\vec{r} \times d\vec{r}) \times \vec{B}] + \frac{1}{2} d((\vec{r}\vec{B})\vec{r})$$

и учитывая, что второе слагаемое обращается в нуль при интегрировании по контуру, мы получаем, что

$$\vec{M} = [\vec{\mu} \times \vec{B}], \quad \vec{\mu} = \frac{I}{2c} \oint (\vec{r} \times d\vec{r}). \quad (21)$$

Таким образом, уравнение движения момента  $J$  принимает вид:

$$d\vec{J} = [\vec{\mu} \times \vec{B}] dt. \quad (22)$$

С другой стороны, как следует из рисунка,  $|d\vec{J}| = |\vec{J}| \cdot \sin\theta \cdot \omega dt$  ( $|\vec{J}| = \hbar\sqrt{J(J+1)}$ ). Сравнивая эти два выражения для  $|d\vec{J}|$  и учитывая, что  $\mu = g\sqrt{J(J+1)}\mu_B$  ( $g$  — множитель Ланде), мы получаем искомую формулу для частоты прецессии  $\omega$ .

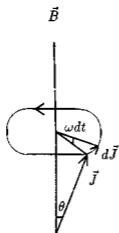


Рис. 1: Прецессия вектора  $\vec{J}$  в магнитном поле  $\vec{B}$

### Аудиторные задачи

1. Вычислить множитель Ланде для атомов:

- а) с одним валентным электроном в состояниях S, P, D;
- б) в состоянии  $^3P$ ;
- в) в S-состояниях;
- г) в синглетных состояниях.

Ответ:

- а) 2 (S), 2/3 и 4/3 (P), 4/5 и 6/5 (D);
- б) 0/0 ( $^3P_0$ ), 3/2 ( $^3P_1$  и  $^3P_2$ );
- в)  $g=2$ , за исключением синглетного, где  $g=0/0$ ;
- г)  $g=1$ .

2. Выписать спектральные обозначения терма, у которого

- а)  $S=1/2$ ,  $J=5/2$ ,  $g=6/7$ ;
- б)  $S=1$ ,  $L=2$ ,  $g=4/3$ .

Ответ: а)  $^2F_{5/2}$ , б)  $^3D_3$ .

3. Найти магнитный момент  $\mu$  и возможные значения проекции магнитного момента атома в состоянии а)  $^1F$ ; б)  $^2D_{3/2}$ .

Ответ: а)  $2\sqrt{3}\mu_B$ ; б)  $2\sqrt{3/5}\mu_B$ .

4. Максимальное значение проекции магнитного момента атома, находящегося в состоянии  $D_2$ , равно четырем магнетонам Бора. Определить мультиплетность этого термина.

Ответ:  $S=3, 2S+1=7$ .

5. Найти угловые скорости прецессии механических моментов атома в магнитном поле  $B=1000$  Гс, если атом находится

а) в состоянии  $^1P, ^2P_{3/2}, ^5F_1$ ;

б) в основном состоянии, электронная конфигурация незаполненной подоболочки которого  $np^4$  (использовать правило Хунда).

Ответ: а)  $0, 88 \cdot 10^{10}, 1, 17 \cdot 10^{10}$  и  $0$  рад/с;

б)  $1, 32 \cdot 10^{10}$  рад/с ( $^3P_2$ ).

### Домашние задачи

1. Имея в виду, что отношение магнитного момента к механическому для спинового момента вдвое больше, чем для орбитального, получить с помощью векторной модели формулу

$$\mu = g\sqrt{J(J+1)}\mu_B, \quad g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}, \quad (23)$$

где  $\mu$  магнитный момент атома,  $\mu_B$  магнетон Бора,  $g$  множитель Ланде.

2. Атом в состоянии  $^2P_{3/2}$  находится на оси кругового контура с током  $I=10,0$  А. Расстояние между атомом и центром контура с током  $z=5,0$  см, радиус контура  $R=5,0$  см. Вычислить максимальное значение силы взаимодействия между атомом и этим током.

Ответ:  $F = \frac{2\pi i R^2 z \mu_B}{c(R^2 + z^2)^{5/2}} = 4,1 \cdot 10^{-22}$  дин.

3. В опыте Штерна и Герлаха узкий пучок атомов серебра (в нормальном состоянии) проходит через поперечное резко неоднородное магнитное поле и попадает на экран Э (рис.1). При каком значении градиента напряженности магнитного поля расщепление пучка на экране  $\delta=2,0$  мм, если  $a=10$  см,  $b=20$  см и скорость атомов  $v=300$  м/с.

Ответ:  $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{mv^2 \delta \mu_B}{a(a+2b)} = 7$  кГс/см.

4. Узкий пучок атомов пропускают по методу Штерна-Герлаха через резко неоднородное магнитное поле. Определить:

а) максимальные значения проекций магнитных моментов атомов в состояниях  ${}^4F$ ,  ${}^6S$ ,  ${}^5D$ , если известно, что пучок расщепляется соответственно на 4, 6, 9 компонент.

б) на сколько компонент расщепится пучок атомов, находящихся в состояниях  ${}^3D_2$ ,  ${}^5F_1$ .

Ответ: а) 0, 6, 5, 6 магнетонов Бора; б) на 5 компонент; не расщепляется, так как  $\mu = 0 (g = 0)$ .

5. В одном из опытов по расщеплению узкого атомарного пучка по методу Штерна и Герлаха использовали атомы ванадия в основном состоянии  ${}^4F_{3/2}$ . Найти расстояние между крайними компонентами пучка на экране (см. рис.1), если  $a=10$  см,  $b=20$  см,  $\partial B/\partial z=23$  кГс/см и кинетическая энергия атомов  $T=0,04$  эВ.

Ответ:  $\delta = \frac{a(a+2b)\mu_B}{2T} \frac{\partial B}{\partial z} = 5$  мм.

## СЕМИНАР 9

### ЭФФЕКТ ЗЕЕМАНА

#### Литература

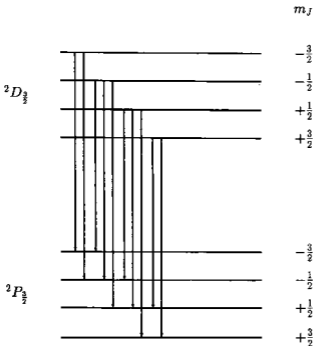
1. Ахиезер А.И. Атомная физика. Киев: Наукова думка, 1988.
2. Матвеев А.Н. Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989.
3. Борн М. Атомная физика. М.: Мир, 1970.

1. Изобразить схему возможных переходов в слабом магнитном поле и численно смещения (в единицах  $\mu_B B/\hbar$ ) зеемановских компонент спектральной линии  ${}^2D_{3/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$ .

#### Решение

В магнитном поле энергетические уровни  ${}^2D_{3/2}$  и  ${}^2P_{3/2}$  расщепляются на компоненты каждый  $(2J+1)$ . Изобразим схему расщепления и возможных переходов в магнитном поле:





Смещения зеемановских компонент определяются основной формулой:

$$\Delta\omega = (m_1 g_1 - m_2 g_2) \frac{\mu_B B}{\hbar}, \quad (24)$$

где  $m_i, g_i$  - магнитные квантовые числа и множители Ланде соответствующих термов. Для термов  ${}^2D_{3/2}$  и  ${}^2P_{3/2}$  множители Ланде равны соответственно:  $g_1 = 1 + \frac{3/2(3/2+1)+1/2(1/2+1)-2(2+1)}{3(3/2+1)} = 4/5$ ,  $g_2 = 4/3$ . Поэтому, например, для перехода без изменения проекции полного момента на ось Z при  $m_J = \frac{3}{2}$  получим  $\Delta\omega = -12/15$ . Другие смещения зеемановских компонент вычисляются аналогично:  $\Delta\omega = \pm(4, 8, 12, 16, 24)/15$ .

2. Газ из атомов в состоянии  ${}^2D_{3/2}$  подвергли одновременному воздействию постоянного магнитного поля В и перпендикулярного к нему переменного поля  $B_\nu$  с частотой 2.8 ГГц. При каком значении В возникает резонансное поглощение энергии?

Дополнительное осциллирующее магнитное поле эквивалентно наличию квантов электромагнитного излучения  $\hbar\omega$ , где  $\omega$  - частота осциллирующего поля. Эти кванты могут быть поглощены атомом, в результате чего в магнитном поле  $B$  энергия атома

$$E = -\vec{\mu}_J \cdot \vec{B} = -\mu_{J_z} B_0, \quad \mu_{J_z} = \mu_B g_J m_J \quad (25)$$

изменяется ( $J$  - полный механический момент атома,  $m_J$  - проекция момента атома на направление магнитного поля  $\vec{B}$ ). Это изменение может произойти только в результате переориентировки атома в пространстве, то есть при изменении проекции  $\mu_{J_z}$  магнитного момента в магнитном поле. Изменение энергии при переориентировке атома

$$\Delta E = -B_0 \Delta \mu_{J_z} = -B_0 g_J \mu_B \Delta m_J = \hbar \omega. \quad (26)$$

Резонансное поглощение энергии возникает при

$$B = \frac{2\pi \hbar \nu}{g_J \mu_B} = 2.5 \text{ кГц}. \quad (27)$$

### Аудиторные задачи

1. Изобразить схему возможных переходов в слабом магнитном поле и вычислить смещения (в единицах  $\mu_B B/\hbar$ ) зеемановских компонент спектральной линии  ${}^2D_{5/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$ .

Ответ:  $\Delta\omega = \pm(1, 3, 15, 17, 19, 21)/15$ .

2. Какой эффект Зеемана (простой, сложный) обнаруживают в слабом магнитном поле спектральные линии

а)  ${}^1P \rightarrow {}^1S$ ,  ${}^2D_{5/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$ ,  ${}^3D_1 \rightarrow {}^3P_0$ .

б) атомов H, He, Li, Be, B, C.

3. Построить схему возможных переходов между термами  ${}^2P_{3/2}$ ,  ${}^2S_{1/2}$  в слабом магнитном поле. Вычислить для соответствующей спектральной линии

- а) смещения зеемановских компонент в единицах  $\mu_B B/\hbar$ ;  
б) интервал ( $\text{см}^{-1}$ ) между крайними компонентами, если  $B = 5.00$  кГс.  
Ответ: а)  $\Delta\omega = 5/3, 3/3, 1/3, -1/3, -3/3, -5/3$ ;  
б)  $0.78 \text{ см}^{-1}$ .

4. Построить схему возможных переходов в магнитном поле между следующими состояниями:

$${}^1D \rightarrow {}^1P, \quad {}^1F \rightarrow {}^1D.$$

Сколько компонент содержит спектральная линия, соответствующая каждому из этих переходов?

Ответ: в обоих случаях три компоненты.

5. Вычислить смещения (в единицах  $\mu_B B/\hbar$ ) в слабом магнитном поле зеемановских  $\pi$ -компонент ( $\Delta m_J = 0$ ) спектральной линии  ${}^3D_3 \rightarrow {}^3P_2$ .

Ответ:  $\pm(0, 1, 2)/6$ .

### Домашние задачи

1. Найти магнитный момент атомов Ni (в состоянии  ${}^3F$ ), которые обнаруживают резонансное поглощение энергии при одновременном воздействии постоянного магнитного поля  $B = 2.00$  кГс и перпендикулярного к нему переменного поля  $B_\nu$  при частоте последнего  $\nu = 3.5$  ГГц.

Ответ:  $\mu = 5.6\mu_B$  ( $J = 4$ ).

2. Найти минимальную разрешающую способность  $\lambda/\delta\lambda$  спектрального прибора, который позволит разрешить зеемановскую структуру спектральной линии  $589.0$  нм ( ${}^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ ) натрия в магнитном поле  $B = 2.0$  кГс.

Ответ:  $\lambda/\delta\lambda = 3\pi c\hbar/\lambda\mu_B B = 2.7 \cdot 10^5$ .

3. Дать физическую интерпретацию обращения аномального эффекта Зеемана в нормальный при переходе от "слабого" магнитного поля к "сильному".

4. Определить, при какой напряженности магнитного поля полные величины расщеплений термов  ${}^2D_{5/2}$ ,  ${}^2P_{3/2}$  отличаются на  $\Delta T = 0.7 \text{ см}^{-1}$ .

Ответ:  $H = 2\pi\hbar c \Delta T / \mu_B (5g_D - 3g_P) = 7.5 \text{ кЭ}$ .

5. При каком значении напряженности магнитного поля величина естественного расщепления уровня  $2P$  атома водорода, определяемая из формулы тонкой структуры, равна интервалам между соседними термами состояния  ${}^2P_{3/2}$  при зеемановском расщеплении.

Ответ:  $5.87 \text{ кЭ}$ .

# 9 ЯДЕРНЫЕ МОДЕЛИ

## СЕМИНАР 10

### ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЯДРА.

### КАПЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ЯДРА. МОДЕЛЬ ФЕРМИ-ГАЗА

#### Литература

1. Фрауэнфельдер Г., Хенли Э. Субатомная физика. М.: Мир, 1979.
2. Валантен Л. Субатомная физика. М.: Мир, 1986. Т.1-2.
3. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика. М.: Энергоатомиздат, 1983. Т.1.

1. В модели ферми-газа ядра принимается, что нуклоны образуют газ, заполняющий объем ядра и подчиняющийся распределению Ферми. Оценить из этих соображений максимальную кинетическую энергию нуклонов в ядре, считая такой газ полностью вырожденным. Для оценки принять, что число протонов в ядре равно числу нейтронов.

#### Решение

Рассмотрим систему  $N$  фермионов, заключенных в объеме  $V$  и находящихся в равновесии с термостатом при температуре  $T$ . Вероятность того, что фермион будет находиться в состоянии с кинетической энергией  $E$ , дается формулой

$$F(E) = \left[ 1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) \right]^{-1}, \quad (28)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $E_F$  — энергия Ферми системы. Чтобы найти выражение для  $E_F$ , вычислим импульс Ферми  $p_F$ , который связан с  $E_F$  в случае нерелятивистского газа соотношением

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m}. \quad (29)$$

Объем элементарной ячейки в фазовом пространстве равен  $h^3$ . Поэтому в объеме  $V$  число ячеек, которые могут содержать по одной частице с импульсом  $p \div p + dp$ , определяется как

$$dN = \frac{V \cdot 4\pi p^2 dp}{h^3}. \quad (30)$$

Поэтому полное число фермионов с импульсами  $p < p_F$  равно

$$N = \int_0^{p_F} 2 \cdot \frac{V \cdot 4\pi p^2}{h^3} dp. \quad (31)$$

После интегрирования получаем

$$p_F = h \left( \frac{3N}{8\pi V} \right)^{\frac{1}{3}} = h \left( \frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (32)$$

Пользуясь этим соотношением, находим максимальную кинетическую энергию нуклонов в нерелятивистском случае:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} = 25 \text{ МэВ}. \quad (33)$$

Если энергия Ферми  $E_F \gg kT$ , то ферми-газ называют вырожденным. При нормальной температуре  $kT = 1/40 \text{ эВ}$ , поэтому ядерная система действительно является вырожденным ферми-газом.

## 2. Определить с помощью формулы Бете-Вейцеккера

$$W = \alpha A - \beta A^{\frac{2}{3}} - \gamma \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{2}}} - \delta \frac{(A - 2Z)^2}{A}, \quad (34)$$

где  $\alpha = 14.0 \text{ МэВ}$ ,  $\beta = 13.0 \text{ МэВ}$ ,  $\gamma = 0.584 \text{ МэВ}$ ,  $\delta = 19.3 \text{ МэВ}$ , заряд ядра, имеющего наименьшую массу среди ядер с одинаковым нечетным значением массового числа  $A$ . Предсказать с помощью полученной формулы характер активности (электронная или позитронная) следующих  $\beta$ -активных ядер:  $^{103}\text{Ag}$ ,  $^{127}\text{Sn}$ ,  $^{141}\text{Cs}$ .

### Решение

Для определения ядра с наименьшей массой (наибольшей энергией связи) запишем условие максимума энергии связи:  $dW/dZ=0$ .

$$Z_m = \frac{A}{1.97 + 0.0149A^{2/3}}. \quad (35)$$

Вычислив по этой формуле  $Z_m$ , получим соответственно: 44.9 (47), 54.1 (50), 59.5 (55), где в скобках указаны  $Z$  для данных ядер. Отсюда следует, что первое ядро имеет позитронную активность, а остальные - электронную.

### Аудиторные задачи

1. Вычислить энергию связи нейтрона в ядре  $^{14}\text{N}$ , если известно, что энергии связи ядер  $^{14}\text{N}$  и  $^{13}\text{N}$  равны 104.66 и 94.10 МэВ.

Ответ: 10.56 МэВ.

2. Найти энергию, необходимую для разделения ядра  $^{16}\text{O}$  на  $\alpha$ -частицу и ядро  $^{12}\text{C}$ , если известно, что энергии связи ядер  $^{16}\text{O}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^4\text{He}$  равны 127.62, 92.16, 28.30 МэВ.

Ответ: 7.16 МэВ.

3. Показать, что при равномерном распределении заряда по объему ядра энергия кулоновского отталкивания протонов  $U_{кул.} = 0.6Z^2e^2/R$ , где  $Z$ ,  $R$ - заряд, радиус ядра.

4. Вычислить разность энергий связи зеркальных ядер  $^{33}\text{S}$  и  $^{33}\text{Cl}$ , если известно, что масса  $^{33}\text{S}$  меньше массы  $^{33}\text{Cl}$  на 0.00599 а.е.м. Сравнить полученную величину с разностью энергий кулоновского отталкивания протонов в этих ядрах (см. ауд. задачу N3). Объяснить причину совпадения результатов.

Ответ:  $\Delta E_{св.} = 6.36\text{МэВ}$ ,  $\Delta U_{кул.} = 6.34\text{МэВ}$ .

5. Сколько компонент сверхтонкой структуры имеют основные термы следующих атомов:  $^3\text{H}(^2S_{1/2})$ ,  $^6\text{Li}(^2S_{1/2})$ ,  $^9\text{Be}(^1S_0)$ . В скобках указан основной терм электронной оболочки атома.

Ответ: 2, 2, 1.

### Домашние задачи

1. Вычислить с помощью формулы Бете-Вейцзеккера

а) энергию связи ядер  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{107}\text{Ag}$ ;

б) энергию связи на один нуклон в ядрах  $^{50}\text{V}$ ,  $^{200}\text{Hg}$ .

Ответ: а) 341.8, 904.5 МэВ; б) 8.65, 7.81 МэВ.

2. Найти глубину потенциальной ямы для нуклонов в модели ферми-газа.

3. Определить спин ядра  $^{59}\text{Co}$ , основной терм атома которого  $^4F_{9/2}$  содержит восемь компонент сверхтонкого расщепления.

Ответ:  $\frac{7}{2}$ .

4. Терм  $^2D_{3/2}$  атома  $^{209}\text{Bi}$  имеет четыре компоненты сверхтонкого расщепления, причем отношение интервалов между соседними компонентами равно 4:5:6. Найти спин ядра, а также число компонент сверхтонкого расщепления линии  $^2S_{1/2} \rightarrow ^2D_{3/2}$ .

Ответ:  $I = \frac{9}{2}$ . Указанная линия расщепляется на шесть компонент.

5. Энергия связи нуклонов в ядре определяется полуэмпирической формулой Бете-Вейцеккера:

$$W = \alpha A - \beta A^{\frac{2}{3}} - \gamma \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - \delta \frac{(A - 2Z)^2}{A}. \quad (36)$$

Четвертое слагаемое в правой части этой формулы называется симметричной энергией. Получить выражение для симметричной энергии в рамках модели ферми-газа.



ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЯДРА.  
ОБОЛОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ ЯДРА

Литература

1. Фрауэнфельдер Г., Хенли Э. Субатомная физика. М.: Мир, 1979.
2. Валантен Л. Субатомная физика. М.: Мир, 1986. Т.1-2.
3. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика. М.: Энергоатомиздат, 1984. Т.1.

1. Считая, что самосогласованное поле, действующее на нуклон в ядре, можно аппроксимировать потенциалом  $U(r) = m\omega^2 r^2/2$  ( $m$  - масса нуклона), найти одночастичные энергетические уровни. К каким значениям магических чисел приводит такая модель самосогласованного потенциала?

Решение

Запишем уравнение Шредингера для нуклона, движущегося в данном самосогласованном потенциальном поле:

$$V(\vec{r}_1) = \frac{1}{2}\kappa r_1^2, \quad (37)$$

$$\nabla_1^2 \psi(\vec{r}_1) + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{1}{2}\kappa r_1^2 \right) \psi(\vec{r}_1) = 0. \quad (38)$$

Введем безразмерную переменную

$$r^2 = r_1^2 \frac{m\omega}{\hbar}, \quad \kappa = m\omega^2, \quad E = \frac{1}{2}\hbar\omega\lambda. \quad (39)$$

Тогда уравнение Шредингера примет вид:

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}^2}{r^2 \hbar^2} \right] \psi(\vec{r}) + (\lambda - r^2) \psi(\vec{r}) = 0. \quad (40)$$

Исходный потенциал обладает сферической симметрией, поэтому мы можем искать решение в виде

$$\psi(\vec{r}) = u(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (41)$$

где  $Y_{lm}$  — сферические волновые функции. В результате такой подстановки мы получим уравнение для определения радиальной волновой функции:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) + \left[ \lambda - r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u(r) = 0. \quad (42)$$

При решении этого уравнения удобно ввести новую неизвестную функцию  $R(r) = r u(r)$  и перейти к новой переменной  $z = r^2$ . Тогда мы получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{1}{2z} \frac{dR}{dz} + \left[ \frac{\lambda}{4z} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{4z^2} \right] R(z) = 0. \quad (43)$$

Найдем асимптотику решения при  $z \rightarrow 0, \infty$ .

$$z \rightarrow \infty, \quad \frac{d^2 R}{dz^2} - \frac{1}{4} R = 0, \quad R \sim e^{-z/2}. \quad (44)$$

$$z \rightarrow 0, \quad \frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{1}{2z} \frac{dR}{dz} - \frac{l(l+1)}{4z^2} R = 0, \quad R \sim z^s, \quad s = \frac{l+1}{2}. \quad (45)$$

Таким образом, мы будем искать решение  $R(z)$  в виде:

$$R(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{l+1}{2}} W(z), \quad (46)$$

а для неизвестной функции  $W(z)$  получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\left[ z \frac{d^2}{dz^2} + \left( l + \frac{3}{2} - z \right) \frac{d}{dz} + \frac{1}{4} (\lambda - 1) - \frac{l+1}{2} \right] W(z) = 0. \quad (47)$$

Решением этого уравнения является вырожденная гипергеометрическая функция

$$W(z) = \Phi(\alpha, \beta, z) = \Phi\left(\frac{1}{4}(\lambda - 1) - \frac{l+1}{2}, \quad l + \frac{3}{2}, \quad z\right). \quad (48)$$

Ряд для вырожденной гипергеометрической функции превращается в конечный полином, и мы получаем физическое решение, если выполняется следующее условие:

$$\alpha = \frac{1}{4}(\lambda - 1) - \frac{l+1}{2} = -n_r, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots - \text{целое}, \quad (49)$$

которое приводит к определенным уровням энергии нуклона в самосогла-  
сованном поле:

$$E_{n_r, l} = \hbar\omega\left[2n_r + l + \frac{3}{2}\right] = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) = E_N, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (50)$$

Уровни энергии  $E_N$  вырождены. Вычислим кратность вырождения уровня:

$$r_N = 2 \sum_{l=1}^N (2l+1) = (N+1)(N+2), \quad (51)$$

так как при данном  $N$   $l$  принимает значения  $l=N, N-2, N-4, \dots$ . Полное  
число состояний, в которых могут находиться частицы, начиная с уровня  
 $N=0$  и кончая уровнем  $N=N_0$ , равно:

$$d = \sum_{N=0}^{N_0} r_N = \sum_{N=0}^{N_0} (N+1)(N+2) = \frac{1}{3}(N_0+1)(N_0+2)(N_0+3). \quad (52)$$

Заметим также, что уровень с данным  $N$  имеет вполне определенную  
четность:

если  $N$ -четное, то  $l=0, 2, 4, \dots$ ,  $P = (-1)^l = +1$ ;

если  $N$ -нечетное, то  $l=1, 3, 5, \dots$ ,  $P = (-1)^l = -1$ .

Составим таблицу осцилляторных оболочек. Уровни энергии гармо-  
нического осциллятора мы будем нумеровать парой чисел  $(n_r, l)$  ( $n_r =$   
 $1 + (N - l)/2$ ).

N	Орбита	P	$r_N$	d
0	$l=0, n_r = 0, 1S$	+1	2	2
1	$l=1, n_r = 1, 1P$	-1	6	8
2	$l=0, n_r = 2, 2S$ $l=2, n_r = 1, 1D$	+1	12	20
3	$l=1, n_r = 2, 2P$ $l=3, n_r = 1, 1F$	-1	20	40
4	$l=0, n_r = 3, 3S$ $l=2, n_2 = 2, 2D$ $l=4, n_r = 4, 1G$	+1	30	70

Таким образом, осцилляторная модель приводит к следующим значениям магических чисел: 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168. Только первые три числа совпадают с экспериментально наблюдаемыми. Специфической особенностью осцилляторного потенциала является случайное вырождение уровней. Если слегка изменить этот потенциал, то случайное вырождение снимется, что приведет к расщеплению каждого уровня на столько подуровней, сколько различных значений  $l$  ему отвечает.

2. В условиях предыдущей задачи обсудить изменение энергетического спектра однонуклонных состояний, возникающих при введении спин-орбитального взаимодействия вида  $V_{ls} = C_{ls}(\vec{l}\vec{s})$ .

### Решение

При наличии спин-орбитального взаимодействия уровень частицы со спином  $s=1/2$  с данным значением  $l$  расщепляется на два подуровня, отвечающие значениям  $j = l \pm 1/2$  полного момента. В этом случае "хорошими" квантовыми числами являются: полный момент  $j$ , его проекция  $j_z$ , четность  $P$  (хотя вектор  $\vec{l}$  не сохраняется, его квадрат по-прежнему является интегралом движения: оператор  $\vec{l}^2$  коммутирует с гамильтонианом). Считая, что применима теория возмущений, учтем изменение уровней энергии нуклона за счет дополнительного спин-орбитального взаимодействия в рамках этого метода. Обозначим волновую функцию гармонического осциллятора через  $|\alpha, j, l, s = 1/2 \rangle$  и выразим  $(\vec{l}\vec{s})$  через квадраты операторов полного, орбитального и спинового моментов:

$$(\vec{l}\vec{s}) = \frac{1}{2}[\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2]. \quad (53)$$

Тогда имеем

$$(\vec{l}\vec{s})|\alpha, j, l, s = 1/2 \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2}\hbar^2 l |\alpha, j, l, s = 1/2 \rangle, & j = l + 1/2 \\ -\frac{1}{2}\hbar^2 (l + 1) |\alpha, j, l, s = 1/2 \rangle, & j = l - 1/2 \end{cases} \quad (54)$$

Спин-орбитальное взаимодействие приводит к частичному снятию вырож-

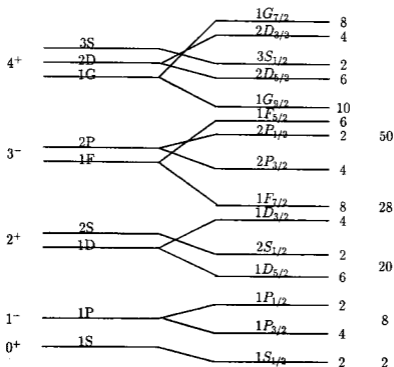


Рис. 2: Схема уровней модели оболочек

дения, так как теперь уровни с  $j = l \pm 1/2$  имеют разную энергию, а величина расщепления

$$\Delta E_{ls} = (l + \frac{1}{2})\hbar^2 C_{ls}. \quad (55)$$

$C_{ls} < 0$ , поэтому уровень с  $j = l - 1/2$  повышается, а с  $j = l + 1/2$  понижается. В результате расщепления возникает следующая схема оболочек (рис.2).

### Аудиторные задачи

1. С помощью модели оболочек написать конфигурации основных состояний ядер:  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{13}\text{C}$ ,  ${}^{25}\text{Mg}$ .

Ответ:  $1S_{1/2}^4, 1P_{3/2}^3, 1S_{1/2}^4, 1P_{3/2}^8, 1P_{1/2}^1, 1S_{1/2}^4, 1P_{3/2}^8, 1P_{1/2}^4, 1D_{5/2}^9$ .

2. Определить с помощью модели оболочек спин и четность основных состояний ядер  ${}^{13}\text{C}$ ,  ${}^{13}\text{N}$ .

Ответ:  $J^P = \frac{1}{2}^-$ .

3. Определить с помощью модели ядерных оболочек спины и четности основных состояний ядер:  ${}^{17}\text{O}$ ,  ${}^{29}\text{Si}$ ,  ${}^{39}\text{K}$ .

Ответ:  $\frac{5}{2}^+$ ,  $\frac{1}{2}^+$ ,  $\frac{3}{2}^+$ .

4. Магнитный момент ядра складывается из магнитных моментов нуклонов, находящихся вне заполненных оболочек. Имея в виду, что магнитный момент нуклона в состоянии  $(nlj)$  равен  $\vec{\mu} = \mu_0 g_j \vec{j} = \mu_0 (g_s \vec{s} + g_l \vec{l})$  ( $\mu_0$  - ядерный магнетон,  $\vec{s}$  - спиновый момент нуклона,  $\vec{l}$  - орбитальный момент нуклона, а орбитальный и спиновый гиромагнитные множители равны  $g_l = 1$ ,  $g_s = 5.585$  для протона и  $g_l = 0$ ,  $g_s = -3.826$  для нейтрона), доказать, что:

$$g_j j(j+1) = \frac{1}{2}(g_l + g_s)j(j+1) + \frac{1}{2}(g_l - g_s)[l(l+1) - s(s+1)], \quad (56)$$

$$g_j = g_l \pm \frac{g_s - g_l}{2l+1}, \quad \text{при } j = l \pm \frac{1}{2}. \quad (57)$$

5. Используя результаты предыдущей задачи, доказать, что магнитный момент протона  $\mu_p = g_j j \mu_0$ :

$$\mu_p = \left(1 - \frac{2.29}{j+1}\right) j \mu_0 \quad \text{при } j = l - \frac{1}{2}, \quad (58)$$

$$\mu_p = j + 2.29 \quad \text{при } j = l + \frac{1}{2}, \quad (59)$$

а для магнитного момента нейтрона:

$$\mu_n = \frac{1.91}{j+1} j \quad \text{при } j = l - \frac{1}{2}, \quad (60)$$

$$\mu_n = -1.91 \quad \text{при } j = l + \frac{1}{2}. \quad (61)$$

6. В модели оболочек найти спины и магнитные моменты основных состояний ядер:  ${}^3\text{H}$ ,  ${}^{11}_5\text{B}$ ,  ${}^{17}_8\text{O}$ .

Ответ:  $\frac{1}{2}^+$ , 2.79;  $\frac{3}{2}^-$ , 3.79;  $\frac{5}{2}^+$ , -1.91.

### Домашние задачи

1. Оценить значение параметра  $\hbar\omega$  осцилляторной модели, основываясь на данных о размерах ядер.

Ответ:  $\hbar\omega \approx 41A^{-1/3}$  (Мэв).

2. Найти с помощью модели ядерных оболочек спины и четности основных состояний ядер:  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^{15}\text{N}$ ,  ${}^{15}\text{O}$ .

Ответ:  $\frac{1}{2}^+$ ,  $\frac{1}{2}^-$ .

3. В модели оболочек найти спины и магнитные моменты основных состояний ядер:  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^{13}\text{C}$ ,  ${}^{29}\text{Si}$ .

Ответ:  $\frac{1}{2}^+$ , -1.91;  $\frac{1}{2}^-$ , 0.64;  $\frac{1}{2}^+$ , -1.91.

4. Допустим, что в нашей Вселенной изменился бы только знак ядерного спин-орбитального члена. Какими стали бы магические числа?

5. Воспользовавшись формулами ауд. задачи 5, вычислить магнитный момент в состояниях  $S_{1/2}$ ,  $P_{1/2}$ ,  $P_{3/2}$  нейтрона и протона.

Ответ:  $\mu_n$ : -1.91, 0.64, -1.91;  $\mu_p$ : 2.79, -0.26, 3.79.

6. Определить магнитный момент системы двух нуклонов (с полным механическим моментом  $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ ), выразив его через магнитные моменты  $\mu_1, \mu_2$  каждого из нуклонов. Сравнить полученный результат с экспериментальными данными для ядер:  ${}^2\text{H}(J = 1, \mu = 0.86)$ ,  ${}^6_3\text{Li}(1, 0.82)$ ,  ${}^{10}_5\text{B}(3, 1.80)$ .

Ответ:

$$\frac{\mu}{J} = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_1}{j_1} + \frac{\mu_2}{j_2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_1}{j_1} - \frac{\mu_2}{j_2} \right) \frac{(j_1 - j_2)(j_1 + j_2 + 1)}{j(j + 1)}. \quad (62)$$



# 10 ЗАКОНЫ РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА

СЕМИНАР 12

## ЗАКОНЫ РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА

### Литература

1. Широков Ю.М., Юдин Н.П. Ядерная физика. М.: Наука, 1980.
2. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика. Т.1: Физика атомного ядра. М.: Энергоатомиздат, 1993.
3. Сивухин Д.В. Атомная и ядерная физика. Часть 2. М.: Наука, 1986.

1. При радиоактивном распаде ядер изотопа  $A_1$  образуется радиоизотоп  $A_2$ . Их постоянные распада  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Полагая, что в начальный момент препарат содержал только ядра изотопа  $A_1$  в количестве  $N_{10}$ , определить:

- 1) количество ядер изотопа  $A_2$  через промежуток времени  $t$ ;
- 2) промежуток времени, через который количество ядер изотопа  $A_2$  достигнет максимума;
- 3) в каком случае может возникнуть состояние переходного равновесия, при котором отношение количества обоих изотопов будет оставаться постоянным. Чему равно это отношение?

### Решение

1). Скорость накопления изотопа  $A_2$ , исходя из основного закона радиоактивного распада, определяется уравнением:

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \text{ или } \frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_{10} \exp(-\lambda_1 t).$$

Решение данного дифференциального уравнения ищется в виде:  $N_2(t) = B_1 \exp(-\lambda_1 t) + B_2 \exp(-\lambda_2 t)$ , где  $B_1, B_2$  - постоянные, определяемые с учетом начальных условий  $N_1(0) = N_{10}, N_2(0) = 0$ . После определения

констант получаем ответ на первый вопрос задачи:

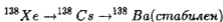
$$N_2(t) = N_{10} \frac{\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} [\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)].$$

2). Время достижения максимального количества ядер изотопа  $A_2$  определим из условия  $dN_2/dt = 0$ :

$$t_m = \frac{\ln(\lambda_1/\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

3). Чтобы отношение  $N_1/N_2$  оставалось постоянным,  $N_1$  и  $N_2$  должны одинаковым образом зависеть от времени. Это возможно лишь в том случае, если  $\exp(-\lambda_2 t) \ll \exp(-\lambda_1 t)$ . Для выполнения этого неравенства необходимо, чтобы  $\lambda_1$  был заметно меньше  $\lambda_2$  и промежуток времени  $t$  значительно превосходил среднее время жизни более устойчивого изотопа.

2. Радиоизотоп  $^{138}\text{Xe}$ , образующийся с постоянной скоростью  $q = 1,0 \cdot 10^{10}$  ядер/с, испытывает превращения по схеме



с периодами полураспада  $T_1 = 17$  мин и  $T_2 = 32$  мин соответственно. Вычислить суммарную активность препарата через 60 мин после начала накопления.

### Решение

Изменение со временем числа ядер изотопа  $^{138}\text{Xe}$  описывается дифференциальным уравнением  $dN_1/dt = q - N_1 \ln 2/T_1$ , для радиоизотопа

$^{138}\text{C}$ s аналогичное уравнение имеет вид:  $dN_2/dt = N_1 \ln 2/T_1 - N_2 \ln 2/T_2$ . Откуда с учетом начальных условий  $N_1(0) = 0$  и  $N_2(0) = 0$  имеем:

$$N_1(t) = \frac{q}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1 t}), \quad N_2(t) = \frac{q}{\lambda_2} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}\right),$$

где  $\lambda_1 = \ln 2/T_1$  и  $\lambda_2 = \ln 2/T_2$ . Воспользовавшись полученными выражениями найдем суммарную активность:

$$A = -\left(\frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt}\right) = q \left(2 + \frac{2\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}\right) = 0,4 \text{ кюри.}$$

### Аудиторные задачи

1. Найти вероятность распада ядра за промежуток времени  $t$ , если его постоянная распада  $\lambda$ .

Ответ:  $p(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ .

2. Имеется пучок нейтронов с кинетической энергией 0,0025 эВ. Какая доля нейтронов распадается на длине пучка 2 м?

Ответ:  $9 \cdot 10^{-7}$ .

3. Определить возраст древних деревянных предметов, у которых удельная активность  $^{14}\text{C}$  составляет  $3/5$  удельной активности того же изотопа в только что срубленных деревьях.

Ответ: 4100 лет.

4.  $^{226}\text{Ra}$ , являясь продуктом распада  $^{238}\text{U}$ , содержится в последнем в количестве одного атома на каждые  $2,80 \cdot 10^6$  атомов урана. Найти период полураспада  $^{238}\text{U}$ , если известно, что он значительно больше полураспада  $^{226}\text{Ra}$ , который равен 1620 годам.

Ответ:  $4,5 \cdot 10^9$  лет.

5. Радиоизотоп  $A_1$  испытывает превращение по цепочке  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots$  с постоянными распада  $\lambda_1$ ;  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  соответственно. Полагая, что в начальный момент препарат содержал только ядра изотопа  $A_1$  в количестве  $N_{10}$ , найти выражение, определяющее закон накопления изотопа  $A_3$ .

Ответ:

$$N_3(t) = N_{10}\lambda_1\lambda_2\left(\frac{\exp(-\lambda_1 t)}{\Delta\lambda_{12}\Delta\lambda_{13}} + \frac{\exp(-\lambda_2 t)}{\Delta\lambda_{21}\Delta\lambda_{23}} + \frac{\exp(-\lambda_3 t)}{\Delta\lambda_{31}\Delta\lambda_{32}}\right),$$

где  $\Delta\lambda_{ik} = \lambda_i - \lambda_k$ .

6. Радиоизотоп  $^{27}\text{Mg}$  образуется с постоянной скоростью  $q = 5,0 \cdot 10^{10}$  ядер/с. Определить количество ядер  $^{27}\text{Mg}$ , которое накопится в препарате через промежуток времени:

- значительно превосходящий период полураспада;
- равный периоду полураспада.

Ответ: а)  $4,1 \cdot 10^{13}$ ; б)  $2,0 \cdot 10^{13}$ .

7. Определить массу свинца, который образуется из 1 кг  $^{238}\text{U}$  за период, равный возрасту Земли ( $2,5 \cdot 10^9$  лет).

Ответ: около 0,3 кг.

### Домашние задачи

1. Показать, что среднее время жизни радиоактивных ядер  $\tau = 1/\lambda$ , где  $\lambda$  - их постоянная распада.

2. Приготовленный препарат содержит 1,4 мкг радиоактивного изотопа  $^{24}\text{Na}$ . Какую активность он будет иметь через сутки?

Ответ: 4 Кюри.

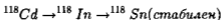
3. При  $\beta$ -распаде изотопа  $^{112}\text{Pd}$  возникает  $\beta$ -активный изотоп  $^{112}\text{Ag}$ . Их периоды полураспада равны соответственно 21 и 3,2 ч. Найти отношение максимальной активности второго изотопа к первоначальной активности препарата, если в начальный момент препарат содержал только первый изотоп.

Ответ:

$$\frac{A_{2\max}}{A_{10}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\exp(-\lambda_1 t_m) - \exp(-\lambda_2 t_m)) = 0,7,$$

где  $t_m = \ln(\lambda_1/\lambda_2)/(\lambda_1 - \lambda_2)$ .

4. Радиоизотоп  $^{118}\text{Cd}$  испытывает превращения по цепочке



с периодами полураспада соответственно  $T_1 = 30$  мин,  $T_2 = 4,5$  мин. Считая, что в момент  $t=0$  препарат содержал только Cd, найти

- какая часть ядер превратится в стабильные ядра через 60 мин;
- во сколько раз уменьшится активность препарата через 60 мин.

Ответ: а)

$$\frac{N_3}{N_{10}} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ \frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \right] = 0,7.$$

б)

$$\frac{A}{A_0} = e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) = 0,55,$$

г. е. активность уменьшится в 1,8 раза.

5. В кровь человека ввели небольшое количество раствора, содержащего радиоизотоп  $^{24}\text{Na}$  активностью  $A = 2,0 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ . Активность 1 см<sup>3</sup> крови, взятой через  $t=5,0$  часов после этого, оказалась  $a = 16 \text{ мин}^{-1} \text{ см}^{-3}$ . Найти объем крови человека.

Ответ:  $V = (A/a) \exp(-\lambda t) = 6$  л.

6. Радионуклид  $^{124}\text{Sb}$  образуется с постоянной скоростью  $q = 1,0 \cdot 10^9$  ядер/с. С периодом полураспада  $T=60$  суток он превращается в стабильный изотоп  $^{124}\text{Te}$ . Найти:

а) через сколько времени после начала образования активность радионуклида  $^{124}\text{Sb}$  станет равной  $A=10$  мКюри;

б) какая масса изотопа  $^{124}\text{Te}$  накопится в препарате за четыре месяца после начала его образования.

Ответ: а) 40 суток; б)  $M = mq(\exp(-\lambda t) + \lambda t - 1)/\lambda = 1,0$  мкг,  $m \approx \mu/N_A$ , где  $\mu$ -молярная масса,  $N_A$ -число Авогадро.

7. Радионуклид  $A_1$ , образующийся с постоянной скоростью  $q$  ядер/с, испытывает цепочку превращений по схеме  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$  (стабильн) с постоянными распада  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно. Найти закон накопления количества ядер изотопов  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  с течением времени, полагая, что в начальный момент препарат их не содержал.

Ответ:

$$N_1(t) = \frac{q}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1 t}),$$

$$N_2(t) = \frac{q}{\lambda_2} \left( 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} \right),$$

$$N_3(t) = q \left( t + \frac{\lambda_2(1 - e^{-\lambda_1 t})}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_1(1 - e^{-\lambda_2 t})}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \right).$$

# 11 АЛЬФА- и БЕТА-РАСПАДЫ

## СЕМИНАР 13

### $\alpha$ - и $\beta$ -РАСПАДЫ

#### Литература

1. Широков Ю.М., Юдин Н.П. Ядерная физика. М.: Наука, 1989.
2. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика. Т. 1: Физика атомного ядра. М.: Энергоатомиздат, 1993.
3. Сивухин Д.В. Атомная и ядерная физика. Часть 2. М.: Наука, 1986.

1. Покоящееся ядро  $^{213}\text{Po}$  испустило  $\alpha$ -частицу с кинетической энергией  $T_1=8,34$  МэВ. При этом дочернее ядро оказалось непосредственно в основном состоянии. Найти полную энергию, освобождаемую в этом процессе. Какую долю этой энергии составляет кинетическая энергия дочернего ядра? Какова скорость отдачи дочернего ядра?

#### Решение

Запишем законы сохранения энергии и импульса для рассматриваемого случая:

$$Q = T_1 + T_2; \quad P_1 = P_2.$$

$Q$  — энергия, выделяющаяся при распаде;  $T_{1,2}$  и  $P_{1,2}$  — кинетическая энергия и импульс  $\alpha$ -частицы и дочернего ядра соответственно. Учитывая, что кинетическая энергия  $\alpha$ -частицы невелика по сравнению с энергией покоя, воспользуемся нерелятивистскими соотношениями между энергией и импульсом  $T = P^2/2m$ . Тогда  $T_2 = (m_2/m_1)T_1$ , после подстановки получаем:  $Q = T_1(1 + m_1/m_2) = 8,5$  МэВ.

Дочернее ядро приобретает при этом энергию отдачи  $T_2 = Q - T_1$ , что составляет  $n = (T_2/Q) \cdot 100\% = 1,9\%$ . Скорость  $\alpha$ -частицы  $v = (2T_1/m_1)^{1/2} = 3,8 \cdot 10^5$  м/с. Массы  $\alpha$ -частицы и дочернего ядра определяем из таблицы свойств изотопов.

2. Оценить высоту кулоновского барьера для  $\alpha$ -частиц, испускаемых ядрами  $^{222}\text{Rn}$  (закруглением вершины барьера пренебречь). Какова у

этих ядер ширина барьера (туннельное расстояние) для  $\alpha$ -частиц, вылетающих с кинетической энергией 5,5 МэВ?

### Решение

Моделируя ядро как шар с равномерным распределением заряда  $+eZ$ , получим выражение для потенциала кулоновского поля ядра  $\varphi = eZ/r$ . Оценку радиуса ядра определим из выражения  $R = A^{1/3} \cdot 10^{-13}$  см, где  $A$  - массовое число. Высота кулоновского барьера на границе ядра без учета закругления вершины  $U_{\text{max}} = (2e^2Z/R) = 29$  МэВ. Туннельное расстояние для  $\alpha$ -частиц с кинетической энергией  $T = 5,5$  МэВ определяется соотношением  $d = r - R$ , где  $r$  - расстояние от центра ядра, при котором  $T = U(r)$ . После подстановки получаем:

$$d = 2e^2Z/T - R = 3,6 \cdot 10^{-12} \text{ см.}$$

### Аудиторные задачи

1. Ядра  $^{210}\text{Po}$  испускают  $\alpha$ -частицы с кинетической энергией  $T=5,30$  МэВ, причем практически все дочерние ядра образуются непосредственно в основном состоянии. Определить:

а) количество тепла, которое выделяет 10,0 мг препарата  $^{210}\text{Po}$  за период, равный среднему времени жизни этих ядер;

б) первоначальную активность препарата  $^{210}\text{Po}$ , если за время, равное его периоду полураспада, препарат выделил 2,2 кДж тепла.

Ответ: а)  $Q = N_0 T (1 + m_\alpha/M) (1 - \exp(-\lambda t)) = 1,6 \cdot 10^4$  кДж, где  $N_0$  - первоначальное число ядер препарата,  $M$  - масса дочернего ядра;  
б) 0,8 мКюри.

2. Для испущенной ядром  $\alpha$ -частицы, кинетическая энергия  $T$  которой значительно меньше высоты кулоновского барьера, коэффициент прозрачности барьера

$$D = \exp(-\chi/T^{1/2}); \quad \chi = 2\pi Ze^2(2\nu/\hbar)^{1/2},$$



где  $Ze$  - заряд дочернего ядра,  $m$  - масса  $\alpha$ -частицы.

1). Получить эту формулу из общего выражения для

$$D = \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - T)} dx\right],$$

где  $x_1$  и  $x_2$  координаты точек, между которыми  $U(x) > T$ .

2). Вычислить отношение проницаемостей для  $\alpha$ -частиц, испускаемых ядрами  $^{226}\text{Th}$  с энергиями 6,33 и 6,22 МэВ.

Ответ: 2) 3,4:1.

3. При  $\alpha$ -распаде ядер  $^{212}\text{Po}$  с первого возбужденного уровня наблюдается два конкурирующих процесса: непосредственное испускание  $\alpha$ -частиц (длиннопробежная группа) или испускание  $\alpha$ -частиц после перехода ядра в основное состояние (основная группа  $\alpha$ -частиц). При этом на каждые  $1,0 \cdot 10^6$   $\alpha$ -частиц основной группы испускается 35 длиннопробежных  $\alpha$ -частиц указанной группы. Найти постоянную распада данного возбужденного уровня по отношению к испусканию длиннопробежных  $\alpha$ -частиц, если среднее время жизни этого уровня  $\tau = 1,8 \cdot 10^{-12}$  с.

Ответ:  $\lambda = 1/\tau(1 + N_\gamma/N_\alpha) = 2 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ ,  $N_\gamma$  - число  $\alpha$ -частиц основной группы (число переходов из возбужденного состояния в основное),  $N_\alpha$  - число длиннопробежных  $\alpha$ -частиц.

4. Вычислить суммарную кинетическую энергию частиц, возникающих при  $\beta$ -распаде покоящегося нейтрона.

Ответ: 0,78 МэВ.

5. Установить, возможны ли следующие процессы:

а)  $\beta^-$ -распад ядер  $^{51}\text{V}$  (-0,05602);

б)  $\beta^+$ -распад ядер  $^{39}\text{Ca}$  (-0,02929);

с) К-захват в атомах  $^{63}\text{Zn}$  (-0,06679). В скобках указан избыток массы атома (M-A) а.е.м.

Ответ: а) нет; б) да; с) да.

6. Вычислить максимальное значение импульса электронов, испускаемых ядрами  $^{10}\text{Be}$ , если известно, что дочерние ядра оказываются непосредственно в основном состоянии.

Ответ:  $p = \sqrt{Q(Q + 2m_e c^2)}/c = 0,94 \text{ МэВ}/c$ ;  $Q = (M_1 - M_2)c^2$  — энергия распада,  $M_1$  и  $M_2$  — массы материнского и дочернего атомов соответственно.

7. При  $\beta$ -распаде ядер  $^{56}\text{Mn}$  из основного состояния испускаются три парциальных спектра электронов, максимальные кинетические энергии которых 0,72; 1,05 и 2,86 МэВ. Сопровождающие распад  $\gamma$ -кванты имеют энергии 0,84; 1,81; 2,14; 2,65 и 2,98 МэВ. Рассчитать и построить схему уровней дочернего ядра.

Ответ: энергия уровней: 0; 0,84; 2,65; и 2,98 МэВ.

8. Найти энергию нейтрино при К-захвате в атомах  $^{131}\text{Cs}$ , если полная энергия, выделяющаяся в этом процессе, равна 355 кэВ, энергия связи К-электрона в дочернем атоме 35 кэВ, причем дочернее ядро оказывается непосредственно в основном состоянии.

Ответ: 0,32 МэВ.

### Домашние задачи

1. Распад ядер  $^{210}\text{Po}$  происходит из основного состояния и сопровождается испусканием двух групп  $\alpha$ -частиц: основной с энергией 5,30 МэВ и слабой по интенсивности с энергией 4,50 МэВ. Найти энергию  $\alpha$ -распада этих ядер и энергию  $\gamma$ -квантов, испускаемых дочерними ядрами.

Ответ: 5,40 и 0,82 МэВ.

2. При распаде ядер  $^{212}\text{Po}$  испускаются четыре группы  $\alpha$ -частиц: основная с энергией 8,780 МэВ и длиннопробежные с энергиями 9,492; 10,422 и 10,543 МэВ. Рассчитать и построить схему уровней ядра  $^{212}\text{Po}$ , если известно, что дочерние ядра во всех случаях образуются непосредственно в основном состоянии.

Ответ: энергии уровней: 0; 0,726; 1,673 и 1,797 МэВ.

3. Определить отношение высоты центробежного барьера к высоте кулоновского барьера для  $\alpha$ -частиц, испускаемых ядрами  $^{209}\text{Po}$ , с орбитальным моментом  $l=2$ . Закруглением вершины кулоновского барьера пренебречь.

Ответ:

$$\frac{U_{цб}}{U_{кул}} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{4(Z-2)e^2 m_\alpha R} = 1,6 \cdot 10^{-2},$$

$R$  - радиус ядра.

4. Найти ширину первого возбужденного уровня ядер  $^{214}\text{Po}$  по отношению к испусканию  $\gamma$ -квантов, если известно, что при распаде с этого уровня на каждую  $\alpha$ -частицу основной группы испускается  $4,3 \cdot 10^{-7}$  длиннопробежных  $\alpha$ -частиц и 0,286  $\gamma$ -квантов. Постоянная распада по отношению к испусканию длиннопробежных  $\alpha$ -частиц равна  $2,0 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}$ .

Ответ:  $\Gamma_\gamma = \hbar \lambda_\alpha N_\gamma / N_\alpha = 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}$ .

5. Как определяются энергии, освобождающиеся при  $\beta^-$ -распаде,  $\beta^+$ -распаде и К-захвате, если известны массы материнского и дочернего атомов и масса электрона?

Ответ:  $Q = (M_m - M_d)c^2$  при  $\beta^-$ -распаде и К-захвате,  
 $Q = (M_m - M_d - 2m_e)c^2$  при позитронном распаде.

6. Зная массу дочернего атома и энергию  $\beta$ -распада  $Q$ , найти массу атома:

- а)  $^6\text{He}$ , испытавшего  $\beta^-$ -распад,  $Q=3,50 \text{ МэВ}$ ;
- б)  $^{22}\text{Na}$ , испытавшего  $\beta^+$ -распад,  $Q=1,83 \text{ МэВ}$ .

Ответ: а) 6,0189; б) 21,99444 а.е.м.

7. Ядро  $^{11}\text{C}$  испытывает позитронный распад, в результате которого дочернее ядро оказывается непосредственно в основном состоянии. Вычислить:

а) максимальную кинетическую энергию позитронов и соответствующую кинетическую энергию дочернего ядра;

б) значения энергии позитрона и нейтрино в том случае, когда дочернее ядро не испытывает отдачи.

Ответ: а) 0,97 МэВ и 94 эВ; б) 0,32 и 0,65 МэВ.

8. Ядра  $^{37}\text{Ar}$  испытывают К-захват, в результате которого дочерние ядра оказываются в основном состоянии. Пренебрегая энергией связи К-электрона, определить кинетическую энергию и скорость дочернего ядра.

Ответ:  $T = Q^2/2Mc^2 = 9,5 \text{ эВ}$ ;  $Q$  - энергия, освобождающаяся в этом процессе;  $M$  - масса атома;  $v = 7,0 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

# 12 ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЕ ЯДЕР. ВНУТРЕННЯЯ КОНВЕРСИЯ. ЭФФЕКТ МЕССБАУЭРА

## СЕМИНАР 14

### ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЕ ЯДЕР. ВНУТРЕННЯЯ КОНВЕРСИЯ. ЭФФЕКТ МЕССБАУЭРА

#### Литература

1. Широков Ю.М., Юдин Н.П. Ядерная физика. М.: Наука, 1980.
2. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика. Т.1: Физика атомного ядра. М.: Энергоатомиздат, 1993.
3. Сивухин Д.В. Атомная и ядерная физика. Часть 2. М.: Наука, 1986.

1. Изомерное ядро  $^{109}\text{Ag}^m$ , переходя в основное состояние, испускает или  $\gamma$ -квант с энергией 87 кэВ, или конверсионный К-электрон с  $H\rho = 860 \text{ Э} \cdot \text{см}$  ( $H$  - напряженность магнитного поля,  $\rho$  - радиус кривизны траектории). Вычислить энергию связи К-электрона.

#### Решение

Импульс и кинетическую энергию испущенного электрона определим из данных о его движении в магнитном поле  $p = eH\rho/c$ ,  $T = c\sqrt{p^2 + (mc)^2} - mc^2$ . Тогда энергия связи К-электрона  $E = E_\gamma - T$ . После подстановки получим ответ задачи  $E = E_\gamma - \sqrt{(eH\rho)^2 + m^2c^4} + mc^2 = 26 \text{ кэВ}$ .

2. Источник  $\gamma$ -квантов расположен над поглотителем на расстоянии 20 м. С какой скоростью необходимо перемещать вверх источник, чтобы в месте расположения поглотителя полностью скомпенсировать гравитационное изменение энергии  $\gamma$ -квантов, обусловленное полем тяготения Земли.

## Решение

Изменение частоты  $\gamma$ -квантов на высоте  $h$ , связанное с гравитационным притяжением  $\gamma$ -кванта, найдем из закона сохранения энергии  $dE_\gamma = (-E_\gamma g/c^2)dh$ . Учитывая, что  $E_\gamma = \hbar\omega$  после разделения переменных и интегрирования, получим:  $\omega(h) = \omega_0 \exp(-gh/c^2)$ , где  $\omega_0$  - частота  $\gamma$ -квантов у поверхности Земли ( $h=0$ ).  $\Delta\omega = \omega_0(1 - \exp(-gh/c^2)) \approx \omega_0 gh/c^2$  в случае малых высот. Перемещение источника вверх приводит к увеличению частоты и энергии  $\gamma$ -квантов за счет эффекта Доплера:  $\Delta\omega = \omega_0 v/c$  (ограничимся случаем малых скоростей движения источника). Приравняв правые части приведенных выше соотношений, получим ответ на вопрос задачи:  $v = gh/c = 6,5 \cdot 10^{-5}$  см/с.

### Аудиторные задачи

1. Изомерное ядро  $^{81}\text{Se}^m$  с энергией возбуждения 103 кэВ переходит в основное состояние, испуская или  $\gamma$ -квант, или конверсионный электрон с К-оболочки атома (энергия связи К-электрона 12,7 кэВ). Найти скорости ядра отдачи в обоих случаях.

Ответ: 0,41 и 1,25 км/с.

2. Атомы  $^{203}\text{Tl}$ , возникающие в результате  $\beta$ -распада атомов  $^{203}\text{Hg}$ , испускают четыре группы конверсионных электронов с кинетическими энергиями 266,3; 264,2; 263,6 и 193,3 кэВ. Какой оболочке атома  $\text{Tl}$  - К,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  - соответствует каждая группа? Энергия связи электронов на этих оболочках соответственно равна 85,7; 15,4; 14,8; 12,7 кэВ. Вычислить также энергии  $\gamma$ -квантов, сопровождающих этот распад.

Ответ: 279 кэВ.

3. Свободное ядро  $^{191}\text{Ir}$  с энергией возбуждения  $E=129$  кэВ перешло в основное состояние, испустив  $\gamma$ -квант. Найти относительное изменение энергии данного  $\gamma$ -кванта, возникающее вследствие отдачи ядра.

Ответ:  $\Delta E_\gamma/E_\gamma = E/2Mc^2 = 3,6 \cdot 10^{-7}$ ;  $M$  - масса ядра.

4. С какой скоростью должны сближаться источник и поглотитель, состоящие из свободных ядер  $^{191}\text{Ir}$ , чтобы можно было наблюдать максимальное поглощение  $\gamma$ -квантов с энергией 129 кэВ?

Ответ:  $v = \hbar\omega/Mc = 0,22$  км/с;  $M$ -масса ядра.

5. Возбужденные ядра  $^{117}\text{Sn}$ , возникающие при  $\beta$ -распаде  $^{117}\text{In}$ , переходят в основное состояние, испуская последовательно два  $\gamma$ -кванта. Этот процесс сопровождается испусканием конверсионных электронов К-электронов, для которых  $H\rho$  равно 3050 и 1300 Э·см ( $H$  - напряженность магнитного поля,  $\rho$  - радиус кривизны траектории конверсионного электрона в магнитном поле). Энергия связи К-электронов 29 кэВ. Определить энергию  $\gamma$ -квантов.

Ответ: 566 и 161 кэВ.

6. При испускании  $\gamma$ -квантов, соответствующих мессбауэровской линии, импульс отдачи сообщается всему кристаллу в целом, поэтому импульс излучающего атома не изменяется. Средняя же кинетическая энергия такого атома возрастает вследствие некоторого уменьшения его массы за счет излучения. Это приводит к тому, что частота мессбауэровской линии оказывается меньше частоты перехода  $\omega_0$ , а именно:

$\omega = \omega_0(1 - \langle v^2 \rangle / 2c^2)$ , где  $\langle v^2 \rangle$  - квадрат среднеквадратической скорости атома.

1). Получить это выражение из энергетических соображений.

2). На сколько градусов температура источника должна быть больше температуры поглотителя, чтобы температурное смещение мессбауэровской  $\gamma$ -линии  $^{57}\text{Fe}$  полностью компенсировало гравитационное смещение, если источник находится над поглотителем на расстоянии  $l=20$  м? Считать, что средняя кинетическая энергия атомов в кристалле равна  $3kT/2$ .

Ответ: 2)  $\Delta T = Mgl/3k = 0,9^\circ\text{K}$ .

7. Получить выражение, определяющее пороговую энергию  $\gamma$ -кванта для образования пары электрон-позитрон в поле ядра массой  $M$ .

## Домашние задачи

1. Возбужденные ядра  $^{141}\text{Pr}$ , возникающие при  $\beta$ -распаде ядер  $^{141}\text{Ce}$ , переходят в основное состояние, испуская или  $\gamma$ -кванты, или конверсионные электроны. Определить энергию возбуждения ядра  $^{141}\text{Pr}$ , если конверсионные К-электроны имеют  $H\rho=1135 \text{ Э} \cdot \text{см}$ , а энергия связи К-электронов равна 42 кэВ.

Ответ: 145 кэВ.

2. Свободное ядро  $^{119}\text{Sn}$  с энергией возбуждения  $E=23,8 \text{ кэВ}$  переходит в основное состояние, испустив  $\gamma$ -квант. Ширина данного уровня  $\Gamma = 2,4 \cdot 10^{-8} \text{ эВ}$ . Возможно ли резонансное поглощение такого  $\gamma$ -кванта другим свободным ядром  $^{119}\text{Sn}$ , находящемся в основном состоянии, если первоначально оба ядра покоились?

Ответ: нет, точнее вероятность ничтожно мала, так как уменьшение энергии  $\gamma$ -кванта при отдаче значительно больше ширины уровня  $\Gamma$ .

3. Как показал Мессбауэр, в спектре  $\gamma$ -квантов, которые испускают возбужденные ядра, входящие в состав твердого тела, каждая линия  $\gamma$ -спектра содержит две компоненты: очень узкую с энергией, равной энергии перехода в ядрах, и несравненно более широкую, смещенную относительно первой. Для  $\gamma$ -линии  $^{57}\text{Fe}$ , соответствующей энергии 14,4 кэВ, относительный сдвиг смещенной компоненты составляет  $\Delta\lambda/\lambda = 1,35 \cdot 10^{-7}$ . Убедиться, что эта компонента обусловлена эффектом отдачи ядер при испускании  $\gamma$ -квантов.

4. Относительные ширины линий  $\gamma$ -спектра для  $^{57}\text{Fe}$  и  $^{67}\text{Zn}$  равны соответственно  $3,0 \cdot 10^{-13}$  и  $5,0 \cdot 10^{-16}$ . На какую высоту от поверхности Земли необходимо поднять источник ( $^{57}\text{Fe}$  и  $^{67}\text{Zn}$ ), чтобы при регистрации на поверхности Земли гравитационное смещение линии превосходило ширину этих линий?

Ответ:  $h(\text{Fe}) \geq 2,8 \text{ км}$ ;  $h(\text{Zn}) \geq 4,6 \text{ м}$ .



5. Поглощение  $\gamma$ -линии Мессбауэра с энергией 129 кэВ уменьшается в два раза при относительной скорости источника и поглотителя ( $^{191}\text{Ir}$ )  $v=1,2$  см/с. Имея в виду, что испускание данной линии связано с переходом возбужденных ядер непосредственно в основное состояние, найти ширину и среднее время жизни соответствующего возбужденного уровня.

Ответ:  $\Gamma = 2\hbar\omega v/c = 10^{-5}$  эВ;  $\tau = 0,6 \cdot 10^{-10}$  с.

6. Показать, что  $\gamma$ -квант не может образовать пару электрон-позитрон вне поля ядра, даже если такой процесс энергетически возможен.

7. Определить суммарную кинетическую энергию пары электрон-позитрон, которую образует  $\gamma$ -квант с пороговым значением энергии в поле покоящегося протона.

Ответ:  $T = \alpha^2 m_e c^2 / (1 + \alpha) = 0,6$  эВ, где  $\alpha = 2m_e/m_p$ .

# 13 ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

## СЕМИНАР 15

### ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

#### Литература

1. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика. Книга 1: Физика атомного ядра. М.: Энергоатомиздат, 1993.
2. Сивухин Д.В. Атомная и ядерная физика. Часть 2. М.: Наука, 1986.
3. Иродов И.Е. Задачи по квантовой физике. М.: Высшая школа, 1991.
4. Субатомная физика / Под редакцией проф. Б.С.Ишханова. М.: Изд-во МГУ, 1994.

1. Нерелятивистская частица массы  $m_1$  с кинетической энергией  $T_1$  испытала упругое рассеяние на первоначально покоившемся ядре массы  $m_2$ . Найти в с.ц.м. импульс каждой частицы и их суммарную кинетическую энергию.

#### Решение

Для решения задачи воспользуемся свойством инвариантности (независимости от выбора системы отсчета) квадрата 4-импульса. В качестве такого инварианта удобно рассмотреть квадрат суммы 4-импульсов сталкивающихся частиц  $s = (p_1 + p_2)^2$ . В л.с., связанной с покоящимся ядром,

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2p_1 p_2 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 E_2.$$

Поскольку в л.с. частица 1 нерелятивистская, а частица 2 покоится, то

$$s = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2m_2 c^2 (m_1 c^2 + T_1) = (m_1 c^2 + m_2 c^2)^2 + 2m_2 c^2 T_1,$$

$$\sqrt{s} \approx m_1 c^2 + m_2 c^2 + \frac{m_2 T_1}{m_1 + m_2}, \quad \text{т.к. } T_1 \ll m_1 c^2, m_2 c^2.$$

С другой стороны в с.д.м. ( $\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = 0$ ):

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1^* + E_2^*)^2 = (m_1c^2 + m_2c^2 + T_1^* + T_2^*)^2,$$

$$\sqrt{s} = m_1c^2 + m_2c^2 + \frac{p^{*2}}{2m_1} + \frac{p^{*2}}{2m_2}, \quad \text{где } p^* = |\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_2^*|.$$

Из последнего уравнения выражаем  $p^*$  через  $\sqrt{s}$ , а потом через  $T_1$ :

$$p^{*2} = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} (\sqrt{s} - m_1c^2 - m_2c^2), \quad p^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2m_1T_1}.$$

Суммарная кинетическая энергия частиц в с.д.м. равна:

$$T^* = T_1^* + T_2^* = \frac{m_1 + m_2}{2m_1m_2} p^{*2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1.$$

2. Найти скорости продуктов реакции  $n + {}^{10}\text{B} \rightarrow \alpha + {}^7\text{Li}$ , протекающей в результате взаимодействия нейтронов с первоначально покоящимися ядрами бора, если кинетическая энергия нейтронов пренебрежимо мала.

### Решение

Запишем законы сохранения импульса и энергии для данной реакции:

$$\vec{p}_{Li} + \vec{p}_\alpha = 0, \quad |\vec{p}_{Li}| = |\vec{p}_\alpha| = p,$$

т.к. ядро бора до взаимодействия покоилось, а кинетическая энергия нейтронов считается пренебрежимо малой,

$$M_n c^2 + M_B c^2 = M_{Li} c^2 + M_\alpha c^2 + Q,$$

где  $Q$  - энергия реакции. Очевидно, что

$$Q = \frac{\vec{p}_{Li}^2}{2M_{Li}} + \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2M_\alpha} = \frac{M_{Li} + M_\alpha}{2M_{Li}M_\alpha} p^2,$$

отсюда

$$v_{Li} = \frac{p}{M_{Li}}, v_\alpha = \frac{p}{M_\alpha}, \quad \text{где } p = \sqrt{\frac{2M_{Li}M_\alpha}{M_{Li} + M_\alpha}} Q,$$

$$Q = (M_n + M_B - M_{Li} - M_\alpha)c^2.$$

3. Железную мишень облучают пучком протонов с кинетической энергией  $T_p = 22$  МэВ. В результате реакции  $p + \text{Fe} \rightarrow n + \text{Co}$ , выход которой  $w = 1.2 \cdot 10^{-3}$ , образуется радионуклид  $^{59}\text{Co}$  с периодом полураспада  $T_{1/2} = 77.2$  суток. Определить активность мишени через  $\tau = 2.5$  часа после начала облучения при токе протонов  $J = 21$  мкА.

### Решение

Активность мишени можно выразить через постоянную распада  $\lambda$  и число радиоактивных ядер  $N(t)$  в момент времени  $t$ :

$$A(t) = \lambda N(t).$$

Под действием протонного пучка за время  $\tau$  образуется  $N(\tau)$  радиоактивных ядер  $\text{Co}$ ,

$$N(\tau) = \frac{J}{e_p} \cdot w \cdot \tau,$$

где  $e_p = e$  - заряд протона. Постоянная распада может быть выражена через период полураспада:

$$N(T_{1/2}) = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Таким образом,

$$A = \frac{J w \tau \ln 2}{e T_{1/2}}.$$

4. Показать, что для нейтронов с длиной волны  $\lambda$  сечение рассеяния на ядре равно геометрическому сечению ядра  $S \approx \pi(R + \bar{\lambda})^2$ , где  $R$  - радиус ядра,  $\bar{\lambda} = \lambda/2\pi$ . Оценить сечение рассеяния для нейтрона с кинетической энергией  $T_n = 10$  МэВ, налетающего на ядро атома золота.

### Решение

Рассмотрим нейтроны с орбитальным моментом  $l$  и прицельным параметром  $b_l$ . Геометрическое сечение ядра для них можно представить в виде кольца со средним радиусом  $b_l$ . Площадь этого кольца

$$\Delta S_l = \frac{\pi}{2}(b_{l+1}^2 - b_{l-1}^2) = (2l+1)\pi\bar{\lambda}^2.$$

Максимально возможное значение  $l$  определяется условием  $b_{l,max} \leq R$ , где  $R$  - радиус ядра. Отсюда  $l_{max} \approx R/\bar{\lambda}$  и

$$S = \sum_{l=0}^{R/\bar{\lambda}} \Delta S_l \approx \pi(R + \bar{\lambda})^2.$$

Для нейтронов с энергией  $T_n = 10$  МэВ сечение равно  $S_{Au} = 2.9$  барн.

### Аудиторные задачи

1. Дейтроны с кинетической энергией  $T_d = 0.30$  МэВ упруго рассеиваются на первоначально покоящихся протонах. Найти кинетическую энергию дейтронов, рассеиваемых на максимально возможный угол в л.с. Чему равен этот угол?

Ответ:  $T'_d \approx T_d/3 = 0.1$  МэВ,  $\sin(\theta_{max}) = m_p/m_d = 30^\circ$ .

2. Найти кинетическую энергию нейтронов, возникающих при фоторасщеплении бериллия в реакции  $\gamma + {}^9\text{Be} \rightarrow n + {}^8\text{Be}$ ,  $Q = -1.65$  МэВ, гамма-квантами с энергией  $E_\gamma = 1.78$  МэВ.

Ответ:  $T_n \approx 8/9(E_\gamma - |Q|)$ , если  $p_n \approx 0$ .

3. Выход реакции фоторождения нейтронов при облучении медной пластинки толщиной  $d = 1.0$  мм  $\gamma$ -квантами с энергией 17 МэВ равен  $w = 4.2 \cdot 10^{-4}$ . Найти сечение данной реакции.

Ответ:  $\sigma = w/nd = 0.05$  барн,  $n$  - концентрация ядер.

4. Найти вероятность того, что в результате взаимодействия медленных нейтронов с нулевым орбитальным моментом ( $l = 0$ ) с ядрами, спин которых  $I = 1$ , промежуточные ядра образуются в состоянии со спином  $J = 3/2$ . Считать, что спины нейтронов и ядер имеют всевозможные взаимные ориентации.

Ответ:  $P = \frac{2J + 1}{(2S + 1)(2I + 1)} = \frac{2}{3}$ .

5. Определить с помощью формулы Брейта-Вигнера ширину  $\Gamma$  уровня промежуточного ядра, возникающего при захвате нейтрона ядром  $^{113}\text{Cd}$ , если сечение радиационного захвата при кинетической энергии нейтрона  $T = 2T_0$  в 15 раз меньше сечения этого процесса при  $T = T_0$ , где  $T_0 = 0.178$  эВ. Считать, что  $\Gamma$  не зависит от энергии нейтронов и  $\Gamma_n \ll \Gamma$ .

Ответ:  $\Gamma \approx 2T_0/\sqrt{15/\sqrt{2}-1} = 0.115$  эВ.

### Домашние задачи

1. Альфа-частица с кинетической энергией  $T_\alpha = 1.0$  МэВ упруго рассеялась на покоившемся ядре  $^6\text{Li}$ . Определить кинетическую энергию ядра отдачи, отлетевшего под углом  $\theta = 30^\circ$  к первоначальному направлению движения  $\alpha$ -частицы.

Ответ:  $T'_\alpha = \frac{4M_\alpha M_A}{(M_\alpha + M_A)^2} T_\alpha \cos^2(\theta) = 0.7$  МэВ.

2. Какую долю кинетической энергии теряет нерелятивистская частица  $\alpha$ -частица при упругом рассеянии под углом  $\theta^* = 60^\circ$  в с.д.м. на первоначально покоящемся ядре нуклида  $^{12}\text{C}$ ?

Ответ:  $\frac{\Delta T_\alpha}{T_\alpha} = \frac{4M_\alpha M_A}{(M_\alpha + M_A)^2} T_\alpha \sin^2\left(\frac{\theta^*}{2}\right) = 0.19$  МэВ.

3. Получить формулу для пороговой кинетической энергии налетающей частицы ( в л.с.), при которой становится возможной эндознергетическая реакция:

$$T_{\text{пор}} = \frac{m + M}{M} |Q|,$$

где  $m$  и  $M$  - масса налетающей частицы и ядра,  $Q$  - энергия реакции.

4. Оценить минимальную кинетическую энергию налетающей  $\alpha$ -частицы, необходимую для ее прохождения над кулоновским потенциальным барьером ядра  ${}^7\text{Li}$ . Возбудит ли  $\alpha$ -частица такой энергии реакцию  $\alpha + {}^7\text{Li} \rightarrow n + {}^{10}\text{B}$ ?

Ответ:  $T_{\min} = \frac{11}{7} \frac{q_\alpha q_{\text{Li}}}{R} \approx 2.8 \text{ МэВ}$ , где  $R = R_\alpha + R_{\text{Li}}$ .

$T_{\text{пор}} = 4.4 \text{ МэВ} > T_{\min}$  реакция не возбуждается.

5. Через камеру, в которой находится газообразный азот при нормальных условиях, проходит узкий пучок моноэнергетических нейтронов с кинетической энергией 0.025 эВ. Поток нейтронов  $\Phi = 2.0 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$ . Найти сечение реакции  $n + {}^{14}\text{N} \rightarrow p + {}^{14}\text{C}$ , если известно, что за время  $t = 5.0 \text{ мсек}$  на длине пучка  $l = 10 \text{ мм}$  возникает  $N = 95$  протонов.

Ответ:  $\sigma = N / (2n_0 l \Phi t) = 1.8 \text{ бн}$ , где  $n_0$  — число Лошмидта.

6. Исходя из формулы Брейта-Вигнера для сечения образования составного ядра  $\sigma_a$ , получить выражения для сечений процессов упругого рассеяния и радиационного захвата нейтрона.

Ответ:  $\sigma_{nn} = \sigma_a \Gamma_n / \Gamma$ ,  $\sigma_{n\gamma} = \sigma_a \Gamma_\gamma / \Gamma$ .

# 14 ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

## СЕМИНАР 16

### СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

#### Литература

1. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика. Книга 2: Физика элементарных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1993.
2. Субатомная физика / Под редакцией проф. Б.С.Ишханова. М.: Изд-во МГУ, 1994.
3. Окунь Л.Б. Физика элементарных частиц. М.: Наука, 1984.
4. Никитин Ю.П. и др. Сборник задач по физике элементарных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1992.

1. Выяснить с помощью законов сохранения лептонного и барионного зарядов, возможны ли следующие процессы:

- a)  $n \rightarrow p + e^- + \nu_e$       b)  $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+$       c)  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$   
d)  $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \pi^0$       e)  $\pi^- + n \rightarrow K^- + K^0$       f)  $K^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$

#### Решение

Для анализа процессов а) – ф) воспользуемся таблицей 1, в которой показана характеристика различных типов взаимодействий с точки зрения законов сохранения квантовых чисел или зарядов.

Процесс а): слабый распад, в котором сохраняется барионный заряд  $B$  и каждый из лептонных зарядов  $L_e, L_\mu, L_\tau$ . Заметим, что барионный и лептонный заряды – аддитивные квантовые числа. Начальная частица нейтрон ( $n$ ) имеет  $B = 1$  и  $L_e = L_\mu = L_\tau = 0$ , конечные частицы имеют  $B = 1$ ,  $L_\mu = L_\tau = 0$  и  $L_e = 2$ , т.к. у электрона и электронного нейтрино  $L_e = 1$ . Видим, что лептонный заряд не сохраняется, следовательно, такой процесс невозможен.

Процесс б): начальные частицы имеют  $B = 1$ ,  $L_\mu = -1$ ,  $L_e = L_\tau = 0$ , конечные частицы имеют  $B = 1$ ,  $L_\mu = -1$ ,  $L_e = L_\tau = 0$ . Барионный и лептонные заряды сохраняются - процесс возможен.



Процесс с): начальные частицы имеют  $B = 0$ ,  $L_\mu = -1$ ,  $L_e = L_\tau = 0$ , конечные частицы имеют  $B = 0$ ,  $L_\mu = 1$ ,  $L_e = -2$ ,  $L_\tau = 0$ . Барнионный заряд сохраняется, а лептонные заряды  $L_e$ ,  $L_\mu$  не сохраняются - процесс невозможен.

Процесс d): начальные частицы имеют  $B = 0$ ,  $L_\mu = L_e = L_\tau = 0$ , конечные частицы имеют  $B = 0$ ,  $L_\mu = L_e = L_\tau = 0$ . Барнионный и лептонные заряды сохраняются - процесс возможен.

Процесс e): начальные частицы имеют  $B = 1$ ,  $L_\mu = L_e = L_\tau = 0$ , конечные частицы имеют  $B = 0$ ,  $L_\mu = L_e = L_\tau = 0$ . Лептонные заряды сохраняются, а барнионный нет - процесс невозможен.

Процесс f): начальные частицы имеют  $B = 1$ ,  $L_\mu = L_e = L_\tau = 0$ , конечные частицы имеют  $B = 1$ ,  $L_\mu = L_e = L_\tau = 0$ . Барнионный и лептонные заряды сохраняются - процесс возможен.

2. Определить частицы  $X$ , образующиеся в реакциях сильного взаимодействия:

- a)  $\pi^- + p \rightarrow K^- + p + X$ ,    b)  $\bar{p} + p \rightarrow \Lambda + \pi^- + X$ ,  
 c)  $K^- + n \rightarrow \Sigma^0 + X$ ,    d)  $p + \bar{p} \rightarrow \pi^0 + K^- + X$ .

### Решение

Процесс a): т.к. в сильных взаимодействиях сохраняется барнионный заряд, странность и электрический заряд, то частица  $X$  должна быть мезоном ( $B = 0$ ), иметь странность противоположную  $K^-$ , т.е.  $S = 1$  и нулевой электрический заряд. Эти свойства имеет  $\bar{K}^0$  мезон.

Процесс b): в силу закона сохранения барнионного заряда частица  $X$  - антибарнион, в силу закона сохранения странности  $X$  имеет странность  $S = 1$ , в силу закона сохранения электрического заряда частица  $X$  заряжена положительно. Эти свойства имеет антигиперон  $\bar{\Sigma}^+$ .

Процесс c): в силу закона сохранения барнионного заряда частица  $X$  - мезон, в силу закона сохранения странности  $X$  имеет странность  $S = 0$ , в силу закона сохранения электрического заряда частица  $X$  заряжена отрицательно. Эти свойства имеет  $\pi^-$  мезон.

Процесс d): в силу закона сохранения барнионного заряда частица  $X$  - мезон, в силу закона сохранения странности  $X$  имеет странность  $S = 1$ ,

в силу закона сохранения электрического заряда частица  $X$  заряжена положительно. Эти свойства имеет  $K^+$  мезон.

3. Какой кварковый состав имеют следующие частицы:  $n$ ,  $\Lambda^0$ ,  $\overline{D}^0$  и  $\Xi^+$ ?

### Решение

При решении задачи необходимо использовать свойство аддитивности квантовых чисел или зарядов, т.е. электрический заряд, барионный заряд, странность и другие квантовые числа адрона должны быть равны сумме соответствующих квантовых чисел кварков, из которых он состоит.

$$n: \quad Q = 0, B = 1, S = 0$$

В силу того, что барионный заряд нейтрона  $B = 1$ , нейтрон состоит из трех легких кварков  $u$  или  $d$ . Тяжелые кварки, например  $s$ , должны были бы входить в состав нейтрона парой  $s\bar{s}$ , т.к.  $S = 0$ . Но тогда нейтрон имел бы ненулевой электрический заряд, равный заряду третьего кварка и  $B = 1/3$ . Нулевой электрический заряд имеет комбинация  $udd$ .

$$\Lambda^0: \quad Q = 0, B = 1, S = -1$$

Т.к.  $\Lambda$ -гиперон – барион ( $B = 1$ ), он состоит из трех кварков. Один из кварков странный  $s$ , поскольку  $S = -1$ , остальные кварки легкие ( $u$  или  $d$ ). Нулевой электрический заряд имеет комбинация  $uds$ .

$$\overline{D}^0: \quad Q = 0, B = 0, C = -1$$

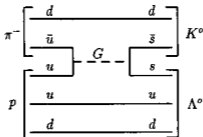
$\overline{D}^0$  – мезон ( $B = 0$ ), следовательно, состоит из одного кварка и одного антикварка. Один из кварков –  $\bar{c}$ , т.к.  $\overline{D}^0$  имеет очарование  $C = -1$ . Чтобы получить нулевой электрический заряд, необходимо вторым кварком взять  $u$ .

$$\Xi^+: \quad Q = 1, B = -1, S = 2$$

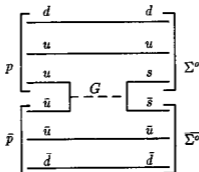
Рассматриваемый антигиперон имеет  $B = -1$  и должен состоять из трех антикварков. Поскольку странность  $\Xi^{\bar{+}}$ -гиперона  $S = 2$ , то два кварка  $\bar{s}$ . Чтобы получить электрический заряд  $Q = 1$ , нужно третьим кварком взять  $\bar{d}$ . Следовательно, состав  $\Xi^{\bar{+}}$ -гиперона  $\bar{d}\bar{s}\bar{s}$ .

4. Проверить выполнение законов сохранения и построить кварковые диаграммы процессов:  $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$ ,  $p + \bar{p} \rightarrow \Sigma^0 + \Sigma^0$ ,  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ .

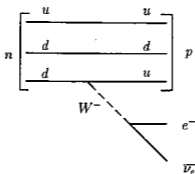
$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$  :



$p + \bar{p} \rightarrow \Sigma^0 + \Sigma^0$  :



$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e :$$



### Аудиторные задачи

1. Указать причины, запрещающие нижеследующие процессы:

- a)  $\Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$ ,    b)  $\pi^- + p \rightarrow K^+ + K^-$ ,    c)  $K^- + n \rightarrow \Omega^- + K^+$   
 d)  $n + p \rightarrow \Sigma^+ + \Lambda^0$ ,    e)  $\pi^- \rightarrow \mu^- + e^+ + e^-$ ,    f)  $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$

2. Определить частицы  $X$ , образующиеся в реакциях сильного взаимодействия:

- a)  $K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + X$ ,    b)  $\pi^- + p \rightarrow K^+ + K^0 + X$ ,  
 c)  $p + \bar{p} \rightarrow \Sigma^- + \pi^+ + X$ ,    d)  $\pi^- + p \rightarrow K^- + \pi^- + p + X$ .

3. Проверить выполнение законов сохранения и построить кварковые диаграммы следующих процессов:  $K^- + p \rightarrow \pi^- + \Lambda^0$ ,  $\pi^+ + p \rightarrow \Xi^0 + k^+ + K^+$ ,  $p + \bar{p} \rightarrow \Sigma^0 + \Lambda^0$ .

4. При изучении реакции  $K^- + p \rightarrow \Lambda + \pi^+ + \pi^-$  под действием  $K^-$ -мезонов с кинетической энергией  $T_K = 790$  МэВ обнаружено, что эта реакция частично идет через связанное состояние  $(\pi^- \Lambda)$  в две стадии:

$$K^- + p \rightarrow (\pi^- \Lambda) + \pi^+, \quad (\pi^- \Lambda) \rightarrow \pi^- + \Lambda,$$

причем возникающие  $\pi^+$  мезоны имеют в системе центра масс сталкивающихся частиц кинетическую энергию  $T_{\pi^+} = 300$  МэВ. Определить массу ( $\pi^- \Lambda$ )-резонанса и его энергию распада.

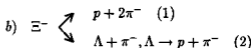
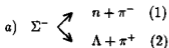
Ответ: масса резонанса  $M = 1.38$  ГэВ, энергия распада  $Q = 123$  МэВ.

5. Найти зависимость угла разлета частиц в лабораторной системе отсчета, образующихся при распаде движущейся частицы на две вторичные, от энергии одной из образующихся частиц.

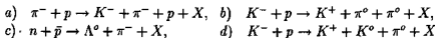
$$\text{Ответ: } \cos(\psi) = \frac{E_1(E_a - E_1) - (m_a^2 - m_1^2 - m_2^2)/2}{\sqrt{E_1^2 - m_1^2} \sqrt{(E_a - E_1)^2 - m_2^2}}$$

### Домашние задачи

1. Какие каналы приведенных ниже реакций запрещены и по какой причине:



2. Определить частицы  $X$ , образующиеся в реакциях сильного взаимодействия:



3. Какие элементарные частицы можно наблюдать при столкновении антипротонов с энергией 50 МэВ с неподвижной водородной мишенью?

4. Нарисовать кварковые диаграммы и определить пороги рождения  $\Xi^0$ -барiona в реакциях  $\gamma + p$ ,  $\pi^- + p$ ,  $K^- + p$ .

5. Проверить выполнение законов сохранения в следующих полулептонных и адронных распадах. Нарисовать их кварковые диаграммы.

- a)  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ , b)  $\Omega^- \rightarrow \Lambda + K^-$ , c)  $K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ ,  
 d)  $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$ , e)  $\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$ , f)  $\Xi^- \rightarrow \Sigma^0 + e^- + \bar{\nu}_e$

6. Полулептонные распады некоторых странных гиперонов обусловлены процессом распада странного кварка  $s \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$ , в котором исходная странность уменьшается на единицу. Какие из перечисленных ниже распадов удовлетворяют этому правилу:

- 1)  $\Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  2)  $\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e$  3)  $\Xi^- \rightarrow \Lambda + e^- + \bar{\nu}_e$   
 4)  $\Xi^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e$  5)  $\Xi^- \rightarrow \Sigma^0 + e^- + \bar{\nu}_e$  6)  $\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ + e^- + \bar{\nu}_e$   
 7)  $\Xi^0 \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  8)  $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$  9)  $\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + e^- + \bar{\nu}_e$

Ответ: 1, 2, 3, 5, 6, 8.

7. Как изменится порог реакции рождения частиц, если протон мишени движется навстречу налетающей частице с кинетической энергией  $T = 25$  МэВ в реакциях:

- a)  $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + n$ , b)  $K^+ + p \rightarrow K^+ + K^0 + \Sigma^+$ .

Ответ: уменьшится а) с 320 МэВ до 260 МэВ, б) с 1.43 ГэВ до 1.05 ГэВ.

8. Нейтральная частица массой  $m$  и импульсом  $p$  распадается на лету на два  $\gamma$ -кванта. Определить максимальную и минимальную энергию одного из образующихся  $\gamma$ -квантов в лабораторной системе отсчета. Можно ли, зная минимальную и максимальную энергию  $\gamma$ -кванта, найти массу распадающейся частицы?

Ответ:  $E_\gamma^{\min} = \frac{1}{2}(E - p)$ ,  $E_\gamma^{\max} = \frac{1}{2}(E + p)$ ,  $m^2 = 4E_\gamma^{\max} E_\gamma^{\min}$ .

## ПРИНЦИПЫ СИММЕТРИИ В ФИЗИКЕ АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

### Литература

1. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика. М.: Энергоатомиздат, 1993.
  2. Субатомная физика / Под редакцией проф. Б.С.Ишханова. М.: Изд-во МГУ, 1994.
  3. Окунь Л.Б. Физика элементарных частиц. М.: Наука, 1984.
  4. Никитин Ю.П. и др. Сборник задач по физике элементарных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1992.
1. Пользуясь обобщенным принципом Паули, найти:
    - а) изотопический спин  $\rho$ -мезона, распадающегося по каналу  $\rho \rightarrow \pi^+ \pi^-$ . Считать спин  $\rho$ -мезона  $J_\rho = 1$ ;
    - б) изотопический спин дейтрона, полагая, что дейтрон есть  ${}^3S_1$ -состояние  $n$ - $p$ -системы.

### Решение

Принцип Паули для тождественных фермионов (т.е. частиц одного сорта, имеющих одинаковую массу, заряд, полупелый спин, время жизни и другие характеристики) формулируется следующим образом: волновая функция системы двух тождественных фермионов должна быть антисимметричной, т.е. менять знак при перестановке любых двух частиц. Волновая функция системы тождественных бозонов должна быть симметричной относительно перестановки любых двух частиц.

Четность системы двух тождественных бозонов определяется множителем:

$$P = (-1)^l (-1)^S,$$

а системы из двух тождественных фермионов -

$$P = (-1)^l (-1)^{S+1},$$

где  $l$  - относительный орбитальный момент импульса частиц,  $S$  - суммарный спин системы.

Обобщенный принцип Паули применяют к "обобщенно тождественным" частицам, под которыми понимают частицы, являющиеся компонентами соответствующего изотопического мультиплетта. Формулировка обобщенного принципа Паули сохраняет свойство симметрии полной волновой функции системы, но к перестановке координат и спинов добавляет перестановку изоспинов.

Четность системы двух тождественных бозонов в "обобщенном" смысле определяется множителем

$$P = (-1)^l (-1)^S (-1)^I,$$

а системы из двух тождественных фермионов

$$P = (-1)^l (-1)^{S+1} (-1)^{I+1},$$

где  $I$  - полный изоспин системы.

а). В сильных взаимодействиях изоспин сохраняется, т.е.  $I_\rho = I$ . Четность системы двух пионов положительная, т.к.  $\pi^0$ -мезоны являются бозонами, и в силу обобщенного принципа Паули

$$P_{\pi\pi} = (-1)^l (-1)^S (-1)^I = +1.$$

Полный импульс двух пионов  $S = 0 (S_\pi = 0)$ ,  $l = 1$  в силу закона сохранения момента импульса ( $l = S_\rho$ ). Следовательно,  $I_\rho = I = 1$ .

б).  $I_d = 0$ . Рассуждения аналогичны случаю а) с учетом антисимметрии волновой функции фермионов относительно их перестановки.

2. Известно, что при малых энергиях процесс  $p + {}^7_3\text{Li} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$  сильно подавлен в силу закона сохранения четности в сильных взаимодействиях. Найти четность ядра  ${}^7_3\text{Li}$ , если внутренняя четность протона  $\eta_p = +1$ .



## Решение

Если энергия протонов невелика, то рассеяние будет происходить главным образом в  $S$ -состоянии, т.е. в системе центра масс сталкивающихся частиц их орбитальный момент относительного движения равен нулю  $l = 0$ . В силу закона сохранения четности и принципа Паули

$$\eta_{Li}\eta_p(-1)^l = (-1)^l.$$

Поскольку  $\eta_p = +1$ ,  $(-1)^l = +1$ , то должно быть  $\eta_{Li} = -1$ , чтобы данный процесс был подавлен из-за закона сохранения четности.

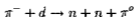
3. Чему равна  $C$ -четность позитрония? Укажите наиболее вероятные каналы распада парапозитрония ( $^1S_0$ ) и ортопозитрония ( $^3S_1$ ).

## Решение

Операция зарядового сопряжения  $\hat{C}$  изменяет знаки всех аддитивных квантовых чисел (зарядов) частиц. В случае позитрония ( $e^+e^-$ -система) операция зарядового сопряжения эквивалентна перестановке частиц системы  $e^+ \leftrightarrow e^-$ , относительно которой волновая функция системы фермионов должна быть антисимметричной. Поэтому зарядовая четность системы  $e^+e^-$  есть  $C = (-1)^{l+S}$ ,  $l$  - орбитальный момент частиц,  $S$  - полный спин системы. Зарядовая четность системы из  $n$   $\gamma$ -квантов равна  $C_{n\gamma} = (-1)^n$ . Из закона сохранения  $C$ -четности в электромагнитных взаимодействиях следует, что основной канал распада ортопозитрония - на три  $\gamma$ -кванта, а парапозитрония - на два  $\gamma$ -кванта.

## Аудиторные задачи

1. Показать, что реакция перезарядки медленных  $\pi$ -мезонов в дейтерии



запрещена, если  $l_\pi = 0$ ,  $l_\pi$  квантовое число орбитального момента  $\pi^0$  относительно системы  $nn$ . Полагать, что медленный первичный  $\pi$ -мезон

находится в состоянии с нулевым орбитальным моментом относительно дейтрона.

2. Могут ли мезонные резонансы  $\omega^0(J^P = 1^-, I = 0)$  и  $f^0(J^P = 2^+, I = 0)$  распадаться на два  $\pi$ -мезона?

Ответ: распад  $\omega \rightarrow \pi\pi$  - запрещен,  $f^0 \rightarrow \pi\pi$  - разрешен.

3. Определить внутреннюю четность  $\pi^+$  мезона из реакции  $\pi^+ + d \rightarrow p + p$ , если орбитальный момент системы пион-дейтрон  $l_{\pi d} = 0$  и внутренняя четность дейтрона  $P_d = +1$ .

Ответ:  $P_\pi = -1$ .

4. Показать, что наличие у нейтрона электрического дипольного момента равносильно нарушению закона сохранения пространственной четности в электромагнитных взаимодействиях.

Ответ:  $H_{int} = -(\vec{E}\vec{d})$ ,  $H_{int} \xrightarrow{P} -H_{int}$ .

### Домашние задачи

1. Объяснить, почему внутреннюю четность фотона считают отрицательной.

Ответ:  $\vec{A}(\vec{r}) \xrightarrow{P} \vec{A}(-\vec{r}) = -\vec{A}(\vec{r})$ .

2. Какие значения может иметь относительный орбитальный момент системы двух  $\pi^0$ -мезонов, образующихся в реакции  $p + \bar{p} \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ , если относительный орбитальный момент системы  $p\bar{p}$  равен  $L$ ?

Ответ:  $l = L + 1$ .

3. Чему равна C-четность кваркония ( $q\bar{q}$ ) и системы  $p\bar{p}$ ? Разрешен ли распад  $\psi(2S)$ ,  $J^{PC} = 1^{--}$  по каналу

$$\psi(2S) \rightarrow \eta_c + \gamma,$$

где  $\eta_c$ -мезон имеет квантовые числа  $J^{PC} = 0^{-+}$ .

Ответ:  $C_{q\bar{q}} = C_{p\bar{p}} = (-1)^{l+1}$ . Распад разрешен в состояниях с  $l = 1, 3, \dots$

4. При облучении медленными ( $l = 0$ )  $\pi^-$ -мезонами дейтериевой мишени идет реакция  $\pi^- + d \rightarrow n + n$ . Имея в виду, что пространственная четность дейтрона положительная, показать с помощью законов сохранения момента импульса и четности, что  $\pi^-$ -мезон имеет отрицательную четность.

5. Экспериментально установлено, что изоспин  $\rho$ -частицы, представляющей собой связанное состояние двух  $\pi$ -мезонов, равен 1.

1). Имея в виду, что распад  $\rho \rightarrow 2\pi$  относится к сильному взаимодействию, предсказать с помощью закона сохранения момента импульса и четность  $\rho$ -частицы (внутренние четности всех  $\pi$ -мезонов одинаковые).

2). Выписать возможные распады  $\rho^+, \rho^-, \rho^0$ -частиц на два пиона.

Ответ: а)  $P_\rho = +1$ ,  $S_\rho = 1, 3, 5, \dots$ ; б)  $\rho^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ ,  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ ,  $\rho^- \rightarrow \pi^- + \pi^0$ , распад  $\rho^0 \rightarrow 2\pi^0$  запрещен.

ТАБЛИЦА СВОЙСТВ ИЗОТОПОВ

Z	Изотоп	Спин ядра	Избыток массы атома М-А, а.е.м.	Тип распада	Период полураспада	Энергия $\alpha$ -, $\beta$ -частиц $T_{\beta}$ макс, МэВ
0	n	1/2	0,008665	$\beta^-$	11,7 мин	0,78
1	$^1H$	1/2	0,007825			
	$^2H$	1	0,014102			
	$^3H$	1/2	0,016049	$\beta^-$	12,3 года	0,018
2	$^3He$	1/2	0,016030			
	$^4He$	0	0,002604			
3	$^6Li$	1	0,015126			
	$^7Li$	3/2	0,016005			
4	$^7Be$	3/2	0,016931	K	53 дня	
	$^8Be$	0	0,005308	$2\alpha$	$10^{-16}$ с	0,039
	$^9Be$	3/2	0,012186			
	$^{10}Be$	0	0,013535	$\beta^-$	$2,5 \cdot 10^6$ лет	0,555
5	$^{10}B$	3	0,012939			
	$^{11}B$	3/2	0,009305			
6	$^{11}C$	3/2	0,011431	$\beta^+$	20,4 мин	0,97
	$^{12}C$	0	0			
	$^{13}C$	1/2	0,003354			
	$^{14}C$	0	0,003242	$\beta^-$	5570 лет	0,155
7	$^{13}N$	-	0,005739	$\beta^+$	10 мин	1,2
	$^{14}N$	1	0,003074			
	$^{15}N$	1/2	0,000108			
8	$^{15}O$	-	0,003072	$\beta^+$	2,1 мин	1,68
	$^{16}O$	0	-0,005085			
	$^{17}O$	5/2	-0,000867			
	$^{18}O$	0	-0,000840			
9	$^{18}F$		0,000950	$\beta^+$	1,87 ч	0,649
	$^{19}F$	1/2	-0,001595			
	$^{20}F$	-	-0,000015	$\beta^-$	12 с	5,42

ТАБЛИЦА СВОЙСТВ ИЗОТОПОВ (продолжение)

Z	Изотоп	Спин ядра	Избыток массы атома М-А, а.е.м.	Тип распада	Период полураспада	Энергия $\alpha$ -, $\beta$ -частиц $T_{\beta \text{ макс}}$ , МэВ
10	$^{20}\text{Ne}$	0	-0,007560			
	$^{21}\text{Ne}$	-	-0,006151			
	$^{22}\text{Ne}$	0	-0,008616			
11	$^{22}\text{Na}$	3	-0,005565	$\beta^+$	2,6 года	0,540
	$^{23}\text{Na}$	3/2	-0,010227			
12	$^{24}\text{Na}$	4	-0,009033	$\beta^-$	15 ч	1,39
	$^{23}\text{Mg}$	-	-0,005865	$\beta^+$	11 с	2,95
	$^{24}\text{Mg}$	0	-0,014956			
	$^{25}\text{Mg}$	5/2	-0,014160			
13	$^{26}\text{Mg}$	0	-0,017409			
	$^{27}\text{Mg}$	1/2	-0,015655	$\beta^-$	9,5 мин	1,75 и 1,59
	$^{26}\text{Al}$		-0,013100	$\beta^+$	6,7 с	3,20
	$^{27}\text{Al}$	5/2	-0,018465			
14	$^{28}\text{Al}$	3	-0,018092	$\beta^-$	2,3 мин	2,86
	$^{28}\text{Si}$	0	-0,023073			
	$^{29}\text{Si}$	1/2	-0,023509			
	$^{30}\text{Si}$	0	-0,026239			
15	$^{31}\text{Si}$	-	-0,024651	$\beta^-$	2,65 ч	1,47
	$^{30}\text{P}$		-0,021680	$\beta^+$	2,5 мин	3,24
	$^{31}\text{P}$	1/2	-0,026237			
16	$^{32}\text{P}$		-0,026092	$\beta^-$	14,3 дня	1,71
	$^{32}\text{S}$	0	-0,027926			
	$^{33}\text{S}$	3/2	-0,028540			
	$^{34}\text{S}$	0	-0,032136			
17	$^{35}\text{S}$	3/2	-0,030966	$\beta^-$	87 дней	0,167
	$^{35}\text{Cl}$	3/2	-0,031146			
	$^{36}\text{Cl}$	2	-0,031688	$\beta^-$ , К	$3,1 \cdot 10^5$ лет	0,714
	$^{37}\text{Cl}$	3/2	-0,034104			

ТАБЛИЦА СВОЙСТВ ИЗОТОПОВ (продолжение)

Z	Изотоп	Спин ядра	Избыток массы атома M-A, а.е.м.	Тип распада	Период полураспада	Энергия $\alpha$ -, $\beta$ -частиц $T_{\beta}$ макс, МэВ
18	<sup>36</sup> Ar	0	-0,032452			
	<sup>37</sup> Ar	3/2	-0,033228	K	32 дня	
	<sup>39</sup> Ar		-0,035678	$\beta^-$	265 лет	0,565
	<sup>40</sup> Ar	0	-0,037616			
19	<sup>39</sup> K	3/2	-0,036286			
	<sup>42</sup> K	2	-0,037583	$\beta^-$	1,52 ч	3,55 и 1,99
24	<sup>51</sup> Cr	7/2	-0,055214	K	28 дней	
25	<sup>55</sup> Mn	5/2	-0,061946			
27	<sup>58</sup> Co	2	-0,064246	K, $\beta^+$	72 дня	0,47
	<sup>59</sup> Co	7/2	-0,066811			
29	<sup>60</sup> Co	4	-0,066194	$\beta^-$	5,2 года	0,31
	<sup>63</sup> Cu	3/2	-0,070406			
	<sup>65</sup> Cu	3/2	-0,072214			
30	<sup>65</sup> Zn	5/2	-0,070766	K, $\beta^+$	245 дней	0,325
35	<sup>82</sup> Br	6	-0,083198	$\beta^-$	36 ч	0,456
36	<sup>88</sup> Sr	0	-0,09436			
	<sup>89</sup> Sr	5/2	-0,09257	$\beta^-$	51 день	1,46
	<sup>90</sup> Sr	0	-0,09223	$\beta^-$	28 лет	0,535
39	<sup>90</sup> Y	2	-0,09282	$\beta^-$	64 ч	2,24
47	<sup>107</sup> Ag	1/2	-0,09303			
53	<sup>127</sup> I	5/2	-0,09565			
	<sup>128</sup> I	1	-0,09418	K, $\beta^-$	25 мин	2,12 и 1,67
79	<sup>197</sup> Au	3/2	-0,03345			
	<sup>198</sup> Au	2	-0,03176	$\beta^-$	2,7 дня	0,96
81	<sup>204</sup> Tl		-0,02611	$\beta^-$	4,1 года	0,77
82	<sup>206</sup> Pb	0	-0,02554			
	<sup>207</sup> Pb	1/2	-0,02410			
	<sup>208</sup> Pb	0	-0,02336			

ТАБЛИЦА СВОЙСТВ ИЗОТОПОВ (продолжение)

Z	Изотоп	Спин ядра	Избыток массы атома М-А, а.е.м.	Тип распада	Период полураспада	Энергия $\alpha$ -, $\beta$ -частиц $T_{\beta \text{ макс}}$ , МэВ
83	$^{209}\text{Bi}$	9/2	-0,01958			
	$^{210}\text{Bi}$	4	-0,01589	$\alpha$	$2,6 \cdot 10^6$ лет	4,97
84	$^{210}\text{Po}$		-0,01713	$\alpha$	138 дней	5,3
86	$^{222}\text{Rn}$		0,01753	$\alpha$	3,8 дня	5,49
88	$^{226}\text{Ra}$	0	0,02536	$\alpha$	1620 лет	4,777 и 4,589
90	$^{232}\text{Th}$	0	0,03821	$\alpha$	$1,4 \cdot 10^{10}$ лет	4,00 и 3,98
	$^{233}\text{Th}$		0,04143	$\beta^-$	22 мин	1,23
92	$^{234}\text{U}$	0	0,04090	$\alpha$	$2,5 \cdot 10^5$ лет	4,76 и 4,72
	$^{235}\text{U}$	7/2	0,04393	$\alpha$	$7,1 \cdot 10^8$ лет	4,20-4,58
	$^{236}\text{U}$	0	0,04573	$\alpha$	$2,4 \cdot 10^7$ лет	4,45 и 4,50
	$^{238}\text{U}$	0	0,05076	$\alpha$	$4,5 \cdot 10^9$ лет	4,13 и 4,18
	$^{239}\text{U}$		0,05432	$\beta^-$	23,5 мин	1,21
94	$^{238}\text{Pu}$		0,04952	$\alpha$	89,6 лет	5,50 и 5,45
	$^{239}\text{Pu}$	1/2	0,052116	$\alpha$	$2,4 \cdot 10^4$ лет	5,15-5,10

## АДДИТИВНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Характеристика		Взаимодействие		
		сильное	эл.магнитное	слабое
Электрический заряд	$Q$	+	+	+
Энергия	$E$	+	+	+
Импульс	$\vec{p}$	+	+	+
Угловой момент	$J$	+	+	+
Барионный заряд	$B$	+	+	+
Лептонные заряды $L_e, L_\mu, L_\tau$		+	+	+
Странность	$S$	+	+	-
Очарование	$C$	+	+	-
Красота	$B$	+	+	-
Истина	$T$	+	+	-
Изоспин	$I$	+	-	-
Проекция изоспина	$I_3$	+	+	-

## МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Характеристика		Взаимодействие		
		сильное	эл.магнитное	слабое
Пространственная четность	$P$	+	+	-
Зарядовая четность	$C$	+	+	-
Временная четность	$T$	+	+	-
Комбинированная четность $CP$		+	+	-
$CPT$ - четность	$CPT$	+	+	+
$G$ - четность	$G$	+	-	-



## КВАРКИ\*

Характеристика	u	d	c	s	t	b
Электрический заряд $Q$	+2/3	-1/3	+2/3	-1/3	+2/3	-1/3
Изоспин $I$	1/2	1/2	0	0	0	0
Проекция изоспина $I_3$	+1/2	-1/2	0	0	0	0
Странность $S$	0	0	0	-1	0	0
Очарование $C$	0	0	+1	0	0	0
Красота $B$	0	0	0	0	0	-1
Истина $T$	0	0	0	0	+1	0
Масса, ГэВ $M$	0.007	0.015	1.3	0.2	175	4.8

\* Все кварки имеют спин  $1/2$ , барионный заряд  $B = 1/3$  и нулевой лептонный заряд  $L_e = L_\mu = L_\tau = 0$ . Каждому кварку соответствует антикварк с тождественным значением спина и изоспина, и противоположными по знаку значениями электрического заряда и других квантовых чисел.

## ЛЕПТОНЫ\*

Характеристика	e	$\mu$	$\tau$	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$
Электрический заряд $Q$	-1	-1	-1	0	0	0
Лептонный заряд $L_e$	1	0	0	1	0	0
Лептонный заряд $L_\mu$	0	1	0	0	1	0
Лептонный заряд $L_\tau$	0	0	1	0	0	1
Масса, МэВ $M$	0.511	105.6	1784.1	$< 13 \cdot 10^{-6}$	$< 0.25$	$< 35.0$

\* Все лептоны имеют спин  $1/2$  и нулевой барионный заряд. Каждому лептону отвечает античастица с противоположным по знаку значением электрического и лептонного зарядов.

## МЕЗОНЫ

Частица	$I(J^P)$	М, МэВ	$\tau$ , сек	Состав	Основной распад
$\pi^+(\pi^-)$	$1(0^-)$	139.56	$2.60 \cdot 10^{-8}$	$ud(\bar{u}d)$	$\pi \rightarrow \mu\nu_\mu$
$\pi^0$	$1(0^-)$	134.97	$8.4 \cdot 10^{-17}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$	$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$
$\eta$	$0(0^-)$	548.8	$5.9 \cdot 10^{-22}$	$c_1(u\bar{u} + d\bar{d}) + c_2\bar{s}s$	$\eta \rightarrow \gamma\gamma, \eta \rightarrow 3\pi$
$\rho$	$1(1^-)$	768.3	$4.7 \cdot 10^{-24}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	$\rho \rightarrow \pi\pi$
$K^+(K^-)$	$\frac{1}{2}(0^-)$	493.64	$1.24 \cdot 10^{-8}$	$u\bar{s}(\bar{u}s)$	$K \rightarrow \mu\nu_\mu$
$K^0(\bar{K}^0)$	$\frac{1}{2}(0^-)$	497.67	$K_S^0: 8.9 \cdot 10^{-11}$ $K_L^0: 5.17 \cdot 10^{-8}$	$d\bar{s}(\bar{d}s)$	$K^0 \rightarrow \pi^\pm e^\mp \nu_e,$ $K^0 \rightarrow 3\pi$
$K^{*\pm}$	$\frac{1}{2}(1^-)$	891.8	$1.4 \cdot 10^{-23}$	$u\bar{s}(s\bar{u})$	$K^* \rightarrow K\pi$
$K^{*0}$	$\frac{1}{2}(1^-)$	896.1	$1.4 \cdot 10^{-23}$	$d\bar{s}(\bar{d}s)$	
$\omega$	$0(1^-)$	781.9	$8.2 \cdot 10^{-23}$	$c_1(u\bar{u} + d\bar{d}) + c_2\bar{s}s$	$\omega \rightarrow 3\pi$
$D^+(D^-)$	$\frac{1}{2}(0^-)$	1869	$1.06 \cdot 10^{-12}$	$c\bar{d}(\bar{c}d)$	$D \rightarrow KX$
$D^0(\bar{D}^0)$	$\frac{1}{2}(0^-)$	1864	$4.2 \cdot 10^{-13}$	$c\bar{u}(\bar{u}c)$	$D^0 \rightarrow KX$
$D_S^\pm(D_S^\mp)$	$0(0^-)$	1968	$4.45 \cdot 10^{-13}$	$c\bar{s}(\bar{c}s)$	$D \rightarrow KX, \phi X$
$\eta_c$	$0(0^-)$	2979	$6.8 \cdot 10^{-23}$	$c\bar{c}(1S)$	$\eta_c \rightarrow \text{адроны}$
$J/\psi$	$0(1^-)$	3096	$1.0 \cdot 10^{-20}$	$c\bar{c}(1S)$	$J/\psi \rightarrow \text{адроны}$
$B^+(B^-)$	$\frac{1}{2}(0^-)$	5277	$1.18 \cdot 10^{-12}$	$u\bar{b}(\bar{b}u)$	$B \rightarrow DX$
$B^0(\bar{B}^0)$	$\frac{1}{2}(0^-)$	5279	$5.1 \cdot 10^{-13}$	$d\bar{b}(\bar{b}d)$	$B^0 \rightarrow DX$
$\Upsilon$	$?(1^-)$	9460	$1.3 \cdot 10^{-20}$	$b\bar{b}(1S)$	$\Upsilon \rightarrow \text{адроны}$

## БАРИОНЫ

Частица	$I(J^P)$	М, МэВ	$\tau$ , сек	Состав	Основной распад
$p$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	938.3	$> 1.6 \cdot 10^{25}$	$uud$	?
$n$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	939.6	889.1	$udd$	$n \rightarrow p e \bar{\nu}_e$
$\Lambda^0$	$0(\frac{1}{2}^+)$	1115.6	$2.6 \cdot 10^{-10}$	$uds$	$\Lambda \rightarrow p \pi^-, n \pi^0$
$\Sigma^+$	$1(\frac{1}{2}^+)$	1189.6	$7.99 \cdot 10^{-11}$	$uus$	$\Sigma^+ \rightarrow p \pi^0, n \pi^+$
$\Sigma^0$	$1(\frac{1}{2}^+)$	1192.5	$7.4 \cdot 10^{-20}$	$uds$	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda \gamma$
$\Sigma^-$	$1(\frac{1}{2}^+)$	1197.4	$1.48 \cdot 10^{-10}$	$dus$	$\Sigma^- \rightarrow n \pi^-$
$\Xi^0$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	1314.9	$2.9 \cdot 10^{-10}$	$uss$	$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 \pi^0$
$\Xi^-$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	1321.3	$1.6 \cdot 10^{-10}$	$dss$	$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 \pi^-$
$\Omega^-$	$0(\frac{3}{2}^+)$	1672.4	$8.2 \cdot 10^{-11}$	$sss$	$\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 K^-$
$\Lambda_c^+$	$0(\frac{1}{2}^+)$	2285.2	$1.9 \cdot 10^{-13}$	$udc$	$\Lambda_c^+ \rightarrow \Sigma^+ \pi^+ \pi^-$
$\Sigma_c^0$	$1(\frac{1}{2}^+)$	2453.0	$3.0 \cdot 10^{-13}$	$ddc$	$\Sigma_c^0 \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^-$
$\Sigma_c^+$	$1(\frac{1}{2}^+)$	2453.2	$8.2 \cdot 10^{-14}$	$udc$	$\Sigma_c^+ \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^0$
$\Sigma_c^{++}$	$1(\frac{1}{2}^+)$	2452.7	$8.0 \cdot 10^{-14}$	$uuc$	$\Sigma_c^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^+$